

Е.И. Филатов

Курс лекций по газовой динамике

Учебное пособие



Казань – 2022

**Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского
Кафедра аэрогидромеханики**

Е.И.Филатов

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Учебное пособие



Казань – 2022

УДК 533(076.1)

Публикуется по решению Учебно-методического совета
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол №7 от 2 июня 2022 года
кафедры аэрогидромеханики – протокол № 8 от «3» июня 2022 года

Рецензент

доктор физико-математических наук профессор Зарипов Ш.Х.

Филатов Е.И. **Курс лекций по газовой динамике.** Учебное пособие./
Е.И.Филатов - Казань: Казанский университет, 2022. - 138 с.

Учебное пособие основано на курсе лекций и лабораторных занятий для студентов старших курсов Института математики и механики КФУ. На основе простейших моделей одно и двумерного адиабатического течения идеального газа изучаются наиболее существенные проявления и физические эффекты свойства сжимаемости среды с переходом кинетической энергии в тепловую, представлены базовые подходы и основные этапы решения ряда наиболее важных задач газовой динамики.

Пособие может быть полезно также аспирантам, научным работникам и инженерам соответствующих специальностей.

© Филатов Е.И., 2022

© Казанский федеральный университет, 2022

Оглавление

ЛЕКЦИЯ 1	5
Модель среды	5
Основные уравнения в интегральной форме	5
Основные уравнения в дифференциальной форме	7
«Нормальный газ»	9
Изоэнтропические течения газа	10
Интеграл Бернулли	11
Завихренность. Формула Крокко	12
ЛЕКЦИЯ 2	13
Одномерные изоэнтропические движения газа.....	13
ЛЕКЦИЯ 3	19
Условия на поверхности разрыва.....	21
Условия на поверхности разрыва в произвольной системе координат	24
Тангенциальный (касательный) разрыв	25
ЛЕКЦИЯ 4	27
Распространение разрыва по частицам среды.....	27
Ударная адиабата Гюгонио.....	28
Теорема Цемплена	34
ЛЕКЦИЯ 5	36
Косой скачок уплотнения	36
Связь между углом поворота потока и наклоном косога скачка	44
Ударная поляра	47
Одномерные течения газа с ударными волнами	51
ЛЕКЦИЯ 6	53
Установившиеся двумерные движения газа	53
ЛЕКЦИЯ 7	61
Метод характеристик.....	61
ЛЕКЦИЯ 8	67

Плоские безвихревые течения газа со сверхзвуковой скоростью	67
ЛЕКЦИЯ 9	73
Методика решения задач плоского потенциального течения газа с помощью характеристик	73
Осесимметричные течения	84
ЛЕКЦИЯ 10	87
Обтекание кругового конуса	87
ЛЕКЦИЯ 11	94
Плоские дозвуковые течения газа	94
ЛЕКЦИЯ 12	101
Нестационарные одномерные течения газа	101
Метод характеристик.....	103
Простые волны	106
ЛЕКЦИЯ 13	109
Решение нестационарных задач в переменных Лагранжа	109
Закон изменения объёма	112
ЛЕКЦИЯ 14	113
Теория малых возмущений	113
Линеаризация основных уравнений	118
Связь с акустикой	120
Обтекание тонкого профиля.....	122
Крыло в сверхзвуковом потоке	125
ЛЕКЦИЯ 15	128
Расчет аэродинамических характеристик аэрокосмических аппаратов	128
Элементы летательных аппаратов	133
Диаграмма действующих аэродинамических сил.....	135
ЛИТЕРАТУРА	138

ЛЕКЦИЯ 1

Модель среды

В качестве модели, описывающей газ, будем использовать классическую модель идеальной сжимаемой жидкости (идеального газа). Ограничимся адиабатическими движениями, то есть будем считать газ нетеплопроводным.

Будем также считать, что внешние силовые поля, а также внешние и внутренние источники энергии отсутствуют.

Основные уравнения в интегральной форме

Запишем законы сохранения массы, импульса и энергии в переменных Лагранжа:

- 1) $\frac{d}{dt} \int_{\tau^*} \rho d\tau = 0$ – закон сохранения массы;
- 2) $\frac{d}{dt} \int_{\tau^*} \rho \bar{v} d\tau = \int_{\sigma} P_n d\sigma = - \int_{\sigma} p \bar{n} d\sigma$ – закон сохранения импульса;
- 3) $\frac{d}{dt} \int_{\tau^*} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \rho d\tau = - \int_{\sigma} p(\bar{v}, \bar{n}) d\sigma$ – закон сохранения энергии.

Здесь τ^* – индивидуальный объем, σ – ограничивающая его поверхность, \bar{n} – внешняя нормаль к элементу поверхности $d\sigma$, ρ – плотность, \bar{v} – скорость, p – давление, e – удельная внутренняя энергия газа.

Можно записать эти соотношения и в переменных Эйлера. Тогда это – уравнения баланса массы, импульса и энергии в фиксированном объеме τ :

1) Скорость изменения массы в объеме τ равна скорости притока массы через его границу σ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho d\tau = - \int_{\sigma} \rho(\bar{v}, \bar{n}) d\sigma \Rightarrow \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\tau} \operatorname{div}(\rho \bar{v}) d\tau. \quad (1.1)$$

2) Скорость изменения импульса в объеме τ равна сумме действующей силы и скорости притока импульса через границу σ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \bar{v} d\tau = - \int_{\sigma} \left(p \bar{n} + \rho \bar{v} (\bar{v}, \bar{n}) \right) d\sigma. \quad (1.2)$$

Проектируя это равенство на оси координат, имеем

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho v^i}{\partial t} d\tau = - \int_{\tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x^i} + \operatorname{div}(\rho v^i \bar{v}) \right) d\tau. \quad (1.3)$$

3) Скорость изменения энергии в объеме τ равна сумме мощностей действующих сил и скорости потока энергии через границу σ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) d\tau = - \int_{\sigma} \left(p + \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right) (\bar{v}, \bar{n}) d\sigma. \quad (1.4)$$

Оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ можно везде внести под знак интеграла, так как объем τ от времени не зависит.

Переход от первой группы уравнений ко второй можно осуществить по общей формуле:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau^*} A d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} A d\tau + \int_{\sigma} A (\bar{v}, \bar{n}) d\sigma. \quad (1.5)$$

Окончательно законы сохранения в переменных Эйлера запишем в виде:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_{\tau} \operatorname{div}(\rho \bar{v}) d\tau; \quad (1.6)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} d\tau = - \int_{\sigma} \left(p n_i + \rho v_i (\bar{v}, \bar{n}) \right) d\sigma = - \int_{\tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \operatorname{div}(\rho v_i \bar{v}) \right) d\tau; \quad (1.7)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} d\tau = - \int_{\tau} \operatorname{div}((p + \rho E) \bar{v}) d\tau, \quad (1.8)$$

где $E = \left(\frac{v^2}{2} + e \right)$.

Основные уравнения в дифференциальной форме

Из предыдущего легко получить дифференциальную форму законов сохранения в дивергентном виде:

- 1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0$ – уравнение неразрывности;
- 2) $\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \bar{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$ – уравнение движения;
- 3) $\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}(\rho E + p)) = 0$ – уравнение энергии.

Будем также использовать эти уравнения и в других формах. Уравнение неразрывности (выражающее закон сохранения массы) в форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{v}) = 0, \quad (1.9)$$

уравнение движения (выражающее закон сохранения импульса) в форме Эйлера

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (1.10)$$

или в форме Громеки-Ламба

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{rot}(\bar{v}, \bar{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение, выражающее адиабатический характер движения газа, можно получить из уравнения сохранения энергии для двухпараметрической термодинамической системы $dq^{(e)} = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right)$ и $Tds = dq^{(e)}$, с учетом того, что в этом случае $dq^{(e)} = 0$. Здесь $dq^{(e)}$ – внешний приток тепла к частице газа, s – энтропия этой частицы, T – температура. Таким образом, уравнение адиабаты можно записать ли-

бо в виде $ds/dt = 0$, либо, принимая во внимание, что для идеального и совершенного газа $s = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\kappa}\right) + const.$, в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\kappa}\right) = 0. \quad (1.12)$$

Система пяти уравнений (1.9 – 1.12) является замкнутой для пяти искомым функций: $\rho, p, v_i, i = 1, 2, 3$.

При получении последнего уравнения были использованы уравнения состояния идеального совершенного газа:

1) Термическое уравнение состояния:

$$p = R\rho T, \quad (1.13)$$

где R – удельная газовая постоянная, $R = \frac{R_0}{\mu}$, $R_0 = 8,31$ Дж/моль·К,

μ – коэффициент динамической вязкости несущего газа

2) Калорическое уравнение состояния:

$$e = c_v T + const., \quad (1.14)$$

где c_v – коэффициент теплоемкости при постоянном объеме.

Для воздуха: $R = 287$ Дж/кг·К, $\mu = 29$, $c_v = 716$ Дж/кг·К.

Уравнение (1.13) выражает тот факт, что размеры молекул рассматриваемого газа значительно меньше средней длины их свободного пробега. Это второй смысл термина «идеальный» газ. Первый смысл этого термина был – газ без трения.

Уравнение (1.14) выражает тот факт, что внутренняя энергия газа состоит из суммы кинетических энергий теплового движения молекул этого газа (без учета вращения и колебаний).

Зачастую бывает удобнее пользоваться системой основных уравнений, явно содержащей энтропию. Тогда уравнение адиабаты можно взять в виде

$$ds/dt = 0 \quad (1.15)$$

и уравнение состояния в виде $p = f(\rho, s)$.

Нетрудно получить такое уравнение для идеального и совершенного газа. В этом случае:

$$Tds = c_v dT + R\rho T d\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow s = c_v \ln\left(\frac{T}{\rho^{\kappa-1}}\right) + s_0,$$

откуда

$$s = c_v \ln\left(\frac{p}{R\rho^\kappa}\right) + s_0, \quad (1.16)$$

и получаем

$$p = R\rho^\kappa \exp\left(\frac{s - s_0}{c_v}\right), \quad (1.17)$$

при этом внутренняя энергия $e = \frac{1}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho}$.

Можно использовать уравнение адиабаты и в других формах. Например, если представить уравнение энергии в виде $dq^{(e)} = di - \frac{dp}{\rho}$, то из $dq^{(e)} = 0$ для любых уравнений состояния $i = i(p, \rho)$ следует уравнение адиабаты в виде:

$$di = \frac{dp}{\rho}, \quad (1.18)$$

где $i = e + \frac{p}{\rho}$.

Для совершенного газа $i = c_p T = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho}$, и из $di = \frac{dp}{\rho}$ получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\kappa}\right) = 0. \quad (1.19)$$

«Нормальный газ»

Л.В. Овсянников в книге [8] определяет класс «нормальных газов», основываясь на свойствах термических ($p = f(\rho, s)$) и калорических ($e = e(V, p)$, $V = 1/\rho$) уравнений состояния этих газов.

Газ называется нормальным, если функции f и e обладают следующими свойствами:

1) Функция f определена, трижды непрерывно дифференцируема в области $\{0 < \rho < \infty, s_* < s < s^*\}$ (может быть: $s_* = -\infty$ и $s^* = \infty$) и всюду в этой области удовлетворяет неравенствам:

$$\text{a) } f > 0; \text{ b) } f_\rho > 0; \text{ c) } f_{\rho\rho} > 0; \text{ d) } f_s > 0$$

и предельным соотношениям:

$$\text{a) } \lim_{s \rightarrow s_*} f(\rho, s) = 0; \text{ b) } \lim_{s \rightarrow s^*} f(\rho, s) = \infty; \text{ c) } \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho, s) = 0.$$

2) Функция e определена, трижды непрерывно дифференцируема в области $Q = \left\{ 0 < \frac{1}{\rho} < \infty, 0 < p < \infty \right\}$ и всюду в этой области удовлетворяет неравенствам:

$$\text{a) } 2e_v + p \geq 0; \text{ b) } e_{pp} \geq 0$$

и предельному соотношению:

$$\lim_{V \rightarrow 0} e(V, p) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что идеальный газ – нормальный. Действительно, в этом случае:

$$f(\rho, s) = R\rho^\kappa \exp\left(\frac{s - s_0}{c_v}\right) \text{ и } e = c_v \rho^{\chi-1} \exp\left(\frac{s - s_0}{c_v}\right).$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют всем поставленным выше условиям.

Изоэнтропические течения газа

Изоэнтропическими называются течения газа, для которых $s = s_0 = const.$, то есть энтропия постоянна и одинакова для всех частиц газа и уравнение (1.15) удовлетворяется тождественно. В этом случае замкнутую систему уравнений можно взять в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{v}) = 0; \quad (1.20)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0; \quad (1.21)$$

$$p = f(\rho, s_0) \quad (1.22)$$

или в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{v}) = 0; \quad (1.23)$$

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + a^2 \nabla \rho = 0, \quad (1.24)$$

где $a^2 = f(\rho)$ – заданная функция.

Интеграл Бернулли

Если движение газа стационарное, то линии тока совпадают с траекториями. Пусть $d\bar{r} = \bar{v} dt$ – элемент касательной к линии тока. Умножим скалярно обе части уравнения движения (1.21) на $d\bar{r}$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \Big| \cdot (d\bar{r}),$$

получим

$$\bar{v} d\bar{v} + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \text{или} \quad d \frac{v^2}{2} + \frac{dp}{\rho} = 0,$$

но так как $\frac{dp}{\rho} = di$, то это можно записать в виде:

$$\frac{v^2}{2} + i = i_0, \quad (1.25)$$

где i_0 – постоянная вдоль линии тока энтальпия адиабатически заторможенного газа (энтальпия торможения).

Завихренность. Формула Крокко

Как известно (теорема Гельмгольца – Коши), движение частицы газа можно представить в виде суммы трех элементарных движений: поступательного, вращательного и деформационного. Для стационарного адиабатического движения идеального газа можно получить выражение, связывающее вектор угловой скорости вращательного движения частицы $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\bar{v})$ с термодинамическими параметрами газа.

Для этого уравнение энергии

$$Tds = de + \rho d\left(\frac{1}{\rho}\right) = di - \frac{dp}{\rho}$$

представим в виде:

$$T\nabla s = \nabla i - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Выразим в нем последнее слагаемое через вектор вихря с помощью уравнения движения в форме Громеки-Ламба

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + \text{rot}(\bar{v}, \bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

что дает

$$T\nabla s = \nabla i + \nabla\frac{v^2}{2} + \text{rot}(\bar{v}, \bar{v}).$$

Наконец, используя уравнение Бернулли (1.25), получим:

$$T\nabla s = \nabla i_0 + \text{rot}(\bar{v}, \bar{v}). \quad (1.26)$$

Это выражение показывает, что завихренность потока определяется градиентами энтропии и энтальпии торможения в потоке и, если они отсутствуют, то течение – безвихревое.

ЛЕКЦИЯ 2

Одномерные изоэнтропические движения газа

В технике часто встречаются течения газа, которые в определенной системе координат можно считать не зависящими от времени – стационарными. В таком случае существуют постоянные линии и поверхности тока, и можно выделить «струйку тока» настолько малого поперечного сечения, чтобы можно было считать параметры газа в струйке постоянными в каждом поперечном сечении и зависящими только от расстояния x вдоль струйки. Такие течения газа называются одномерными стационарными.

Газовая динамика по преимуществу рассматривает процессы, происходящие при движении газа с большими скоростями, такие как течение продуктов сгорания по соплу ракетного двигателя или обтекание крыла самолета. Каждая частица газа участвует в этом процессе очень короткое время, поэтому предполагается, что процесс является адиабатическим, то есть частица не обменивается теплом с окружающей средой (так как для теплообмена требуется значительное время). В этом случае энтропия частиц остаётся постоянной в промежутках между ударными волнами, и такое течение называется изоэнтропическим.

Практически важным примером течения газа, которое с хорошим приближением может считаться одномерным и изоэнтропическим, является расчетное истечение из резервуара через сопло, когда давление на срезе сопла равно давлению во внешней среде, внутри сопла нет скачков уплотнения и в минимальном сечении сопла скорость газа равна скорости звука.

Система основных уравнений движения газа в этом приближении значительно упрощается. Вместо уравнения неразрывности записывается уравнение сохранения расхода в струйке тока:

$$\rho v F = G = const. \quad (2.1)$$

Здесь ρ – плотность газа, v – скорость, F – площадь поперечного сечения трубки тока, G – массовый расход. ρ , v и F – функции одной переменной, координаты x .

Вместо уравнения движения идеальной жидкости используется его первый интеграл – уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + i = i_0, \quad (2.2)$$

где i – энтальпия, Дж/кг; i_0 – энтальпия газа в заторможенном состоянии (там, где $v = 0$); соответственно T_0, p_0, ρ_0 – «параметры торможения» потока.

Уравнение притока тепла превращается в уравнение (изоэнтروпической) адиабаты:

$$p = C \rho^k, \quad (2.3)$$

где C – постоянная, выражающаяся через параметры начального состояния газа ($C = p_0 / \rho_0^k$); $k = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты; c_p – теплоемкость при постоянном давлении; c_v – теплоемкость при постоянном объеме. Для одноатомных газов $k = 1,66$, для двухатомных (воздух) $k = 1,40$, для многоатомных $k = 1,33$.

В дальнейшем везде используется международная система единиц SI (System International). В этой системе размерность давления – $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$, плотности – $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$, температуры – [К]. Однако давление часто удобнее выражать в технических и физических атмосферах, или в миллиметрах ртутного или водяного столба:

$$1 \text{ ат (техническая атмосфера)} = 0,980665 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 735,6 \text{ мм рт.ст.};$$

$$1 \text{ атм (физическая атмосфера)} = 1,01325 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 760 \text{ мм рт.ст.}$$

При нормальном атмосферном давлении на уровне моря $1,01325 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ и температуре 288 К плотность воздуха $\rho = 1,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, а его удельный вес $\gamma = 12,07 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$.

Давление, плотность и температура идеального газа связаны между собой уравнением состояния (Клапейрона):

$$p = R \rho T, \quad (2.4)$$

где R – удельная газовая постоянная $\left(\text{для воздуха } R = 287,1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right)$.

Теплоемкости воздуха при умеренных температурах (меньше тысячи градусов Цельсия):

$$c_p = 1003,2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} = 0,24 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}};$$

$$c_v = 716 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} = 0,173 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

Скорость звука выражается в виде:

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (2.5)$$

Для воздуха, при $k = 1,4$ и $R = 287,1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$, $a \cong 20,1\sqrt{T}$.

Энтальпия может быть выражена в различных эквивалентных видах:

$$i = c_p T = \frac{a^2}{k-1} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{kRT}{k-1}. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.2), в частности, следует, что газ с энтальпией торможения i_0 теоретически может разогнаться за счет своих внутренних ресурсов до максимальной скорости v_{\max} :

$$v_{\max} = \sqrt{2i_0} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k-1}}. \quad (2.7)$$

При этом будет $T = p = \rho = 0$.

Если в каком-то месте скорость движения газа и местная скорость звука в газе совпадают по величине, то обе скорости называются *критическими*:

$$v_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}.$$

Критическими называются и другие параметры газа в этом месте ($\rho_{\text{кр}}$, $p_{\text{кр}}$, $T_{\text{кр}}$ и т.д.). Критическая скорость звука может быть выражена через параметры торможения газа:

$$a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}} \quad (2.8)$$

Скорость газа обычно характеризуется либо числом Маха M , либо коэффициентом скорости λ . Число Маха – это отношение местной скорости газа к местной скорости звука в нем:

$$M = \frac{v}{a}.$$

При изменении скорости от нуля до v_{max} число Маха изменяется от нуля до бесконечности, что не всегда удобно. Коэффициент скорости – это отношение местной скорости газа к критической скорости:

$$\lambda = \frac{v}{a_{\text{кр}}}.$$

При изменении скорости от нуля до v_{max} коэффициент скорости изменяется от нуля до максимального значения:

$$\lambda_{\text{max}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Для изоэнтропических процессов уравнение Бернулли (2.2) может быть также записано в следующих эквивалентных формах:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = 1 - \left(\frac{k-1}{k+1} \right) \cdot \lambda^2; \quad (2.9)$$

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \left(\frac{k-1}{k+1} \right) \cdot \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (2.10)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \left(\frac{k-1}{k+1} \right) \cdot \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.11)$$

или

$$\tau(M) = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot M^2 \right)^{-1}; \quad (2.12)$$

$$\pi(M) = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot M^2 \right)^{\frac{-k}{k-1}}; \quad (2.13)$$

$$\varepsilon(M) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot M^2 \right)^{\frac{-1}{k-1}}, \quad (2.14)$$

где τ , π и ε – газодинамические функции соответственно от λ или от M (см. таблицу 4 в [3]). Числа λ и M связаны однозначной зависимостью (таблица 4 в [3]):

$$\lambda^2 = \frac{\left(\frac{k+1}{2} \cdot M^2 \right)}{\left(1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot M^2 \right)}. \quad (2.15)$$

Критическим значениям параметров соответствует $\lambda = M = 1$. Из формул (2.12 – 2.14) вытекает, что:

$$T_{\text{кр}} = \frac{2}{k+1} \cdot T_0; \quad (2.16)$$

$$p_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot p_0; \quad (2.17)$$

$$\rho_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \rho_0. \quad (2.18)$$

При $k = 1,4$ имеем:

$$T_{\text{кр}} = 0,831 \cdot T_0; \quad p_{\text{кр}} = 0,528 \cdot p_0; \quad \rho_{\text{кр}} = 0,636 \cdot \rho_0; \quad a_{\text{кр}} = 18,3 \sqrt{T_0}.$$

При подсчете секундного расхода газа через сопло удобно пользоваться функцией q – *приведенным секундным расходом*:

$$q = \frac{\rho v}{\rho_{\text{кр}} a_{\text{кр}}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F}, \quad (2.19)$$

где $F_{\text{кр}}$ – площадь критического сечения сопла; F – площадь сечения, в котором достигается скорость v ;

$$q(M) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot M \cdot \left(1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) \cdot M^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}; \quad (2.20)$$

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda \cdot \left(1 - \left(\frac{k-1}{k+1}\right) \cdot \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.21)$$

Значения $q(M)$ и $q(\lambda)$ также даются в таблице 4 в [3].

Приведенный секундный расход можно выразить также через отношение давлений $\pi(\lambda)$:

$$q = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \sqrt{\pi^{\frac{2}{k}} - \pi^{\frac{k+1}{k}}}. \quad (2.22)$$

Тяга ракетного двигателя определяется импульсом истекающего из сопла газа и разностью давлений на срезе сопла:

$$R = [\rho v^2 + (p - p_a)] F. \quad (2.23)$$

Здесь v и p – скорость и давление газа на срезе сопла, p_a – давление в окружающей среде. Если $p = p_a$, истечение газа называется расчетным. В этом случае:

$$R = Gv, \quad (2.24)$$

где G – секундный массовый расход газа, $\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right]$.

При расчете тяги воздушно-реактивного двигателя надо из (2.23) вычесть импульс, приносимый воздухом, который используется для горения топлива.

ЛЕКЦИЯ 3

Поверхности разрыва

Для описания течений газа мы пользуемся моделью сплошной среды. Сплошность подразумевает непрерывность характеристик среды. Однако в некоторых случаях, особенно при сверхзвуковых течениях газа в поле течения возникают области с очень большими градиентами параметров (давления, температуры и т. д.). Это ударные волны, фронты горения, сублимации и др. Ширина таких зон очень мала. Например, ширина ударной волны в воздухе имеет порядок нескольких длин свободного пробега молекул и на уровне моря составляет примерно 0,025 микрона (тогда как длина волны света в инфракрасной области около 1 микрона). В газовой динамике принято заменять такие области поверхностями. Быстрое изменение функции на малой ширине области приближенно заменяется скачком этой функции при пересечении такой поверхности.

Поверхности, на которых терпят разрыв искомые функции, называются поверхностями сильного разрыва.

Поверхности, на которых искомые функции непрерывны, но терпят скачок производные от них по координатам, называются поверхностями слабого разрыва.

Скорость распространения поверхности разрыва

Введем неподвижную систему координат x_i , $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим подвижную гладкую поверхность Σ с уравнением $f(x_i, t) = 0$ (рис. 1). Рассмотрим произвольную точку M на поверхности Σ ($f(M, t) = 0$) и точку N пересечения нормали \bar{n} ($|\bar{n}| = 1$) в точке M с той же поверхностью в момент времени $t + \Delta t$: $f(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) = 0$.

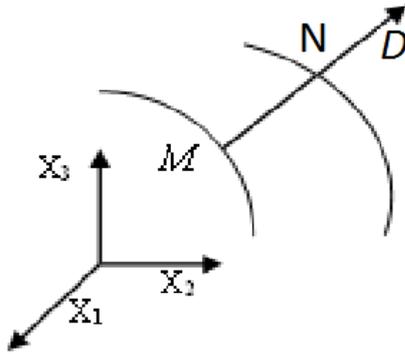


Рис. 1.

Скорость распространения поверхности разрыва

В этом случае: $f(N, t) > 0$ и $\bar{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Определим скорость \bar{D} поверхности Σ в точке M следующим образом:

$$\bar{D} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\bar{n} \frac{MN}{\Delta t} \right). \quad (3.1)$$

Разложим выражение $f(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) = 0$ в ряд Тейлора по малым приращениям координат и времени:

$$f(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) = f(x_i, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \dots = 0.$$

Но $f(x_i, t) = 0$, поэтому получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Приращения координат Δx_i можно выразить через расстояние MN и координаты нормали в виде:

$$\Delta x_i = \frac{\left(MN \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{|\nabla f|}.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{MN}{|\nabla f|} + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Деля обе части на Δt и принимая во внимание, что $\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \nabla f^2$, получим:

$$|\nabla f| \cdot \frac{MN}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Отсюда видно, что (имея уравнение поверхности разрыва) мы можем найти скорость любой точки поверхности разрыва из выражения:

$$\bar{D} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-n \frac{MN}{\Delta t} \right) = -\frac{\partial f / \partial t}{|\nabla f|} n. \quad (3.2)$$

Условия на поверхности разрыва

Рассмотрим на поверхности разрыва Σ малую площадку $d\Sigma$ с нормалью \bar{n} (рис. 2). Систему отсчета свяжем с $d\Sigma$, тогда $\bar{D} = 0$.

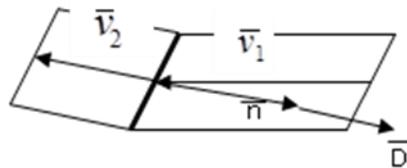


Рис. 2.

С точки зрения наблюдателя, находящегося в этой системе (например, летчика в кабине сверхзвукового самолета) поток газа набегаёт на площадку $d\Sigma$ со скоростью \bar{v}_1 и, пройдя через нее (через ударную волну перед носом самолета), удаляется со скоростью \bar{v}_2 . В единицу времени через площадку $d\Sigma$ проходит объем газа $(\bar{v}_1, \bar{n})d\Sigma$ с массой $(\bar{v}_1, \bar{n})\rho_1 d\Sigma$. Закон сохранения массы при прохождении газа сквозь поверхность разрыва можно записать в виде (сколько вошло – столько вышло):

$$(\bar{v}_1, \bar{n})\rho_1 d\Sigma = (\bar{v}_2, \bar{n})\rho_2 d\Sigma$$

или

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}. \quad (3.3)$$

Закон сохранения импульса можно записать в виде теоремы об изменении количества движения (импульса) индивидуального объема τ^* , проходящего через площадку $d\Sigma$ в единицу времени: изменение количества движения индивидуального объёма τ^* в единицу времени равно импульсу приложенных к этому объёму сил

$$\bar{v}_2 |v_{2n}| \rho_2 d\Sigma - \bar{v}_1 |v_{1n}| \rho_1 d\Sigma = \bar{p}_1 d\Sigma + \bar{p}_2 d\Sigma.$$

Поскольку рассматривается единичный промежуток времени, то вместо импульсов фигурируют сами силы. Считается, что давления на боковых сторонах столбика газа с основанием $d\Sigma$ взаимно уравновешиваются. Если нормаль \bar{n} направим навстречу набегающему потоку, то

$$|\bar{v}_{in}| = -v_{in}; \quad i = 1, 2; \quad \bar{p}_1 = -p_1 \bar{n}; \quad \bar{p}_2 = p_2 \bar{n}$$

и, деля обе части равенства на $d\Sigma$, получим закон сохранения импульса при переходе газа через поверхность разрыва в виде:

$$\rho_1 v_{1n} \bar{v}_1 + p_1 \bar{n} = \rho_2 v_{2n} \bar{v}_2 + p_2 \bar{n}. \quad (3.4)$$

Проектируя это векторное равенство на направление нормали \bar{n} , получим:

$$\rho_1 v_{1n}^2 + p_1 = \rho_2 v_{2n}^2 + p_2. \quad (27)$$

Проектируя (3.4) на направление касательной к $d\Sigma$ получаем замечательный результат:

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}. \quad (3.6)$$

То есть касательная компонента скорости газа при переходе его через поверхность разрыва остается неизменной!

Запишем закон сохранения энергии. Если \bar{n} направлен навстречу скорости набегающего потока, то полная энергия объема газа τ^* , пересекающего площадку $d\Sigma$ в единицу времени, есть:

$$|\rho_2 v_{2n}| \cdot \left(\frac{\bar{v}_2^2}{2} + e_2 \right) = -\rho_2 v_{2n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_2^2}{2} + e_2 \right),$$

а его энергия до пересечения:

$$|\rho_1 v_{1n}| \cdot \left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} + e_1 \right) = -\rho_1 v_{1n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} + e_1 \right).$$

Изменение этой энергии происходит только за счет работы сил давления:

$$-\rho_2 v_{2n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_2^2}{2} + e_2 \right) + \rho_1 v_{1n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} + e_1 \right) = (\bar{p}_1, \bar{v}_1) + (\bar{p}_2, \bar{v}_2).$$

Но в этом случае

$$\bar{p}_1 = -p_1 \bar{n}; \quad (\bar{p}_1, \bar{v}_1) = -p_1 (\bar{n}, \bar{v}_1) = -p_1 v_{1n};$$

$$\bar{p}_2 = p_2 \bar{n}; \quad (\bar{p}_2, \bar{v}_2) = p_2 (\bar{n}, \bar{v}_2) = p_2 v_{2n}.$$

Таким образом, закон сохранения энергии газа при переходе через поверхность разрыва принимает вид:

$$\rho_1 v_{1n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} + e_1 \right) + p_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_2^2}{2} + e_2 \right) + p_2 v_{2n}. \quad (3.7)$$

Раскрывая скобки, деля обе части равенства на $\rho_1 v_{1n}$ и принимая во внимание, что

$$e + \frac{p}{\rho} = i,$$

получим важное следствие:

$$\frac{\bar{v}_1^2}{2} + i_1 = \frac{\bar{v}_2^2}{2} + i_2 = i_0.$$

То есть константа Бернулли, представляющая собой энтальпию адиабатически заторможенного газа, при переходе газа через поверхность разрыва скачка не терпит. А значит, не терпит скачка и температура торможения и все через неё выражаемые величины, например, критическая скорость звука.

Изменение энтропии индивидуального объема τ^* при переходе газа через поверхность разрыва можно записать в виде

$$|\rho_2 v_{2n}| \cdot s_2 - |\rho_1 v_{1n}| \cdot s_1 = (\bar{\Omega}, \bar{n}) > 0$$

или с учетом того, что

$$|\rho_1 v_{1n}| = -\rho_1 v_{1n}; \quad |\rho_2 v_{2n}| = -\rho_2 v_{2n},$$

и в силу закона сохранения массы (3.3) имеем:

$$\rho_1 v_{1n} (s_1 - s_2) = \Omega_n > 0, \quad (3.8)$$

где Ω_n – поток энтропии, направленный по вектору скорости набегающего потока.

Таким образом, параметры газа перед и после поверхности сильного разрыва связаны следующими условиями, которые называются условиями **Гюгонио-Ренкена**:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n};$$

$$\rho_1 v_{1n} \bar{v}_1 + p_1 \bar{n} = \rho_2 v_{2n} \bar{v}_2 + p_2 \bar{n};$$

$$\rho_1 v_{1n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} + e_1 \right) + p_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} \cdot \left(\frac{\bar{v}_2^2}{2} + e_2 \right) + p_2 v_{2n}; \quad (28)$$

$$\rho_1 v_{1n} (s_1 - s_2) = \Omega_n > 0.$$

Условия на поверхности разрыва в произвольной системе координат

Мы записали условия (3.9) на поверхности разрыва в системе координат, связанной с этой поверхностью и, следовательно, движущейся относительно некой «неподвижной» системы координат со скоростью \bar{D} . Запишем теперь эти условия в «неподвижной» системе координат. Для этого обозначим скорость газа в старой («подвижной») системе звездочкой – \bar{v}^* , и с помощью теоремы о сложении скоростей

$$\bar{v} = \bar{v}^* + \bar{D},$$

где \bar{v} – скорость газа относительно «неподвижной» системы, получим:

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \bar{D}.$$

Подставляя \bar{v}^* вместо \bar{v} в (3.9), получим условия Гюгонио-Ренкена в произвольной «неподвижной» системе координат (помним, что \bar{D}

направлена по нормали к поверхности разрыва и члены вида $\rho_i (v_{in} - D) \bar{D}$ сокращаются):

$$\rho_1 (v_{1n} - D) = \rho_2 (v_{2n} - D); \quad (3.10)$$

$$\rho_1 (v_{1n} - D) \vec{v}_1 + p_1 \vec{n} = \rho_2 (v_{2n} - D) \vec{v}_2 + p_2 \vec{n}; \quad (3.11)$$

$$\rho_1 (v_{1n} - D) \cdot \left(\frac{v_1^2}{2} + e_1 \right) + p_1 v_{1n} = \rho_2 (v_{2n} - D) \cdot \left(\frac{v_2^2}{2} + e_2 \right) + p_2 v_{2n}. \quad (3.12)$$

Действительно, подставляя новое выражение для скорости в (3.7) и раскрывая скобки, в левой части получаем:

$$\rho_1 (v_{1n} - D) \left(\frac{v_1^2}{2} + e_1 \right) + p_1 v_{1n} - (\vec{v}_1, \bar{D}) \rho_1 (v_{1n} - D) + \frac{D^2}{2} \cdot \rho_1 (v_{1n} - D) - p_1 D.$$

Последние три члена можно записать в виде:

$$-D \cdot \left[v_{1n} \rho_1 \cdot (v_{1n} - D) + p_1 - \frac{1}{2} D \rho_1 \cdot (v_{1n} - D) \right].$$

Первые два слагаемых в квадратной скобке представляют собой проекцию на \bar{n} уравнения импульсов (3.11), а последнее – умноженную на \bar{D} левую часть уравнения (3.10). Так как в правой части будем иметь аналогичные слагаемые, только с индексом 2, то эти равные выражения можно сократить и получить (3.12).

Аналогично получается уравнение для энтропии:

$$\rho_1 (v_{1n} - D) \cdot (s_1 - s_2) = \Omega. \quad (3.13)$$

Тангенциальный (касательный) разрыв

Поверхностью тангенциального разрыва называется такая поверхность, через которую частицы газа не переходят (рис. 3).

Это значит, что

$$(v_{1n} - D) = (v_{2n} - D) = 0,$$

а следовательно

$$v_{1n} = v_{2n}.$$

В этом случае возможно, что

$$v_{\tau_1} \neq v_{\tau_2}; \rho_1 \neq \rho_2,$$

но из (3.11) следует, что

$$p_1 = p_2,$$

а из (3.13):

$$\Omega = 0.$$

ЛЕКЦИЯ 4

Распространение разрыва по частицам среды

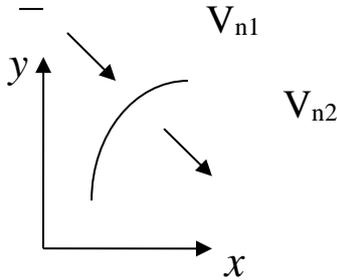


Рис. 1

Свяжем систему координат с частицами газа перед скачком, например, с атмосферным воздухом при пролете сквозь него самолета. В этой системе $v_{1n} = 0$ (и $\vec{v}_\tau = 0$).

Пусть $v_{2n} = v_n$. Уравнение сохранения массы в этом случае имеет вид:

$$\rho_1(-D) = \rho_2(v_n - D).$$

Уравнение сохранения импульса:

$$p_1 = \rho_2 v_n (v_n - D) + p_2,$$

т.е.

$$p_2 - p_1 = \rho_1 D v_n. \quad (4.1)$$

Используя ещё раз уравнение сохранения массы

$$-\rho_1 D = \rho_2 v_n - \rho_2 D,$$

имеем

$$\rho_2 v_n = \rho_2 D - \rho_1 D = D(\rho_2 - \rho_1)$$

и, следовательно

$$v_n = \frac{1}{\rho_2} D(\rho_2 - \rho_1). \quad (4.2)$$

Подставляя это в (4.1), можем получить выражение для скорости распространения поверхности разрыва в виде: $D^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$ или:

$$D = \pm \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}} \quad (4.3)$$

Для бесконечно слабого скачка $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ и $D = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a$.

Если $\rho_2 > \rho_1$, то из $p_2 - p_1 = \rho_1 D v_n$ следует, что $p_2 > p_1$, а из $v_n = \frac{1}{\rho_2} D(\rho_2 - \rho_1)$ следует, что $v_n > 0$ так как $D > 0$. Это - скачок

уплотнения. Он увлекает за собой исходно неподвижный газ.

Можно выразить скорость распространения скачка D через удельные объёмы:

$$D = V_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} \quad (4.3a)$$

Ударная адиабата Гюгонио

Уравнение энергии в выбранной системе координат:

$$\rho_1 (-D) e_1 = \rho_2 (V_1 - D) \left(e_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) + p_2 v_n \quad \text{или}$$

$$-\rho_1 D e_1 = \rho_2 (v_n - D) \left(e_2 + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} \right) + p_2 v_n,$$

но $V_{2\tau} = V_{1\tau} = 0$, а $\rho_2 (v_n - D) = -\rho_1 D$ и $v_n = \frac{1}{\rho_2} D(\rho_2 - \rho_1)$, то-

гда:

$$-\rho_1 e_1 = -\rho \left[e_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_2^2} D^2 (\rho_2 - \rho_1)^2 \right] + (\rho_2 - \rho_1) \frac{p_2}{\rho_2}, \text{ или:}$$

$$\rho_1 e_2 - \rho_1 e_1 = \frac{p_2}{\rho_2} (\rho_2 - \rho_1) - \frac{\rho_1}{2} \frac{D^2}{\rho_2^2} (\rho_2 - \rho_1)^2.$$

Умножая всё на $\frac{1}{\rho_1}$, имеем:

$$e_2 - e_1 = \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \frac{(\rho_2 - \rho_1)(p_2 - p_1)}{\rho_2 \rho_1}, \text{ то есть:}$$

$$e_2 - e_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{1}{2\rho_2} (p_2 - p_1) \right].$$

Окончательно получаем уравнение ударной адиабаты в виде:

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_2 - \rho_1)(p_2 - p_1) \quad \text{или: (4.4)}$$

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_1 - V_2). \quad (4.5)$$

Эти уравнения описывают процесс адиабатического перехода частицы газа через поверхность разрыва (без обмена энергией с окружающей средой).

Если изобразить эту зависимость $e_a = e_a(p, V)$ графически на фазовой плоскости pV (давление-удельный объем), то угол α - будет характеризовать скорость распространения скачка D .

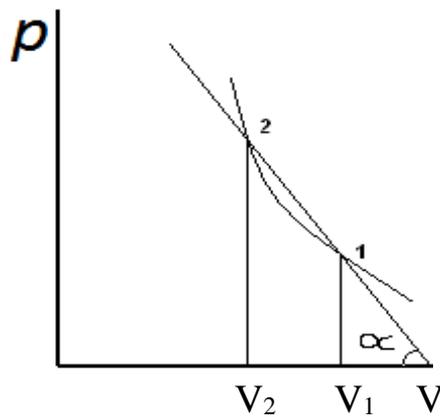


Рис. 2

Для совершенного газа : $e = C_v T = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{P}{\rho} = \frac{1}{\kappa - 1} PV$. Подставляя

это выражение в (3.5), получаем:

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 V_1 - p_1 V_1)$$

$$\frac{1}{\kappa - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_1 - V_2)$$

$$\frac{1}{\kappa-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} \rho_1 - \rho_2 = \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} + 1 \right) (p_2 - p_1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} \left[\rho_1 - \frac{\kappa-1}{2} (p_2 - p_1) \right] = \rho_2 + \frac{\kappa+1}{2} (p_2 - p_1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\rho_2 - (\kappa-1)\rho_2 + (\kappa-1)\rho_1}{2\rho_1 - (\kappa-1)\rho_2 + (\kappa-1)\rho_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa+1)\rho_2 - (\kappa-1)\rho_1}{(\kappa+1)\rho_1 - (\kappa-1)\rho_2}$$

Окончательно получаем уравнение ударной адиабаты (Гюгонио) для идеального совершенного газа в виде:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa+1)\rho_2 - (\kappa-1)\rho_1}{(\kappa+1)\rho_1 - (\kappa-1)\rho_2}. \quad (4.6)$$

Изменение энтропии вдоль адиабаты Гюгонио.

Чтобы определить изменения энтропии s в необратимом процессе ударного перехода частицы газа через поверхность разрыва, рассмотрим некоторый фиктивный обратимый процесс между этими двумя состояниями с притоком тепла. Для него:

$$Tds = de + pdV$$

Используя уравнение ударной адиабаты: $e - e = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V)$, найдём:

$$de = -\frac{1}{2}(p + p_1)dV + \frac{1}{2}(V_1 - V)dp.$$

Тогда: $Tds = -\frac{1}{2}(p + p_1)dV + \frac{1}{2}(V_1 - V)dp + pdV$, или:

$$Tds = -\frac{1}{2}(p + p_1)d(V_1 - V) + \frac{1}{2}(V_1 - V)d(p - p_1).$$

Нетрудно убедиться, что это выражение можно представить в виде:

$$Tds = \frac{1}{2}(p + p_1)^2 d \frac{p - p_1}{V_1 - V},$$

или же, если использовать введенный выше угол α , то:

$$Tds = \frac{1}{2}(p + p_1)^2 dtg\alpha \text{ или } Tds = -\frac{1}{2}(p + p_1)^2 d \frac{1}{tg\alpha} \quad (4.7)$$

$$tg\alpha = \frac{p - p_1}{V_1 - V} = \frac{D^2}{V_1^2}$$

При малом скачке давления.

Пусть изменение давления частицы при прохождении поверхности разрыва $p - p_1 = \varepsilon$ -малая величина. Тогда в выражении

$d \frac{1}{tg\alpha} = -d \left(\frac{V - V_1}{p - p_1} \right)$ скачок удельного объема $V - V_1$ можно разложить

в ряд Тейлора как функцию от давления p :

$$V - V_1 = (V - V_1)_{p_1} + \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p_1} (p - p_1) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{p_1} (p - p_1)^2 + \dots O(p - p_1)^3.$$

В этом случае:

$$d \frac{1}{tg\alpha} = - \left[\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p_1} (p - p_1) - \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{p_1} (p - p_1)^2 + O(p - p_1)^2 \right]$$

$$\text{То есть: } d \frac{1}{tg\alpha} = - \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{p_1} dp + O(p - p_1)^2 dp$$

Подставляя это выражение в (3.7), имеем:

$$Tds = \frac{1}{4} (p - p_1)^2 \left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{p_1} dp + (p - p_1)^2 O(p - p_1) dp$$

Проинтегрируем это равенство на промежутке от p_1 до p , взяв интеграл в левой части по теореме о среднем (T^* - среднее значение температуры в промежутке от p_1 до p). Получаем:

$$T^* \Delta s = \frac{1}{12} (p - p_1)^3 \left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{p_1} + O(p - p_1)^4 \quad (4.8)$$

Видим, что скачок энтропии является величиной третьего порядка малости по сравнению со скачком давления.

Сравнение с адиабатой Пуассона.

В непрерывном адиабатическом движении для любой частицы $ds/dt=0$ и, следовательно $s_2(p, V) - s_1(p_1, V) = \Delta s = 0$. Это уравнение при заданных p_1 и V_1 и заданной функции $s(p, V)$ – определяет адиабату Пуассона. В частности, для совершенного газа:

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\kappa} + const. \Rightarrow c_v \ln \frac{p}{\rho^\kappa} - c_v \ln \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa}$$

или $pV^\kappa = const.$

В общем случае вблизи точки $p = p_1$ ($V = V_1$) уравнение адиабаты Пуассона можно представить в виде: $V - V_1 = f(p - p_1, s = const.)$, а уравнение адиабаты Гюгонио в виде: $V - V_1 = f(p - p_1, s = const.) + k(p - p_1)^3$ т.к. $\Delta s \approx (p - p_1)^3$ где f отражает зависимость V от p при $s = const.$, а $k = k(V_i, p_i)$ - величина поряд-

ка $\left. \frac{\partial V}{\partial s} \right|_{p_1}$. То есть фактически раскладываем в ряд Тейлора

$$V = f(p, s = const.) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial s} \right|_{p_1} \Delta s, \text{ с учётом того, что } \Delta s \approx (p - p_1)^3. \text{ Следо-}$$

вательно, вблизи точки $p_1 V_1$ адиабаты Гюгонио и Пуассона - близкие кривые. Действительно, они имеют одинаковые касательные:

$$\left(\frac{dV}{dp} \right)_\Gamma = \left(\frac{dV}{dp} \right)_\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = \frac{\partial f}{\partial p}$$

и одинаковые кривизны:

$$\left(\frac{d^2V}{dp^2} \right)_\Gamma = \left(\frac{d^2V}{dp^2} \right)_\Pi = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$

Из этого, в частности, следует:

$$D = V_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} \Rightarrow D^2 = -V_1^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = -V_1^2 \left(\frac{dp}{dV} \right)_\Gamma = -\frac{1}{\rho_i^2} \left(\frac{dp}{d \frac{1}{\rho}} \right)_\Gamma = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_\Gamma$$

$$= \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = a^2 \Rightarrow D = a$$

То есть поверхности слабого разрыва – слабые скачки - распространяются по частицам газа со скоростью звука.

Взаимное расположение адиабат Гюгонио и Пуассона в окрестности точки (V_1, p_1)

Уравнение адиабаты Пуассона:

$$pV^\kappa = p_1 V_1^\kappa = C^\kappa \quad V = Cp^{-1/\kappa} > 0 \quad C > 0$$

удобно выразить через энтропию

$$s = C_v \ln \frac{T}{\rho^{\kappa-1}} + s_0$$

с помощью уравнения Клапейрона $p = R\rho T$:

$$p = R\rho^\kappa \exp \frac{s-s_0}{C_v} \Rightarrow V^\kappa = Rp^{-1} \exp \frac{s-s_0}{C_v}.$$

$$V = R^{1/\kappa} p^{-1/\kappa} \exp \frac{s-s_0}{C_p} \quad (\text{то есть } C = R^{1/\kappa} \exp \frac{s-s_0}{C_p}).$$

Тогда:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = R^{1/\kappa} \left(-\frac{1}{\kappa} \right) p^{-\frac{\kappa+1}{\kappa}} \exp \left(\frac{s-s_0}{C_p} \right) < 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s = \frac{\kappa+1}{\kappa^2} R^{1/\kappa} p^{-\frac{2\kappa+1}{\kappa}} \exp \frac{s-s_0}{C_p} > 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{1}{C_p} R^{1/\kappa} p^{-1/\kappa} \exp \frac{s-s_0}{C_p} = \frac{V}{C_p} > 0.$$

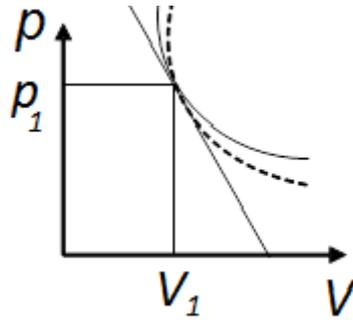


Рис. 3

Пунктирной линией показана адиабата Гюгонио.

Примем по определению для «нормального газа» [8]:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p > 0 \quad (4.9)$$

В этом случае обе кривые обращены выпуклостью вниз. Адиабата Пуассона имеет асимптотами оси p и V , а адиабата Гюгонио тоже гипербола с асимптотами $V = V_1 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$ и $p = -p_1 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$.

Адиабата Пуассона делит плоскость на область $s > s_1$ и область $s < s_1$ а адиабата Гюгонио с ростом p уходит в область $s > s_1$, а при убывании p - в область $s < s_1$. Для совершенного газа энтропия на скачке возрастает монотонно вместе с давлением. Для малого скачка давления это видно из (4.8)

$$T^* \Delta s = \frac{1}{12} (p - p_1)^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{p_1} + a (p - p_1)^4 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_r$$

Теорема Цемплена

Из условий сохранения на скачке:

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \quad \rho_1 v_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{n2}^2 + p_2$$

следует:

$$\rho_1 v_{n1}^2 - \rho_2 v_{n2}^2 = p_2 - p_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 v_{n1} (v_{n1}^2 - v_{n2}^2) \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1 \rho_2} = (p_2 - p_1)(v_1 + v_2),$$

$$\left(v_{n1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} v_{n1}\right) (v_{n1} - v_{n2}) = (p_2 - p_1)(v_1 + v_2), \quad \text{а} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} v_{n1} = v_{n2},$$

тогда:

$$v_{n1}^2 - v_{n2}^2 = (p_2 - p_1)(v_1 + v_2)$$

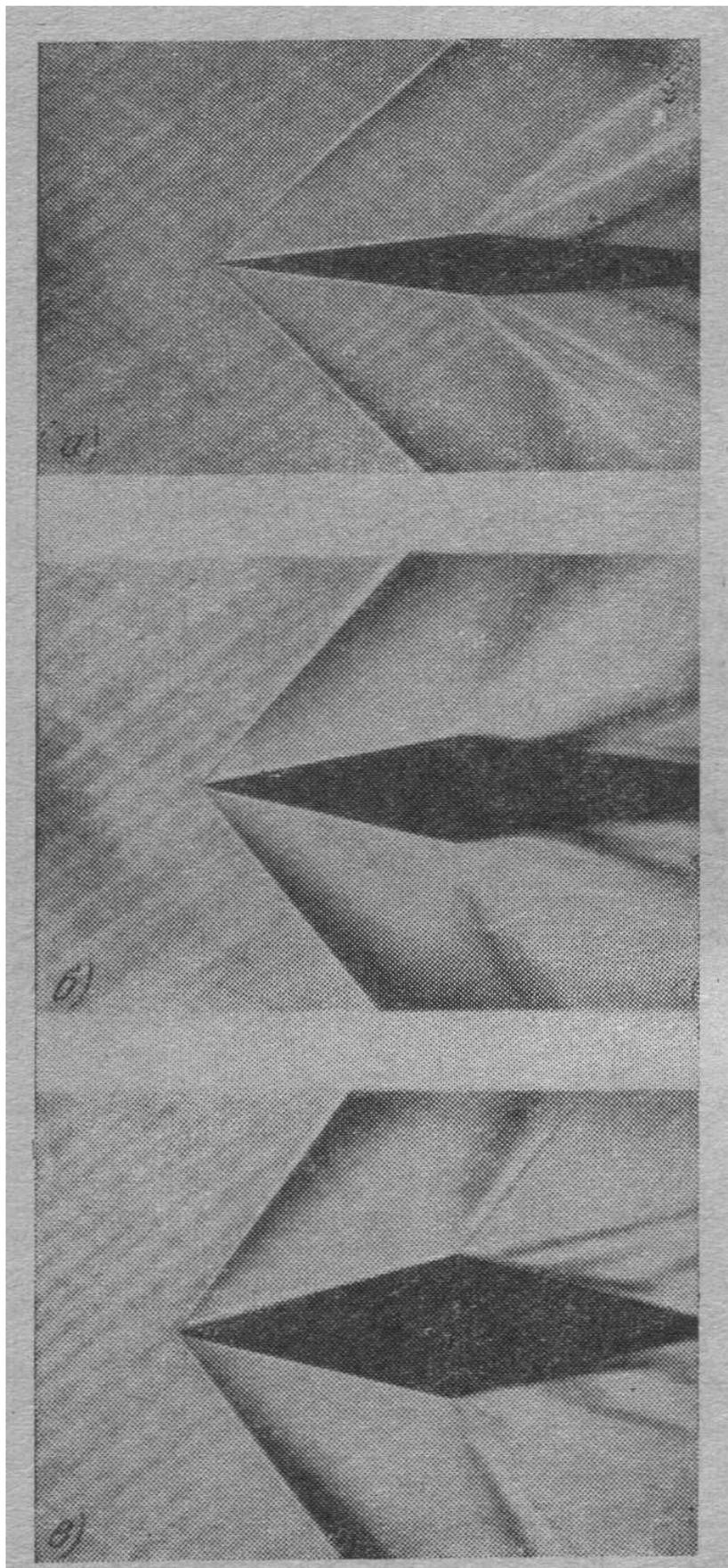
Из (4.8) и (4.9) видно, что при $\Delta s > 0$; $\Delta p > 0$, а это значит, что $|v_{n1}| > |v_{n2}|$ то есть реально возможны только скачки торможения.

ЛЕКЦИЯ 5

Косой скачок уплотнения

Рис. 1
Теневые фотографии
сверхзвукового обтекания
ромбовидного профиля на
нулевом угле атаки при
 $M_1=1.7$. Полуугол при вер-
шине ромба:

- а) $\theta=7^\circ$,
- б) $\theta=12^\circ$,
- в) $\theta=14^\circ$.



Рассмотрим простейшее плоское сверхзвуковое течение газа с поворотом потока на угол $\theta < 90^\circ$. В частности, это может быть обтекание полу бесконечного клина или передней части ромбовидного профиля (рис.1,2)

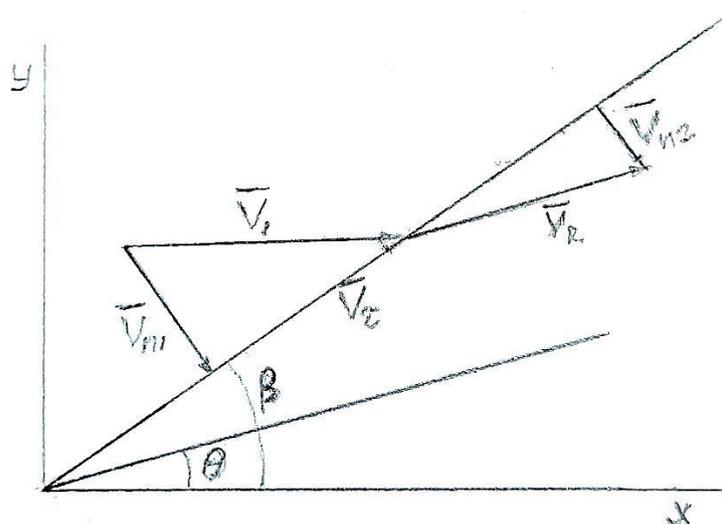


Рис. 2

Ударная волна перед клином.

Скорость набегающего потока $\bar{v}_1 = const..$ Эксперимент показывает, что при определенных условиях (которые будут исследованы в дальнейшем) перед клином возникает прямолинейная ударная волна, исходящая из острия клина - «косой скачок». Скорость \bar{v}_2 за косым скачком постоянна и направлена вдоль поверхности «щеки» клина. Другие параметры газа за косым скачком также постоянны, но их значения отличаются от значений в набегающем потоке на величины скачков. Найдем величины скачков всех параметров.

Имеем на косом скачке условия Гюгонио - Ренкена:

- 1) $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2},$
- 2) $v_{1\tau} = v_{2\tau}$
- 3) $\rho_1 v_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{n2}^2 + p_2,$
- 4) $e_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{v_{n2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \quad \left| \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} + i_1 = \frac{v_2^2}{2} + i_2 = i_0, \right.$

$$5) \quad \rho_1 v_{n1} s_1 = \rho_2 v_{n2} s_2 + \Omega.$$

Так как при переходе через скачок сохраняется энтальпия торможения i_0 , то не терпят разрыва и те параметры, которые через неё выражаются: $T_0, a_0, T_{кр}$ и $a_{кр}$

$$\text{Уравнение ударной адиабаты} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa+1)\rho_2 - (\kappa-1)\rho_1}{(\kappa+1)\rho_1 - (\kappa-1)\rho_2}.$$

Газ совершенный: $e = c_v T$, идеальный: $p = R\rho T$, отсюда следует:

$$e = \frac{1}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}.$$

Из 3) $p_2 = p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 (1-k)$ где ввели обозначение: $k = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ (не путать с κ).

$$\text{(действительно: } p_2 = p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 - \rho_2 v_{n2}^2 = p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 \left(1 - \frac{v_{n2}}{v_{n1}}\right),$$

$$\text{но: } \frac{v_{n2}}{v_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{).$$

$$\text{Из 4) } i_2 = i_1 + \frac{1}{2} v_{n1}^2 (1-k^2).$$

Возьмем теперь выражение $i_2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2}$ и подставим в него $\frac{p_2}{\rho_2}$ из

3), а i_2 из 4):

$$i_1 + \frac{1}{2} v_{n1}^2 (1-k^2) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{\rho_2} [p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 (1-k)] \quad \left| \cdot \frac{1}{a_1^2}, \text{ учтем, что} \right.$$

$$a^2 = \frac{\kappa p}{\rho} = (\kappa-1)i, \text{ тогда:}$$

$$\frac{1}{\kappa-1} + \frac{1}{2} M_{n1}^2 (1-k^2) = \frac{\kappa}{\kappa-1} k \left[\frac{1}{\kappa} + M_{n1}^2 (1-k) \right] \quad \left| \frac{\kappa-1}{\kappa} \text{ где } M_{n1} = \frac{v_{n1}}{a_1} \right.$$

Преобразуем к виду:

$$\frac{\kappa+1}{2\kappa} M_{n1}^2 k^2 - \left(\frac{1}{\kappa} + M_{n1}^2 \right) k + \frac{\kappa-1}{2\kappa} M_{n1}^2 + \frac{1}{\kappa} = 0.$$

Получили квадратное уравнение для отношения плотностей до и после скачка k .

Найдем решения этого квадратного уравнения.

Одно: $k_1 = 1$ очевидно – оно соответствует отсутствию скачка параметров.

Второе можно найти по теореме Виета:

$$k_2 k_1 = \frac{\frac{\kappa-1}{2\kappa} M_{n1}^2 + \frac{1}{\kappa}}{\frac{\kappa+1}{2\kappa} M_{n1}^2} = k_2. \quad \left| \frac{2\kappa}{2\kappa} \right. \text{ Итого } k = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\kappa-1) M_{n1}^2}{(\kappa+1) M_{n1}^2},$$

$$\text{или: } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) M_{n1}^2}{(\kappa-1) M_{n1}^2 + 2}. \quad k = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} + \frac{2}{(\kappa+1)} \frac{1}{M_{n1}^2} \quad (5.1)$$

При $M \rightarrow \infty$, для воздуха $k \rightarrow \frac{1}{6}$. (при $\kappa = \frac{7}{5}$).

ρ - наиболее консервативный параметр при прохождении ударной волны.

Получим выражение для скачка давления.

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1 v_{n1}^2}{p_1} (1-k) = 1 + k \frac{v_{n1}^2}{\kappa \frac{p_1}{\rho_1}} (1-k) = 1 + \kappa M_{n1}^2 (1-k),$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \kappa M_{n1}^2 \left(1 - \frac{2 + (\kappa-1) M_{n1}^2}{(\kappa+1) M_{n1}^2} \right) = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} (M_{n1}^2 - 1), \quad \text{оконча-}$$

тельно:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{n1}^2 - \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)}; \quad (5.2)$$

при $M_{n1} \rightarrow \infty$ $\frac{p_2}{p_1}$ неограниченно возрастает.

Наконец для температуры из $p = R\rho T$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{n1}^2 - \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} \right) \left(\frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} + \frac{2}{(\kappa+1)} \frac{1}{M_{n1}^2} \right). \quad (5.3)$$

Получим еще соотношение между M_{n1} и M_{n2} :

$$v_{n2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} v_{n1} = kv_{n1} \text{ - откуда следует: } v_{n2}^2 = k^2 v_{n1}^2 \left| \frac{\rho_2}{\kappa p_2}, \right.$$

$$M_{n2}^2 = kv_{n1}^2 \frac{\rho_1}{\kappa p_2} \cdot \frac{p_1}{p_1} = kM_{n1}^2 \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

$$M_{n2}^2 = k \frac{p_1}{p_2} M_{n1}^2 = M_{n1}^2 \frac{\left(\frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} + \frac{2}{(\kappa+1)} \frac{1}{M_{n1}^2} \right)}{\left(\frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{n1}^2 - \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} \right)}$$

$$M_{n2}^2 = \frac{1 - \frac{(\kappa-1)}{2} M_{n1}^2}{\kappa M_{n1}^2 - \frac{(\kappa-1)}{2}} = \frac{2 - (\kappa-1) M_{n1}^2}{2\kappa M_{n1}^2 - \kappa + 1} \quad (5.4)$$

Теперь нетрудно получить важное соотношение, связывающее компоненты скорости до и после скачка.

$$\rho_1 v_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{n2}^2 + p_2 \left| \frac{1}{\rho_1 v_{n1}}, \text{ откуда следует:} \right.$$

$$v_{n1} - v_{n2} = \frac{p_2}{\rho_2 v_{n2}} - \frac{p_1}{\rho_1 v_{n1}}. \text{ Из уравнения Бернулли:}$$

$$\frac{p_i}{\rho_i} = \frac{(\kappa+1)}{2\kappa} a_{kp}^2 - \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} v_i^2 \quad i=1,2,$$

$$v_{n1} - v_{n2} = \frac{1}{v_{n2}} \left[\frac{(\kappa+1)}{2\kappa} a_{kp}^2 - \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} v_{n2}^2 \right] - \frac{1}{v_{n1}} \left[\frac{(\kappa+1)}{2\kappa} a_{kp}^2 - \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} v_{n1}^2 \right],$$

или:

$$v_{n1} - v_{n2} = \frac{(\kappa+1)}{2\kappa} a_{kp}^2 \left(\frac{1}{v_{n2}} - \frac{1}{v_{n1}} \right) - \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} \left(\frac{v_2^2}{v_{n2}} - \frac{v_1^2}{v_{n1}} \right), \text{ но}$$

$$v_i^2 = v_\tau^2 \quad i + v_{ni}^2 = v_\tau^2 + v_{ni}^2.$$

$$\left(\frac{v_\tau^2 + v_{n2}^2}{v_{n2}} - \frac{v_\tau^2 + v_{n1}^2}{v_{n1}} \right) = v_\tau^2 \left(\frac{1}{v_{n2}} - \frac{1}{v_{n1}} \right) - v_{n1} + v_{n2}.$$

$$(v_{n1} - v_{n2}) \left(1 - \frac{(\kappa+1)}{2\kappa} a_{kp}^2 \frac{1}{v_{n1} v_{n2}} - \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} + \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} \frac{v_\tau^2}{v_{n1} v_{n2}} \right) = 0.$$

$$1 - \frac{(\kappa-1)}{2\kappa} = \frac{2\kappa - \kappa + 1}{2\kappa} = \frac{(\kappa+1)}{2\kappa}.$$

Получили квадратное уравнение относительно разности нормальных компонент скорости газа до и после скачка. Одно решение

$$v_{n1} = v_{n2} - \text{ без скачка. Второе получим, умножая обе части на } \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} :$$

$$1 - \frac{a_{kp}^2}{v_{n1} v_{n2}} + \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} \frac{v_\tau^2}{v_{n1} v_{n2}} = 0 \quad \Big| \quad v_{n1} v_{n2}$$

Отсюда следует искомая связь между компонентами скорости (формула Прандтля):

$$v_{n1} v_{n2} = a_{kp}^2 - \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} v_\tau^2 \Big| \cdot \frac{1}{a_{kp}^2} \text{ или:}$$

$$\lambda_{n1} \lambda_{n2} = 1 - \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} \lambda_\tau^2. \quad (5.5)$$

Если $v_n = v$, $(v_\tau = 0)$ - прямой скачок, то:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (5.6)$$

Оценим еще потери механической энергии в скачке. Для этого найдем изменение энтропии и полного давления ($\frac{p_{02}}{p_{01}} = \sigma$ - коэффициент восстановления полного давления).

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2}{\rho_2^\kappa} - c_v \ln \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\kappa = c_v \ln \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{n1}^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right) \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} + \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{1}{M_{n1}^2} \right)^\kappa \quad (5.7)$$

При $M_{n1} \rightarrow \infty$ эта разность неограниченно возрастает. Так как $M_n = M \sin \beta$, то при одном и том же числе Маха набегающего потока M_∞ , Δs тем больше, чем больше синус угла наклона скачка $\sin \beta$.

Для энтропии:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \left(\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} \right)^\kappa \quad (\text{пишем } p_0, \rho_0 \text{ вместо } p, \rho, \text{ в силу}$$

уравнения адиабаты Пуассона). Но величина $\frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$ на скачке не

терпит разрыва и, следовательно: $\frac{p_{02}}{\rho_{02}} = \frac{p_{01}}{\rho_{01}}$ и $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$.

Таким образом, $s_2 - s_1 = c_v \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{1-\kappa} = -(\kappa-1)c_v \ln \sigma \quad \left| \frac{1}{R} \right.$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = -\ln \sigma \quad (5.8)$$

При больших M_{n1} можно получить аппроксимирующую функцию:

$$\sigma = \exp \left[\frac{2\kappa}{\kappa-1} M_{n1}^2 \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)^\kappa \right]^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad \text{из}$$

$$\Delta s \cong c_v \ln \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{n1}^2 \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)^\kappa ;.$$

$$\sigma = c M_{n1}^{-\frac{2}{\kappa-1}} \quad \text{где } c = \left[\frac{(\kappa+1)^{\kappa+1}}{2\kappa(\kappa-1)^\kappa} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

(5.9)

При $\kappa = 1,4$; $\sigma \sim c M_{n1}^{-5}$.

Можно также получить асимптотику для небольших сверхзвуковых скоростей, преобразовав σ к виду:

$$\sigma = \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} B^2 \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{1+B^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} B^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \text{где: } B^2 = M_{n1}^2 - 1.$$

При $B^2 \ll 1$ можно разложить это выражение по степеням B и получить

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = 1 - \frac{2\kappa}{(\kappa+1)^2} \frac{B^3}{3} + \dots \left(\begin{array}{l} \text{при } \kappa = 1,4 \quad \sigma = 1 - 0,16 (M_{n1}^2 - 1)^3 \\ \text{при } M_{n1} = 1,1 \quad \sigma = 0,9985 \end{array} \right).$$

То-есть в этом диапазоне скоростей потери полного давления имеют порядок $\sim \varepsilon^3$.

Так как $M_n = M \sin \beta$ и зависимость потерь полного давления от M_{n1} существенно нелинейная, то есть смысл заменить однократный поворот потока на угол β последовательностью поворотов на меньшие углы, и следовательно, заменить один интенсивный скачок системой более слабых.

Связь между углом поворота потока и наклоном косого скачка

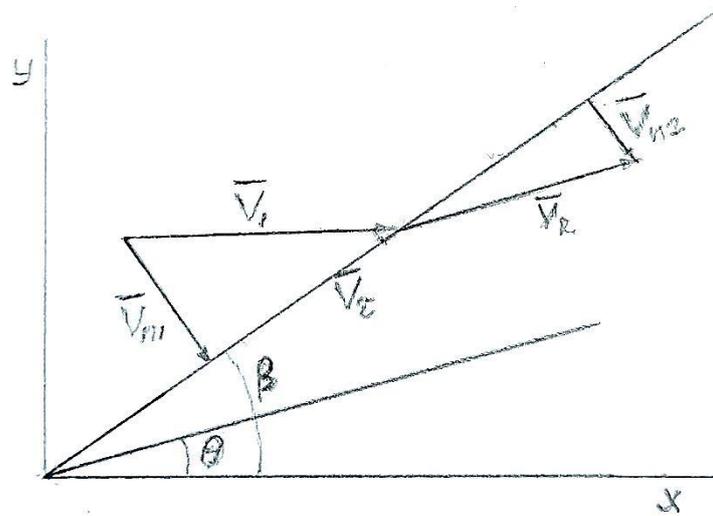


Рис 3. Косой скачок перед клином в сверхзвуковом потоке.

Вспользуемся соотношением Прандтля:

$$v_{n1} v_{n2} = a_{кр}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_{\tau}^2 \quad \text{то есть:}$$

$$v_1 \sin \beta \cdot v_2 \sin(\beta - \theta) = a_{кр}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2 \cos^2 \beta.$$

$v_{\tau} = v_1 \cos \beta = v_2 \cos(\beta - \theta)$, отсюда следует: $v_2 = v_1 \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \theta)}$. Подставляя это в исходное выражение, имеем:

$$v_1^2 \sin \beta \cos \beta \operatorname{tg}(\beta - \theta) = a_*^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2 \cos^2 \beta \quad \left| \frac{1}{v_1^2} \right.$$

Перейдём $\lambda_1 \Rightarrow M_1$. Для этого используем уравнение Бернулли в

виде: $\frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{1}{M^2} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} \frac{1}{\lambda^2}; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{M^2}{\kappa - 1} \right).$

$$\sin \beta \cos \beta \operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \sin^2 \beta + \frac{2}{\kappa + 1} M_1^{-2} = A.$$

Здесь использовали промежуточное обозначение:

$$\sin \beta \cos \beta \frac{tg \beta - tg \theta}{1 + tg \beta \cdot tg \theta} = A(\beta)$$

$$tg \theta (A \cdot tg \beta + \sin \beta \cdot \cos \beta) = -A + \sin^2 \beta$$

$$tg \theta = \frac{-\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \sin^2 \beta - \frac{2}{\kappa+1} M_1^{-2} + \sin^2 \beta}{tg \beta \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \sin^2 \beta + \frac{2}{\kappa+1} M_1^{-2} + \cos^2 \beta \right)} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{2}{\kappa+1} \\ \frac{2}{\kappa+1} \end{array} \right.$$

Окончательно имеем:

$$tg \theta = \frac{\sin^2 \beta - m_1^{-2}}{\frac{\kappa+1}{2} - \sin^2 \beta + m_1^{-2}} ctg \beta \quad (5.10)$$

Выводы:

1) Полученное решение справедливо только в ограниченном диапазоне углов клина $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$, зависящем от числа Маха набегающего потока. Эксперимент показывает, что при превышении этого значения поток газа мгновенно перестраивается с образованием криволинейной ударной волны.

2) Пусть $\beta_m = \beta(\theta_m)$, $\theta_m(M_1)$ – max значение θ . Диапазону $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ соответствуют две ветви кривой $\beta(\theta)$ и каждому углу наклона клина θ отвечают два значения угла наклона косого скачка β . В принципе могут реализовываться оба значения β . Большему β соответствует “сильный” скачок с большим $M_{n1} = M_1 \sin \beta$ и большим

перепадом $\frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}$ и $\frac{\Delta s}{R} = -\ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)$, меньшему – “слабый”.

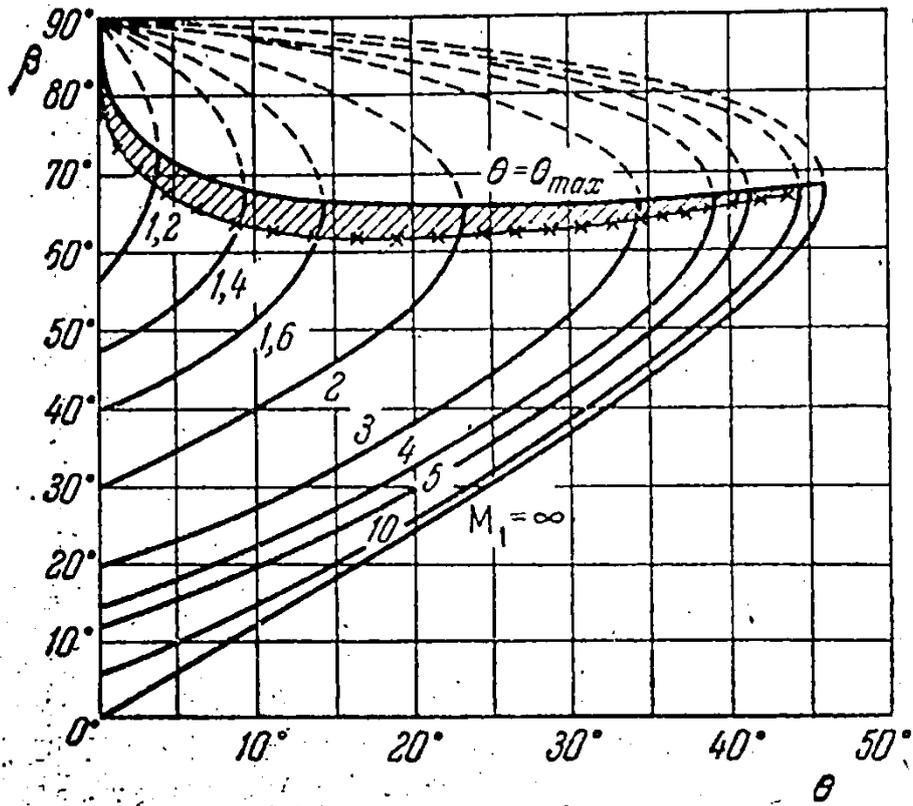


Рис. 4. Зависимость угла наклона скачка $\beta(\theta)$ от угла клина θ [5].

$$M_2^2 = \frac{f(M_{n1}^2 \sin \beta)}{\sin^2(\beta - \theta)}. \text{ Возьмем } M_{n2}^2 = \frac{2 + (\kappa - 1)M_{n2}^2}{2\kappa M_{n1}^2 - \kappa + 1}.$$

$$\text{Отсюда следует: } M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{2 + (\kappa - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2\kappa \cdot M_1^2 \sin^2 \beta - \kappa + 1}.$$

$$\text{Но } \operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{A}{\sin \beta \cos \beta}, \text{ где } A = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \sin^2 \beta + \frac{2}{\kappa + 1} M_1^{-2}.$$

Подставляя вместо $\sin^2(\beta - \theta) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2}{1 + \operatorname{tg}^2}$, найдем

$M_2 = f(M_1, \beta)$ как функцию от β и M_1 . Эта зависимость позволяет построить прямую $1 = \bar{f}(M_1, \beta)$, то есть, для каждой прямой с M_1 найдём точку (*) в которой за скачком звуковая скорость. Перебирая

все M_1 , получим кривую (*). Видно, что кривая $\theta = \theta_{\max}$ идёт немного выше неё. То есть за “сильным” скачком всегда дозвуковая скорость, а за “слабым” почти везде $v_2 > a$ за исключением узкой области вблизи θ_{\max} , где “слабый” скачок слабо отличается от “сильного”.

Если $\theta \geq \theta_{\max}(M_1)$, то образуется отошедший скачок, за ним течение – смешанное и вихревое так как скачок Δ_S разный при разных β . Сначала этот скачок “прямой”, потом переходит в “сильный”, потом в “слабый”, и наконец – в «волну Маха». Последнее в воздухе на расстоянии $\sim 10^3 L$, где L – характерный размер.

Ударная поляра

Найдем зависимость $v_{2y} = f(v_{2x}, v_1)$ – годограф скорости для ко-
сого скачка. В декартовой системе координат: $\bar{v}_1(v_{1x}, v_{1y})$;
 $\bar{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$. Пусть: $v_{1y} = 0$; $v_{1x} = v_1$.

Из рис. 3 видно, что с одной стороны:

$$v_{2x} = v_2 \cos \theta, \quad v_{2y} = v_2 \sin \theta,$$

С другой стороны:

$$v_{1n} = v_1 \sin \beta ; \quad v_{2n} = v_2 \sin(\beta - \theta) ; \\ v_{1\tau} = v_1 \cos \beta = v_{2\tau} = v_2 \cos(\beta - \theta) .$$

Тогда $v_{1n} = v_1 \sin \beta$; $v_{2n} = v_2 \sin \beta \cdot \cos \theta - v_2 \sin \theta \cdot \cos \beta$,

откуда следует: $v_{2n} = v_{2x} \sin \beta - v_{2y} \cos \beta$,

а из $v_{1\tau} = v_1 \cos \beta = v_{2\tau} = v_2 \sin \beta \cdot \cos \theta - v_2 \sin \theta \cdot \cos \beta$ следует:

$$v_{1\tau} = v_1 \cos \beta = v_{2x} \cos \beta + v_{2y} \sin \beta$$

Отсюда находим: $(v_1 - v_{x2}) \cos \beta = v_{y2} \sin \beta$

$$\boxed{tg \beta = \frac{v_1 - v_{x2}}{v_{y2}}}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{v_{2y}^2 + (v_1 - v_{2x})^2}{v_{y2}^2} = \frac{N^2}{v_{y2}^2}, \text{ где } N = \sqrt{v_{y2}^2 + (v_1 - v_{x2})^2}.$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{v_1 - v_{x2}}{N}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{v_{y2}}{N}.$$

Тогда:

$$v_{n1} = v_1 \sin \beta = \frac{v_1 (v_1 - v_{x2})}{N};$$

$$v_{n2} = v_{x2} \sin \beta - v_{y2} \cos \beta = \frac{1}{N} \left[v_{x2} (v_1 - v_{x2} - v_{y2}^2) \right].$$

$$v_{\tau} = \frac{v_1 v_{2y}}{N}.$$

Теперь возьмем соотношение Прандтля:

$$v_{n1} v_{n2} = a_{kp}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_{\tau}^2 \text{ и подставим в него выражения для } v_{n1}, v_{n2} \text{ и } v_{\tau}.$$

$$\frac{1}{N^2} v_1 (v_1 - v_{2x}) \left[v_{2x} (v_1 - v_{2x}) - v_{2y}^2 \right] = a_{kp}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{v_1^2 v_{2y}^2}{N^2} \quad | N^2$$

$$v_1 v_{x2} (v_1 - v_{x2})^2 - v_1 v_{y2}^2 (v_1 - v_{x2}) = a_{kp}^2 N^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2 v_{y2}^2 =$$

$$a_{kp}^2 \left[v_{y2}^2 - (v_1 - v_{x2})^2 \right] - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2 v_{y2}^2; \quad v_{y2}^2 \text{ выносим:}$$

$$v_{y2}^2 \left[a_{kp}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2 + v_1 (v_1 - v_{x2}) \right] = v_1 v_{x2} (v_1 - v_{x2})^2 - a_{kp}^2 (v_1 - v_{x2})^2.$$

$$\boxed{v_{2y}^2 = \frac{(v_1 - v_{2x})^2 (v_1 v_{2x} - a_{kp}^2)}{a_{kp}^2 + \frac{2}{\kappa + 1} v_1^2 - v_1 v_{2x}}} \quad (5.11)$$

$$\lambda_{2y}^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_{2x})^2 (\lambda_1 \lambda_{2x} - 1)}{1 + \frac{2}{\kappa + 1} \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_{2x}} \quad (5.12)$$

Здесь $\bar{\lambda}_i(\lambda_{ix}, \lambda_{iy})$. Петлю этой кривой называют ударной полярой.

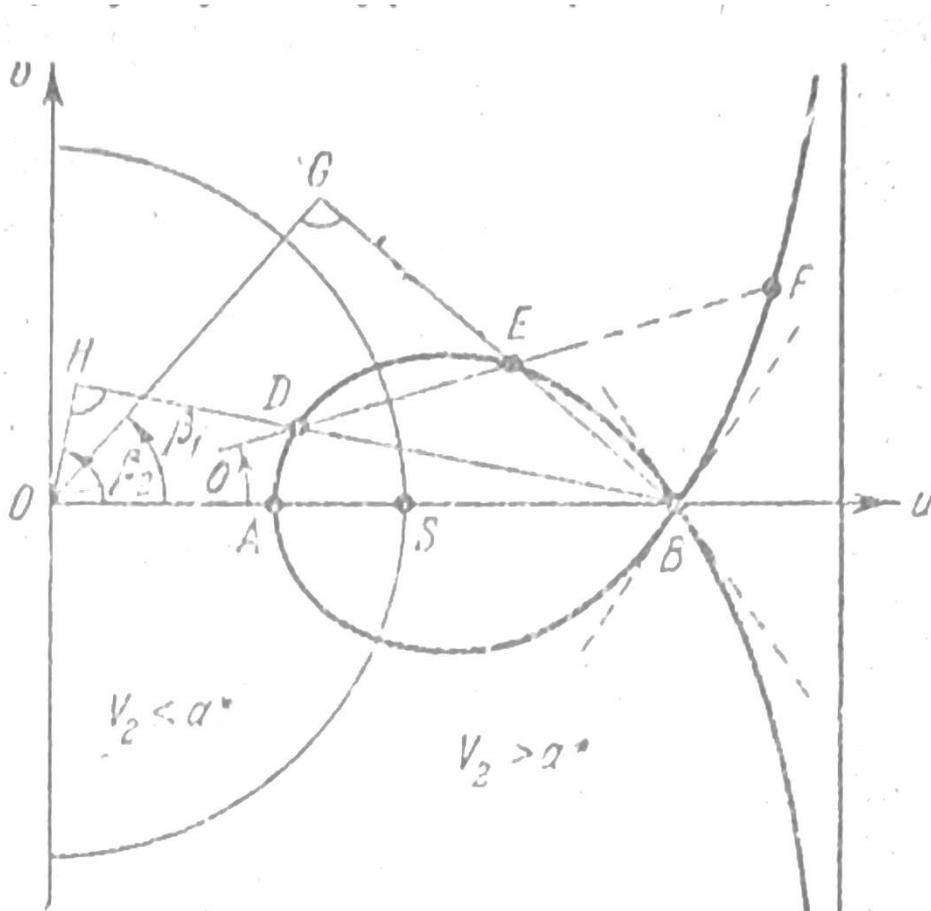


Рис.6. Ударная поляра [5].

На рис.6, взятом из [5], декартовы компоненты скорости обозначены как u и v .

Можно выразить эту зависимость и через число Маха:

$$M_{y2}^2 = \frac{(M_1 - M_{x2})^2 \left(M_1 M_{x2} - \frac{a_{кр}^2}{a_1^2} \right)}{\frac{a_{кр}^2}{a_1^2} + \frac{2}{\kappa+1} M_1^2 - M_1 M_{x2}}, \text{ где}$$

$$\frac{a_{кр}^2}{a_1^2} = \frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} \left(\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\kappa-1} \right) = \frac{2}{\kappa+1} \left(1 + \frac{(\kappa-1)}{2} M^2 \right)$$

Асимптота при $v_{2x} = \frac{a_{кр}^2}{v_1} + \frac{2}{\kappa+1} v_1 \cdot v_{2y} = 0$.

1) $v_{2x} = v_1$ то есть $v_2 = v_1 > a_{кр}$ - это бесконечно слабый скачок – волна Маха и нулевой поворот потока - точка В.

2) $v_2 v_1 = a_{кр}^2$ - это на прямом скачке (точка А).

Ветвь ВF противоречит теореме Цемплена так как там $v_2 > v_1$ и рабочей является только петля - ударная поляра.

Проводя прямую в направлении щеки клина ОF, получаем две рабочие точки: дозвуковую – D и сверхзвуковую – E. они соответствуют сильному и слабому скачку. Касательная к петле соответствует максимально возможному при данном числе Маха набегающего потока углу полураствора клина θ_{\max} . ОВ – скорость до скачка, ОЕ – после, но их проекции на направление скачка v_τ - одинаковые. Отсюда находим направление скачка. Так же и для сильного скачка с $v_2 = OD$.

Таким образом если заданы: либо направление потока после скачка, либо $|\bar{v}_2|$, либо β - с помощью ударной поляры можем найти все параметры течения газа.

Одномерные течения газа с ударными волнами

Плоские поверхности разрыва, нормальные к направлению скорости невозмущенного потока, называются прямыми скачками уплотнения. При переходе через прямой скачок направление потока газа не изменяется.

Полученные выше соотношения для изменения параметров газа для прямого скачка можно записать в виде:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \quad (5.13)$$

А также соотношение Прандтля для прямого скачка:

$$v_1 v_2 = a_{kp}^2 \quad \text{или} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (5.14)$$

Для чисел Маха имеем:

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}. \quad (5.15)$$

При переходе газа через скачок температура торможения T_0 и связанные с нею величины: $v_m, a_0, a_{kp}, i_0, \frac{p_0}{\rho_0}$ не изменяются, скорость газа, числа M и λ - уменьшаются, плотность, давление, температура и энтропия - увеличиваются.

Торможение потока газа при переходе через скачок уплотнения происходит адиабатически, но не изоэнтропически. Плотность и давление газа до скачка связаны уравнением изоэнтропической адиабаты, после скачка – таким же уравнением, но с другой константой, а при переходе через скачок – уравнением ударной адиабаты Гюгонио:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2}}. \quad (5.16)$$

Давление торможения и плотность торможения уменьшаются на скачках. Необратимые потери механической энергии на скачке характеризуются коэффициентом восстановления полного давления:

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{2}{(k+1)M_1^2} + \frac{k-1}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.17)$$

Коэффициент восстановления давления торможения может быть также выражен через приведенный секундный расход $q(\lambda)$:

$$\sigma = \lambda_1^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}} \right]^{\frac{1}{k-1}} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)} = \frac{q(\lambda_1)}{q\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} = \frac{q\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}{q(\lambda_2)}. \quad (5.18)$$

Для нахождения давления торможения после скачка удобно пользоваться формулой Рэлея:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left(\frac{k+1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (5.19)$$

ЛЕКЦИЯ 6

Установившиеся двумерные движения газа

Для установившихся течений линии тока совпадают с траекториями, поэтому энтропия постоянна вдоль линии тока $s = s(\psi)$.

Так как $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, то система уравнений может быть взята в

виде:

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0. \quad (6.1)$$

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\operatorname{rot} \bar{v}, \bar{v}] + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (6.2)$$

$$p = R \rho^K \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right). \quad (6.3)$$

$$(\bar{v}, \nabla) s = 0. \quad (6.4)$$

Уравнение (1) можно преобразовать:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\operatorname{rot} \bar{v}, \bar{v}] + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \left| \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) \right.$$

Получаем: $\left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0$, откуда следует:

$$\left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \Big|_S \frac{d\rho}{dt} = 0. \text{ Так можно записать, потому что}$$

вдоль линии тока $s = \text{const}$ и, следовательно, $p = p(\rho)$. То есть:

$$\left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) + \frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \text{ Используя уравнение неразрывности, по-}$$

лучаем:

$$\left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) = a^2 \operatorname{div} \bar{v}. \quad (6.5)$$

Так же с формулой Крокко. Из уравнения притока тепла и интеграла Бернулли имеем:

$$Tds = di - \frac{dp}{\rho} \Rightarrow T\nabla s = \nabla i - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

$$\frac{v^2}{2} + i = i_0 \Rightarrow \nabla i = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \nabla i_0.$$

$$T\nabla s = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2[\bar{\omega}, \bar{v}] + \nabla i = \nabla i_0 + 2[\bar{\omega}, \bar{v}]. \text{ Окончательно:}$$

$$T\nabla s = \nabla i_0 + [\text{rot} \bar{v}, \bar{v}]. \quad (6.6)$$

Итого система уравнений двумерного стационарного движения газа в векторной форме:

$$\text{div} \rho \bar{v} = 0$$

$$\left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) = a^2 \text{div} \bar{v}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = i_0(s)$$

(6.7)

$$p = R\rho^\kappa \exp \frac{s - s_0}{c_v}$$

$$(\bar{v}, \nabla) s = 0$$

Первые четыре уравнения составляют замкнутую систему для определения неизвестных функций: двух компонент скорости, плотности и скорости звука. Движение адиабатическое, но, вообще говоря, не изоэнтропическое.

Цилиндрическая сист. координат

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ x & r & \theta \\ 1 & 1 & r \end{array}$$

Декартова сист. координат

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\bar{v} = u^i \varepsilon_i = u_i \varepsilon^i = v_i \bar{e}^i; \quad u^i = \frac{v_i}{H_i}; \quad u_i = v_i \cdot H_i;$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3} = 0; \quad v_3 = 0; \quad 2\bar{\omega} = \text{rot}\bar{v} \Big| \varepsilon_3; \quad \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

$$H_1 = H_2 = 1; \quad H_3 = r^v; \quad \sqrt{g} = H_1 H_2 H_3 = r^v \text{ так как } H_i = \sqrt{g_{ii}}.$$

Уравнение неразрывности

$$\text{div} \rho \bar{v} = 0, \text{ в координатной форме: } \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} u^i \rho}{\partial x^i} = 0 \text{ или:}$$

$$\frac{\partial \rho H_2 H_3 v_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho H_1 H_3 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho H_1 H_2 v_3}{\partial x^3} = 0.$$

$$\text{Для двумерного течения: } \frac{\partial \rho H_2 H_3 v_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho H_1 H_3 v_2}{\partial x^2} = 0.$$

$$\text{В декартовой системе координат: } \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0. \quad (6.8)$$

В цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} = 0 \quad (6.9)$$

$$\text{Функция тока: } H_2 H_3 v_1 \rho = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x^2}; \quad H_1 H_3 v_2 \rho = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Можно показать, что $d\psi = 0$ вдоль поверхности тока:

$$\frac{dx^1}{u^1} = \frac{dx^2}{u^2}, \text{ или: } u^2 dx^1 - u^1 dx^2 = 0, \text{ или: } \frac{v^2}{H_2} dx^1 - \frac{v^1}{H_1} dx^2 = 0.$$

Так как по определению функции тока: $v_2 = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}$ и

$v_1 = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}$, то вдоль поверхности тока

$$-\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} dx^1 - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} dx^2 = 0 \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = const.$$

В частности, для декартовой системы:

$$\rho v_x = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\rho v_y = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Для цилиндрической системы берется сечение $x=const..$

Тогда $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v_x r dr \cdot d\theta = 2\pi\psi$ - расход между двумя поверх-

ностями тока.

Таким образом, в стационарном двумерном движении $s = s(\psi)$,

(так как траектория - линия тока, а для частицы $s = const$), кроме того:

$$\frac{v^2}{2} + i = i_0(\psi) \quad \text{и} \quad \frac{P}{\rho^\kappa} = c^\kappa(\psi).$$

Получим ещё формулу Крокко в координатной форме. Для этого умножим обе части на базисный вектор $T\nabla s = \nabla i_0 + 2[\bar{\omega}, \bar{v}] \left(\varepsilon_1 \right)$, получим:

$$T \frac{\partial s}{\partial x^1} - \frac{\partial i_0}{\partial x^1} = 2[\bar{\omega}, \bar{v}]_1,$$

где

$$[\bar{\omega}, \bar{v}]_1 = \sqrt{g} \left(-\omega^3 v^2 \right), \quad 2\omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-\frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right).$$

Но

$$\omega^3 = \frac{\omega}{H_3} \Rightarrow \omega = H_3 \omega^3.$$

Кроме того:

$$2\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

но так как $H = H_2 = 1$, то

$$2\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2},$$

и, следовательно,

$$[\bar{\omega}, \bar{v}]_1 = -\sqrt{g} \left(\omega^3 v^2 \right) = -H_1 H_2 \omega \frac{v_2}{H_2} = -H_1 \omega v_2,$$

но

$$v_2 = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot [\bar{\omega}, \bar{v}]_1 = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_3} \omega \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Пользуясь тем, что $s = s(\psi)$ и $i_0 = i_0(\psi)$, можем записать:

$$\frac{\partial s}{\partial x^1} = \frac{\partial s}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial i_0}{\partial x^1} = \frac{\partial i_0}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Сокращая справа и слева производные по x^1 , получим:

$$T \frac{\partial s}{\partial \psi} - \frac{\partial i_0}{\partial \psi} = 2 \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{H_3} \omega, \text{ или: } 2\omega = r^v \frac{\rho_0}{\rho} \left(T \frac{\partial s}{\partial \psi} - \frac{\partial i_0}{\partial \psi} \right). \quad (6.10)$$

Отсюда видно, что наличие завихренности зависит от того, меняется ли энтропия и полная энтальпия по ψ . В частности, после криволинейной ударной волны – завихренные течения.

Запишем теперь уравнения движения в координатной форме. Сначала в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) &= a^2 \operatorname{div} \bar{v}. \\ \frac{1}{2} v_x \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{1}{2} v_y \frac{\partial v^2}{\partial y} &= a^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} v_x \frac{\partial (v_x^2 + v_y^2)}{\partial x} + \frac{1}{2} v_y \frac{\partial (v_x^2 + v_y^2)}{\partial y} &= a^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ v_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} &= a^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ \left(v_x^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \left(v_y^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

В произвольных ортогональных координатах: $\left((\bar{v}), \nabla \frac{v^2}{2} \right) = a^2 \operatorname{div} \bar{v}$.

Отсюда следует: $\bar{v} = u^i \varepsilon_i$, $\nabla \frac{v^2}{2} = \nabla_i \frac{v^2}{2} \varepsilon^i$; $\operatorname{div} \bar{v} = \nabla_i k^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial u^i \sqrt{g}}{\partial x^i}$; а

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{v^2}{2} \right) = a^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial u^i \sqrt{g}}{\partial x^i}, \text{ но } u^i = \frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{v_i}{H_i};$$

$$\left[\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 0 \right] = \frac{a^2}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} H_2 H_3 v_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} H_1 H_3 v_2 + 0 \right]$$

Но $\sqrt{g} = H_1 H_2 H_3$ (в нашем случае $H_1 = H_2 = 1$).

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

$$\frac{1}{2} v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2} v_2 \frac{\partial}{\partial x^2} (v_1^2 + v_2^2) = \frac{a^2}{H_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} H_3 v_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} H_3 v_2 \right);$$

$$\begin{aligned} & v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_1 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + v_2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^2} + v_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial x^2} = \\ & = \frac{a^2}{H_3} \left(H_3 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_1 \frac{\partial H_3}{\partial x^1} + H_3 \frac{\partial v_2}{\partial x^2} + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\left(v_1^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_1 v_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} + \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) + \left(v_2^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_2}{\partial x^2} = \frac{a^2}{H_3} \left(v_1 \frac{\partial H_3}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right)$$

В цилиндрической системе координат:

$$\left(v_x^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_r \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) + \left(v_r^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{a^2 v_r}{r} \quad (6.12)$$

Запишем также $2\bar{\omega} = \text{rot}\bar{v}$, но, как уже было сказано, не равна нулю

ТОЛЬКО

$$(\text{rot}\bar{v})^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right).$$

Физическая компонента

$$(\text{rot}\bar{v})_{3\text{физ}} = 2\omega = (\text{rot}\bar{v})^3 H_3,$$

отсюда следует:

$$2\omega = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial \left(\frac{v_2}{H_2} \right)}{\partial x^1} - \frac{\partial \left(\frac{v_1}{H_1} \right)}{\partial x^2} \right).$$

Но $H_1 = H_2 = 1$, следовательно

$$2\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (6.13)$$

Для определения скорости звука "а" может служить уравнение

Бернулли:

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = i_0; \quad (6.14)$$

где $i_0(\psi)$ - должно быть задано.

ЛЕКЦИЯ 7

Метод характеристик

Пусть задана система уравнений в частных производных первого порядка.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij}^k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Пусть на некоторой гиперповерхности $L \left(f(x_i) = 0 \right)$, лежащей в области G , где эта система имеет единственное решение, заданы значения $u_j \Big|_L = \overline{u_j}$ - называемые данными Коши. Требуется определить u_j в области G так, чтобы они удовлетворяли заданной системе уравнений и данным Коши на L - то есть решить задачу Коши.

Если данные Коши, заданные на L не позволяют однозначно решить задачу Коши, то такая поверхность называется характеристической. Иными словами характеристическая поверхность – такая, что на ней нельзя однозначно определить производные по заданным значениям самих функций. Это значит, в соответствии с определением, данным в лекции 3, что характеристики есть поверхности слабого разрыва.

Рассмотрим систему уравнений двумерного стационарного движения газа.

$$\begin{aligned} & \left(v_1^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_1 v_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} + \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) + \left(v_2^2 - a^2 \right) \frac{\partial v_2}{\partial x^2} = \\ & \frac{a^2}{H_3} \left(v_1 \frac{\partial H_3}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right) = \frac{a^2}{r^\nu} v_2 \frac{\partial r^\nu}{\partial r}, \quad \nu = 0; 1. \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = i_0 \quad (7.2)$$

Также:

$$2\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} = \rho H_3 \left(T \frac{ds}{d\psi} - \frac{di_0}{d\psi} \right) \quad (7.3)$$

Правая часть уравнения (7.1) равна нулю для декартовой системы координат и $\frac{a^2}{r} v_r$ для цилиндрической.

Выясним можно ли найти характеристические поверхности – в данном случае это характеристические кривые L: $x^2 = f(x^1)$ для уравнений (7.1)-(7.3). На L (вдоль L) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dx^1} \Big|_L &= \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + \frac{\partial v_1}{\partial x^2} f' \\ \frac{dv_2}{dx^1} \Big|_L &= \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + \frac{\partial v_2}{\partial x^2} f' \end{aligned} \right| \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x^1} \Big|_L &= \frac{dv_1}{dx^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} f' \\ \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \Big|_L &= \left(\frac{dv_2}{dx^1} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right) \frac{1}{f'} \end{aligned} \right|$$

Подставим эти выражения в уравнение (7.1).

$$\begin{aligned} (v_2^1 - a^2) \left(\frac{dv_1}{dx^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} f' \right) + v_1 v_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right) + (v_2^2 - a^2) \left(\frac{dv_2}{dx^1} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right) \frac{1}{f'} = \\ = \frac{a^2}{H_3} \left(\frac{\partial H_3}{\partial x^1} v_1 + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Скомпонуем члены, выделяя частные производные по координатам:

$$\begin{aligned} \left[v_1 v_2 - (v_2^1 - a^2) f' \right] \frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \left[v_1 v_2 - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \right] \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + \\ + (v_2^1 - a^2) \frac{dv_1}{dx^1} + \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \frac{dv_2}{dx^1} = \frac{a^2}{H_3} \left(\frac{\partial H_3}{\partial x^1} v_1 + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Теперь подставим $\frac{\partial v_2}{\partial x^1} = 2\omega + \frac{\partial v_1}{\partial x^2}$.

$$\left[2v_1v_2 - (v_1^2 - a^2)f' - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \right] \frac{\partial v_1}{\partial x^2} =$$

$$\frac{a^2}{H_3} \left(\frac{\partial H_3}{\partial x^1} v_1 + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right) - (v_1^2 - a^2) \frac{dv_1}{dx^1} - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \frac{dv_2}{dx^1} - \left[v_1v_2 - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \right] 2\omega.$$

По определению характеристик: на L частные производные определяются неоднозначно. Это может быть как $\frac{\partial v_1}{\partial x^2} = \frac{0}{0}$. То есть:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_1v_2 - (v_1^2 - a^2)f' - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} = 0 \\ \frac{va^2}{r} v_2 - (v_1^2 - a^2) \frac{dv_1}{dx^1} - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \frac{dv_2}{dx^1} - \left[v_1v_2 - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} \right] 2\omega = 0. \end{array} \right.$$

Эти уравнения выполняются вдоль характеристик. Разрешим первое уравнение относительно f' :

$$(f')^2 (v_1^2 - a^2) - 2v_1v_2f' + (v_2^2 - a^2) = 0$$

$$f'_{1,2} = \frac{v_1v_2 \pm \sqrt{v_1^2v_2^2 - (v_1^2 - a^2)(v_2^2 - a^2)}}{(v_1^2 - a^2)}$$

Представим

$$\sqrt{} = \left(a^2v_1^2 + a^2v_2^2 - a^4 \right)^{1/2} = a\sqrt{v_2^2 + v_1^2 - a^2} = a\sqrt{v^2 - a^2}$$

Видим, что действительные характеристики существуют только при $v \geq a$, то есть в сверхзвуковых течениях и определяются уравнением:

$$f'_{1,2} = \frac{v_1 v_2 \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{(v_1^2 - a^2)} \quad (7.4)$$

Преобразуем второе уравнение характеристик. Из (7.4) по теореме Виета:

$$f'_1 \cdot f'_2 = \frac{v_2^2 - a^2}{v_1^2 - a^2}. \text{ Так как:}$$

$$v_1 v_2 - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} = (v_1^2 - a^2) f' - v_1 v_2 \text{ то } v_1 v_2 - \frac{(v_2^2 - a^2)}{f'} = \pm a \sqrt{v^2 - a^2}.$$

Следовательно:

$$\frac{dv_1}{dx^1} + f' \frac{v_1^2 - a^2}{v_2^2 - a^2} \frac{dv_1}{dx^1} = \frac{a^2}{H_3} \left(\frac{\partial H_3}{\partial x^1} v_1 + v_2 \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \right) \frac{f'}{v_2^2 - a^2} \mp 2\omega \frac{a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_2^2 - a^2} f'$$

Знаку (-) здесь соответствует f'_2 , а знаку (+) - f'_1 , причем по теореме Виета:

$$f'_1 \frac{v_1^2 - a^2}{v_2^2 - a^2} = \frac{1}{f'_2}$$

Запишем результаты в прямоугольной декартовой системе координат (плоское течение). Пусть характеристика $x^2 = f(x^1)$ имеет вид: $y = y(x)$, тогда уравнения характеристик в физической плоскости имеют вид:

$$y'_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)} \quad (7.5)$$

а в плоскости годографа скорости:

$$dv_y + \frac{1}{y'_2} dv_x = - \frac{2a\omega \sqrt{v^2 - a^2}}{v_y^2 - a^2} y'_1 dx - \text{первое семейство,} \quad (7.6)$$

$$dv_y + \frac{1}{y_1'} dv_x = + \frac{2a\omega\sqrt{v^2 - a^2}}{v_y^2 - a^2} y_2' dx - \text{второе семейство.} \quad (7.7)$$

Для осесимметричного течения в цилиндрической системе координат x, r, θ . $\frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 1$. Пусть $x^2 = f(x^1)$ есть $r = r(x)$, тогда в физической плоскости уравнения характеристик:

$$r'_{1,2} = \frac{v_x v_r \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)} \quad (7.8)$$

В плоскости годографа скорости:

$$dv_r + \frac{1}{r_2'} dv_x = \left\{ -\frac{2a\omega\sqrt{v^2 - a^2}}{v_r^2 - a^2} r_1' + \frac{a^2 v_2}{r(v_r^2 - a^2)} r_1' \right\} dx - \text{первое семейство,} \quad (7.9)$$

$$dv_r + \frac{1}{r_1'} dv_x = \left\{ \frac{2a\omega\sqrt{v^2 - a^2}}{v_r^2 - a^2} r_2' + \frac{a^2 v_2}{r(v_r^2 - a^2)} r_2' \right\} dx - \text{второе семейство.} \quad (7.10)$$

Найдем теперь проекцию скорости газа \bar{v} на нормаль \bar{n} к характеристике (рис.1).

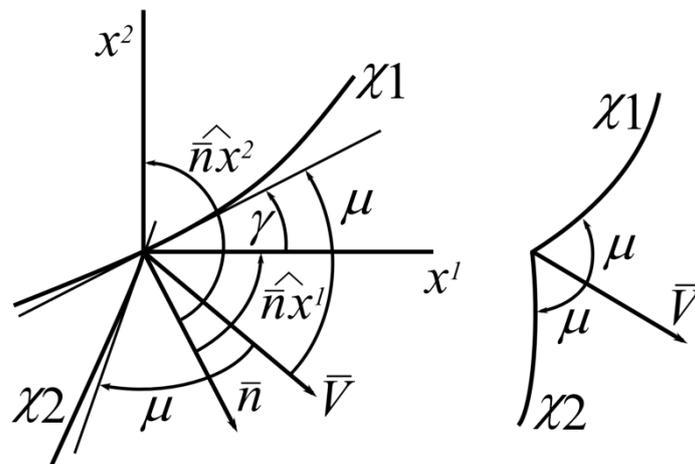


Рис. 1

$$v_n = (\bar{v}, \bar{n}) = v_1 n_1 + v_2 n_2 = v_1 \cos(nx_1) + v_2 \cos(nx_2)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = f' = p$$

$$\left| \cos(nx_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right.$$

$$\left. \cos(nx_2) = \cos(\pi - \gamma) = -\cos(\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right.$$

$$v_n = \frac{v_1 p - v_2}{\sqrt{1+p^2}}$$

С другой стороны, из уравнения характеристик в физической плоскости

$$(f')^2 (v_1^2 - a^2) - 2v_1 v_2 f' + (v_2^2 - a^2) = 0$$

легко получить, что:

$$a = \pm \frac{v_1 f' - v_2}{\sqrt{1+f'^2}} = \pm \frac{v_1 p - v_2}{\sqrt{1+p^2}},$$

откуда следует, что

$$|v_n| = a.$$

Поскольку этот результат одинаково справедлив для обеих характеристик, то из этого следует, что характеристики первого и второго семейства в каждой точке области течения расположены симметрично по отношению к вектору скорости и наклонены к нему под углом Маха.

ЛЕКЦИЯ 8

Плоские безвихревые течения газа со сверхзвуковой скоростью

Рассмотрим подробно процесс решения задач для плоских сверхзвуковых течений газа в случае, когда $2\omega = \text{rot}\bar{v} = 0$ (потенциальные течения). Использование этого ограничения позволяет построить очень наглядную графо-аналитическую процедуру решения плоских задач и с ее помощью проследить многие характерные особенности сверхзвуковых течений газа. В то же время распространение процедуры численного решения методом характеристик на задачи вихревого течения не вызывает никаких принципиальных затруднений. Для потенциальных течений условия совместности вдоль характеристик первого и второго семейства приобретают вид:

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{1}{y_2^1}; \quad \frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{1}{y_1^1}. \quad (8.1)$$

Принимая во внимание, что тангенсы углов наклона характеристик в физической плоскости выражаются через компоненты скорости и местную скорость звука в виде:

$$y_{1,2}^1 = -\frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}, \quad (8.2)$$

а скорость звука в свою очередь выражается через модуль вектора скорости с помощью уравнения Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{h^2 a_{кр}^2}{2}, \quad \text{где } h = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}$$

легко видеть, что равенства (8.2) представляют собой пару обыкновенных дифференциальных уравнений в плоскости годографа скорости и определяют два семейства кривых в этой плоскости, соответствующих двум семействам характеристик в физической плоскости течения. Двигаясь вдоль характеристики первого семейства в физиче-

ской плоскости будем двигаться вдоль соответствующей характеристики (первого семейства) в плоскости годографа, определяемой первым из уравнений (8.1). Аналогично для характеристик второго семейства.

Областью определения решений уравнений (8.1) является кольцо в плоскости годографа: $a_{kp} \leq v \leq v_{\max}$, где $v_{\max} = ha_{kp}$.

Сетку характеристик в физической плоскости нельзя построить заранее на все случаи жизни, поскольку для этого нужно знать поле скоростей (которое, собственно, и является искомой величиной). А вот универсальную сетку характеристик в плоскости годографа, пригодную для всех потенциальных течений, построить можно. Для этого соединим уравнения (8.1) и (8.2):

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{v_x^2 - a^2}{v_x v_y \mp a\sqrt{v^2 - a^2}} \quad (8.3)$$

Возьмём точку М в плоскости x, y . В ней имеем направление y_1^1 характеристики первого семейства. В плоскости $v_x v_y$ точке М соответствует точка M^1 , в которой скорость $\bar{v}(x, y)$. Равенство $\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{1}{y_1^1}$ для характеристики второго семейства в плоскости $(v_x v_y)$ показывает, что касательная к ней \perp касательной к характеристикам первого семейства

в плоскости x, y : $\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{xII} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{xI} = -1 \quad \left[\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{xI} \cdot y_2^1 = -1\right].$

Характеристики в плоскости x, y имеют разную форму для разных течений, а в плоскости $(v_x v_y)$ - одинаковую.

Уравнение (8.3) удобно интегрировать в полярных координатах, где полярным радиусом служит модуль скорости, а полярным углом - угол наклона скорости к оси x .

$$\begin{aligned} v_1 = v_x = v \cos \theta, \\ v_2 = v_y = v \sin \theta. \end{aligned} \quad y^1 = -\frac{v_1 v_2 \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_1^2 - a^2},$$

$$\begin{cases} dv_x = -v \sin \theta d\theta + v \cos \theta dv, \\ dv_y = +v \cos \theta d\theta + v \sin \theta dv. \end{cases}$$

$$\frac{v \cos \theta d\theta + v \sin \theta dv}{-v \sin \theta d\theta + v \cos \theta dv} = - \left(\frac{v^2 \sin \theta \cos \theta \mp a \sqrt{v^2 - a^2}}{v^2 \cos^2 \theta - a^2} \right)^{-1}, \quad a = a(v).$$

$$d\theta = \frac{dv}{v} \frac{1}{a} \frac{(\pm \sqrt{v^2 - a^2})(\pm \cos \theta \sqrt{v^2 - a^2} + a \sin \theta)}{a \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{v^2 - a^2}} = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v}$$

$$\text{Но: } \left| \frac{dv}{v} = \frac{d\lambda}{\lambda} \right|;$$

$$d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v} = \pm \text{ctg} \mu \frac{dv}{v}, \quad \text{и} \quad M^2 - 1 = \frac{\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2 h^{-2}}, \quad \text{где}$$

$$h^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

$$\text{То есть } \sqrt{M^2 - 1} = h \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}} = hu \quad \theta = \pm h \int \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Делаем замену $u^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}$. Получаем:

$$\theta = \pm h \int \left(\frac{du}{1 + u^2} - \frac{du}{1 + h^2 u^2} \right) + c_{1,2} \quad \text{Этот интеграл можно взять.}$$

Имеем:

$$\theta = \pm h \left[\text{arctg} u - \frac{1}{h} \text{arctg}(hu) \right] + c_{1,2} \quad \text{Или:}$$

$$\theta = \pm \zeta(\lambda) + c_{1,2}^1 \quad \text{где } \zeta(\lambda) = h \text{arctg} \frac{1}{h} \text{ctg} \mu + \mu - \frac{\pi}{2}; \quad \text{При этом:}$$

$$|\text{ctg} \mu = \sqrt{M^2 - 1} = h \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}} = hu$$

Это уравнения характеристик в плоскости годографа, все они лежат в кольце $1 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, где $\lambda_{\max} = h$. (то есть $1 \leq \lambda \leq h$).

Введем обозначения: $c_1^1 = -2\lambda_x$ $c_2^1 = 2\mu_x$.

Первое семейство: $\zeta(\lambda) - \theta = 2\lambda_x$.

Второе семейство: $\zeta(\lambda) + \theta = 2\mu_x$.

Через каждую точку в плоскости (λ, θ) проходят две характеристики. С точки зрения геометрии они представляют собой эпициклоиды, которые чертятся точкой окружности диаметра $(h-1)$, катящейся по

кругу $\lambda = 1$. Важно, что для всех плоских потенциальных течения газа эти характеристики одни и те же.

Заметим, что $\mu_x - \lambda_x = \theta$, то есть эта разность сохраняется при $\theta = const.$, а $\mu_x + \lambda_x = \zeta(\lambda)$ - сохраняется на окружности $\lambda = const.$

На основе использования этих кривых построен простой и эффективный метод решения задач плоского потенциального движения газа. Существуют подробные таблицы эпициклоид [3]. В таблицах даются значения $s(\lambda) = 1000 - \frac{180}{\pi} \zeta$, так как $\zeta(\lambda)$ представляет собой разность дуг и может быть выражена через угол Маха, $1000 \leq s \leq 870$.

При $\lambda = 1 \Rightarrow \zeta(1) = 0$. $\zeta(\lambda_{\max}) = 130$

С ростом λ растёт $\zeta(\lambda)$ так что характеристика первого семейства загибаются вверх.

Принято вводить новые константы – номера эпициклоид: n_1 и n_2 :

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\lambda) - \theta &= 2\lambda_x \\ \zeta(\lambda) + \theta &= 2\lambda_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow, \text{ но } \zeta = \frac{\pi}{180}(1000 - s).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{180}{\pi}(1000 - s) - \theta &= 2\lambda_x \\ \frac{180}{\pi}(1000 - s) + \theta &= 2\mu_x \end{aligned} \right\} \left| \frac{180}{\pi} \right.$$

$$s + \theta^\circ = 1000 - \frac{360}{\pi} \lambda_x \quad s - \theta^\circ = 1000 - \frac{360}{\pi} \mu_x.$$

Вместо этого, пользуясь произвольностью введения констант, пишем (далее углы даются в градусах):

$$s + \theta^\circ = 2(n_1 + 100) \quad s - \theta^\circ = 2(n_2 - 100).$$

$$\left. \begin{aligned} s + \theta^\circ &= 2(n_1 + 100) \\ s - \theta^\circ &= 2(n_2 - 100) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = n_1 + n_2, \quad \theta = n_1 - n_2 + 200 = 200 - (n_2 - n_1).$$

Вместо θ° можно использовать $n_2 - n_1$, то есть $\theta = 0 \Rightarrow n_2 - n_1 = 200$.

$n_2 > n_1$, θ растёт $\Rightarrow n_2 - n_1$ убывает.

Еще раз о соотношении плоскостей: каждой точке $M(x, y)$ в физической плоскости соответствует точка $M'(\lambda_x, \lambda_y)$ в плоскости годографа. Перемещению в плоскости x, y по характеристике первого семейства X1 соответствует перемещение по ЭИ в плоскости (λ_x, λ_y) .

Определение направления $X1$ при известном поле в плоскости $\bar{v}(\lambda_x, \lambda_y)$ можно сделать тремя способами:

а) Зная v_x, v_y в точке $M(x, y)$ можно вычислить a ($a_{кр}$ считается заданной величиной) и по формулам:

$$y_{1,2}^1 = -\frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} \text{ вычислить } y_1^1 \text{ и } y_2^1.$$

б) Можно воспользоваться тем, что эпициклоиды ЭI, ЭII в плоскости (v_x, v_y) ортогональны к характеристикам $X2, X1$ в плоскости xu .

То есть: $\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_I \cdot y_2^1 = -1$ и $\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{II} \cdot y_1^1 = -1$.

в) Можно направление $X1, X2$ найти чисто графически, используя эллипс Буземанна (адиабатный эллипсоид). $\frac{v_\tau^2}{h^2} + \lambda_n^2 = 1$. Это выражение легко получить из уравнения Бернулли.

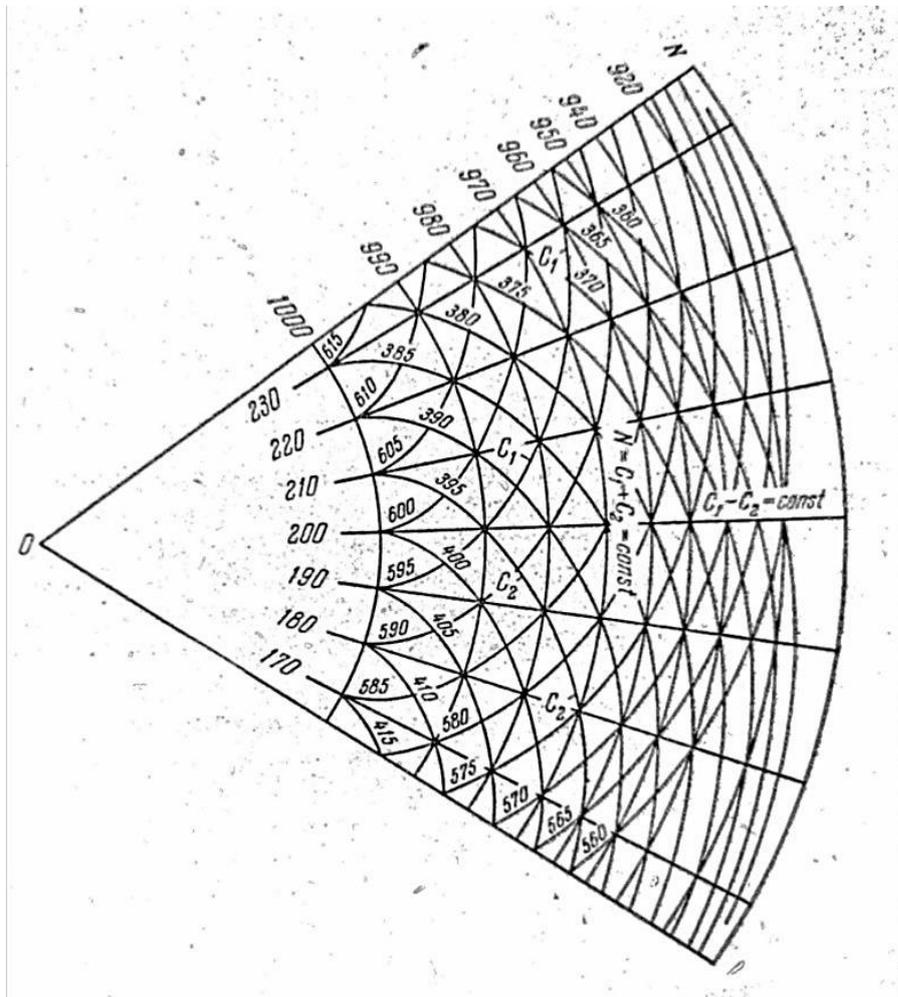


Рис.1. Диаграмма характеристик ЭI, ЭII в плоскости годографа скорости [5].

Если центр эллипса поместить в начало координат плоскости λ_x, λ_y и повернуть его так, чтобы точка $M'(\lambda_x, \lambda_y)$ оказалась на эллипсе, то большая полуось эллипса Буземанна покажет направление одной из характеристик.

ЛЕКЦИЯ 9

Методика решения задач плоского потенциального течения газа с помощью характеристик

Решение любой задачи о плоском безвихревом движении газа при $v > a$ сводится к решению четырех основных частных задач.

Задача I (Коши):

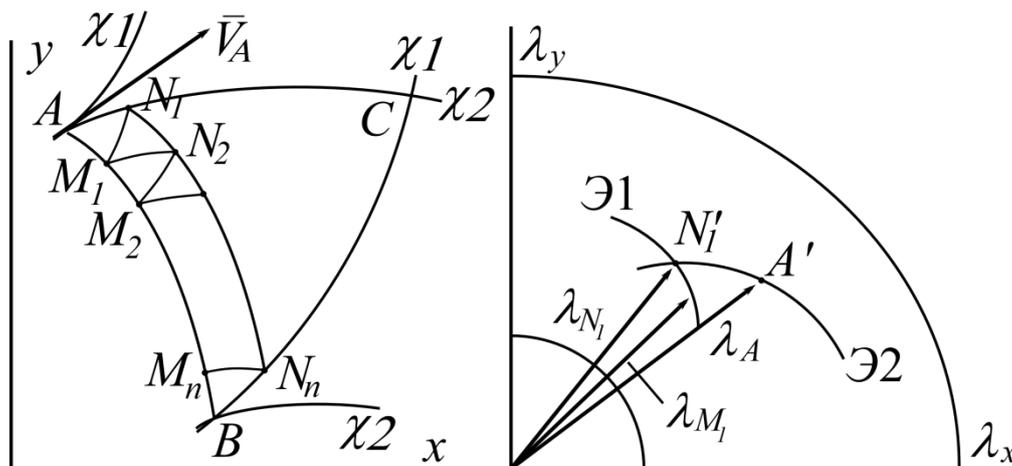


Рис. 1

В плоскости x, y задано поле скоростей на некоторой кривой AB , не являющейся характеристикой (рис 1). Требуется определить поле скоростей в области $\square ABC$, образованной отрезком AB и отрезками AC и BC характеристик второго и первого семейства, проходящих через точку A и B . (Задача Коши)

Пусть BC -- X_1 , проходящая через точку B , AC — X_2 , проходящая через точку A . Наносим густой ряд точек M_1, \dots, M_n на AB . Этим точкам соответствуют точки A', M_i', B' , в $\lambda_x \lambda_y$.

Строим в плоскости (x, y) элементы касательных к характеристикам X_1 и X_2 (заменяем кривые отрезками касательных). На их пересечении получаем точки N_1, N_2, \dots, N_{n+1} . Скорости в этих точках определяются точками пересечений соответствующих эпициклоид, проходящих через точки A', M_i', B' , в $\lambda_x \lambda_y$. Таким образом заполняем весь тре-

угольник $\square ABC$ То есть находим поле скоростей в $\square ABC$. Из интеграла Бернулли можем найти давление $\frac{P}{P_0}$.

Задача II (Гурса):

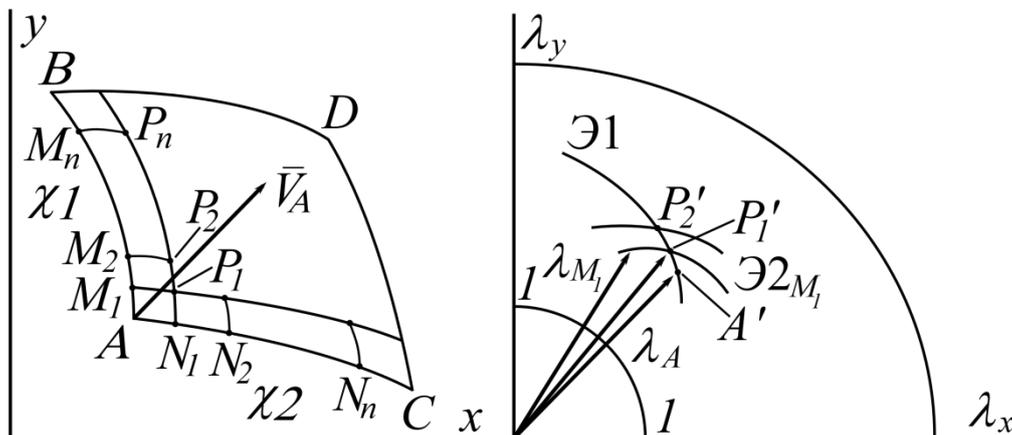


Рис. 2

Скорости заданы на отрезках двух характеристик, проходящих через точки A.: AB и AC . Требуется определить поле скоростей в $\square ABDC$, где BD и CD – неизвестные отрезки характеристик (рис. 2).

Строим элементы характеристик X_2 , проходящих через точки M_1, M_2, \dots , и X_1 , проходящих через точки N_1, N_2, \dots и т.д.

В плоскости (λ_x, λ_y) исходным точкам соответствуют точки $A', M_1', M_2' \dots B', N_1', N_2'$. Находим точки пересечения элементов X_1 и X_2 в физической плоскости P_1, P_2, \dots и соответствующие им точки пересечения эпициклоид \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 в плоскости годографа. Таким образом, заполняем всю область $ABDC$. Отметим, что все заданные точки $A', M_1', M_2' \dots B'$, лягут на одной эпициклоиде \mathcal{E}_1 , а $A', N_1', N_2' \dots C'$ - на одной \mathcal{E}_2 . Линии тока можно получить, проводя биссектрисы углов между направлениями характеристик X_1 и X_2 .

Задача III (вторая смешанная):

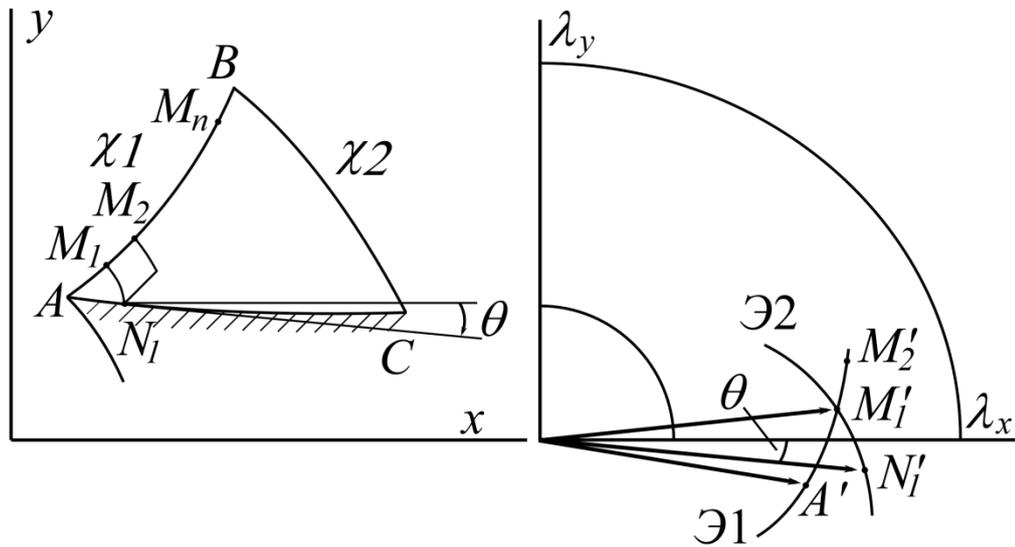


Рис. 3

Поле скоростей задано на дуге АВ характеристики (пусть X1) примыкающей в точке А к твердой стенке, обтекаемой потоком газа (рис. 3). Нужно найти поле скоростей в $\square ABC$, где AC – участок стенки, а BC – неизвестная характеристика (X2), проходящая через точку В. (В точке А скорость направлена вдоль стенки). Наносим на АВ ряд точек А, М, ... В плоскости $\lambda_x \lambda_y$ им соответствуют точки А', М'... В' на X1, проходящие через А'. Строим элементы X2. Находим точку N_1 -- пересечения X2 из точки M_1 со стенкой. Проводим в плоскости $\lambda_x \lambda_y$ радиус-вектор с углом наклона θ , равным углу наклона стенки, до пересечения с X2, проходящей через M'_1 . Точка пересечения N'_1 дает скорость в точке N_1 . Далее строим элементы $(X1)_{N_1}$ до пересечения с $(X2)_{M_2}$ и т.д. и находим скорости во всех точках $(X1)_{N_1}$ и т.д.

Частный случай задачи III:

Пусть во всех точках характеристики первого семейства (X1) АВ скорость одинакова по величине и направлению. Очевидно, что в этом случае АВ – прямая линия. Всей этой прямой в плоскости $\lambda_x \lambda_y$ будет соответствовать одна точка А' с координатами (v_1, θ_1) . Всем X2, исходящим из точек АВ соответствует одна $(\mathcal{E}2)_{A'}$. Ее уравнение:

$$\zeta(\lambda) + \theta = 2\mu_x = \zeta(\lambda_1) + \theta_1 = C \quad (*)$$

Следовательно, для любой характеристики $X1$, исходящей из точек N'_1, P'_1 и т.д. отрезка AC соответствующая ей эпициклоида будет пересекаться только с этой эпициклоидой (*) и во всех точках $X1$ скорость получится одна и та же, следовательно, все эти $X1$ – прямолинейны.

Теорема о прямолинейной характеристике:

Если в физической плоскости имеется 1 прямолинейная характеристика, то прямолинейными будут и другие характеристики этого семейства.

Теорема справедлива только для области определения заданных условий

Задача IV:

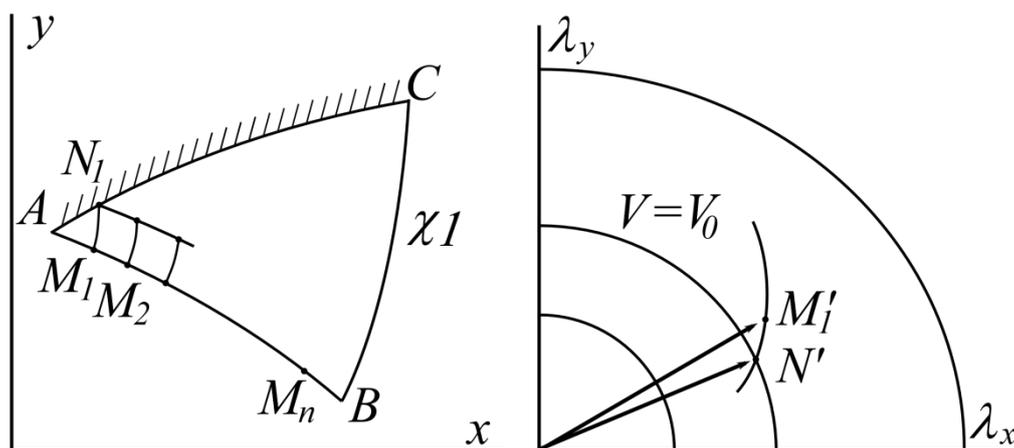


Рис. 4

Поле скоростей задано на дуге характеристики AB , причем точка A лежит на свободной поверхности струи газа AC (рис. 4). Нужно определить поле скоростей в ABC , где AC отрезок неизвестной свободной поверхности, а BC – неизвестный отрезок характеристики.

В силу уравнения Бернулли $\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = i_0$ и условия на свободной поверхности $p = const$, а также в силу того, что течение считается изэнтропическим, то есть $\frac{p}{\rho^\kappa} = const$ и таким образом на свобод-

ной поверхности $\frac{p}{\rho} = const$, можем условие на свободной поверхности струи газа зависеть в виде:

$$v^2 = const \Rightarrow |\vec{v}| = v_0$$

Точкам свободной поверхности соответствуют в плоскости $\lambda_x \lambda_y$ точки окружности с радиусом v_0 . Точкам отрезка характеристики второго семейства $AB \Rightarrow A', M'_1 \dots B'$ X2. Точку N'_1 находим на пересечении $(X1)_{M_1}$ и окружности радиуса v_0 . Точку N'_2 находим на пересечении $(X2)_{N_1}$ и $(X1)_{N_2}$, и т.д.

В сущности, для решения всех 4-х задач нужно уметь делать две операции: А и В.

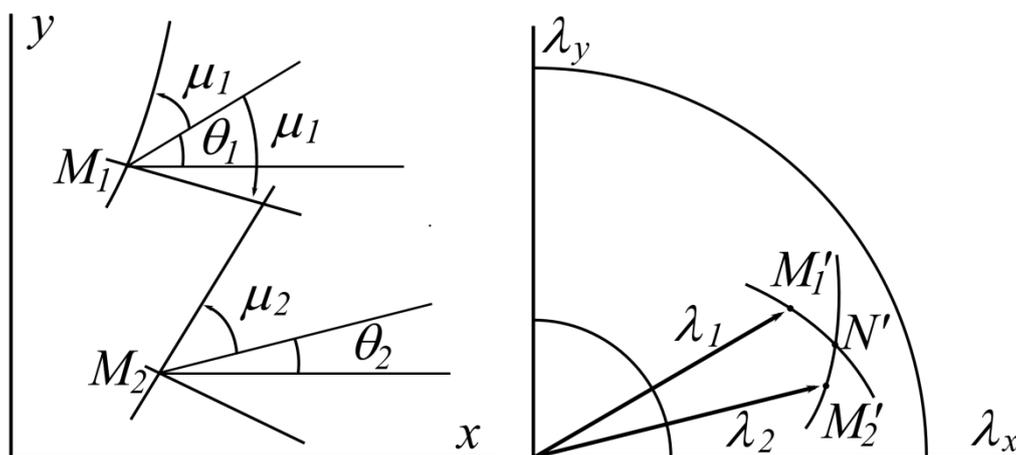


Рис. 5

А) Даны скорости в двух соседних точках M_1 и M_2 в плоскости xy , не лежащих на одной характеристике. Нужно найти скорость в точке N_1 , лежащей на пересечении характеристик I и II семейства, выходящих из M_1 и M_2 . Для этого нужно найти точку N' пересечения эпициклоид, исходящих из M'_1 и M'_2 (рис. 5).

В) Дана скорость в точке М физической плоскости. Дана линия L, не являющаяся характеристикой (вблизи точки М), на которой известна либо величина v_0 , либо направление θ_0 скорости. Нужно найти скорость в точке N пересечения L с характеристикой, исходящей из М. Здесь нужно из M' провести эпициклоиду соответствующего семейства до пересечения с окружностью $v = v_0$ или же лучом $\theta = \theta_0$.

Способ решения является наполовину конечно-разностным. Для ЭВМ он в таком виде неудобен, т.к. содержит тригонометрические функции. Действительно, если известны скорости $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ в точках M_1 и M_2 , то:

$$y'_{12} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^z}}{v_x^z - a^z} = \operatorname{tg}(\theta_1 \pm \mu_1)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{M_1} = \operatorname{tg}(\theta_1 - \mu_1) \quad \text{X2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{M_2} = \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu_1) \quad \text{X1}$$

В конечных разностях это дает:

$$y^* - y_2 = \operatorname{tg}(\theta_2 + \mu_2)(x^* - x_2), \quad y^* - y_1 = \operatorname{tg}(\theta_1 - \mu_1)(x^* - x_1),$$

$$\text{и из } d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v} = \pm \operatorname{ctg} \mu \frac{d\lambda}{\lambda} = \pm \operatorname{ctg} \mu \frac{dv}{v}:$$

$$\theta^* - \theta_2 = \frac{\operatorname{ctg} \mu_2}{v_2} (v^* - v_2), \quad \theta^* - \theta_1 = \frac{\operatorname{ctg} \mu_1}{v_1} (v^* - v_1).$$

Решая эту систему уравнений, находим координаты новой точки N и компоненты скорости в ней.

Некоторым неудобством этого метода является то, что положение новых точек N не может быть задано произвольно, исходя из целей исследования, а определяется по ходу расчета. Кроме того, при расчетах на компьютере вычисление на каждом шаге тригонометрических функций занимает большой ресурс машинного времени. Чтобы избежать этого,

Элерс предложил делать численные расчеты в новых переменных:

$$\gamma = \operatorname{ctg} \mu \quad \delta = \operatorname{tg} \theta$$

Соотношение $y' = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)$ тогда запишется как:

$$y' = \frac{\operatorname{tg} \theta \pm \operatorname{tg} \mu}{1 \pm \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \mu} = \frac{\delta \pm \gamma^{-1}}{1 \mp \delta \gamma^{-1}}.$$

То есть $\boxed{dy = \frac{\gamma \delta \pm 1}{\gamma \mp \delta} dx}$ - это соотношение на X1 и X2.

В плоскости $v_x v_y$ можем записать: $\frac{dv}{v} = \frac{d\lambda}{\lambda} =$
 $= d(\ln \lambda) = -\frac{1}{2} d \ln \left(\frac{1}{\lambda^2} \right).$

Но $\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} \frac{1}{M^2} = \frac{x+1}{2(x-1)} \frac{1}{\lambda^2}$, отсюда следует:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{h^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} \frac{1}{M^2} \right).$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x-1} \frac{1}{1+\gamma^2}, \quad \frac{1}{M^2} = \sin^2 \mu = \frac{1}{1+\gamma^2}.$$

Таким образом: $\frac{dv}{v} = \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{2} d \ln \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{x-1} \frac{1}{1+\gamma^2} \right) =$

$$\frac{2\gamma d\gamma}{\frac{1}{h^2} + \frac{2}{x-1} \frac{1}{1+\gamma^2}} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{(1+\gamma^2)^2} = \frac{2\gamma d\gamma}{x-1 + \frac{2}{1+\gamma^2}} \cdot \frac{1}{(1+\gamma^2)^2} =$$

$$\frac{2\gamma d\gamma}{x-1 + \gamma^2(x-1) + 2} \cdot \frac{1}{1+\gamma^2} = \boxed{\frac{2\gamma d\gamma}{x-1 + \gamma^2(x-1) + 2} \cdot \frac{1}{1+\gamma^2} = \frac{dv}{v}}$$

И теперь выразим $d\theta$: так как $d\delta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{d\theta}{\frac{1}{1+\tan^2 \theta}} = \frac{d\theta}{(1+\delta^2)^{-1}},$

то получаем: $d\theta = \frac{d\delta}{1+\delta^2}$

Таким образом

$$d\theta = \pm c \operatorname{tg} \mu \frac{dv}{v}$$

переходит в:

$$\frac{d\delta}{1+\delta^2} = \pm \gamma \cdot \frac{\gamma d\gamma}{\frac{x+1}{2} + \gamma^2 \frac{x-1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\gamma^2};$$

$$\frac{d\delta}{1+\delta^2} = \pm \gamma \cdot \frac{\gamma^2 d\gamma}{(1+\gamma^2) \left(\frac{x+1}{2} + \gamma^2 \frac{x-1}{2} \right)} ; \quad E d\delta = \pm F d\gamma,$$

где использованы обозначения:

$$\frac{\gamma\delta + 1}{\gamma - \delta} = a = y'_1; \quad \frac{\gamma\delta - 1}{\gamma + \delta} = b = y'_2;$$

$$\frac{1}{1 + \delta^2} = E;$$

$$\frac{\gamma^2 d\gamma}{(1 + \gamma^2)(x + 1 + \gamma^2(x - 1))} = F.$$

Теперь для нахождения положения новой точки и компонент скорости в ней в первом приближении имеем:

$$y^* - y_2 = a(x^* - x_2); \quad y^* - y_1 = b(x^* - x_1).$$

$$(\delta^* - \delta_2)E_2 = a(\gamma^* - \gamma_2)F_2; \quad (\delta^* - \delta_1)E_1 = b(\gamma^* - \gamma_1)F_1.$$

Разрешив эти уравнения, получим:

$$x^* = \frac{y_1 - y_2 + ax_2 - bx_1}{a - b}; \quad y^* = y_1 + b(x^* - x_1).$$

$$\delta^* = \frac{F_2(\gamma_1 F_1 + \delta_1 E_1) + F_1(\gamma_2 F_2 + \delta_2 E_2)}{E_2 F_1 - E_1 F_2};$$

$$\gamma^* = \frac{\gamma_1 F_1 + \delta_1 E_1 - E_1 \delta^*}{F_1}.$$

Далее при необходимости можно повысить точность значений $x^* y^*$, δ и γ в точке M^* методом итераций. Имеется два подхода:

Первый способ состоит в том, что найденные в первой итерации значения $y_1^1 = a_*^{(1)}$ и $y_2^1 = b_*^{(1)}$ уточняются, $a_*^{(1)}$ и $b_*^{(1)}$ считаются через δ^* и γ^* , и через них y_1^1 и y_2^1 .

$$a^{(2)} = \frac{1}{2}(a_1^{(1)} + a_*^{(1)}), \quad b^{(1)} = \frac{1}{2}(b^{(1)} + b_*^{(1)}).$$

То есть наклон характеристик первого семейства в точке M_2 равен среднему значению, между старым наклоном в этой точке и наклоном в следующей точке M^* .

Соответственно новое положение точки M^* находится из уравнений:

$$y_*^{(2)} - y_2 = a^{(2)}(x_*^{(2)} - x_2); \quad y_*^{(2)} - y_1 = b^{(2)}(x_*^{(2)} - x_1).$$

Второй способ. Нужно вычислить $a_*^{(1)}$, $b_*^{(1)}$, $E_*^{(1)}$, $F_*^{(1)}$, и подставить вместо a , b , E_1 , E_2 , F_1 , F_2 , величины:

$$\frac{a+a_*^{(1)}}{2}; \frac{b+b_*^{(1)}}{2}; \frac{E_1+E_*^{(1)}}{2}; \frac{E_2+E_*^{(1)}}{2}; \frac{F_1+F_*^{(1)}}{2}; \frac{F_2+F_*^{(1)}}{2}.$$

Тогда получим $y_*^{(2)} x_*^{(2)}$ -- уточнённое положение M^* и уточнённые значения $a_*^{(2)}$, $b_*^{(2)}$, $E_*^{(2)}$ и $F_*^{(2)}$, и так далее пока не совпадут две итерации.

Теорема о прямолинейной характеристике позволяет определить поле скоростей однородного сверхзвукового потока газа, движущегося вдоль криволинейной стенки с расширением (рис. 6).

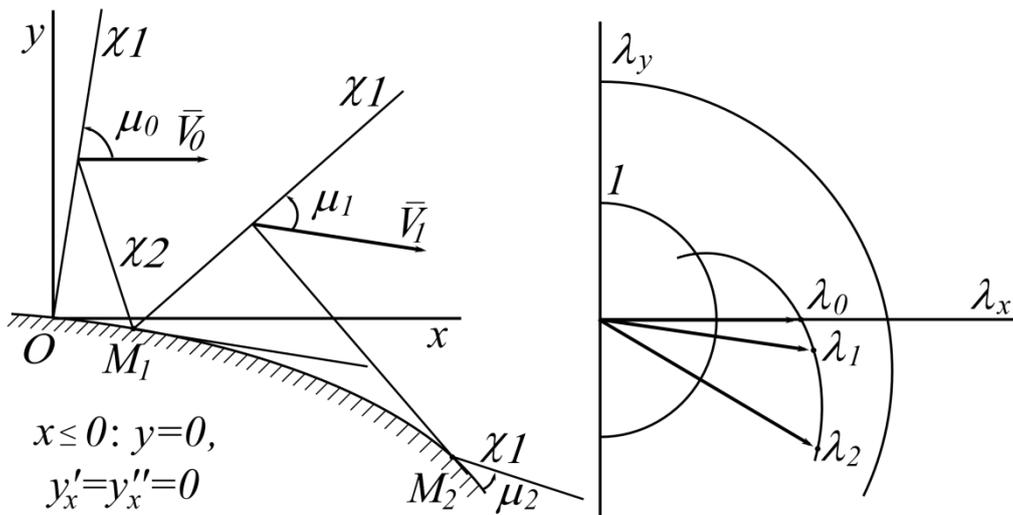


Рис. 6

В этом случае скорость вдоль любой характеристики первого семейства $X1$ определяется наклоном стенки в точке пересечения с $X1$, а величина этой скорости, как видно из рисунка, растет по мере увеличения наклона стенки. Используя дальше уравнение Бернулли, можем сказать, что давление в таком потоке будет непрерывно уменьшаться.

Совсем другая ситуация в случае однородного сверхзвукового потока газа, движущегося вдоль криволинейной стенки с поджатием (рис. 7). В этом случае, как ясно из рисунка, величина скорости на следующих вниз по потоку характеристиках первого семейства уменьшается, что увеличивает их угол наклона к направлению стенки, к которому ещё добавляется местный угол наклона стенки к оси Ox . Таким образом следующая характеристика первого семейства должна пересечься с предыдущей $X1$, и в месте их пересечения окажутся два разных значения скорости потока. Такие точки образуют поверхность разрыва параметров потока – ударную волну.

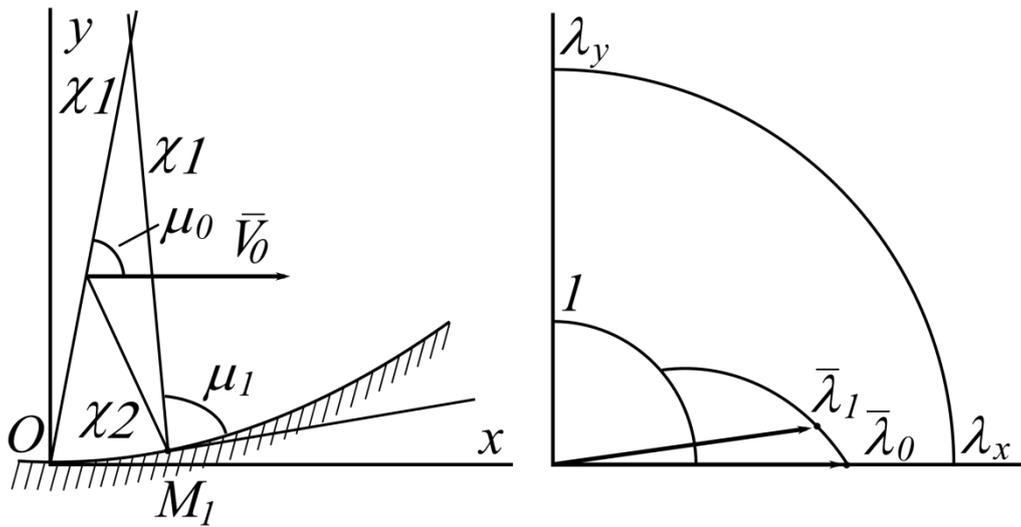


Рис. 7

Очень важным случаем плоского стационарного течения является обтекание равномерным сверхзвуковым потоком газа тупого внешнего угла (рис.8). При этом, как было показано, происходит увеличение скорости газа, понижение в нем давления, температуры и плотности. Область, в которой газ расширяется, заключенная между прямолинейными характеристиками первого семейства OA (соответствующей числу Маха M_1 до поворота) и OB (соответствующей числу Маха M_2 после разворота), называется простой центрированной волной расширения.

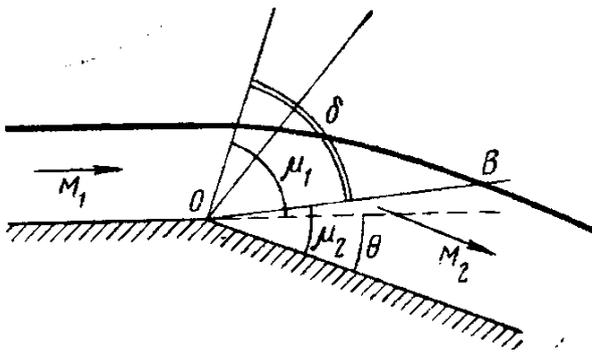


Рис. 8 [3]

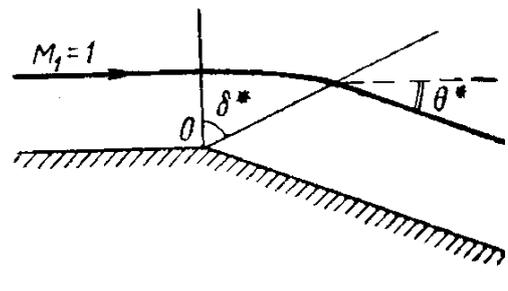


Рис. 9 [3]

В отличие от волн сжатия конечной интенсивности – скачков уплотнения, волны расширения являются областями непрерывного изэнтропического изменения параметров газа.

Расчет простых волн расширения входит как элемент в решение многих более сложных задач.

Как было показано, параметры газа в волне расширения постоянны вдоль каждой характеристики первого семейства. Вследствие этого всем характеристикам второго семейства соответствует одна и та же эпициклоида второго семейства и, если поток газа до расширения имеет звуковую скорость $v = a$, то она имеет вид:

$$\theta^* = \lambda_m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\lambda_m} - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}, \text{ где } \lambda_m = \frac{V_m}{a_{кр}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}, \quad (9.1)$$

и даёт однозначную связь угла поворота потока в волне θ^* (рис. 8) с числом Маха потока после поворота. Угол δ^* , определяющий область, занятую волной расширения:

$$\delta^* = \lambda_m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\lambda_m}. \quad (9.2)$$

Если поток газа до расширения имеет скорость сверхзвуковую ($M_1 > 1$), то при решении задач удобно считать, что эта скорость приобретена газом в процессе некоторого фиктивного поворота на угол θ_1^* , до которого скорость газа была звуковой. Угол θ_1^* вычисляется по (9.1) при $M = M_1$.

Угол θ , на который повернется поток с увеличением числа Маха от $M = M_1$ до $M = M_2$ может быть найден как разность фиктивных углов поворота, соответствующих числам M_1 и M_2 : $\theta = \theta^*(M_2) - \theta^*(M_1)$.

Таким образом, каждому числу M соответствует угол θ^* , характеризующий «израсходованную часть способности газа к расширению».

Аналогично, угол δ , занятый волной расширения, можно найти как разность $\delta = \delta_2^* - \delta_1^*$, где δ_1^* и δ_2^* вычисляются по (9.2) при $M = M_1$ и M_2 - соответственно. Значения $\theta^*(M)$ и $\delta^*(M)$ для воздуха при $k = 1,4$ даны в [3] табл. 6.

Между углами θ^* , δ^* и μ имеется соотношение: $\theta^* = \delta^* + \mu - 90^\circ$.

Полагая в выражении (9.1) $M = \infty$, получим угол $(\theta_{\max})_{M_H=1}$, на который способен повернуться в волне расширения поток газа, имеющий до поворота начальное число Маха $M_H = 1$:

$$(\theta_{\max})_{M_H=1} = (\lambda_m - 1) \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

Для воздуха: $(\theta_{\max})_{M_H=1} = 130.4^\circ$. Максимальный угол поворота в волне расширения потока с начальным числом $M_H = M_1 \neq 1$ получим как

$$(\theta_{\max})_{M_H=M_1} = (\theta_{\max})_{M_H=1} - \theta^*(M_1).$$

Соотношение между давлениями на двух каких-либо лучах в волне расширения получим, зная числа M на этих лучах:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi(M_2)}{\pi(M_1)} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Для ударной волны (волны сжатия), в которой отклонение потока невелико, годограф скорости отличается от эпициклоиды лишь малыми третього порядка. Поэтому слабые волны сжатия можно считать «почти изоэнтропическими» и употреблять метод характеристик не только к расчету течений расширения, но и течений, содержащих как волны расширения, так и слабые ударные волны одновременно.

Для решения задач на взаимодействие волн с поверхностями необходимо учитывать, что: а) если давление вдоль свободной поверхности постоянно, волна сжатия отражается от нее волной расширения, а волна расширения – волной сжатия;

б) отражаясь от плоской стенки, волны сжатия и волны расширения, не взаимодействующие с другими волнами, не меняют своего типа;

в) при наличии оси симметрии в течении, она может быть принята в расчете за твердую стенку.

Осесимметричные течения

Для осесимметричных в том числе и вихревых течений конечно-разностная методика полностью сохраняется, только правые части расчетных формул становятся более громоздкими.

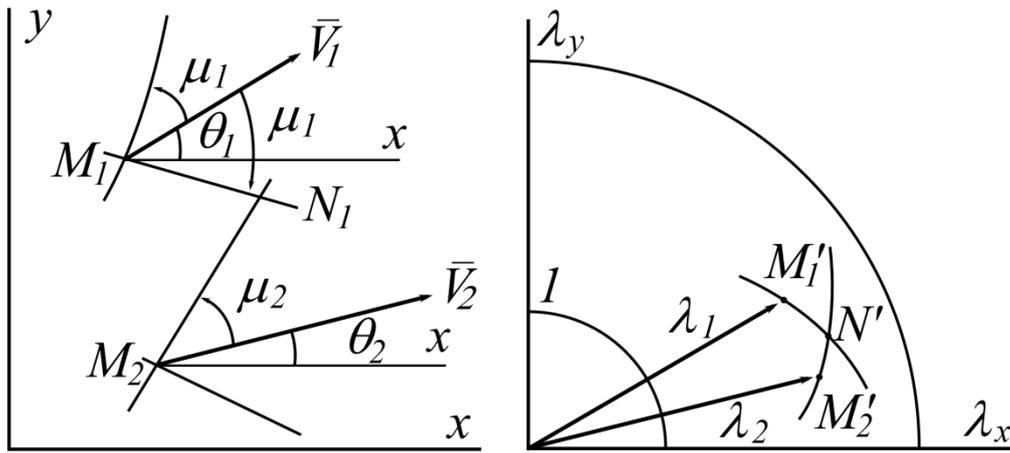


Рис. 10

а) Даны скорости в двух соседних точках M_1 и M_2 в плоскости xu , не лежащих на одной характеристике (рис. 10). Нужно найти скорость в точке N_1 , лежащей на пересечении характеристик I и II семейства, выходящих из M_1 и M_2 . Для этого нужно найти точку N' пересечения эпициклоид, исходящих из M_1' и M_2' .

б) Дана скорость в точке M физической плоскости. Дана линия L , не являющаяся характеристикой (вблизи точки M), на ней известна либо величина v_0 , либо направление θ_0 скорости. Нужно найти скорость в точке N пересечения L с характеристикой, исходящей из M . Здесь нужно из M' провести эпициклоиду соответствующего семейства до пересечения с окружностью $v = v_0$ или же лучом $\theta = \theta_0$.

Способ решения является конечно-разностным. Действительно, если известны скорости $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ в точках M_1 и M_2 , то:

$$r'_{1,2} = \frac{v_x v_r \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)}$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{M_1} = \frac{v_x v_r - a\sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)} \quad X2$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{M_2} = \frac{v_x v_r + a\sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)} \quad X1$$

В конечных разностях это дает:

$$\left. \begin{aligned} r^* - y_2 &= \frac{v_x v_r + a\sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)} (x^* - x_2) \\ r^* - y_1 &= \frac{v_x v_r - a\sqrt{v^2 - a^2}}{(v_x^2 - a^2)} (x^* - x_1) \end{aligned} \right\}$$

$$dv_r + \frac{1}{r'_2} dv_x = \left\{ -\frac{2a\omega\sqrt{v^2 - a^2}}{v_r^2 - a^2} r'_1 + \frac{a^2 v_2}{r(v_r^2 - a^2)} r'_1 \right\} dx - \text{первое семейство.}$$

$$dv_r + \frac{1}{r'_1} dv_x = \left\{ \frac{2a\omega\sqrt{v^2 - a^2}}{v_r^2 - a^2} r'_2 + \frac{a^2 v_2}{r(v_r^2 - a^2)} r'_2 \right\} dx - \text{второе семейство.}$$

ЛЕКЦИЯ 10

Обтекание кругового конуса

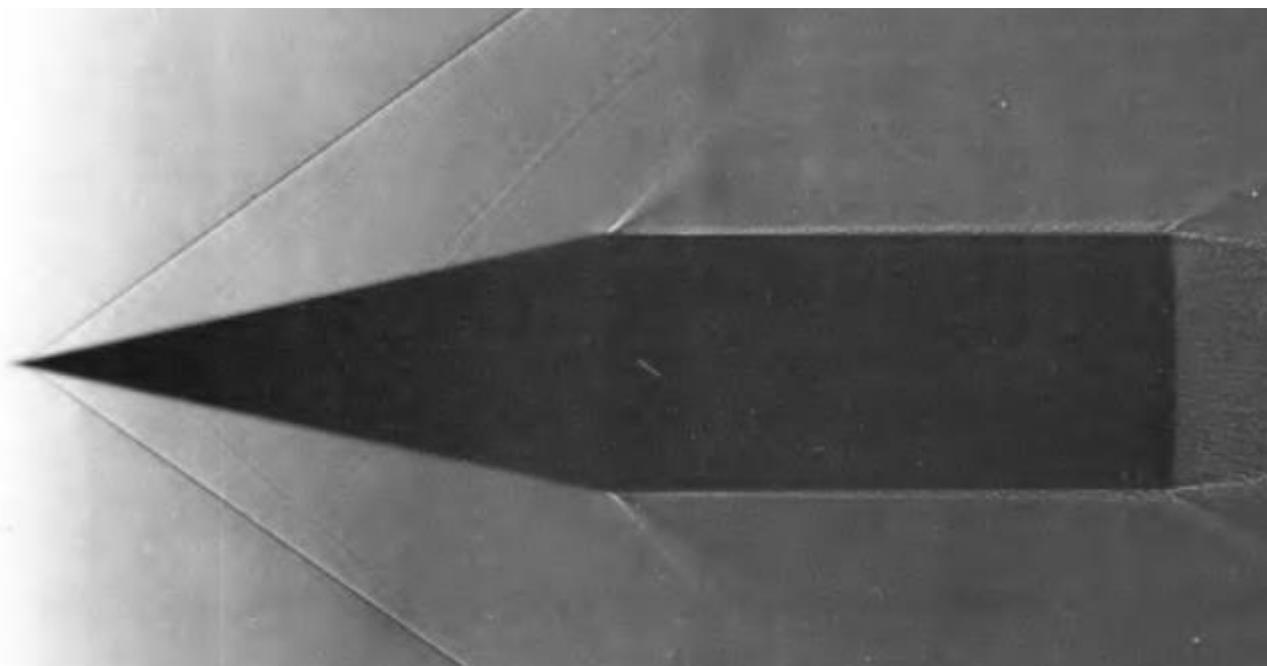


Рис.1.

Экспериментальная картина обтекания кругового конуса с полууглом раствора $\theta_k = 12.5^\circ$, потоком газа с $M_1=1.84$

Важной как с практической, так и с теоретической точки зрения задачей является расчёт течения газа около конической поверхности. Коническую форму имеют многие головные части ракет, самолетов и других летательных аппаратов. Эта задача подробно исследовалась как теоретически, так и экспериментально.

Конус предполагается бесконечным, газ идеальным, скорость набегающего потока сверхзвуковая и направлена вдоль оси симметрии конуса. Введем две системы координат: цилиндрическую - x, r, φ (Рис.2.)

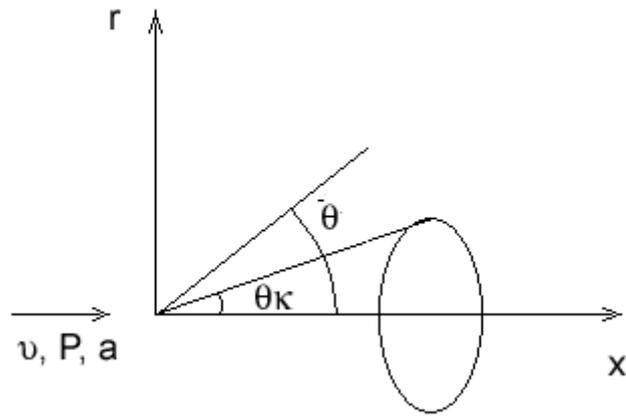


Рис.2.

и сферическую R, θ, ω (Рис.3).

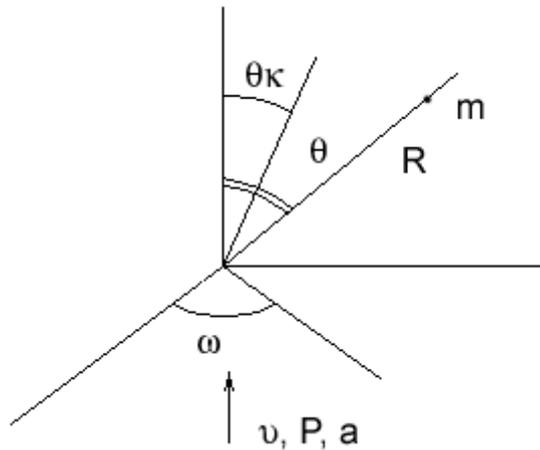


Рис.3.

Так как в постановке задачи отсутствует линейный размер, то линейная координата R не должна входить в решение задачи. Это означает, что на любом луче, исходящем из начала координат, значение искомых функций будет постоянным. То есть искомые функции не зависят от R . А в силу симметрии задачи они не зависят и от угла ω . Таким образом, искомые функции могут зависеть лишь от угла θ . И, следовательно, все параметры постоянны на любом из соосных конусов. Такое течение называется коническим.

Поскольку течение сверхзвуковое, должна возникнуть ударная волна, которая в силу сделанных предположений также будет иметь форму конуса. В набегающем потоке параметры постоянны и, следо-

вательно: $\overline{rot \bar{v}} = 0$. А так как ударная волна прямолинейна, скачек энтропии везде будет один и тот же и поток за скачком останется безвихревым.

Искомymi функциями в задаче являются поле скоростей и поле давления:

$$\begin{cases} v_R = v_R(\theta) \\ v_\theta = v_\theta(\theta) \\ p = p(\theta) \end{cases}$$

Систему уравнений в этом случае можно взять в виде:

$$\begin{cases} (\nabla \frac{v^2}{2}, \bar{v}) = a^2 \operatorname{div} \bar{v} \\ \overline{rot v} = 0 \\ \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa - 1} = \text{const} \end{cases}$$

Неизвестными здесь являются две компоненты вектора скорости v_i и скорость звука a . Записывая два первых уравнения в сферической системе координат с учетом сделанных выше предположений, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= -v_R - \frac{v_R + v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{1 - v_\theta^2/a^2} \\ \frac{\partial v_R}{\partial \theta} &= v_\theta \end{aligned}$$

Это система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, где аргументом является угол θ , а скорость звука выражается через компоненты скорости с помощью уравнения Бернулли. Для их решения нужно иметь два граничных условия. Рассмотрим поле течения между ударной волной и поверхностью конуса. На поверхности конуса действует условие непротекания:

$$\text{при } \theta = \theta_k \quad v_\theta = 0.$$

Однако второго условия на этой границе нет. Рассмотрим другую границу - ударную волну, где $\theta = \beta$ $v_\tau = v_R$ $v_{n2} = -v_\theta$:

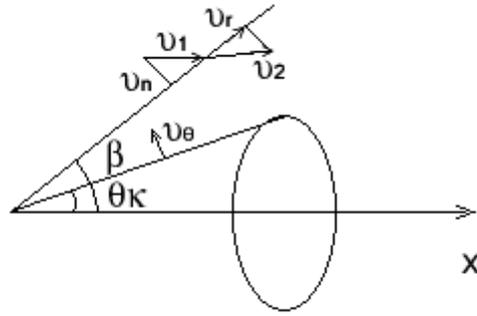


Рис. 4.

Схема обтекания конуса сверхзвуковым потоком.

При переходе через ударную волну касательная компонента скорости сохраняется, следовательно $v_R = v_1 \cos \beta$. Выполняется также соотношение Прандтля: $v_{n1} v_{n2} = a_{kp}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_\tau^2$. Таким образом на ударной волне при $\theta = \beta$ имеем пару граничных условий:

$$\begin{cases} v_\theta = -\frac{a_{kp}^2}{v_1 \sin \beta} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1 \cos \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta \\ v_R = v_1 \cos \beta \end{cases}$$

Однако угол раствора ударной волны неизвестен. Таким образом, мы получаем краевую задачу с условиями, заданными на разных концах промежутка, тогда как стандартные методы решения таких систем ориентированы на решение задачи Коши (с условиями на одном конце). При этом значение $\theta = \beta$ неизвестно. Чтобы выйти из положения в нашем случае можно воспользоваться методом «пристрелки». В соответствии с данным методом решаем задачу Коши для каждого $\beta_k \in [0, \pi/2]$ до тех пор, пока не выполнится условие непротекания. Это значение θ_k сравниваем с заданным углом раствора конуса. Когда они окажутся равны в пределах заданной точности, получаем искомый угол отклонения ударной волны и значения компонент скорости.

Для нахождения полей давления и плотности за скачком используются следующие формулы: значение постоянной адиабаты за скачком

$$C_2 = p_2 / \rho_2^\kappa,$$

где p_2 и ρ_2 вычисляются по формулам для косога скачка:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} \right)^{-1}.$$

Тогда поле давления можно построить с помощью уравнения Бернулли как:

$$p = \left[\frac{\kappa - 1}{\kappa C_2^{1/\kappa}} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa - 1} - \frac{V^2}{2} \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}},$$

а поле плотности из уравнения адиабаты как:

$$\rho = (p/C_2)^{1/\kappa}.$$

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно использовать, например, метод Рунге-Кутты.

Для комбинации конуса с цилиндром или другими формами полученное решение справедливо в области определения граничных условий на поверхности конуса, то есть в треугольнике между конусом, ударной волной и первой характеристикой, исходящей из точки сопряжения конуса с другой фигурой.

Ниже в качестве примера приведены графики полей скоростей и давления для числа Маха $M = 1,4$ и для $M = 2$ при $\theta_k = 10^\circ$. Считалось, что $a_1 = 340$ м/с, $\kappa = 1.4$. На графиках скоростей нижняя кривая соответствует тангенциальной скорости V_θ , средняя – радиальной V_r , верхняя – модулю скорости $V = \sqrt{V_\theta^2 + V_r^2}$. По оси абсцисс отложен угол θ , $\theta_k \leq \theta \leq \beta$

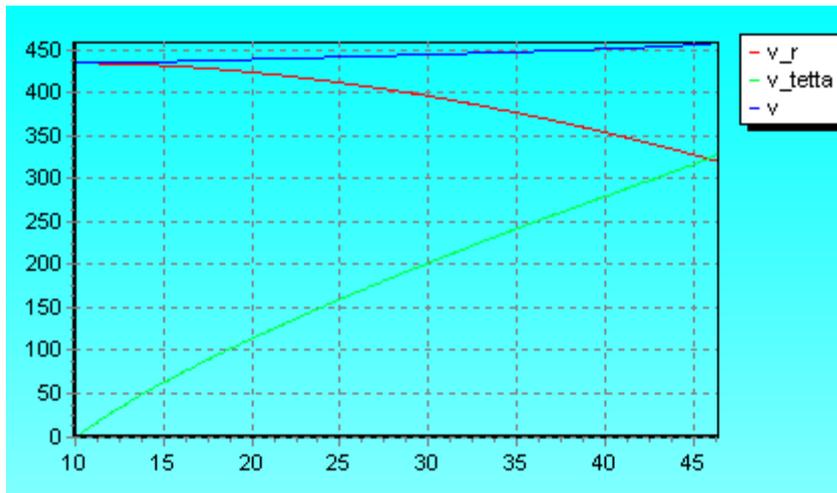


Рис.5. Распределение скоростей для $M = 1,4$.

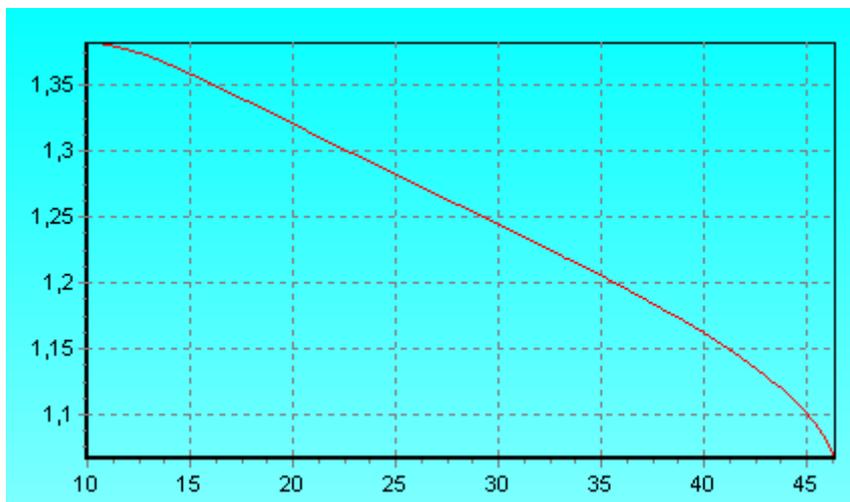


Рис.6. Распределение давления для $M = 1,4$.

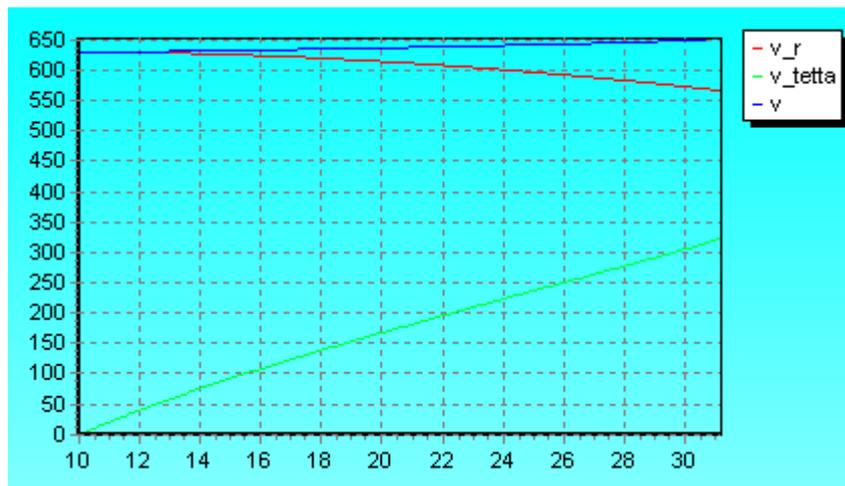


Рис.7. Распределение скоростей для $M = 2$.

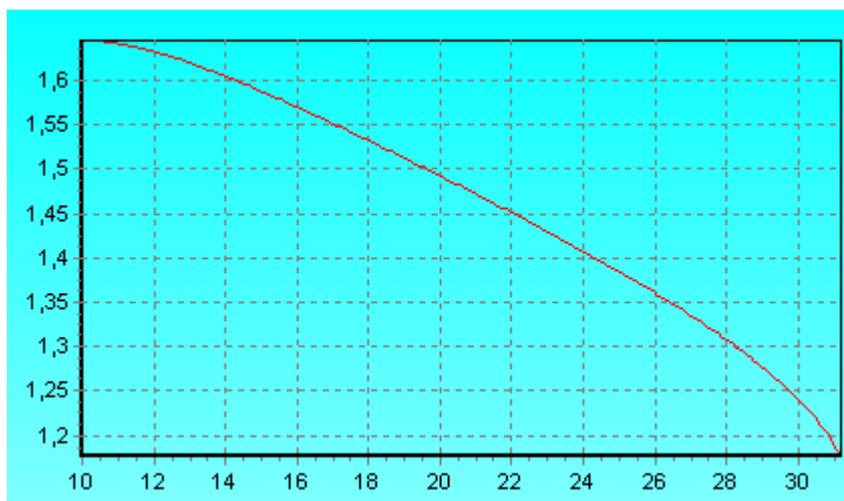


Рис.8. Распределение давления для $M = 2$.

На графике ниже приведена зависимость θ_k от β для $M = 2$. Видно, что не для всякого конуса есть решение с присоединенным косым скачком (однако в случае обтекания клина при том же числе Маха 2, скачок отходил при θ_k меньше 23 градусов).

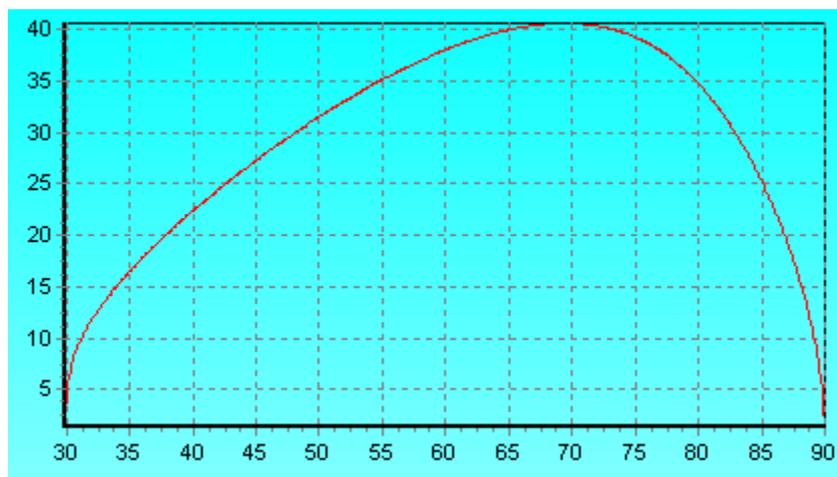


Рис.9. Зависимость θ_k от β для $M = 2$

Из приведенных графиков видно, что при увеличении числа Маха набегающего потока ударная волна “прижимается” к поверхности конуса. Радиальная составляющая скорости возрастает, а модуль скорости убывает при $\theta \rightarrow \theta_k$. Также нетрудно заметить, что более высокому числу Маха соответствует большее значение критических углов.

ЛЕКЦИЯ 11

Плоские дозвуковые течения газа

Дозвуковые течения описываются уравнениями эллиптического типа. В этом случае уже нет такого надёжного аппарата, как метод характеристик, взаимовлияние областей решения значительно большее и задачи решаются значительно труднее. Поэтому ограничимся рассмотрением самых простых плоских стационарных течений. Ограничимся также случаем $rot \bar{v} = 0$.

Итак, ограничения:

$$1) p_{ij}|_{i \neq j} = 0; \quad 2) \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0; \quad 3) \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0; \quad 4) \bar{F} = 0; \quad 5) i_0 = const.$$

Уравнения:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0; \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p; \quad \frac{p}{\rho^\kappa} = c; \quad p = R\rho T; \quad rot \bar{v} = 0.$$

Или:

$$1) \left(\bar{v}, \nabla \frac{v^2}{2} \right) = a^2 \operatorname{div} \bar{v} = a^2 \Delta \varphi; \quad \text{где: } \bar{v} = \nabla \varphi: v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

$$2) \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} a_{\text{зв}}^2 = \frac{1}{2} h^2 a_{\text{зв}}^2 = \frac{v_m^2}{2} = i_0 = const, \text{ следовательно}$$

$$a = a(v).$$

$$3) \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0,$$

Имеем три уравнения для трех неизвестных функций v_x , v_y и a . Таким образом в общем случае задача сводится к решению этих уравнений при соответствующих граничных условиях.

Уравнение 1) для плоского движения принимает вид:

$$(v_x^2 - a^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + (v_y^2 - a^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \text{ или:}$$

$$(a^2 - v_x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (a^2 - v_y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (11.1)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции $\varphi(x, y)$.

Общий вид такого уравнения: $Ar - 2Bs + Ct = 0$. Его тип зависит от знака дискриминанта: $\Delta = B^2 - AC$.

$\Delta > 0$ – уравнение гиперболического типа.

$\Delta < 0$ – уравнение эллиптического типа.

$$\text{У нас: } r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

$$\Delta = v_x^2 v_y^2 - (a^2 - v_x^2)(a^2 - v_y^2) = -a^4 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2 = a^2 (v^2 - a^2).$$

При $v < a$, $\Delta < 0$ – эллиптический тип.

Уравнение это - нелинейное, так как коэффициенты содержат искомые функции. В этом проблема, так как нет универсальных методов решения таких уравнений. Однако можно свести поставленную выше задачу к решению линейного уравнения, если сформулировать её специальным образом. Наиболее используемый подход - метод С.А. Чаплыгина.

Введем вместо независимых переменных x и y новые независимые переменные: компоненты вектора скорости в полярной системе координат v и θ , а вместо искомых функций (компонент вектора скорости) потенциал скорости $\varphi(v, \theta)$ и функцию тока $\psi(v, \theta)$. Из уравнения неразрывности и условия отсутствия вихря имеем по определению:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Уравнение Бернулли можно использовать в виде:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \varepsilon(\lambda) = f(v).$$

При этом ρ_0 , ρ , T_0 – все сохраняются т.к. $i_0 = const$, отсюда $T_0 = const$

и $\rho_0 = R\rho_0 T_0 = const$, т. к. $\frac{\rho_0}{\rho_0^k} = const..$

В плоскости годографа скорости перейдем к полярным координатам: $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$. Тогда:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v(\cos \theta dx + \sin \theta dy)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = v \left(-\frac{\rho}{\rho_0} \sin \theta dx + \frac{\rho}{\rho_0} \cos \theta dy \right)$$

Разрешив эту систему относительно dx и dy , получим:

$$dx = \frac{1}{v} \cos \theta d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta d\psi,$$

$$dy = \frac{1}{v} \sin \theta d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho v} \cos \theta d\psi. \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{v} \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{1}{v} \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\rho_0}{\rho v} \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{v} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Теперь надо исключить x и y перекрестным дифференцированием:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial \theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial v} \Rightarrow \\
& -\frac{1}{v} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v} \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{1}{v} \cos \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial \theta} - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial \theta} = \\
& -\frac{1}{v^2} \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{d}{dv} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) + \frac{1}{v} \cos \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial \theta} - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial \theta}; \\
& \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial \theta} = \frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial v} \Rightarrow \frac{1}{v} \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{1}{v} \sin \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial \theta} + \frac{\rho_0}{\rho v} \cos \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial \theta} = \\
& -\frac{1}{v^2} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{d}{dv} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) + \frac{1}{v} \sin \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial \theta} + \frac{\rho_0}{\rho v} \cos \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial \theta}.
\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $-\sin \beta$, второе на $\cos \beta$ и складывая, получаем:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d}{dv} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (11.2)$$

А умножая первое на $\cos \beta$, второе на $\sin \beta$ и складывая, получим:

$$\begin{aligned}
-\frac{\rho_0}{\rho v} \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Rightarrow \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= v \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial v}
\end{aligned} \quad (11.3)$$

Присоединим к ним уравнения Бернулли в виде:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \varepsilon(\lambda) = \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = (1-\tau)^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (11.4)$$

Полученная таким образом система (11.2) – (11.4) является уже системой линейных уравнений (коэффициенты не содержат искомым функций φ и ψ). Преобразуем её к более наглядному виду.

Введем новую независимую переменную $\tau = \frac{v^2}{v_m^2} = \frac{\lambda^2}{h^2}$,

$$v = v_\infty \sqrt{\tau}, \quad \lambda^2 = \tau h^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

$$v \frac{\partial}{\partial v} = 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}, \text{ но } d\tau = \frac{2\sqrt{\tau}}{v_m}.$$

В новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= v \frac{d}{dv} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) = -\frac{2}{v_m} (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{1-\tau - \frac{2\tau}{\kappa-1}}{2\sqrt{\tau}(1-\tau)}. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= v \frac{d}{dv} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{2\sqrt{\tau}}{v_m} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= -\frac{1-h^2\tau}{2\tau} (1-\tau)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Также

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= v \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad v \frac{\partial \psi}{\partial v} = 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 2\tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Исключая φ перекрестным дифференцированием, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(2\tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) + \frac{1 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (11.7)$$

Это и есть уравнение С.А. Чаплыгина.

Нетрудно показать, что это уравнение эллиптического типа при $\lambda < 1$ и гиперболического при $\lambda > 1$. Действительно:

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= (B=0) = -2\tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{1-h^2\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} = \\ &= -(1-h^2\tau)(1-\tau)^n, \text{ но } \tau \leq 1 \text{ и при } 0 \leq \lambda \leq 1, \left(\tau = \frac{\lambda^2}{h^2} \right), 0 \leq \tau \leq \frac{1}{h^2}, \end{aligned}$$

следовательно, $\Delta < 0$ и уравнение эллиптического типа при $\lambda < 1$.

Основная потеря состоит в том, что при переходе от физической плоскости x, y к плоскости независимых переменных τ, θ , получаем неизвестные границы течения в области τ, θ (Ω).

Задачу о течении газа с помощью уравнения Чаплыгина можно решить, если:

- 1) Если известна область Ω , переменных τ, θ , соответствующая области течения в плоскости x, y .

- 2) Если известна ψ на границах L этой области.
 3) Если функция ψ со своими двумя частными производными конечна, однозначна и непрерывна в Ω , а τ обращается в нуль лишь в конечном числе точек контура L .

Отметим трудности, связанные с определением Ω .

Например, при решении задачи об обтекании профиля нужно знать распределение скорости \bar{v} по профилю, то есть фактически знать решение задачи. Но есть задачи, в которых граница Ω определяется легко. Это, например, задачи струйного обтекания препятствий. Там эти уравнения и эффективны.

Уравнение Чаплыгина можно еще упростить, перейдя от τ к некоторой дифференцируемой функции $s(\tau)$.

Положим: $\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{1-h^2\tau}{4\tau^2(1-\tau)}$, тогда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial\psi}{\partial s} \frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} = -\frac{1-h^2\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial\psi}{\partial s} \frac{\sqrt{1-h^2\tau}}{2\tau(1-\tau)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\sqrt{1-h^2\tau}}{2\tau(1-\tau)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(1-h^2\tau)^{\frac{1}{2}}}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{(1-\tau)^{h^2}}} \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{(1-\tau)^{h^2}}} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

Если ещё ввести обозначение:

$$\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{(1-\tau)^{h^2}}} = \sqrt{K},$$

то система уравнений принимает вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K} \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \text{где } K(s) \text{ — функция Чаплыгина.}$$

Можно записать это в виде одного уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \ln K \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0, \text{ где } s = \int \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2}\right)}} \frac{d\lambda}{\lambda} + c$$

ЛЕКЦИЯ 12

Нестационарные одномерные течения газа

Выше рассматривались течения газа, которые мало менялись с течением времени и поэтому называются стационарными. Однако для многих задач газовой динамики зависимость от времени является самым существенным как, например, в задачах теории взрыва или запуска ракетного двигателя.

Многие характерные эффекты нестационарности можно выявить на примере одномерных нестационарных течений, таких как взрыв в безграничном пространстве или течение газа по трубе постоянного диаметра.

Уравнения адиабатических течений идеального газа в общем случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0 \text{ - уравнение неразрывности;}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \bar{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \text{ - уравнение движения;}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}(\rho E + p)) = 0 \text{ - уравнение энергии.}$$

$$ds/dt = 0$$

Дальше будем считать, что все параметры зависят от времени t и единственной пространственной координаты x , скорость \bar{v} имеет единственную компоненту $v_x = v$. Энтропия сохраняется в частице. Тогда эти уравнения примут вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (12.2)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (12.3)$$

Будем также считать течение изоэнтропическим. Если оно началось из состояния покоя, то оно будет таковым, пока по газу не пройдет ударная волна переменной по времени интенсивности.

В этом случае $p = f(\rho, s_0)$, то есть течение баротропное и можно ввести функцию давления $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial x}$ где $\tau = \int \frac{dp}{\rho}$,

$$d\tau = \frac{dp}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Тогда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{a^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}$, так как $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$, и

уравнения (12.1-12.2) переписутся в виде:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} v \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0,$$

$$\text{здесь: } \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + v \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)$$

Введем новую функцию давления. $d\tilde{\tau} = \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a\rho} dp$,

$$\tilde{\tau} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)a(p)}. \text{ Ясно, что } \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial \tau}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial \tau}{\partial x}.$$

(Эти равенства следуют, в сущности, из определения $\tau : \frac{dp}{a\rho} = d\tilde{\tau}$

причем дифференциал может быть взят как при постоянной t , так и при постоянной x – он произвольный).

Тогда уравнения (12.1 – 12.2) примут вид:

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tau} + v) + (v + a) \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\tau} + v) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tau} - v) + (v - a) \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\tau} - v) = 0.$$

Заметим, что $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x}$. Следовательно, эти уравнения можно переписать как: $\frac{d}{dt}(\tilde{\tau} + v) = 0$ и $\frac{d}{dt}(\tilde{\tau} - v) = 0$, причем в первом случае $u_1 = v + a$, а во втором $u_2 = v - a$. То есть $r = \tilde{\tau} + v$ сохраняется в точке, движущейся со скоростью $v + a$, а $s = \tilde{\tau} - v$ сохраняется в точке, движущейся со скоростью $u_2 = v - a$. Точка – это плоскость $x = const$. Таким образом, распространяются две плоских волны: c_1 и c_2 , волна первого семейства c_1 со скоростью $u_1 = \frac{dx_1}{dt} = v + a$ и второго семейства c_2 со скоростью $u_2 = \frac{dx_2}{dt} = v - a$. Направляя x по \bar{v}_1 , получим, что c_1 распространяется в сторону \bar{v} , а c_2 – в противоположную сторону. Относительная скорость распространения волны по газу: $\pm a$, где a – местная скорость звука. Волны первого семейства c_1 несут постоянное значение r , второго семейства c_2 – постоянное значение s .

Метод характеристик

Раз движения имеют волновой характер, значит уравнения (12.1 – 12.2) должны иметь действительные характеристики. Возмущения параметров распространяются вдоль характеристик. Действительно, запишем уравнения (12.1 – 12.2) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + (v + a) \frac{\partial r}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (v - a) \frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Ищем характеристики: } x = x(t). \text{ Вдоль них:}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + x^1 \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + x^1 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \text{то есть:} \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt} - x^1 \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{dt} - x^1 \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Подставляя это в уравнения, получим:

$$\frac{dr}{dt} - x^1 \frac{\partial r}{\partial x} + (v + a) \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \Rightarrow \frac{dr}{dt} - \frac{\partial r}{\partial x} [x^1 - (v + a)] = 0.$$

$$\frac{ds}{dt} - x^1 \frac{\partial s}{\partial x} + (v - a) \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \Rightarrow \frac{ds}{dt} - \frac{\partial s}{\partial x} [x^1 - (v - a)] = 0.$$

То есть линии, на которых производные определяются неоднозначно – характеристики, получаются, если $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$ и $x^1 = v + a$; $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ и $x^1 = v - a$.

На линиях c_1 : $[x^1 = (v + a)] \quad | r = const = \tilde{\tau} + v$

На линиях c_2 : $[x^1 = (v - a)] \quad | s = const = \tilde{\tau} - v$

Таким образом, имеем два семейства действительных характеристик независимо от величины v .

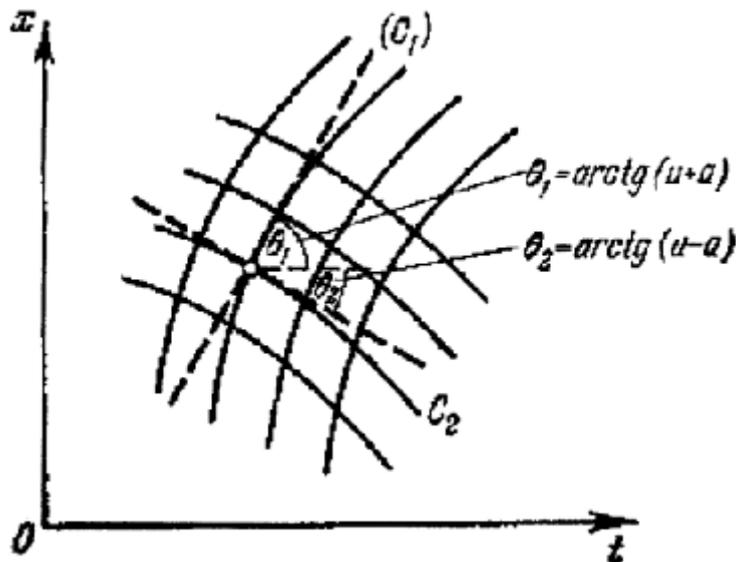


Рис. 1. Характеристики в плоскости x, t [5]

Пользуясь характеристиками, можем графически решать задачи одномерного нестационарного течения газа. Для этого надо уметь делать две операции:

1) Зная v и a в двух точках M_1 и M_2 , не лежащих на одной характеристике, находить v и a в точке N пересечения характеристик разных семейств, проходящих через эти точки.

2) В точках кривой L заданы значения v (или $\tilde{\tau}$), в точке M_1 , близкой к L , заданы $\tilde{\tau}$ и v . Найти $\tilde{\tau}$ и v в точке N пересечения кривой L и характеристики проходящей через точку M .

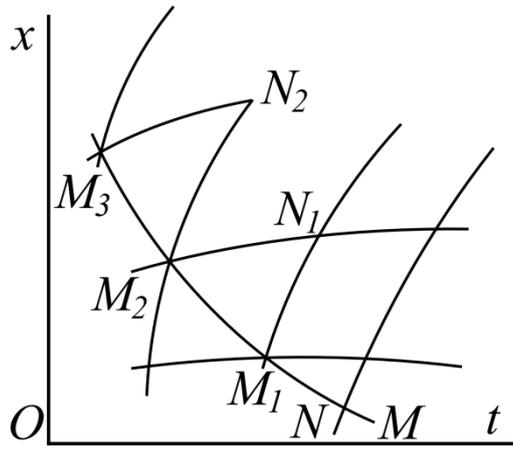


Рис. 2. Сетка характеристик.

1) Возьмём значения в точках M_1 и M_2 :

$$\text{на } M_1N_1 \quad \tilde{\tau}_{M_1} + v_{M_1} = \tilde{\tau}_{N_1} + v_{N_1}$$

$$\text{на } M_2N_1 \quad \tilde{\tau}_{M_2} - v_{M_2} = \tilde{\tau}_{N_1} - v_{N_1}$$

Откуда:

$$\tilde{\tau}_{N_1} = \frac{1}{2}(\tilde{\tau}_{M_1} + v_{M_1} + \tilde{\tau}_{M_2} - v_{M_2})$$

$$v_{N_1} = \frac{1}{2}(\tilde{\tau}_{M_1} + v_{M_1} - \tilde{\tau}_{M_2} + v_{M_2})$$

Через $\tilde{\tau}$ находим a_1, p, ρ .

2) Предположим: на L заданно распределение $\tilde{\tau}$ (то есть p, ρ, a). В частности, это может быть начальное условие ($t = const$) или граничное условие ($x = const$).

Пусть задано на c_2 значение $\tilde{\tau} - v = s$.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = v + a; \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = v - a.$$

Через точку M проводим касательную к c_1 с угловым коэффициентом $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{v + a}$. Двигаясь по ней, найдем точку N пересечения с кривой L . В плоскости $(v, \tilde{\tau})$ движемся по прямой $\tilde{\tau}_M + v_M = \tilde{\tau} + v$ до пересечения с заданным по условию значением v (или $\tilde{\tau}$).

Пользуясь этими двумя операциями, можно решить любую задачу одномерного нестационарного движения газа. Заметим, что $v + a$

величина порядка скорости звука или больше, а значит $\left| \frac{1}{v+a} \right|$ много меньше единицы, и все c_1 по наклону близки к оси x , $v-a$ может быть какой угодно.

Простые волны

Простые волны – бегущие с постоянной скоростью и несущие постоянное значение параметров.

Можно, как и в плоском стационарном случае, доказать следующую теорему о прямолинейной характеристике:

Если в плоскости (x, t) одна характеристика прямолинейная, то и другие характеристики этого семейства будут прямолинейны во всей области определения.

Имеем:

$$\begin{aligned} x1) \quad x' = (v+a) \quad r = \tilde{\tau} + v = const & \quad \tilde{\tau} = \frac{2}{x-1}(a-a_0) \\ x2) \quad x' = (v-a) \quad s = \tilde{\tau} - v = const & \quad \text{так как } \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(a). \end{aligned}$$

Пусть $x1$ прямая $\Rightarrow x' = (v+a) = const$ и $\tilde{\tau} + v = const \Rightarrow \tilde{\tau} = const$. $v = const$ каждая по отдельности. Но тогда на всех прямых второго семейства $s = \tilde{\tau} - v = const = \tau_1 - v_1$ – одно и тоже. То есть $s = const$. во всей области течения. Следовательно для любой $x1$ будут справедливы сразу два уравнения: и $r = const$. и $s = const$. из которых можно определить постоянные значения v и a , а следовательно и x' .

Покажем, что в этом случае движение представляет собой простые волны. Пусть движение начиналось из состояния покоя: $(x=0, t=0)$.

Пусть $s = \tilde{\tau} - v = s_1 = const$. Полагая $p|_{v=0} = p_0$ и из $\tilde{\tau} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{a\rho} \Rightarrow$

$\tilde{\tau} = 0$ при $v = 0$. Тогда $s_1 = 0 \Rightarrow \tilde{\tau} = v$ – в любой момент времени. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tau} - v) + (v-a) \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\tau} - v) &= 0 \text{ – удовлетворяется тождественно.} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tau} + v) + (v+a) \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\tau} + v) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(v) + (v+a) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

То есть $\frac{d(v)}{dt} = 0$ при скорости переноса $(v + a)$. Но это значит, что свойство $v = \tau$ переносится со скоростью $(v + a)$ неизменным. Следовательно, волны первого семейства несут постоянные значения v, a, p, ρ со скоростью $(v + a)$. Для одной волны всё постоянное, но для разных – разное.

Из $v = \tilde{\tau} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{a\rho}$ $\begin{matrix} a > 0 \\ \rho > 0 \end{matrix} \Rightarrow p > p_0$ то есть возмущение – сжатие.

– Это волны сжатия.

Точно так же, предполагая $r = \tilde{\tau} + v = const = 0$ имеем $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + (v - a) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, то есть в волнах второго семейства $\tilde{\tau}$ и v – сохраняются, но $v = -\tau$, $v > 0 \Rightarrow \tau < 0 \Rightarrow p < p_0$ – это волна разрежения. Волна разрежения распространяется в направлении противоположном v . Но для разных волн поведение параметров разное. Если для волн сжатия $\tilde{\tau} = v \Rightarrow \frac{2}{\kappa - 1}(a - a_0) = v \Rightarrow a = a_0 + \frac{\kappa - 1}{2}v$ и

$v + a = a_0 + \frac{\kappa + 1}{2}v$. То есть чем быстрее движется газ, тем больше в нём скорость звука a и тем больше скорость волны $v + a$, и также большим v соответствует большие $\tilde{\tau}$, а следовательно и p и ρ . Дей-

ствительно, по определению $\frac{dp}{\rho} = d\tau \Rightarrow \frac{dp}{a\rho} = d\tilde{\tau} \Rightarrow \frac{dp}{d\tilde{\tau}} = a\rho > 0$ и

$$\frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\tilde{\tau}} = a\rho \Rightarrow \frac{d\rho}{d\tilde{\tau}} = \frac{\rho}{a} > 0.$$

Таким образом, абсолютная $(v + a)$ и относительная (a) скорости волны сжатия тем больше, чем больше переносимые ею интенсивности возмущения.

Для волн второго семейства:

$$\tilde{\tau} = -v \Rightarrow \frac{2}{\kappa - 1}(a - a_0) = -v, \quad a = a_0 - \frac{\kappa - 1}{2}v, \quad v - a = -a_0 + \frac{\kappa + 1}{2}v.$$

С увеличением разрежения $(p_0 - p)$ растёт $\left| \int_{p_0}^p \frac{dp}{a\rho} \right|$ так что возрастает и v . При этом относительная скорость волны (a) – убывает, а

абсолютная скорость $(a - v)$ – растёт. Таким образом, начальная форма возмущения не сохраняется.

Если рассмотреть первоначальную форму возмущения $y=f(x)$, $x_1 < x < x_2$ в виде холма, то эти возмущения побегут влево в виде волн разрежения с уменьшением крутизны склонов холма и побегут вправо в виде волн сжатия, причём склон с убывающей интенсивностью возмущения будет становится всё круче, пока задние волны большей интенсивности не догонят передние, образуя ударную волну.

ЛЕКЦИЯ 13

Решение нестационарных задач в переменных Лагранжа

Одномерное движение газа можно рассматривать как течение по цилиндру постоянного диаметра, достаточно большого, чтобы можно было пренебречь пристеночными эффектами. Рассмотрим задачу о движении газа под действием находящегося в таком цилиндре поршня. С одной стороны газ ограничен поршнем, движущимся по заданному закону, с другой стороны могут быть различные условия, например, неподвижная стенка. Система уравнений по-прежнему состоит из уравнения неразрывности, уравнения движения и уравнения энергии и может быть записана в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad \left| \begin{array}{l} E = \frac{u^2}{2} + e \\ e = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \end{array} \right.$$

В ряде частных случаев существуют точные решения этой задачи, которые удобно использовать для тестирования численных методов. Существенной особенностью этого класса задач является то, что граничное условие нужно выполнять на подвижной в эйлеровом представлении контактной поверхности. Однако эта трудность пропадает в лагранжевом представлении, так как в этом случае все контактные поверхности становятся неподвижными. Поэтому удобно уже в постановке задачи перейти к лагранжевым переменным.

Следуя [8], введем лагранжевы массовые переменные. Для этого заметим, что в рассматриваемом типе течений в силу их одномерности лагранжевой индивидуальной частицей газа может служить бесконечно тонкий «блинчик» объема $A dy$, где A - площадь поперечного сечения цилиндра, а dy расстояние вдоль продольной оси. Масса такой частицы $\rho(y, 0) A dy$ где $\rho(y, 0)$ - плотность газа в начальный ($t = 0$) момент времени. Рассмотрим две частицы, имеющие в начальный момент времени координаты (в лабораторной, эйлеровой системе) $x_0(0)$

и $x(0)$. В произвольный момент времени t эти координаты примут другие значения $x_0(t)$ и $x(t)$, но масса газа, которая разделяет эти две частицы с координатами одинакова в любой момент времени:

$$s = \int_{x_0(0)}^{x(0)} \rho(y,0)dy = \int_{x_0(t)}^{x(t)} \rho(y,t)dy$$

и может служить лагранжевой координатой одной из них, если вторую принять за начало отсчета. Таким образом будем считать величину s :

$$s = \int_{x_0}^x \rho(y,t)dy$$

лагранжевой массовой координатой частицы, имеющей в данный момент t координату x в лабораторной системе координат.

Перейдем в записанных выше уравнениях одномерного нестационарного движения газа от эйлеровых переменных x, t к лагранжевым s, t_l , где $t_l = t$.

При этом:

$$\frac{\partial t_l}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial t_l}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \rho(x, t),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0(t)}^x \rho(y, t) dy = \int_{x_0(t)}^x \frac{\partial \rho}{\partial t} dy - \rho(x_{(0)}(t)) \frac{dx_{(0)}}{dt}$$

Но из уравнения неразрывности имеем: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}$ и, следова-

тельно:

$$\int_{x_0(t)}^x \frac{\partial \rho}{\partial t} dy = - \int_{x_0(t)}^x \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} dy = -[\rho u - \rho_0 u_0], \text{ где}$$

$$\rho_0 = \rho(x_{(0)}), \quad u_0 = \frac{dx_0}{dt}$$

Окончательно:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\rho u$$

Таким образом, соотношения для замены переменных имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - \rho u \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial s}.$$

(Заметим, что для $\frac{\partial}{\partial t_n}$ – получено выражение для субстанциональной производной. Действительно:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial t} + \rho u \frac{\partial}{\partial s}, \text{ но } \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}.)$$

Произведя соответствующие замены, получим уравнения неразрывности, движения и энергии в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial s}. \quad E = \frac{u^2}{2} + e, \quad e = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Здесь индекс при временной координате опущен, так как время одинаково в обеих системах координат. Эти уравнения образуют замкнутую систему для определения скорости, плотности и давления газа. Для определения температуры можно использовать уравнение Клапейрона:

$$p = R\rho T.$$

Припишем сюда связь скорости с координатой лабораторной системы координат:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u(x, t).$$

Эта связь позволяет вернуться к лабораторной системе координат при представлении результатов расчетов.

Преимущество – в постановке граничных условий. Например, в задаче о поршне $u(s_n, t) = X_n(t)$ в одном и том же узле сетки по $s - s_n$.

Вообще, задачи об известной, неизменной массе газа обычно удобней решать в Лагранжевых переменных:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}; \\ \frac{\partial x}{\partial t} = u(x, t); \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial (pu)}{\partial s}; \\ p = R\rho T; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^x} \right) = 0 \end{array} \right| \quad A = \left. \begin{array}{l} \rho^{-1} \\ u \\ E \end{array} \right\} \begin{array}{l} A1 \\ A2 \\ A3 \end{array} \quad B = \left. \begin{array}{l} -u \\ p \\ pu \end{array} \right\}.$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = 0.$$

Закон изменения объёма

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial s} \quad u = \frac{\partial x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial s} \Rightarrow$$

$$\int_0^M \frac{ds}{\rho} = x(M, t) - x(0, t) \quad - \text{это закон изменения объёма } (ds/\rho -$$

объём массы ds) – это вариант уравнения неразрывности.

M – масса газа в параллелепипеде с единичной площадью сечения перпендикулярного x . $x(M, t)$ и $x(0, t)$ – Эйлеровы координаты границ. Можно также взять его в виде $ds/\rho = dx$.

Закон сохранения массы в общем случае $\rho D = \rho_0 D_0$, где

$$D/D_0 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \quad - \text{якобиан.}$$

Если обезразмеривать величины обычным образом, то есть масштабы: $l, a_0, R_0, p_0/\kappa, l/a_0$, то вид уравнений сохраняется в безразмерных переменных, но если Эйлеровы координаты $x', 0 \leq x' \leq 1$, то $0 \leq s' \leq M'$, где $M' = \kappa$.

Действительно, если исследуемое движение газа заключается в цилиндре длины l , то масса газа $M = \rho_0 l$.

$$0 \leq s \leq \rho_0 l \quad 0 \leq \frac{\rho_0}{\kappa} \cdot ls' \leq \rho_0 l \Rightarrow 0 \leq s' \leq \kappa.$$

ЛЕКЦИЯ 14

Теория малых возмущений

Основные уравнения:

Можно выделить большой и очень важный для технических приложений класс движений газа, в которых параметры газа мало изменяются по сравнению с некоторыми исходными значениями. К ним относится, например, процесс распространения звука, а также во многих случаях обтекание поверхностей самолетов и ракет. Летательные аппараты специально проектируются таким образом, чтобы создавать минимально возможные возмущения воздуха при полете и таким образом испытывать наименьшее его сопротивление. В таких случаях для решения уравнений движения газа можно использовать хорошо развитые методы разложения искомых функций в ряды по малому параметру.

Особенно эффективными эти методы оказались при решении задач сверхзвуковой аэродинамики.

Важно, что для не слишком больших чисел Маха ($M_\infty < 3.5$) не только $V' \ll V_\infty$, но также $p' \ll p_\infty$ и $e' \ll e_\infty$ (штрихом обозначены возмущения параметров). В качестве примера рассмотрим обтекание клина потоком газа с числом Маха из диапазона $1.5 \leq M_\infty \leq 4$ и показателем адиабаты $\kappa = 1.4$. В этом случае:

$$p/p_\infty = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_\infty^2 \sin^2 \beta - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$$

здесь β - угол раствора ударной волны.

Для относительного изменения давления газа при прохождении ударной волны имеем следующее выражение:

$$\frac{p - p_\infty}{p_\infty} = \frac{p'}{p_\infty} = \frac{p}{p_\infty} - 1 = \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_\infty^2 \sin^2 \beta - 1). \quad \kappa = 1.4$$

Для трех значений угла полураствора клина θ° получаем следующие значения относительных изменений давления $\frac{p'}{p_\infty} = \frac{p - p_\infty}{p_\infty}$:

Таблица 1

M_∞	$\theta \cong$	$\theta \cong$	$\theta \cong 10$
1,5	0,15	0,28	0,68
2	0,17	0,30	0,76
3	0,25	0,44	1,05
4	0,35	~0,65	1,68

При увеличении M_∞ уходим в область гиперзвука, когда возмущения перестают быть малыми. Но и на сверхзвуке допустимы только достаточно малые углы атаки θ .

Для кругового конуса:

Таблица 2

θ_k M_∞	5°	7.5°	10°
1,5	0,00	0,11	0,20
2	0,00	0,17	0,30
3	0,18	0,34	0,58
4	~0,27	~0,60	0,90

Ограничения менее жесткие. До 7.5° можно использовать теорию малых возмущений с ошибкой порядка 10%.

В течении Прандтля-Майера, если поток набегаёт с $M=2$ и расширяется поворачиваясь на 10°, то M возрастает до 2,42, а p/p_0 от 0,123 до 0,066, т.е. $\frac{\Delta p}{p_0} = 0.057$,

Если же поток разворачивается на 5°, то $p_1/p_0 = 0.123$, $p_2/p_0 = 0.086$, ($M_2 = 2.25$), $\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{0.037}{0.123} = 0.30$ т.е. ограничения тоже

весьма жесткие. Эти оценки справедливы, если мы сохраняем только линейные поправки в разложениях, но можно строить теорию второго и более высокого порядка точности. Однако и теория первого порядка при всей её простоте и удобстве использования является очень эффек-

тивным и широко используемым инструментом для проектирования самолётов и ракет.

Возьмем систему уравнений газовой динамики и упростим ее для течений с малыми возмущениями.

Ограничимся стационарными течениями невязкого ($\nu=0$), нетеплопроводного $(\bar{v}, \nabla s)=0$ газа, пусть также газ идеальный ($p=R\rho T$) и совершенный ($u=c_v T$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \\ p = R\rho^\kappa \exp \frac{s-s_0}{c_v} \\ (\bar{v}, \nabla s) = 0 \end{array} \right.$$

Искомых функций 6: v^i, p, ρ, s . Уравнений тоже 6.

Вместо одного из уравнений Эйлера возьмем

$$\left(\bar{V}, \nabla \frac{V^2}{2} \right) = a^2 \operatorname{div} \bar{V} \text{ и } a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Запишем это уравнение в произвольных ортогональных координатах x^i $i=1,2,3$.

$$\nabla \frac{v^2}{2} = \nabla_i \left(\frac{v^2}{2} \right) \mathcal{E}^i, \operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U^i \sqrt{g}}{\partial x^i}, u^i = \frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{v_i}{H_i},$$

где v_i - физические компоненты вектора скорости, $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ - коэффициенты Ламе.

В декартовой системе $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, в цилиндрической (x, θ, r) $H_1 = H_3 = 1, H_2 = r; \sqrt{g} = H_1 H_2 H_3$

$$\left(\bar{V}, \nabla \frac{V^2}{2} \right) = u^i \nabla_i \frac{v^2}{2} = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{v^2}{2} = \frac{v_i}{H_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} v_1 H_2 H_3 + \frac{\partial}{\partial x^2} v_2 H_1 H_3 + \frac{\partial}{\partial x^3} v_3 H_1 H_2 \right]$$

Итого:

$$\frac{v_1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial x^1} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{v_2}{2H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} v^2 + \frac{v_3}{2H_3} \frac{\partial}{\partial x^3} v^2 =$$

$$\frac{a^2}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} v_1 H_2 H_3 + \frac{\partial}{\partial x^2} v_2 H_1 H_3 + \frac{\partial}{\partial x^3} v_3 H_1 H_2 \right]$$

$$\text{Где } v^2 = (\bar{v}, \bar{v}) = u^i u^i g_{ii} = v_i v_i = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

$$\frac{v_1}{H_1} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x^1} \right) + \frac{v_2}{H_2} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x^2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x^2} \right) +$$

$$\frac{v_3}{H_3} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^3} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x^3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x^3} \right) =$$

$$\left(H_2 H_3 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + H_1 H_3 \frac{\partial v_2}{\partial x^2} + H_1 H_2 \frac{\partial v_3}{\partial x^3} + v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} H_2 H_3 + v_2 \frac{\partial}{\partial x^2} H_1 H_3 + v_3 \frac{\partial}{\partial x^3} H_1 H_2 \right)$$

$$\frac{1}{H_1} (v_1^2 - a^2) \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + \frac{1}{H_2} (v_2^2 - a^2) \frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \frac{1}{H_3} (v_3^2 - a^2) \frac{\partial v_3}{\partial x^3} +$$

$$+ v_1 v_2 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ v_1 v_3 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial x^1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial x^3} \right) + v_2 v_3 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial x^2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial x^3} \right) -$$

$$- \frac{a^2}{H_1 H_2 H_3} \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} H_2 H_3 + v_2 \frac{\partial}{\partial x^2} H_1 H_3 + v_3 \frac{\partial}{\partial x^3} H_1 H_2 \right) = 0$$

Рассмотрим частные случаи:

1) Декартова прямоугольная система:

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z; H_1 = H_2 = H_3 = 1.$$

$$(v_x^2 - a^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_y^2 - a^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} + (v_z^2 - a^2) \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) +$$

$$v_x v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + v_y v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0$$

Если течение можно считать потенциальным:

$$\bar{v} = \nabla \varphi, u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, u_i = v_i H_i, u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = v_i H_i, v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} / H_i.$$

Для декартовой системы:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$$\begin{aligned} & (v_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (v_y^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (v_z^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\ & + 2v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2v_x v_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + 2v_y v_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}$$

В плоском случае $\left(v_z = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0 \right) \Rightarrow$.

$$(v_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (v_y^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

2) Осесимметричное течение:

$$x^1 = x, x^2 = r, x^3 = \theta, H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 2.$$

$$\begin{aligned} & (v_x^2 - a^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_\theta^2 - a^2) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + (v_r^2 - a^2) \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x v_\theta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \right) + \\ & v_x v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + v_\theta v_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{a^2}{r} v_r = 0 \end{aligned}$$

Для потенциального течения: $\bar{v} = \nabla \varphi, u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, v_i = \frac{u_i}{H_i}$ (суммирование отсутствует).

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Получается уравнение:

$$\begin{aligned} & (v_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (v_\theta^2 - a^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + (v_r^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2v_x v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} + \\ & 2v_x v_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} + 2v_\theta v_r \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{v_\theta v_r}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

В случае осевой симметрии $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Линеаризация основных уравнений

Пусть скорость \bar{v}_∞ направлена по оси x^1 (т.е. ось x^1 - прямая). Пусть возмущения, как говорилось выше, являются малыми, т.е. можно представить все искомые функции в виде рядов:

$$v_1 = v_\infty + v'_1 \dots; v_2 = v'_2 + \dots; v_3 = v'_3 + \dots; p = p_\infty + p' + \dots; \rho = \rho_\infty + \rho' + \dots$$

Ограничимся везде малыми первого порядка:

$$v_1^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty v'_1, \quad v^2 = v_1^2.$$

Уравнение Бернулли при принятых ограничениях:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} = i_0$$

или

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\kappa - 1} \Rightarrow a^2 = a_\infty^2 + \frac{\kappa - 1}{2}(v_\infty^2 - v^2),$$

т.е.

$$a^2 = a_\infty^2 - (\kappa - 1)v_\infty v'_1 \quad \text{и} \quad v_1^2 - a^2 = v_\infty^2 - a_\infty^2 + (\kappa + 1)v_\infty v'_1$$

Линеаризуем основное уравнение. Отбрасываем члены второго порядка малости и выше, считая производные $\frac{\partial v'_i}{\partial x^j}$ величинами порядка v'_i , получим, деля на a_∞^2 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_1} (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial v'_1}{\partial x^1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial v'_2}{\partial x^2} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial v'_3}{\partial x^3} - \\ & - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(v'_1 (1 - (\kappa - 1) M_\infty^2) \frac{\partial}{\partial x^1} H_2 H_3 + v'_2 \frac{\partial}{\partial x^2} H_1 H_3 + v'_3 \frac{\partial}{\partial x^3} H_1 H_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

При этом: $-\frac{a_\infty^2 v_\infty}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^1} H_2 H_3 = 0$, т.к. это единственный член порядка единицы.

Если течение потенциальное, то $\bar{v} = \nabla \varphi$,

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi', \quad u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad v_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{H_i} \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x^i} \right).$$

Но

$$v_1 = v_\infty + v'_1 = \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x^1} + \frac{\partial \varphi'}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x^1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^1} = v_\infty + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x^1} = v_\infty H_1, \quad \varphi_\infty = v_\infty x^1 H_1,$$

причем H_1 не зависит от x^1 и вообще $H_1 = 1$ т.к. эти координатные линии прямолинейны.

Подставляя $v'_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^1}$, $v'_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^2}$, $v'_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^3}$, получим основное уравнение теории малых возмущений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_1^2} (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^3} \right) - \\ & - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} H_2 H_3 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} H_1 H_3 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x^3} H_1 H_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем для частных случаев:

1) Прямоугольная декартова система координат:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z; \quad H_1 = H_2 = H_3 = 1,$$

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0 \quad (14.2)$$

2) Цилиндрическая система координат:

$$x^1 = x, \quad x^2 = r, \quad x^3 = \theta, \quad H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 2,$$

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = 0. \quad (14.3)$$

Получим еще линеаризованное уравнение Бернулли:

Из $v dv = -dp/\rho$ имеем: $p - p_\infty = -\int_{v_\infty}^v \rho v dv$, или:

$$p - p_\infty = -\int_{v_\infty}^v (\rho_\infty + \rho') v dv = -\rho_\infty \frac{1}{2} (v^2 - v_\infty^2) - \underbrace{\int_{v_\infty}^v \rho' v dv}_{\square \varepsilon^2}$$

Так как ρ' величина порядка ε и промежуток интегрирования порядка ε , то, применяя теорему о среднем, получаем:

$$p' = p - p_\infty = -\frac{1}{2} \rho_\infty (v^2 - v_\infty^2) = -\rho_\infty v_\infty v'_1, \quad (\text{т.к. } v^2 = v_1^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty v'_1)$$

$$p' = -\rho_\infty v_\infty v_1'$$

Окончательно запишем линеаризованное уравнение Бернулли в виде:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 / 2} = -\frac{-2\rho_\infty v_\infty v_1'}{\rho_\infty v_\infty^2} = -\frac{2v_1'}{v_\infty}$$

$$c_p = -\frac{2v_1'}{v_\infty}$$

Связь с акустикой

Рассмотрим классическую задачу о распространении малых возмущений в безграничном объёме идеального газа. Для простоты можно действовать в декартовой системе координат. Результат все равно получится в инвариантном виде.

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0; \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \bar{v} = \bar{v}', \quad \varphi = \varphi'.$$

$$\frac{\partial \rho'_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \bar{v} + (\bar{v}, \nabla) \rho = 0.$$

$$\frac{\partial \rho'_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') \operatorname{div} \bar{v} + (\bar{v}, \nabla) (\rho'_0 + \rho') = 0.$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad \text{Но если } \bar{v}' = \nabla \varphi', \text{ то } \operatorname{div} \bar{v}' = \Delta \varphi'.$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi' = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\Delta \varphi'.$$

Вместо уравнения Эйлера можно сразу взять интеграл Коши-Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho}}_{\square \varepsilon} = f(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a_\infty^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} / \rho_0 = f'(t)$$

$$\int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = a_\infty^2 \rho' / \rho_0,$$

т.к. члены второго порядка малости отбросим.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = f'(t),$$

но, так как в невозмущенной части $f(t) = \text{const}$, то и везде $f'(t) = 0$.

$$\frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем:

$$a^2 \Delta \varphi' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Это основное уравнение акустики. Оно получено в системе координат, относительно которой невозмущенное состояние-покой.

Теперь перейдем к системе координат, связанной с телом, которое движется с постоянной скоростью \bar{v}_∞ , и будем считать в этой системе координат движение газа установившимся, φ' не зависит от t .

Пусть нестационарные координаты x_0, y_0, z_0, t_0 , а стационарные x, y, z, t , то $x = x_0 - ut_0, y = y_0, z = z_0, t = t_0, (u < 0)$.

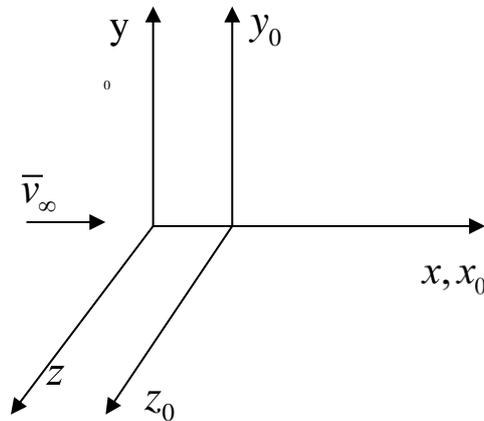


Рис. 1. Подвижная и неподвижная системы координат.

Крыло движется со скоростью \bar{u} , $|\bar{u}| = |\bar{v}_\infty|$ в противоположном направлении. Перейдем в подвижную систему координат:

$$x = x_0 - v_\infty t_0; y = y_0, z = z_0, t = t_0$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \dots = \frac{\partial \varphi'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y_0} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z_0} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_0} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_\infty + \frac{\partial \varphi'}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t_0^2} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + v_\infty \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + v_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + v_\infty \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + v_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + 2v_\infty \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t_0^2}$$

Подставляя в волновое (акустическое) уравнение $\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi'$, и полагая $\frac{\partial \varphi'}{\partial t} \equiv 0$, получаем:

$$v_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right) \Big| \frac{1}{a^2},$$

или

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0.$$

То есть то же самое уравнение (14.2). Так что задачи акустики решаются теми же методами, что и задачи обтекания тел.

Следует отметить, что вся дальнейшая теория справедлива, когда $M_\infty^2 - 1$ является величиной порядка единицы.

Нетрудно доказать, что волновое уравнение является эллиптическим для течений с дозвуковыми скоростями и гиперболическим для течений со сверхзвуковыми скоростями.

$$\text{Общий вид } Ar - 2Bs + Ct = 0 \text{ где } r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Тип зависит от знака $\Delta = B^2 - AC$. $\Delta > 0$ гиперболическое, $\Delta < 0$ - эллиптическое. У нас $B = 0$. $\Delta = -AC = (M_\infty^2 - 1)$.

Обтекание тонкого профиля

Рассмотрим в рамках линеаризованной теории задачу обтекания тонкого профиля.

На тонкий слабо изогнутый профиль $y = f(x)$, $|f'(x)| \ll 1$ набегают однородный поток идеального газа со скоростью v_∞ , направленный вдоль оси x . Для определения подъёмной силы и сопротивления профиля нужно найти решение основного уравнения:

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0$$

при соответствующих граничных условиях. Поскольку тип этого уравнения разный для дозвукового и сверхзвукового потоков, то нужно рассматривать эти случаи отдельно. Рассмотрим сначала обтекание профиля дозвуковым потоком. В этом случае $M_\infty < 1$ и удобнее взять основное уравнение в виде

$$B^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0, \text{ где } B^2 = (1 - M_\infty^2).$$

Его решение должно удовлетворять граничному условию на бесконечности: $\varphi' |_{y \rightarrow \infty} = 0$ и граничному условию непротекания на поверхности профиля: $(\bar{v}, \bar{n}) = (v_x n_x + v_y n_y) = 0$. Нормаль к поверхности профиля $\bar{n}(-\sin \theta, \pm \cos \theta)$, знаки разные для верхней и нижней частей профиля. Но в линейном приближении $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta = f'(x)$, $\cos \theta = 1$. Тогда условие непротекания на поверхности профиля приобретает вид: $v'_y = \pm v_\infty f'(x)$ или:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \pm v_\infty f'(x).$$

На бесконечном удалении от поверхности профиля ставится условие отсутствия возмущений.

Сделаем теперь замену переменных: $x' = x$, $y' = By$, $\varphi'' = B\varphi'$. В новых переменных основное уравнение приобретает вид уравнения Лапласа: $\frac{\partial^2 \varphi''}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial y'^2} = 0$, а граничные условия сохраняют свой прежний вид. Таким образом в новых переменных мы получаем хорошо изученную задачу об обтекании профиля несжимаемой жидкостью, соответствующий потенциал скорости φ'' может быть получен, например, методом конформных отображений. А с его помощью можно получить искомое распределение давления по поверхности профиля, используя уравнение Бернулли в виде:

$$c_p = -\frac{2v'_x}{v_\infty} = -\frac{2}{v_\infty} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = -\frac{2}{v_\infty} \frac{\partial \varphi''}{\partial x'} \frac{1}{B}$$

Получается, что давление в газе (сжимаемой жидкости) больше, чем давление в несжимаемой жидкости в тех же точках профиля в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз:

$$c_p = \frac{c_{p \text{ несж}}}{\sqrt{(1 - M_\infty^2)}}$$

Так как выражение для коэффициента подъемной силы профиля может быть записано в виде:

$$F_y = -\int p n_y ds = 0.5 \rho_\infty v_\infty \int c_p dx,$$

где $c_y = \int c_p dx$, $\bar{x} = x/l$, l – хорда профиля, то и коэффициенты подъемной силы профиля в сжимаемом и несжимаемом потоках связаны таким же образом:

$$c_y = \frac{c_{y \text{ несж}}}{\sqrt{(1 - M_\infty^2)}}$$

Это выражение называется правилом Прандтля-Глауэрта и позволяет оценить подъемную силу крыла в сжимаемом потоке, если есть соответствующие данные для несжимаемой жидкости. Ошибка этой оценки растет по мере приближения числа M_∞^2 к единице. На рис.2 показано сравнение результатов такой оценки с экспериментальными данными для тонкого слабоизогнутого профиля при углах атаки два и четыре градуса.

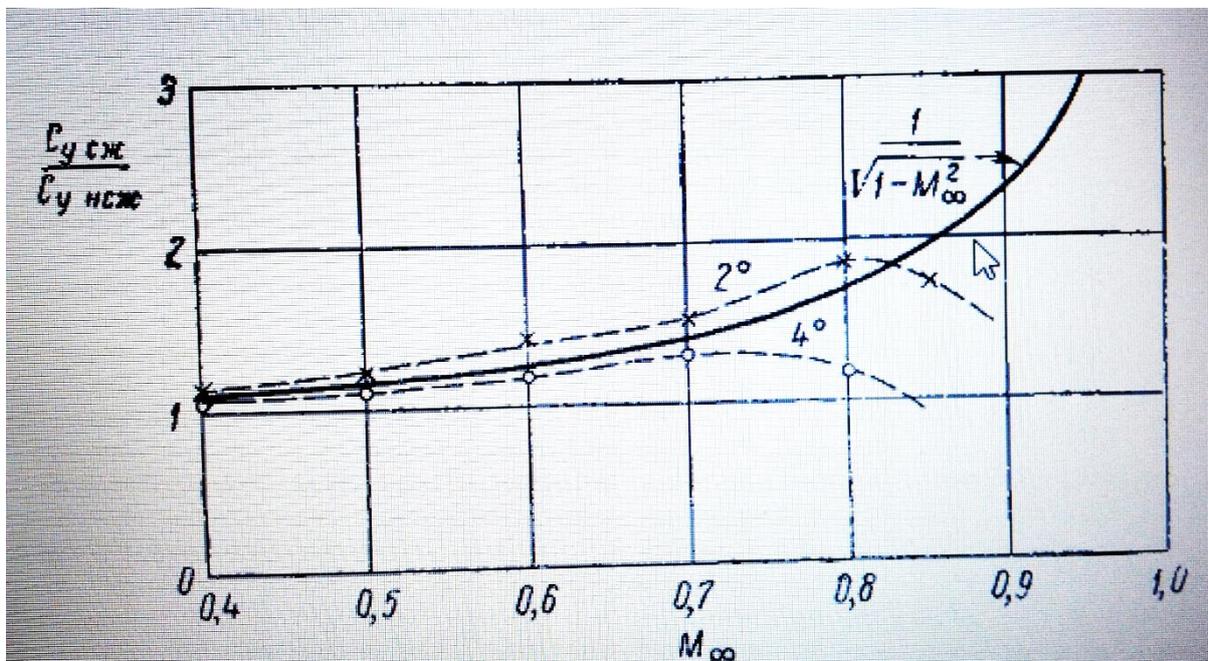


Рис. 2 [5]

Крыло в сверхзвуковом потоке

Рассмотрим в рамках линеаризованной теории обтекание тонкого профиля с острыми передней и задней кромками сверхзвуковым потоком газа.

В этом случае основное уравнение удобнее взять в виде:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0, \text{ где } \beta^2 = (M_\infty^2 - 1).$$

Легко убедиться, что оно имеет гиперболический тип и его характеристики прямые $x = \beta y$ и $x = -\beta y$.

Пусть верхняя дуга профиля $y = f_1(x)$, нижняя $y = f_2(x)$. Условие непротекания на поверхности профиля, как и прежде:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \pm v_\infty f'_{1,2}(x)$$

С точностью до малых второго порядка можем перенести это условие на отрезок $(0, b)$ оси x .

Поскольку возмущения от поверхности профиля не могут распространяться вверх по сверхзвуковому потоку, вместо условия на бесконечности поставим условие равенства нулю возмущений на характеристиках, исходящих из передней кромки профиля (начала координат). Общее решение волнового уравнения:

$$\varphi' = F_1(x - \beta y) + F_2(x + \beta y).$$

Из условия $\varphi' = 0 = F_1(0) + F_2(2x)$ на первой характеристике, исходящей из передней кромки вверх, заключаем, что функция F_2 при этом должна быть тождественно равна нулю. То есть для верхней части течения решение имеет вид: $\varphi' = F_1(x - \beta y)$. Аналогично при $y < 0$: $\varphi' = F_2(x + \beta y)$.

Поставляя эти решения в условие непротекания на верхней части профиля, имеем:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = -\beta F_1'(x) = v_\infty f_1'(x)$$

Откуда получаем

$$F_1(x) = -\frac{v_\infty}{\beta} f_1(x).$$

Но

$$c_p = -\frac{2}{v_\infty} v_x' = -\frac{2}{v_\infty} \frac{\partial \varphi'}{\partial x}$$

и, следовательно,

$$c_{p1} = \frac{2}{\beta} f_1'(x) \text{ и } c_{p2} = -\frac{2}{\beta} f_2'(x)$$

Коэффициент подъемной силы крыла:

$$c_y = \frac{1}{\beta} \int c_p ds = \frac{1}{\beta} \left(\int_0^b c_{p2} dx - \int_0^b c_{p1} dx \right) = \frac{2}{\beta b} \left(\int_0^b [f_2'(x) + f_1'(x)] dx \right).$$

Взяв интеграл, получаем:

$$c_y = -\frac{2}{\beta b} [f_2(x) + f_1(x)]_0^b = \frac{4\alpha}{\beta},$$

где α - угол атаки профиля, угол между хордой профиля и направлением скорости набегающего потока.

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}}.$$

Замечательно, что в линейном приближении подъемная сила крыла зависит только от угла атаки и не зависит от формы профиля.

Еще интереснее дело обстоит с сопротивлением крыла. Коэффициент сопротивления крыла:

$$\begin{aligned} c_x &= -\frac{1}{b} \int c_p n_x ds = \\ &= -\frac{1}{b} \left(\int_0^b c_{p2} n_{x2} dx - \int_0^b c_{p1} n_{x1} dx \right) = \frac{2}{\beta b} \left(\int_0^b [f_1'^2(x) + f_2'^2(x)] dx \right) \end{aligned}$$

Таким образом коэффициент сопротивления представлен суммой квадратов малых первого порядка и в рамках линейной теории должен быть отброшен! Однако практика расчетов показала, что эти формулы дают достаточно хорошие результаты для сравнительной оценки сопротивления тонких крыльев при малых углах атаки, а это очень востребованный класс задач. Удобно угол наклона поверхности крыла к набегающему потоку отсчитывать от направления хорды профиля:

$$f_1' = \varepsilon_1 - \alpha, \quad f_2' = \varepsilon_2 + \alpha$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{2}{\beta b} \int_0^b [f_1'^2(x) + f_2'^2(x)] dx = \\ &= \frac{2}{\beta b} \int_0^b [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] dx \end{aligned}$$

Два первых слагаемых представляют собой вклад непосредственно формы профиля (сопротивление формы), третье слагаемое – вклад угла атаки, четвертое равно нулю для симметричного профиля.

Здесь мы решали задачу в рамках модели идеальной жидкости, при инженерных расчетах к полученному коэффициенту волнового сопротивления добавляется ещё поправка, учитывающая трение.

ЛЕКЦИЯ 15

Расчет аэродинамических характеристик аэрокосмических аппаратов

При высоких скоростях полета тел в воздухе, как, например при входе спускаемого аппарата в атмосферу, расчёт аэродинамических характеристик тел значительно усложняется, так как перед телом образуется мощная ударная волна, за которой температура вырастает настолько, что начинается диссоциация, а потом и ионизация молекул воздуха, что существенно влияет как на динамические характеристики, так и на нагрев тела. Система уравнений газовой динамики в этом случае дополняется многочисленными уравнениями химических реакций и радиационного обмена теплом, что, конечно, значительно усложняет процесс математического моделирования.

Поэтому для оценочных расчетов аэродинамических характеристик тел при гиперзвуковых скоростях полета ($M \geq 4 \div 6$), особенно на этапе проектирования широко используется гипотеза Ньютона, дающая достаточно объективные оценки силового воздействия потока для широкого класса тел [6].

Теория Ньютона, как известно, предполагает, что среда, обтекающая тело, состоит из одинаковых частиц, расположенных на равном расстоянии друг от друга и не взаимодействующих между собой. При столкновении с поверхностью тела (неупругий удар) частицы теряют нормальную к элементу поверхности составляющую количества движения, вследствие чего возникает сила давления потока на тело. Тангенциальная составляющая при столкновении остается неизменной. Таким образом, ударная волна предполагается лежащей на поверхности тела, а коэффициент давления на поверхности тела определяется по формуле

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 2 \cos^2 \eta, \quad (15.1)$$

где p – давление на поверхности тела; p_∞ и q_∞ – статическое давление и скоростной напор набегающего потока; η – угол между вектором скорости невозмущенного потока и единичным вектором внутренней нормали к поверхности тела.

Действительный механизм взаимодействия молекул газа с твердыми границами в принципе отличается от ньютоновского. Однако при обтекании тел газом с очень большой сверхзвуковой скоростью картина течения сходна с той, которая была принята Ньютоном при рассмотрении неупругого столкновения частиц с телом. В данном случае головная волна близка к поверхности тела. Частицы газа доходят почти до поверхности тела, не изменяя своей скорости, а затем, после прохождения ударной волны, движутся в тонком практически невязком слое между ударной волной и поверхностью тела.

Теория Ньютона может быть получена из точных уравнений газовой динамики при $M_\infty \rightarrow \infty$ и при отношении удельных теплоемкостей $k \rightarrow 1$. В этом случае скачок уплотнения вплотную подходит к поверхности тела, в результате чего величина давления на теле совпадает с полученной по формуле Ньютона.

Для лучшего согласования расчетных и экспериментальных данных уравнение (15.1) видоизменялось рядом авторов в зависимости от рассматриваемых форм. Эти изменения, в основном, можно охарактеризовать общим соотношением

$$C_p = k \cdot \cos^2 \eta. \quad (15.2)$$

Здесь k – коэффициент, применяемый для лучшего согласования полученных результатов с уже известными. Формула (15.2) получила название «уточненной» (или «модифицированной») формулы Ньютона.

При сравнении экспериментальных данных с расчетными, полученных при симметричном обтекании тел вращения и плоских контуров, было замечено, что добиться улучшения совпадения этих результатов можно, приняв

$$k = \frac{C_p^*}{\sin \alpha_0}.$$

Здесь C_p^* – значение коэффициента давления в передней точке тела, определяемое в соответствии с теорией сверхзвуковых течений идеального газа, а α_0 – угол между касательной к контуру тела в этой точке и направлением набегающего потока.

Для тел с затупленной передней частью ($\sin \alpha_0 = 1$) C_p определяется в зависимости от числа M_∞ и показателя адиабаты k с помощью формулы Релея:

$$C_p^* = \frac{2}{kM_\infty^2} \cdot \left[\left(\frac{k+1}{2} \cdot M_\infty^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{k+1}{2kM_\infty^2 - k + 1} \right)^{\frac{1}{k-1}} - 1 \right]. \quad (15.3)$$

При поперечном обтекании цилиндра сверхзвуковым потоком со скоростями, соответствующими $M_\infty > 3,5 \div 4$, ошибка в определении давления на его поверхности при $k = C_p$ не превышает $5 \div 8 \%$. При вычислении суммарных аэродинамических характеристик ошибка еще меньше.

Для более полного согласования расчетных и экспериментальных данных при рассмотрении обтекания тонкого заостренного тела вращения с присоединенным скачком уплотнения можно использовать ньютоновское значение $k = 2$. При анализе несущих поверхностей с присоединенным скачком уплотнения удовлетворительное совпадение результатов приближенного решения с точным для косога скачка уплотнения обеспечивается при $k = 2,5$. Можно в ряде случаев использовать также значение $k = \kappa + 1$.

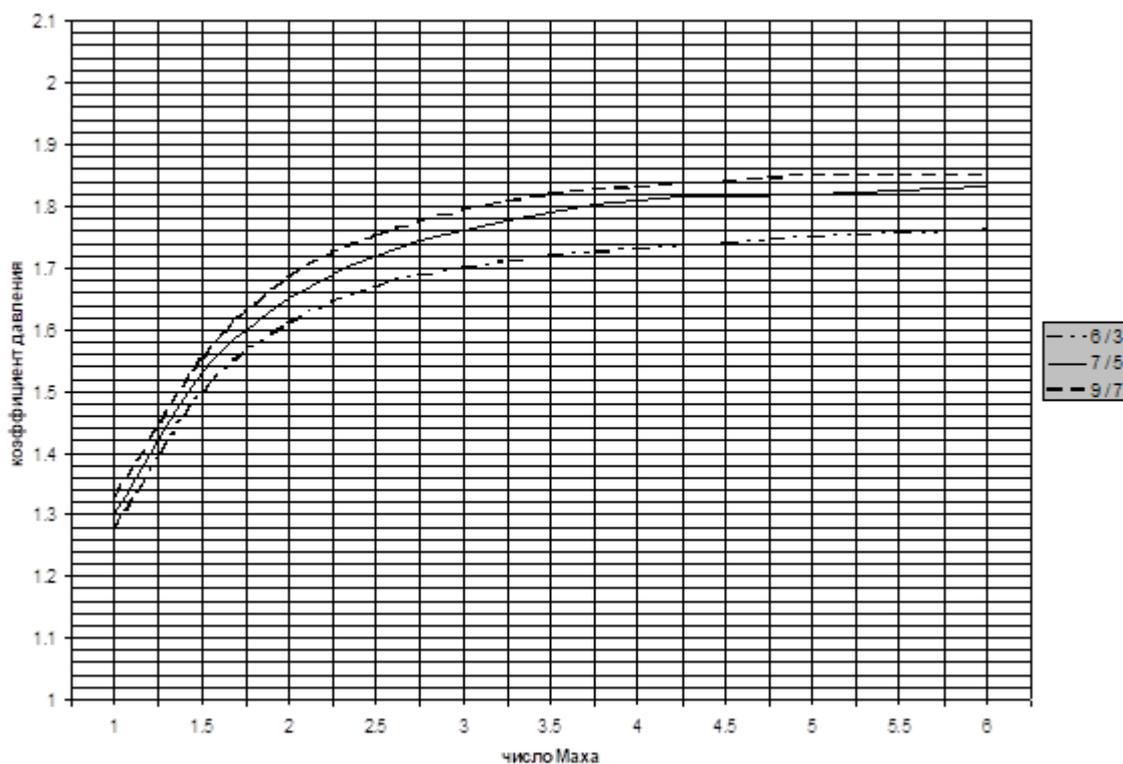


Рис. 1. Зависимость коэффициента давления в точке торможения от числа Маха и показателя адиабаты набегающего потока

С помощью теории Ньютона определяется давление только на поверхностях, обращенных к потоку. На «затененных» участках поверхности давление принимается равным статическому давлению в свободном потоке $p_e = p_\infty$, т.е. $C_{p_e} = 0$. Силы трения не учитываются ($C_f = 0$). Проинтегрировав распределение давления по поверхности тела, можно получить действующие на тело силы и моменты и соответствующие им аэродинамические коэффициенты.

Угол η между вектором скорости \vec{V}_∞ и единичным вектором внутренней нормали в поверхности тела \vec{n} определяется скалярным произведением двух векторов. Вектор скорости \vec{V}_∞ определяется следующей формулой:

$$\vec{V}_\infty = -V_\infty \cdot \left(\vec{i} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \vec{j} \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + \vec{k} \cdot \sin \beta \right), \quad (15.4)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей связанной с телом декартовой системы координат.

Если поверхность тела описывается уравнением

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

то

$$\vec{n} = \vec{i} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) + \vec{j} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{y}_1) + \vec{k} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}_1), \quad (15.5)$$

где $\cos(\vec{n}, \vec{x}_1), \cos(\vec{n}, \vec{y}_1), \cos(\vec{n}, \vec{z}_1)$ – косинусы углов между внутренней нормалью к поверхности и положительными направлениями осей x_1, y_1, z_1 .

Выражения для направляющих косинусов внутренней нормали имеют вид:

$$\cos(\vec{n}, \vec{x}_1) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}; \quad (15.6)$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{y}_1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}; \quad (15.7)$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{z}_1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}. \quad (15.8)$$

Тогда

$$\cos \eta = \frac{\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}}{V_\infty} = -\left[\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) - \right. \\ \left. - \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{y}_1) + \sin \beta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}_1) \right], \quad (15.9)$$

и при $\beta = 0$

$$\cos \eta = -\cos \alpha \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) + \sin \alpha \cdot \cos(\vec{n}, \vec{y}_1). \quad (15.10)$$

Аэродинамические коэффициенты исследуемого тела определяются по следующим формулам:

$$C_x = \frac{X}{qS} = -\frac{k}{S} \cdot \iint \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) dF; \quad (15.11)$$

$$C_y = \frac{Y}{qS} = -\frac{k}{S} \cdot \iint \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{y}_1) dF; \quad (15.12)$$

$$C_z = \frac{Z}{qS} = -\frac{k}{S} \cdot \iint \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}_1) dF; \quad (15.13)$$

$$m_x = \frac{M_x}{qSL} = \\ = -\frac{k}{S} \cdot \left[\iint_F y_1 \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}_1) dF - \iint_F z_1 \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{y}_1) dF \right]; \quad (15.14)$$

$$m_y = \frac{M_y}{qSL} = \\ = -\frac{k}{S} \cdot \left[-\iint_F x_1 \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}_1) dF + \iint_F z_1 \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) dF \right]; \quad (15.15)$$

$$m_z = \frac{M_z}{qSL} =$$

$$= -\frac{k}{S} \cdot \left[-\iint_F y_1 \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) dF + \iint_F x_1 \cos^2 \eta \cdot \cos(\vec{n}, \vec{y}_1) dF \right]. \quad (15.16)$$

Элементы летательных аппаратов

Сферический сегмент:

Коэффициент продольной силы:

$$C_x = \frac{kR^2}{S} \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^4 \theta_c}{2} - \cos^2 \alpha \cdot \sin^4 \theta + \cos^2 \alpha \right) \quad (15.17)$$

при $0 \leq \alpha \leq \theta_c$;

$$C_x = \frac{kR^2}{S} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(\cos \alpha \cdot \arccos \left(\frac{\sin \theta_c}{\sin \alpha} \right) + \left(\frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \theta_c}{2} - \cos^2 \alpha \cdot \sin^4 \theta_c + \cos^2 \alpha \right) \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_c}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right) + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \theta_c}{2} \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta_c) \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta_c} \quad (15.18)$$

при $\theta_c \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq (\pi - \theta_c)$.

Коэффициент нормальной силы:

$$C_y = \frac{kR^2}{S} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos^4 \theta_c \quad (15.19)$$

при $0 \leq \alpha \leq \theta_c$;

$$C_y = \frac{kR^2}{S} \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(\arccos \left(\frac{\sin \theta_c}{\sin \alpha} \right) + \cos \alpha \cdot \cos^4 \theta_c \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_c}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right] \right) + \left(+ \frac{\sin \theta_c}{3} \cdot \left[\sin^2 \theta_c \cdot \left(3 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) - 5 \right] \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta_c} \right) \quad (15.20)$$

$$\text{при } \theta_c \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq (\pi - \theta_c).$$

Усеченный прямой круговой конус:

Коэффициент продольной силы:

$$C_x = \frac{k l R_2 (1 + \xi)}{S} \cdot \frac{\pi \cdot \operatorname{tg} \theta_k}{2} \cdot (2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \theta_k + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_k) \quad (15.21)$$

при $0 \leq \alpha \leq \theta_k$;

$$C_x = \frac{k l R_2 (1 + \xi)}{S} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta_k}{2} \cdot$$

$$\left[(2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \theta_k + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_k) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_k}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right) + \right. \\ \left. + 3 \cos \alpha \cdot \sin \theta_k \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta_k} \right] \quad (15.22)$$

при $\theta_k \leq \alpha \leq (\pi - \theta_k)$, $(\pi - \theta_k) \leq \alpha \leq \pi$.

Коэффициент поперечной силы:

$$C_y = \frac{k l R_2 (1 + \xi)}{S} \cdot \pi \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \quad (15.23)$$

при $0 \leq \alpha \leq \theta_k$;

$$C_y = \frac{k l R_2 (1 + \xi)}{S} \cdot$$

$$\left(\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta_k \cdot \sin \theta_k \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_k}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_k + \sin^2 \theta_k \cdot \cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cdot \cos \theta_k} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \theta_k} \right) \quad (15.24)$$

при $\theta_k \leq \alpha \leq (\pi - \theta_k)$, $(\pi - \theta_k) \leq \alpha \leq \pi$.

Цилиндрическое тело:

Для расчета аэродинамических характеристик цилиндрической конфигурации по методу Ньютона ($M \geq 4 \div 6$) на гиперзвуковых скоростях можно использовать следующие соотношения:

1) Коэффициент поперечной силы

$$C_y = \frac{16}{3} \cdot \pi \lambda_{\text{ц}} \cdot \sin^2 \alpha; \quad (15.25)$$

2) Коэффициент продольной силы

$$C_x = 0. \quad (15.26)$$

Здесь $\lambda_{\text{ц}} = \frac{L_{\text{ц}}}{2R_{\text{ц}}}$ – удлинение цилиндра, α – угол атаки цилиндра.

Осевая составляющая сопротивления цилиндрического тела обращается в нуль, поскольку все силы давления действуют в перпендикулярном к оси цилиндра направлении.

Диаграмма действующих аэродинамических сил

По результатам расчета аэродинамических характеристик аппарата производится построение эпюры действующих аэродинамических сил. Для этого выполняется чертеж схемы обводов аппарата с соответствующей привязкой к осям координат. По выбранной величине аэродинамического качества определяем балансирующий угол атаки, и для этого угла атаки имеем все аэродинамические характеристики: коэффициенты продольной и поперечной силы, коэффициент центра давления, коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы. В центре давления на выбранном угле атаки производим построение векторов продольной и поперечных сил, тем самым находим направление вектора равнодействующей всех аэродинамических сил. Для устойчивого полета на выбранном угле атаки надо определить расположение центра масс спускаемого аппарата. При этом для капсульных аппаратов класса «Союз» или «Аполлон» мы отметим положение минимального центра давления. Построенный вектор равнодействующей всех аэродинамических сил в скоростной или связанной системе координат с заданным запасом по центровке ($1,5 \div 2$ % от длины спускаемого аппарата (СА), например, для формы «Союз») определит координаты центра масс по оси X и оси Y в связанной системе координат.

Равнодействующая аэродинамических сил, проходящая через центр масс аппарата, является основой для выбора ориентации кресел

экипажа в позе максимальной переносимости перегрузок на участке спуска. Оптимальный угол между плоскостью, касательной к спинке кресла пилота, и равнодействующей аэродинамических сил по принятым эргономическим и медицинским нормам соответствует 78° . При этой ориентации кресел относительно равнодействующей аэродинамических сил формируется компоновочная и силовая схема спускаемого аппарата, близкая к схеме «Союз» или «Аполлон». Схема действующих аэродинамических сил используется также для размещения двигателей ориентации системы исполнительных органов спуска. Аналогично проводится работа для схем аппаратов класса «несущий корпус». Отличие состоит в том, что построение линии равнодействующей производится для условного расположения центра давления на продольной оси аппарата. Центр масс аппарата обычно смещается в сторону наветренной образующей по линии равнодействующей. Зачастую продольную центровку аппарата класса «несущий корпус» приходится корректировать с помощью аэродинамических щитков, устанавливаемых в донной части аппарата, и используемых в ряде случаев для управления аппаратом для изменения угла атаки и для стабилизации аппарата по углам крена, рысканья и тангажа. При спуске с орбиты искусственного спутника земли (ИСЗ) для аппаратов класса «несущий корпус» величина аэродинамического качества (отношения подъёмной силы к сопротивлению) составляет

$$K_{\text{ГИП}} = 0,8 \div 1,5,$$

и перегрузки на штатной траектории спуска обычно невелики ($2 \div 2,5$), в связи с чем установка кресел аналогична схеме расположения кресел пилота истребителя в авиации. С учетом этой позы пилота производится компоновка пультовых устройств и прочих органов управления. Однако в связи с возможностью возникновения аварийной ситуации на участке выведения, или при «сваливании» аппарата в баллистический спуск, перегрузки, воздействующие на аппарат, могут достигать довольно значительной величины, близкой или даже превосходящей перегрузки на аппараты «скользящего» спуска. В этом случае кресла пилотов следует переводить в положение оптимальной ориентации относительно вектора равнодействующих сил (78°).

Спускаемая капсула (СК) космического корабля «Союз» (рис. 2) используется для доставки космонавтов и грузов на поверхность зем-

ли. Задача СК состоит в том, чтобы равномерно снизить скорость с первой космической 7,9 км/с до 100-150 м/с за счет аэродинамического сопротивления в атмосфере Земли. Дальнейшее торможение выполняется парашютной системой. Конструкция СК выполнена таким образом, чтобы имелась возможность создавать подъемную силу за счет того, что передняя часть имеет форму сферического сегмента. Это делает траекторию полета более продолжительной, но снижает перегрузки, испытываемые экипажем.

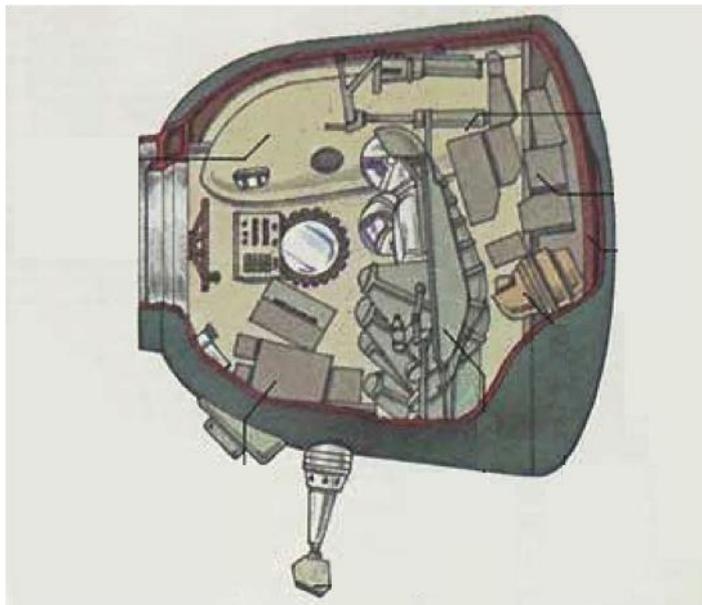


Рис. 2.
Спускаемая капсула космического корабля «Союз».

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г.Г. Лекции по газовой динамике. Казань, 1987.
2. Черный Г.Г. Газовая динамика. М., Наука, 1988.
3. Давидсон В.Е. Основы гидрогазодинамики в примерах и задачах. «Академия», Москва. 2008.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. I и II, М., Наука, 1983
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1970
6. Стулов В.П. Лекции по газовой динамике. Москва, Физматлит, 2004.
7. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., 1969
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., 1981

Дополнительная литература:

1. Аржаников Н.С., Садекова Г.С. Аэродинамика больших скоростей. М., 1965
2. Самойлович Г.С., Нитусов В.В. Сборник задач по гидромеханике. М., 1986