КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
*Кафедра теории относительности и гравитации*

В. А. Попов, П. Е. Кашаргин, Г. З. Хабибуллина

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

## Часть 1. Статистические оценки и гипотезы

**Казань – 2022**

**УДК 519.22**
**ББК 22.172я73**

*Принято на заседании учебно-методической комиссии Института физики протокол №8 от 12 мая 2022 г.*

**Рецензент:**

кандидат физико-математических наук,
доцент Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ
**А. А. Саченков**

**Попов В. А., Кашаргин П. Е.,Хабибуллина Г. З.**
**Математическая статистика. Часть 1. Статистические оценки и гипотезы** / В. А. Попов, П. Е. Кашаргин, Г. З. Хабибуллина — Казань: Казанский университет, 2022. — 52 с.

В учебном пособии рассматриваются методы и приемы статистического описания данных: точечные и интервальные оценки параметров распределений, проверка статистичеких гипотез. Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Физика», «Радиофизика», «Астрономия», «Геодезия и дистанционное зондирование», «Информационная безопасность», «Инноватика», «Нанотехнологии и микросистемная техника», «Биотехнические системы и технологии», «Педагогическое образование (физика и математика)», «Техническая физика».

## Предисловие

Материал данного пособия соответствует заключительной части курса «Теория вероятностей и математическая статистика», предназначенного для студентов Института физики Казанского федерального университета. Для полного и систематического изложения вопросов математической статистики требуются отдельные курсы. Задача этой книги состоит в том, чтобы познакомить студентов с начальными сведениями и основными понятиями, которые нужны для квалифицированной обработки статистических данных.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей, во многом использует те же термины и понятия. Поэтому предполагается, что студент знаком с основными понятиями теории вероятностей и формализмом случайных величин, осведомлен о распределениях Гаусса, Стьюдента, Пирсона и т. п., имеет представление о законе больших чисел. Эти вопросы излагаются в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» непосредственно перед изучением математической статистики и представлены в книге [7].

Данное пособие является логическим продолжением [7] — здесь используются те же обозначения, доказательства большинства теорем, приведенных в пособии, опирается на материал, изложенный в [7]. Конечно, студентам не стоит ограничиваться чтением только этих, небольших по объему, книг. В конце пособия приведен список использованной литературы. Его же можно рекомендовать для более подробного знакомства с предметом.

В данном пособии содержится теоретический материал, описание методов и примеры их использования. Задачи для самостоятельного решения по изложенным здесь вопросам можно найти в сборниках задач [8, 9].

В тексте определения не выделены в отдельную категорию — понятия и термины, которые нужно знать, выделены *курсивом*. Для облегчения поиска по ссылкам используется двойная нумерация теорем, примеров и формул. Например, ссылка (2.5) означает, что имеется ввиду формула 5 из § 2, а ссылка (П.1) относится к формуле 1 из приложения. Значок ■ означает конец доказательства теоремы, а значок $\square$ — завершение примера.

Изучение материала данного пособия необходимо студентам-физикам, так как знакомит их с математическими основами обработки результатов измерений и наблюдений. Кроме того, этот материал будет полезным в освоении курсов «Методы обработки информации», «Метрологический анализ измерительных схем», «Теория математической обработки измерений» и других.

Для студентов, обучающихся по направлению «Инноватика», изложенный здесь материал является базовым в курсе «Статистические методы в инноватике».

# § 1 Выборочные распределения

## 1.1 Задачи математической статистики

Математическая статистика — наука о математических методах систематизации, обработки и анализа данных, полученных в результате экспериментов или наблюдений. Такие данные называются статистическими. Методы математической статистики (за исключением, возможно, простейших приемов статистического описания) опираются на теорию вероятностей. Эти методы позволяют оценить надежность и точность выводов, сделанных на основании ограниченных статистических данных.

Специфика применения методов теории вероятностей в математической статистике зависит от объектов исследования. Это связано с тем, что теория вероятностей изучает не любые массовые явления, а явления случайные, то есть такие, о которых имеет смысл говорить, что измеряемые (или наблюдаемые) величины подчиняются некоторому распределению вероятностей. При статистическом изучении этих явлений решаются задачи об оценке распределений вероятностей и входящих в них параметров, зависимости случайных величин друг от друга, проверке статистических гипотез о виде распределения или величине параметров распределения. При статистическом изучении массовых явлений неслучайной природы вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приемы их исследования, базирующиеся на выборочном методе и теории ошибок.

Задачи, которые решает математическая статистика, в каком-то смысле противоположны задачам теории вероятностей. В вероятностных задачах задано вероятностное пространство или распределение случайной величины, то есть имеется математическая модель, с помощью которой требуется предсказать результаты случайных экспериментов. В статистических задачах, наоборот, по опытным данным нужно определить свойства распределения, то есть построить вероятностную модель явления.

К типичным задачам математической статистики относятся:

1. определение закона распределения случайной величины или нескольких случайных величин;
2. оценка параметров известного распределения случайной величины;
3. выявление характера взаимосвязи между случайными величинами;
4. статистическая проверка гипотез, то есть решение вопроса о том, согласуются ли теоретические предсказания с имеющимися статистическими данными.

Пусть измеряется некоторая физическая величина $\xi$. Эта величина $\xi$ является случайной, так как в самом процессе измерения заложена неопределенность, связанная с помехами, шумами, погрешностью прибора и т. п. В этом случае естественно считать «истинным» физическим значением математическое ожидание $a = \mathsf{M}\xi$, а результаты измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайными значениями величины $\xi$. По результатам измерений можно оценить параметр $a$. Это типичная задача *оценки неизвестного параметра*. В то же время, теория может предсказывать некоторое, вполне определенное, значение для измеряемой величины, например $a_1$. Тогда возникает задача о *статистической проверке гипотезы* $\mathsf{M}\xi = a_1$ на основании данных измерений.

Если есть основания предполагать некую зависимость между некоторыми величинами $\xi$ и $\eta$, в простейшем случае линейную $\xi = a + b\eta$, то по наборам измеренных значений $(x_i, y_i)$ можно оценить коэффициенты $a$ и $b$. Такие задачи называют *регрессионными*.

## 1.2 Простейшие приемы статистического описания

Пусть имеется некоторая группа объектов, обладающих каким-либо общим признаком $\xi$. Исследование этого признака будет наиболее полным, если обследовать все имеющиеся объекты. Однако на практике такой способ обычно оказывается малоприменимым. В одних случаях число объектов слишком велико, чтобы можно было изучить каждый. В других — само исследование может привести к уничтожению объекта, так что сплошное обследование теряет смысл. В подобных случаях из всей группы случайным образом отбирают ограниченное число объектов, которые используют для исследования, результаты которого обобщают на всю группу объектов.

Такой подход называют *выборочным методом*. Применение выборочного метода оправдано, если с его помощью можно получить нужную информацию обо всех объектах с достаточной для практики степенью достоверности. В этом случае, необходимость в сплошном обследовании объектов отпадает.

В выборочном методе вся подлежащая изучению совокупность объектов называется *генеральной совокупностью*, а совокупность случайно отобранных объектов, подлежащих исследованию, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Число отобранных объектов $n$ называют *объемом* выборки. Под термином генеральная совокупность понимаются все мысленно возможные объекты данного вида, а не только реально доступные для измерений. Например, отбирая детали для проверки их качества среди имеющихся, подразумевается, что можно изготовить сколько угодно таких деталей. Поэтому объем генеральной совокупности обычно считается бесконечно большим, то есть выборку рассматривают как конечное подмножество бесконечного множества возможных значений.

Выборка должна быть *репрезентативной* (представительной), то есть ее объекты должны достаточно хорошо отражать свойства генеральной совокупности. Это означает, что правила отбора определяются функцией распределения $F(x)$ измеряемого случайного признака $\xi$, так что вероятность получить результат измерения, попадающий в полуинтервал $[a, b)$, выражается разностью $F(b) - F(a)$. Элементы выборки являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами.

Наблюдаемые значения $x_i$ признака $\xi$ называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в порядке возрастания — *вариационным рядом*. *Частотой* $n_i$ называют число наблюдений варианты. Сумма частот равна объему выборки $\sum\limits_{i=1}^{N} n_i = n$, где $N$ — число вариант. *Относительной частотой* называют отношение частоты к объему выборки $p_i^* = n_i/n$.

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i^* = 1$.

Перечень вариант и соответствующих им частот называют *статистическим распределением* или *статистическим рядом* выборки. Статистический ряд также может быть записан для относительных частот.

*Эмпирической (выборочной) функцией распределения* называют функцию $F_n^*(x)$, определяющую для каждого значения $x$ относительную частоту события $A = \{x_i < x\}$:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{1.1}$$

где $n_x$ — число вариант, меньших $x$.

**Пример 1.1.** Для оценки стрелковой подготовки личного состава батальона было отобрано 50 человек, каждый из которых произвел 10 выстрелов по мишени. Результаты стрельбы представлены в таблице:

| Число попаданий | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число стрелков | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | 6 | 8 | 11 | 11 | 2 | 4 |

Построить эмпирическую функцию распределения.

*Решение.* Объем выборки $n = 50$. Приведенная таблица является по сути статистическим распределением для частот, в котором в строке «Число попаданий» записаны варианты, а в строке «Число стрелков» — соответствующие частоты. Статистическое распределение для относительных частот (каждая частота делится на $n$) в этом случае будет иметь вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i^*$ | 0.02 | 0.00 | .04 | 0.02 | 0.08 | 0.12 | 0.16 | 0.22 | 0.22 | 0.04 | 0.08 |

С его помощью построим эмпирическую функцию распределения, которая изображена на рис. 1. □

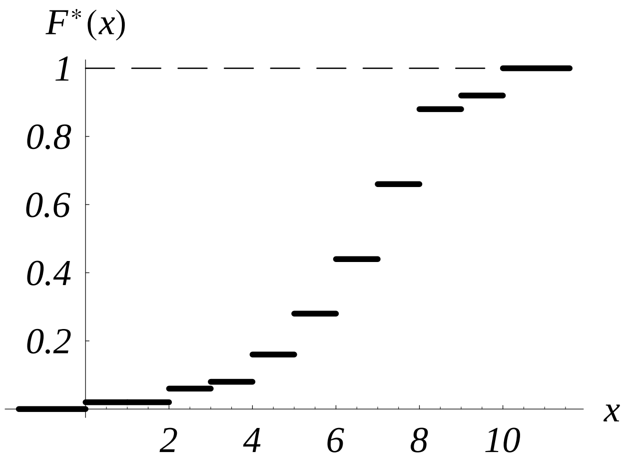

Рис. 1.

Функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности, которая описывает истинное распределение случайного признака $\xi$, в задачах математической статистики принято называть теоретической функцией распределения. Различие между эмпирической и теоретической функциями распределения состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $\xi < x$, а эмпирическая функция $F_n^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. При больших значениях $n$ эмпирическая функция распределения становится близка к теоретической.

**Теорема 1.1.** При любом значении $x$ $(-\infty < x < \infty)$ эмпирическая функция распределения стремится по вероятности[1] к теоретической функции распределения:

$$F_n^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} F(x). \tag{1.2}$$

**Доказательство.** Зафиксируем значение $x$. Все значения выборки $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ разделим на две категории: «успех», которому соответствуют значения $x_i < x$, и «неудача» со значениями $x_i \geqslant x$. Так как элементы выборки независимы и одинаково распределены, то мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой вероятность успеха $p = \mathbf{P}(x_i < x) = F(x)$. Число успехов $m$

[1] Напоминаем, что последовательность случайных величин $\xi_n$ стремится по вероятности к случайной величине $\xi_0$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi_0| < \varepsilon\right) = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$. Компактная запись этого факта: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} \xi_0$.

определяет относительную частоту попадания в область значений, меньших $x$, то есть $m/n = F_n^*(x)$. По теореме Бернулли (теорема 5.6 в пособии [7])

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} p, \tag{1.3}$$

откуда следует утверждение теоремы. ■

При больших $n$ описанный выше способ представления выборки является громоздким и, в то же время, не выявляет отчетливо существенных свойств распределения. В этом случае удобно группировать значения признака $\xi$ по надлежащим образом выбранным интервалам. Обычно для довольно полного описания всех существенных свойств распределения и надежного вычисления его основных характеристик оказывается достаточной группировка по 6–12 интервалам, в каждый из которых попадает не более 15-20% значений $\xi$. Для наглядного представления вместо эмпирической функции распределения используется гистограмма. *Гистограммой* частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины $l_k$, а высоты равны отношению $n_k/l_k$ (плотность частоты). Площадь частичного $k$-го прямоугольника равна $l_k(n_k/l_k) = n_k$ — сумме частот вариант, попавших в $k$-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки. Гистограмма относительных частот состоит из прямоугольников с высотами $p_k^*/l_k$ (рис. 2, 3).

**Пример 1.2.** Ниже приведены результаты измерения роста случайно отобранных 100 студентов.

| Рост, см | 154–158 | 158–162 | 162–166 | 166–170 | 170–174 |
|---|---|---|---|---|---|
| Число студентов | 2 | 8 | 12 | 22 | 26 |
| Рост, см | 174–178 | 178–182 | 182–186 | 186–190 | |
| Число студентов | 14 | 10 | 5 | 1 | |

Построить гистограмму относительных частот.

*Решение.* Объем выборки $n = 100$. Интервалы $I_i$ статистического ряда одинаковы, поэтому высота прямоугольников в гистограмме вычисляется по формуле $n_i/(nh)$:

| $I_i$ | $154-158$ | $158-162$ | $162-166$ | $166-170$ | $170-174$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i^*$ | 0.005 | 0.02 | 0.03 | 0.055 | 0.065 |
| $I_i$ | $174-178$ | $178-182$ | $182-186$ | $186-190$ | |
| $p_i^*$ | 0.035 | 0.025 | 0.0125 | 0.0025 | |

Соответствующая гистограмма изображена на рис. 2. На следующем рисунке

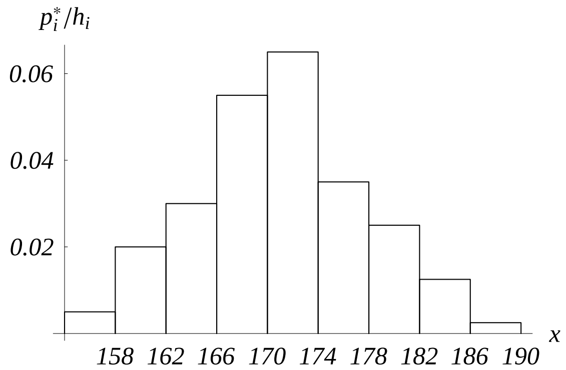


Рис. 2.

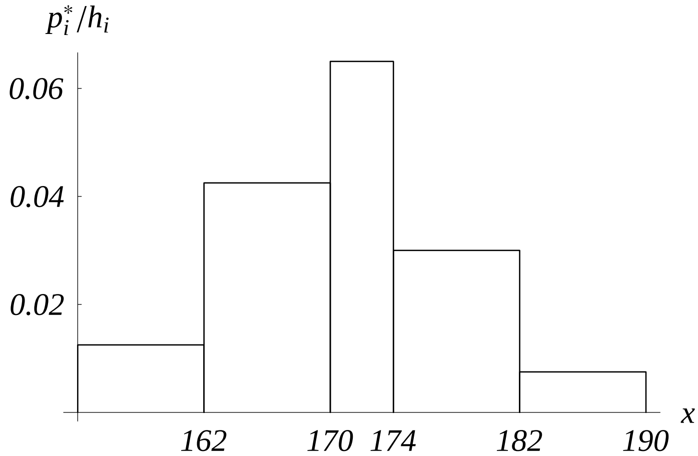


Рис. 3.

гистограмма состоит из прямоугольников с неравными основаниями. Статистический ряд для построения этой гистограммы получен путем объединения интервалов исходного ряда:

| $I_i$ | 154–162 | 162–170 | 170–174 | 174–182 | 182–190 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 10 | 34 | 26 | 24 | 6 |
| $p_i^*/l_i$ | 0.0125 | 0.0425 | 0.065 | 0.03 | 0.0075 |

Здесь средний интервал имеет длину $l_3 = 4$ см, остальные $l_i = 8$ см. $\square$

Гистограмму можно рассматривать как аналог плотности распределения абсолютно непрерывной случайной величины. Внешний вид гистограммы помогает подобрать подходящую теоретическую модель (закон распределения).

Гистограмма, составленная на основе группировки по маленьким интервалам, обычно многовершинная и не отражает наглядно свойств распределения. С другой стороны, группировка по слишком крупным интервалам может привести к излишнему огрублению свойств распределения и грубым ошибкам при вычислении его характеристик. В математической статистике вопрос о величине и числе интервалов обычно носит эмпирический характер и решается исходя из соображений сохранения полноты математического описания распределения, точности вычисления средних по сгруппированным данным и т. д. Для этой цели используются, например, эвристические формулы Стардже́сса, Брукса и Каррузера и им подобные.

## 1.3 Выборочные моменты

По аналогии с моментами распределений[1)] можно ввести понятие выборочных моментов.

*Начальным эмпирическим (выборочным) моментом порядка* $k$ называется величина

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^k\ , \tag{1.4}$$

то есть сумма берется по всем элементам выборки, возведенным в степень $k$. *Центральным эмпирическим (выборочным) моментом порядка* $k$ называется величина

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^k. \tag{1.5}$$

Часто для обозначения таких усреднений по выборке используют следующее обозначение:

$$\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{1.6}$$

[1)] Определение начальных и центральных моментов дано во второй части курса «Теория вероятностей» [7]. Здесь эти моменты мы будем называть теоретическими. Теоретический аналогом (1.4) является $\alpha_k = \mathsf{M}\xi^k$, а для (1.5) аналогом служит $\mu_k = \mathsf{M}(\xi - \alpha_1)^k$.

В этих обозначениях

$$a_k = \overline{x^k}, \qquad m_k = \overline{(x-\bar{x})^k}. \tag{1.7}$$

Начальный момент первого порядка называют *выборочным средним*:

$$a_1 \equiv \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} x_k n_k = \sum_{k=1}^{N} x_k p_k^*, \tag{1.8}$$

где $N$ — число различных вариант.

Центральный момент второго порядка называют *выборочной дисперсией*:

$$\begin{aligned} m_2 \equiv D_{\text{в}} = \overline{(x-\bar{x})^2} = \\ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})^2 n_k = \sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})^2 p_k^*. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Иногда для вычислений более удобна другая формула:

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2. \tag{1.10}$$

Значения теоретических моментов фиксированы для данного распределения, тогда как выборочные моменты могут принимать различные значения в зависимости от набора результатов измерений. По сути, выборочные моменты являются функциями выборочных значений. Любую такую функцию (а не только выборочные моменты) принято называть *статистикой*.

Значение статистики не должно зависеть от неизвестных параметров, то есть она должна быть вычислима для каждой выборки. Например, если для какого-либо случайного признака известно его математическое ожидание $a$, то выражение

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \tag{1.11}$$

является статистикой. Однако если значение $a$ неизвестно, то $d_n$ статистикой не является.

Поскольку элементы выборки — это случайные величины, то и статистика является, вообще говоря, случайной величиной.

# § 2 Точечные оценки

## 2.1 Основные определения

Предположим, что функция распределения случайной величины $\xi$ зависит от некоторого параметра $\theta$, который может принимать значения из некоторого множества $\Theta$. По выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно попытаться определить значение этого параметра. *Точечной оценкой* параметра $\theta$ называется некоторая статистика $\theta_n^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Естественно ожидать, что оценка параметра будет близка к его истинному значению. Поэтому не всякая статистика подойдет в качестве оценки параметра. Использование $\theta_n^*$ для оценки параметра $\theta$ считается оправданным, если $\theta_n^*$ обладает дополнительными свойствами: несмещенностью и состоятельностью.

Оценку $\theta^*$ называют *несмещенной* оценкой параметра $\theta$, если при любом $n$

$$\mathbf{M}\theta_n^* = \theta \tag{2.1}$$

для всех $\theta \in \Theta$. Величина $b_n(\theta) = \mathbf{M}\theta_n^* - \theta$ называется *смещением.* Несмещенность оценки означает, что полученные в результате наблюдений значения в среднем будут концентрироваться около истинного значения параметра.

Проверим выполнение условия (2.1) для выборочного среднего и выборочной дисперсии.

$$\mathbf{M}\bar{x} = \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 = \alpha_1. \tag{2.2}$$

Таким образом, выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}D_{\text{в}} &= \mathbf{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}x_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mathbf{M}x_i x_j = \\ &= \frac{n-1}{n}(\alpha_2 - \alpha_1^2) = \frac{n-1}{n}\mu_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии со смещением $b_n(D_{\text{в}}) = -\mu_2/n$, поэтому вместо нее используют другую оценку — *исправленную (или несмещенную) выборочную дисперсию*

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \,, \tag{2.4}$$

для которой $\mathsf{M} s^2 = \mu_2$.

Оценка $\theta_n^*$ называется *состоятельной*, если она по вероятности стремится к $\theta$:

$$\theta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \theta \tag{2.5}$$

для всех $\theta \in \Theta$.

Для доказательства состоятельности оценки можно воспользоваться теоремой Чебышева[1)]. Например, выборочное среднее является средним арифметическим от $n$ одинаково распределенных случайных величин, которыми являются элементы выборки. Поэтому для каждого из них выполнено $\mathsf{M} x_i = \alpha_1$. Предполагая, что дисперсия выборочных элементов конечна, можем применить к ним теорему Чебышева

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \alpha_1 \,, \tag{2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \alpha_1 \right| < \varepsilon \right) = 1 \,,$$

что означает состоятельность $\bar{x}$ по отношению к математическому ожиданию.

Аналогичным образом доказывается состоятельность любой оценки $a_k$ для соответствующего теоретического момента $\alpha_k$. В этом случае теорема Чебышева применяется к случайным величинам $(x_i)^k$. Тем самым, можно утверждать, что начальные и центральные выборочные моменты являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов. Отметим, что $s^2$ также является состоятельной оценкой дисперсии.

[1)] Теорема Чебышева утверждает, что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, попарно независимы и имеют конечные дисперсии, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k / n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} a$, где $a = \mathsf{M} \xi_k$. Доказательство теоремы Чебышева можно найти в разделе 5.1 второй части пособия «Теория вероятностей» [7].

Другой способ установить состоятельность дает следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть для оценки $\theta_n^*$ смещение $b_n(\theta)$ и дисперсия $\mathbf{D}\theta_n^*$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Тогда оценка $\theta_n^*$ состоятельна.

**Доказательство.** Согласно неравенству Чебышева[1)] для любого $\varepsilon > 0$ вероятность

$$\mathbf{P}\left(|\theta_n^* - \mathbf{M}\theta_n^*| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{D}\theta_n^*}{n^2}\,. \tag{2.7}$$

Это выражение может быть переписано в виде

$$\mathbf{P}\left(|\theta_n^* - \theta| + |b_n(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{D}\theta_n^*}{n^2}\,, \tag{2.8}$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|\theta_n^* - \theta| \geqslant \varepsilon\right) = 0\,. \tag{2.9}$$

Для противоположного события

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\right) = 1\,, \tag{2.10}$$

что и требовалось доказать. ■

Состоятельность оценки означает, что с ростом объема выборки наблюдаемые значения параметра будут концентрироваться около его истинного значения.

Условиям (2.1) и (2.5) могут удовлетворять сразу несколько оценок. Среди них естественно выбрать ту, которая обладает наименьшей дисперсией. Такую оценку называют *эффективной*. Другими словами, оценка $\theta_n^*$ является эффективной оценкой параметра $\theta$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}_n$ выполнено

$$\mathbf{D}\theta_n^* \leqslant \mathbf{D}\hat{\theta}_n\,. \tag{2.11}$$

Условие (2.11) означает, что эффективная оценка для различных реализаций выборки имеет меньший разброс около истинного значения параметра по сравнению с другими оценками.

---

1) Доказательство неравенства Чебышева можно найти в разделе 5.1 второй части пособия «Теория вероятностей» [7].

## 2.2 Методы получения точечных оценок

Для оценки неизвестных параметров распределения служат различные методы, такие как метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.

*Метод моментов* точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Пусть распределение случайного признака зависит от $m$ параметров $\theta_1, \dots \theta_m$ , и существуют все теоретические моменты $\alpha_k = \alpha_k(\theta_1, \dots \theta_m)$ , где $k = \overline{1, m}$ . Тогда оценкой параметров $\theta_k$, полученной по методу моментов, называется решение системы $m$ (вообще говоря, нелинейных) уравнений

$$\alpha_k(\theta_1^*, \dots \theta_m^*) = a_k, \qquad k = \overline{1, m}\,, \tag{2.12}$$

если оно существует и единственно.

Если распределение определяется одним параметром $\theta$, то для его отыскания приравнивают один теоретический момент одному эмпирическому моменту того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка (если он зависит от $\theta$) начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\alpha_1^* = a_1$. Учитывая, что $\alpha_1 = \mathsf{M}\xi(\theta)$ и $a_1 = \bar{x}$, получим уравнение

$$\mathsf{M}\xi(\theta^*) = \bar{x}. \tag{2.13}$$

Математическое ожидание является функцией от неизвестного параметра заданного распределения, поэтому, решив уравнение (2.13) относительно неизвестного параметра, получим его точечную оценку.

Если распределение определяется двумя параметрами $\theta_1$ и $\theta_2$, то приравнивают два теоретических момента двум соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Например:

$$\alpha_1^* = a_1, \quad \mu_2^* = m_2, \qquad \text{или} \qquad \mathsf{M}\xi(\theta_1^*, \theta_2^*) = \bar{x}, \quad \mathsf{D}\xi(\theta_1^*, \theta_2^*) = D_{\text{в}}.$$

**Пример 2.1.** В качестве случайной величины $\xi$ рассматривается число семян сорняков в пробе зерна, которое распределено по закону Пуассона:

$$\mathsf{P}(x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}, \tag{2.14}$$

где $x_i$ — число семян в одной пробе. Ниже приведено распределение семян сорняков в $n$=1000 пробах зерна (в первой строке указано количество семян сорняков в одной пробе; во второй строке указано число таких проб):

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 405 | 366 | 175 | 40 | 8 | 4 | 2 |

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра $\lambda$ распределения Пуассона.

*Решение.* Требуется оценить один параметр, поэтому достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Приравняем начальный теоретический момент первого порядка $\alpha_1$ начальному эмпирическому моменту первого порядка $a_1$. В результате получим уравнение (2.13). Математическое ожидание распределения Пуассона равно параметру $\lambda$ этого распределения[1)]; выборочное среднее вычисляем по формуле (1.8). Таким образом, точечной оценкой параметра $\lambda$ распределения Пуассона служит выборочная средняя:

$$\lambda^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{6} x_i n_i = 0.9.$$

$\square$

*Метод наибольшего правдоподобия* точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения был предложен Р. Фишером. Суть метода состоит в отыскании максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров, которая служит мерой правдоподобия для значений этих параметров при полученной реализации случайного признака.

[1)] Вычисление математического ожидания предлагается выполнить в качестве самостоятельного упражнения.

Рассмотрим этот метод в случае, когда имеется один неизвестный параметр $\theta$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — наблюдаемые в данном эксперименте значения случайной величины $\xi$. *Функцией правдоподобия* называют функцию оцениваемого параметра $\theta$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta) p(x_2, \theta) \ldots p(x_n, \theta). \tag{2.15}$$

В случае, когда $\xi$ — непрерывная случайная величина, $p(x, \theta)$ является плотностью распределения, зависящей от параметра $\theta$. Если $\xi$ — дискретная случайная величина, то $p(x, \theta) \equiv \mathsf{P}(\xi = x, \theta)$.

*Оценкой наибольшего правдоподобия* параметра $\theta$ называют такое его значение $\theta^*$, при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Функции $L$ и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении $\theta$, поэтому вместо отыскания максимума функции $L$ ищут максимум функции $\ln L$, что на практике является более удобным. Уравнение

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{2.16}$$

называют уравнением правдоподобия. Условием максимума функции правдоподобия будет

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ln L}{\mathrm{d}\theta^2}_{|\theta=\theta^*} \leqslant 0. \tag{2.17}$$

**Пример 2.2.** Для выборки из примера 2.1 найти точечную оценку неизвестного параметра $\lambda$ методом наибольшего правдоподобия.

*Решение.* Составим функцию правдоподобия:

$$L = p(x_1, \lambda) p(x_2, \lambda) \ldots p(x_n, \lambda)\,,$$

где в качестве $p(x_i, \lambda)$ берутся вероятности (2.14). В результате получим

$$L = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (x_i!)}\,.$$

Прологарифмируем:

$$\ln L = \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln (x_i!)\,.$$

Найдем первую производную по $\lambda$:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\,.$$

Приравняв ее нулю и решив полученное уравнение, получим оценку параметра

$$\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}\,,$$

которая совпадает с оценкой, полученной в примере 2.1 методом моментов.

Найдем вторую производную по $\lambda$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

В точке $\lambda = \lambda^*$ вторая производная отрицательна:

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{\mathrm{d}\lambda^2}_{|\lambda=\lambda^*} = -\frac{n}{\bar{x}} = -\frac{10\,000}{9}\,.$$

Это означает, что точка $\lambda = \lambda^*$ является точкой максимума и ее следует принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения Пуассона. $\square$

# § 3 Интервальные оценки

## 3.1 Основные понятия

Целью, которая преследуется при нахождении точечной оценки параметра, является определение (или, скорее, «угадывание») его настоящего значения. Несмещенные и состоятельные оценки параметра $\theta$, выполненные по различным выборкам, группируются около истинного значения. Поэтому вместо того, чтобы «угадывать» сам параметр $\theta$, можно указать интервал, в котором оказывается большинство оценок $\theta_n^*$. Логично считать, что вероятность попадания в этот интервал истинного значения $\theta$ довольно высока.

*Интервальной* называют оценку параметра распределения, которая определяется двумя числами — концами интервала. Пусть $\theta_n^*$ — оценка параметра $\theta$, найденная по данным выборки. Пусть также найдены статистики $\underline{\theta}$

и $\overline{\theta}$, зависящие только от выборки и не зависящие от $\theta$, причем $\underline{\theta} < \theta_n^* < \overline{\theta}$. Тогда число $\delta = \overline{\theta} - \underline{\theta}$ характеризует *точность* оценки. Чем меньше $\delta$, тем оценка точнее. Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что значение $\theta$ удовлетворяет неравенству $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$; можно лишь говорить о вероятности $\beta$, с которой это неравенство выполняется.

*Доверительной вероятностью (надежностью)* оценки называют вероятность $\beta$, с которой выполняется неравенство $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве $\beta$ берут число, близкое к единице. Обычно доверительную вероятность задают равной 0,95, 0,99, 0,999 и т. п.

*Доверительным интервалом* называют интервал $(\underline{\theta}; \overline{\theta})$, который покрывает неизвестный параметр $\theta$ с заданной надежностью $\beta$.

## 3.2 Точное распределение статистик в нормальной модели

Для построения доверительного интервала для параметра $\theta$ требуется знание точного распределения случайной величины $\theta_n^*$, которое в свою очередь зависит от вида распределения исследуемого признака $\xi$. По этой причине общих методов построения доверительных интервалов не существует. Ниже мы рассмотрим случайный признак $\xi$, который имеет гауссово распределение с параметрами $(a; \sigma^2)$, и построим доверительные интервалы для его математического ожидания и дисперсии.

**Теорема 3.1.** Если элементы выборки $x_1, \ldots, x_n$ независимы и распределены нормально с параметрами $(a; \sigma^2)$, то

1. случайная величина $\bar{x}$ распределена нормально с параметрами $(a; \sigma^2/n)$,
2. случайная величина $\dfrac{nD_{\text{в}}}{\sigma^2}$ имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы,
3. случайная величина $(\bar{x} - a)\sqrt{\dfrac{n-1}{D_{\text{в}}}}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы,
4. случайные величины $\bar{x}$ и $D_{\text{в}}$ независимы.

**Доказательство.** Введем величины $y_i = \dfrac{x_i - a}{\sigma}$, $i = 1, \ldots, n$. Они независимы и распределены нормально с параметрами $(0;1)$ (это можно показать непосредственным вычислением $\mathsf{M}y_i$ и $\mathsf{D}y_i$). Составим из них строку $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Определим матрицу $C$ размером $n \times n$, удовлетворяющую двум требованиям:

1. $C$ является ортогональной матрицей, т. е. $C^{\mathrm{tr}}C = I$,
2. первый столбец состоит из одинаковых чисел, $c_{k1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Построим новую строку $Z$, состоящую из случайных величин, по правилу $Z = YC$. Элементы этой строки $z_i$ являются линейной комбинацией нормально распределенных величин $y_i$, поэтому $z_i$ также имеют распределение Гаусса[1)]. Покажем, что $z_i$ являются независимыми и имеют параметры $(0;1)$.

$$\mathsf{M}z_i = \mathsf{M}\sum_{k=1}^{n} y_k c_{ki} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\mathsf{M}y_k = 0\,.$$

$$\operatorname{cov}(z_i, z_j) = \mathsf{M}\sum_{k,l=1}^{n} y_k y_l c_{ki} c_{lj} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} \mathsf{M} y_k y_l.$$

В силу независимости $y_k$ математическое ожидание $\mathsf{M}y_k y_l = 0$ при несовпадающих индексах $k$ и $l$, и равно 1, когда $k = l$. Так как матрица $C$ ортогональна, то $\operatorname{cov}(z_i, z_j) = \delta_{ij}$. Это значит, что случайные величины $z_i$ независимы[2)] и их дисперсия равна 1.

Приступим к непосредственному доказательству утверждений теоремы. У т в е р ж д е н и е 1. Воспользуемся вторым требованием к матрице $C$ и найдем величину $z_1$:

$$z_1 = \sum_{k=1}^{n} y_k c_{k1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} y_k = \sqrt{n}\,\bar{y} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - a)\,. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что распределение $\bar{x}$ гауссово с математическим ожиданием $a$ и дисперсией $\sigma^2/n$ .

[1)] См. теорему 2.6 в пособии [7].

[2)] В общем случае равенство нулю ковариации не означает независимости случайных величин. Однако, для гауссовых величин это условие является достаточным.

У т в е р ж д е н и е 2. Выражая выборочную дисперсию через величины $z_i$, получим:

$$\frac{nD_{\text{в}}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - n\bar{y}^2.$$

Воспользовавшись тем, что $Y = ZC^{\text{tr}}$, а матрица $C$ ортогональна, нетрудно вычислить, что

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2\,,$$

а из (3.1) следует, что $n\bar{y}^2 = z_1^2$. В результате получим

$$\frac{nD_{\text{в}}}{\sigma^2} = \sum_{k=2}^{n} z_k^2\,. \tag{3.2}$$

Так как сумма содержит $n-1$ слагаемое, то рассматриваемая случайная величина имеет распределение Пирсона с $n-1$ степенью свободы (см. Приложение 1).

У т в е р ж д е н и е 3. Рассмотрим выражение $(\bar{x} - a)\sqrt{\dfrac{n-1}{D_{\text{в}}}}$. Обозначим сумму в (3.2) символом $\chi^2_{n-1}$ и подставим его вместо выборочной дисперсии, а выборочное среднее заменим из (3.1). В результате получим

$$(\bar{x} - a)\sqrt{\frac{n-1}{D_{\text{в}}}} = \frac{z_1}{\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}}\,,$$

что и доказывает последнее утверждение теоремы (см. Приложение 2).

У т в е р ж д е н и е 4. Справедливость утверждения о независимости $\bar{x}$ и $D_{\text{в}}$ следует из выражений (3.1) и (3.2). В первое выражение входит только величина $z_1$, а во второе — все остальные $z_i$. ■

## 3.3 Доверительные интервалы в нормальной модели

Доказанная теорема позволяет найти доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии нормально распределенного случайного признака. Рассмотрим возможные ситуации.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии. Согласно теореме 3.1 выборочное среднее распределено нормально с параметрами $(a; \sigma^2/n)$. Следовательно, величина $\theta = \dfrac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$ распределена нормально с параметрами $(0; 1)$. Тогда вероятность $\mathbf{P}\left(|\theta| < \varepsilon_\beta\right)$ не зависит от $a$. Приравняв ее надежности $\beta$, найдем значение $\varepsilon_\beta$ как решение уравнения

$$2\Phi(\varepsilon_\beta) = \beta\,, \tag{3.3}$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа. Графически уравнение (3.3) проиллюстрировано на рисунке 4, где площадь закрашенной области под графиком плотности гауссова распределения равна заданной надежности. Приближенное решение этого уравнения можно найти с помощью таблицы значений функции Лапласа (Приложение 3). Таким образом, доверительный интервал в этом случае будет

$$\bar{x} - \varepsilon_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \varepsilon_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

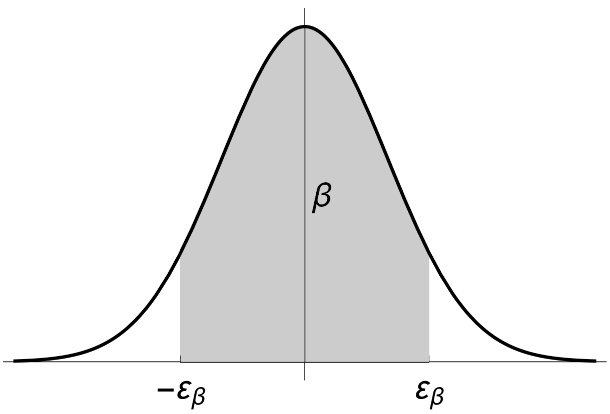


Рис. 4.

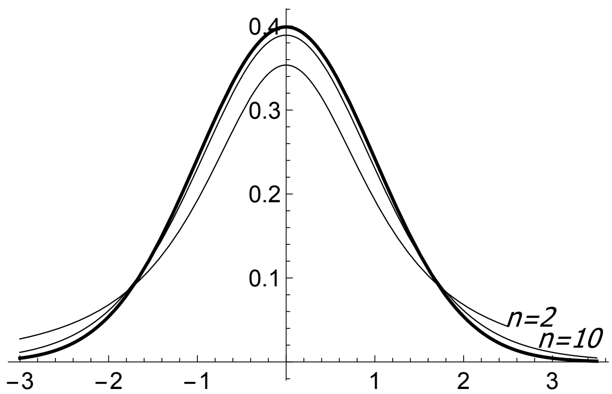


Рис. 5.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии. На практике чаще приходится иметь дело с распределениями, параметры которых неизвестны. В этом случае используем случайную величину

$$\theta = (\bar{x} - a)\sqrt{\frac{n-1}{D_{\text{в}}}} = (\bar{x} - a)\,\frac{\sqrt{n}}{s}\,,$$

которая по теореме 3.1 имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Запишем для нее уравнение, аналогичное (3.3)

$$\mathsf{P}\left(|\theta| < t_\beta\right) = \beta\,, \tag{3.4}$$

численные решения которого для некоторых значений $\beta$ представлены в таблице Приложения 4. В результате получим доверительный интервал

$$\bar{x} - t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}}\,. \tag{3.5}$$

Распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы имеет предельным законом гауссово распределение с параметрами $(0;1)$. Наглядно это можно увидеть на рисунке 5, где тонкими линиями изображена плотность распределения Стьюента с разными значениями степени свободы, а толстой линией — распределение Гаусса. Поэтому при больших объемах выборки $(n > 30)$, даже если дисперсия случайного признака неизвестна, критические точки можно вычислять с помощью функции Лапласа.

Доверительный интервал для дисперсии при известном математическом ожидании. Случайные величины $(x_i - a)/\sigma$ распределены нормально с параметрами $(0;1)$. Тогда величина $\theta = S^2/\sigma^2$, где $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$, имеет распределение хи-квадрат с $n$ степенями свободы. Введем число $\alpha$, связанное с надежностью $\beta$ соотношением $2\alpha = 1-\beta$. Это соотношение определяет вероятность того, что истинное значение параметра окажется за пределами доверительного интервала. Пусть $u_\alpha^2$ — решение уравнения

$$\mathsf{P}\left(\theta < u_{1-\alpha}^2\right) = \alpha\,. \tag{3.6}$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left(\theta < u_\alpha^2\right) = 1-\alpha\,. \tag{3.7}$$

Вычитая из второго выражения первое, получим

$$\mathsf{P}\left(u_{1-\alpha}^2 < \theta < u_\alpha^2\right) = 1 - 2\alpha = \beta\,.$$

Это решение проиллюстрировано на рисунке 6, где изображен график плотности распределения Пирсона с набором критических точек, которые определяются уравнениями (3.6) и (3.7). Из рисунка видно, что вероятности ошибки в меньшую и в большую сторону одинаковы, а площадь незакрашенной области равна доверительной вероятности.

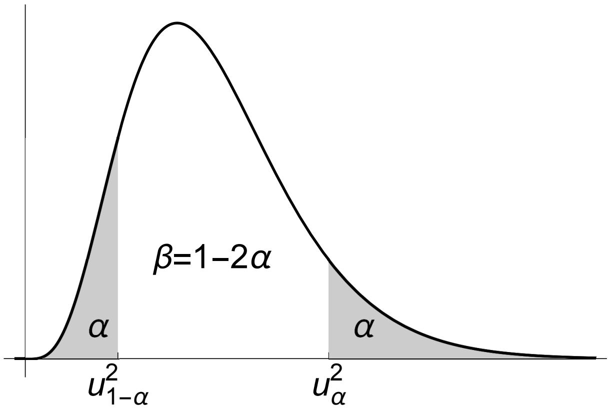


Рис. 6.

Таким образом, доверительный интервал для дисперсии, отвечающий надежности $\beta$, имеет вид
$$\frac{S^2}{u_\alpha^2} < \sigma^2 < \frac{S^2}{u_{1-\alpha}^2}, \tag{3.8}$$
а значения $u_\alpha^2$ и $u_{1-\alpha}^2$ находятся как решения уравнений (3.6) и (3.7). Некоторые из этих решений представлены в Приложении 5.

Доверительный интервал для дисперсии при неизвестном математическом ожидании. При неизвестном $a$ снова воспользуемся теоремой 3.1. Параметром будет служить величина $\theta = nD_{\text{в}}/\sigma^2$, которая имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы. Поэтому процедура построения доверительного интервала в точности повторяет предыдущий случай с той разницей, что число степеней свободы распределения будет на единицу меньше, а сам доверительный интервал выглядит как
$$\frac{s\sqrt{n-1}}{u_\alpha} < \sigma < \frac{s\sqrt{n-1}}{u_{1-\alpha}}, \tag{3.9}$$

где доверительный интервал записан для среднего квадратического отклонения. В формуле (3.9) значения $u_\alpha$ и $u_{1-\alpha}$ определяются по распределению хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы, а $s$ — несмещенное (исправленное) среднее квадратическое отклонение.

**Пример 3.1.** Получена выборка из нормальной генеральной совокупности:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.27 | 2.37 | 9.8 | 2.4 | 1.1 | 2.66 | -11.07 | 2.06 | 2.43 |
| 3.25 | 11.16 | -0.77 | 0.3 | 2.19 | -1.29 | -6.47 | 2.68 | -1.74 |

Нужно найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с надежностью 0.95.

*Решение.* По формулам (1.8) и (2.4) определяем выборочную среднюю $\bar{x} = 1.63$ и несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение $s = 5.22$. Доверительный интервал для ожидаемого значения строим по формуле (3.5). Величину $t_\beta$ определим по таблице из Приложения 4. Для доверительной вероятности $\beta = 0.95$ и объема выборки $n = 18$ значение $t_\beta = 2.11$. Искомые границы интервала:

$$1.63 - 2.11 \cdot 5.22/\sqrt{18} < \ a \ < 1.63 + 2.11 \cdot 5.22/\sqrt{18} \qquad \text{или}$$
$$-0.97 < \ a \ < 4.23.$$

Далее найдем величину $\alpha = (1-\beta)/2 = 0.025$ и соответствующие ей значения $u_\alpha^2 = 30.19$ и $u_{1-\alpha}^2 = 7.56$ (см. Приложение 5). Искомый доверительный интервал вычисляется по формуле (3.9):

$$5.22\sqrt{17/30.19} < \ \sigma \ < 5.22\sqrt{17/7.56} \qquad \text{или}$$
$$3.92 < \ \sigma \ < 7.83.$$

□

# § 4 Статистическая проверка гипотез

## 4.1 Общие принципы

На практике нередко приходится решать задачи со случайными величинами, относительно которых имеются априорные предположения об их распределении. Такие предположения называются (статистическими) *гипотезами*. На основании полученных данных выполняется проверка гипотезы, чтобы определить, противоречит она этим данным или нет.

Кроме гипотез о виде распределения, рассматриваются гипотезы о значениях параметров известных распределений или о совпадении значений параметров в двух и более выборках. В последнем случае, по сути, рассматривается гипотеза о том, что серии опытов проводились в одинаковых условиях.

Выдвинутую гипотезу называют *основной* или *нулевой*. Гипотезу, которая противопоставляется основной, называют *альтернативной* или *конкурирующей*.

Правило, согласно которому принимается решение принять или отвергнуть гипотезу, называется *статистическим критерием*. Статистику $\theta$, относительно которой действует правило, называют *статистикой критерия*[1]. Обычно в качестве нулевой гипотезы берут гипотезу о совпадении (то есть предполагается, что статистика $\theta$ равна какому-то заданному значению), а в качестве альтернативной рассматривают гипотезу о различии (это может быть, например, предположение о том, что статистика $\theta$ не равна этому значению, а также что она больше или меньше него).

Значение статистики $\theta$, полученное из измерений или наблюдений, называют *наблюдаемым значением критерия*. Множество значений, которые может принимать $\theta$, разбивают на два непересекающихся подмножества. В одно входят значения, при которых основная гипотеза принимается, в другое — значения, при которых она отвергается. Первое называется *областью*

[1] Часто статистку критерия называют просто критерием. Поэтому, в зависимости от контекста, термин *критерий* может относиться как к случайной величине, для которой формулируется правило, так и к самому правилу.

*принятия гипотезы*, второе — областью отклонения гипотезы или *критической областью.*

В случае, когда статистика $\theta$ является одномерной случайной величиной, критическая область состоит из интервалов. Обычно это либо один, либо два несвязных полубесконечных интервала. Границами этих полуинтервалов служат *критические точки.* Критическая область, состоящая из одного полуинтервала, называется *односторонней.* Она определяется неравенством $\theta > \theta_{\text{кр}}$ (*правосторонняя* критическая область), либо неравенством $\theta < \theta_{\text{кр}}$ (*левосторонняя* критическая область). *Двусторонняя* критическая область определяется неравенствами $\theta < \underline{\theta}_{\text{кр}}$ и $\theta > \overline{\theta}_{\text{кр}}$, причем $\underline{\theta}_{\text{кр}} < \overline{\theta}_{\text{кр}}$.

Поскольку решение о принятии гипотезы принимается на основе случайных данных, то о правильности такого решения можно говорить только с некоторой вероятностью.

В результате статистической проверки гипотеза может быть отвергнута, несмотря на то, что она была правильной. Такая ошибка называется *ошибкой первого рода.* Вероятность этой ошибки называют *уровнем значимости* и ее принято обозначать буквой $\alpha$[1]. Для правосторонней критической области

$$\alpha = \mathsf{P}(\theta > \theta_{\text{кр}}). \tag{4.1}$$

Уровень значимости — это малая вероятность, задаваемая изначально, а уравнение (4.1) служит для нахождения критической точки. В приложении приведены таблицы критических точек некоторых распределений, использующихся при статистических проверках гипотез.

*Ошибка второго рода* заключается в том, что принимается неверная гипотеза. Ее вероятность обозначается буквой $\beta$. Вероятность $1-\beta$, то есть вероятность отвергнуть неверную основную гипотезу, называется *мощностью критерия.* Другими словами, мощность критерия — это вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что основная гипотеза неверна.

[1] В отношении двусторонних областей для уровня значимости часто используют обозначение $2\alpha$, считая, что $\alpha$ — это вероятность попадания в каждый из несвязных полуинтрвалов.

Таким образом, при фиксированных объеме выборки и уровне значимости, наилучшим выбором критической области будет такой, при котором мощность критерия будет максимальной. Для заданного объема выборки одновременное уменьшение вероятностей ошибок первого и второго рода невозможно. Это можно сделать только увеличив объем выборки. Выбор оптимального значения уровня значимости диктуется, скорее, не математическими резонами, а практическими соображениям, уровнем допустимости тех или иных потерь.

В зависимости от проверяемой гипотезы, критерии можно разделить на несколько типов:

- *критерии согласия* проверяют, согласуется ли заданная выборка с заданным априори распределением,
- *критерии значимости* проверяют гипотезы о численных значениях параметров известных законов распределения,
- *критерии однородности* предназначены для проверки гипотезы о том, что две (или несколько) выборки взяты из одной генеральной совокупности, либо имеют одинаковые средние, дисперсии или другие параметры.

На примере правосторонней критической области рассмотрим, как решается задача статистической проверки гипотезы. Для решения задачи должно быть известно распределение статистики $\theta$. С помощью уравнения (4.1) по заданному уровню значимости $\alpha$ определяется критическая точка $\theta_{\text{кр}}$. Далее необходимо найти *наблюдаемое значение критерия*, которое вычисляется по выборке (или выборкам). Если оказывается, что $\theta_{\text{набл}} > \theta_{\text{кр}}$, то гипотеза отвергается (значение критерия попало в критическую область). Если $\theta_{\text{набл}} < \theta_{\text{кр}}$, то гипотеза принимается. Аналогично действуют с левосторонней и двусторонней областями.

Следует заметить, что принятие гипотезы не означает, что она доказана. Фраза «гипотеза принимается» означает, что данные измерений согласуются с высказанным утверждением и не дают оснований его отвергнуть. В принципе, наряду с этой гипотезой, эксперимент может находиться в согласии и с какой-либо другой гипотезой.

Если же наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, то это значит, что гипотеза противоречит эксперименту и она отвергается. Здесь видна прямая аналогия с тем, что никакой пример не может служить доказательством теоремы или другого утверждения, тогда как один-единственный контрпример может утверждение опровергнуть.

Далее мы рассмотрим некоторые критерии проверки статистических гипотез.

## 4.2 Критерии, основанные на интервальных оценках

Задача проверки гипотез о значении параметров может быть решена с помощью построения доверительных интервалов. В этом случае доверительный интервал определяет область принятия гипотезы.

Например, для нормально распределенного случайного признака сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней при известной дисперсии $\sigma$ осуществляется при помощи неравенства (3.8), которое задает область принятия гипотезы.

В этом случае нулевая гипотеза $H_0$: математическое ожидание $a$ нормальной совокупности равна гипотетическому значению $a_0$, т. е. $a = a_0$; конкурирующая гипотеза $H_1$: $a \neq a_0$.

Наблюдаемое значение критерия:

$$\theta = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{4.2}$$

Критическая точка $\theta_{\text{кр}}$ определяется по таблице значений функций Лапласа (Приложение 3) по заданному уровню значимости $2\alpha$[1]: $2\,\Phi(\theta_{\text{кр}}) = 1 - 2\alpha$. Если $|\theta| < \theta_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если же $|\theta| > \theta_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Аналогично выполняется проверка гипотез относительно других параметров распределений.

[1] По сути здесь определена двусторонняя критическая область $|\theta| > \theta_{\text{кр}}$, поэтому для уровня значимости используется обозначение $2\alpha$.

**Пример 4.1.** Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $a = 5{,}2$ извлечена выборка объема $n = 100$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x} = 27{,}56$. Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon a = a_0 = 26$ при конкурирующей гипотезе $H_1\colon a \neq 26$.

*Решение.* Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$\theta = \frac{|27{,}56 - 26|\sqrt{100}}{5{,}2} = 3.$$

Для данного уровня значимости $\Phi(\theta_{\text{кр}}) = 0{,}475$; по таблице значений функции Лапласа (см. Приложение 3) находим, что $\theta_{\text{кр}} = 1{,}96$.

Так как $\theta > \theta_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральная средние различаются значимо. □

## 4.3 Гипотезы о совпадении значений параметров

На практике довольно часто бывает нужно сравнить параметры двух и более генеральных совокупностей. В этом разделе мы рассмотрим две задачи из этого ряда.

Для сравнения дисперсий нормальных генеральных совокупностей используют критерий Фишера—Снедекора. Необходимость в таком сравнении возникает, например, при сравнении точности приборов, методов измерения и т. п.

Пусть имеются две независимые выборки объемов $n$ и $m$ двух нормальных генеральных совокупностей $\xi$ и $\eta$. Для каждой выборки найдена исправленная выборочная дисперсия $s_\xi^2$ и $s_\eta^2$. Требуется при заданном уровне значимости проверить гипотезу о равенстве дисперсий этих совокупностей. Другими словами, необходимо проверить, значимо или незначимо различаются выборочные дисперсии.

Итак, нулевая гипотеза $H_0$: генеральные дисперсии двух нормальных совокупностей равны, т. е. $\mathbf{D}\xi = \mathbf{D}\eta$.

В качестве критерия берется величина:

$$F = \frac{s_\xi^2}{s_\eta^2}\,, \tag{4.3}$$

где $s_\xi^2$ — большее значение исправленной дисперсии, а $s_\eta^2$ — меньшее. Величина $F$ имеет распределение Фишера—Снедекора со степенями свободы $k_1 = n - 1$ (для большей исправленной дисперсии) и $k_2 = m - 1$ (для меньшей исправленной дисперсии).

Для нахождения критических точек необходимо уточнить конкурирующую гипотезу. Здесь возможны два варианта. Первый — конкурирующая гипотеза $H_1$: $\mathbf{D}\xi > \mathbf{D}\eta$. В этом случае строят правостороннюю критическую область, которая определяется уравнением

$$\mathbf{P}(F > F_{\text{кр}}) = \alpha\,.$$

Критическая точка $F_{\text{кр}}$ определяется по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора со степенями свободы $k_1$ и $k_2 = m - 1$ (Приложение 6) по уровню значимости $2\alpha$. Область принятия нулевой гипотезы определяется неравенством $F < F_{\text{кр}}$.

Второй вариант состоит в выборе конкурирующей гипотезы $H_1$: $\mathbf{D}\xi \neq \mathbf{D}\eta$. В этом случае строят двустороннюю критическую область, для которой критические точки удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{P}(F < F_{\text{кр}1}) = \alpha\,, \qquad \mathbf{P}(F > F_{\text{кр}2}) = \alpha\,.$$

На практике находят только правую критическую точку $F_{\text{кр}2}$, которая определяется по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (Приложение 6) по уровню значимости $\alpha$ и числам степеней свободы $k_1 = n - 1$ (для большей исправленной дисперсии) и $k_2 = m - 1$ (для меньшей исправленной дисперсии). Левую критическую точку находить не нужно из-за предварительного выбора критерия, в котором большая дисперсия стоит в числителе. Таким образом, Если $F < F_{\text{кр}2}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, а если $F > F_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Другим примером служит *сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей*, дисперсии которых неизвестны и одинаковы, причем объемы выборок $n$ и $m$ являются малыми, то есть $n, m < 30$. Если априори нет оснований считать дисперсии одинаковыми, то прежде следует воспользоваться критерием Фишера—Снедекора для проверки гипотезы о равенстве дисперсий.

Как и в предыдущем случае, критическая область строится в зависимости от выбора конкурирующей гипотезы.

В первом случае, нулевая гипотеза $H_0$: математические ожидания двух нормальных совокупностей равны, т. е. $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta$, а конкурирующая гипотеза $H_1$: $\mathsf{M}\xi \neq \mathsf{M}\eta$.

В качестве критерия берется случайная величина

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{(n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}, \tag{4.4}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние, а $s_\xi^2$ и $s_\eta^2$ — исправленные выборочные дисперсии. Она имеет распределение Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы. Критическая область является двусторонней и в силу четности функции плотности распределения Стьюдента левая и правая критические точки симметричны относительно нуля. Для заданного уровня значимости $2\alpha$ критические точки определяются уравнением

$$\mathsf{P}(|t| > t_{\text{кр}}) = 2\alpha.$$

При решении задач критические точки $t_{\text{кр}}$ определяются по таблице Приложения 4 по заданному уровню значимости $2\alpha$ и числу степеней свободы $n+m-2$.

Когда $|t| < t_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, а если $|t| > t_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Другим способом выбора конкурирующей гипотезы является $H_1$: $\mathsf{M}\xi > \mathsf{M}\eta$. В этом случае строят правостороннюю критическую область, граница которой на уровне значимости $\alpha$ находится как решение уравнения

$$\mathsf{P}(t > t_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Гипотеза принимается, если $t < t_{\text{кр}}$, и отклоняется, если $t > t_{\text{кр}}$.

**Пример 4.2.** Из двух партий изделий, изготовленных на двух одинаково настроенных станках, извлечены малые выборки, объемы которых $n = 10$ и $m = 12$. Получены следующие результаты измерения контролируемого параметра изделий:

| $x_i$ | 3,4 | 3,5 | 3,7 | 3,9 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 3 | 4 | 1 |

| $y_i$ | 3,2 | 3,4 | 3,6 |
|---|---|---|---|
| $m_i$ | 2 | 2 | 8 |

Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0.01$ проверить гипотезу $H_0$: $\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\eta$ о равенстве средних размеров изделий при конкурирующей гипотезе $H_1$: $\mathbf{M}\xi \neq \mathbf{M}\eta$. Предполагается, что случайные величины $\xi$ и $\eta$ распределены нормально.

*Решение.* По формулам (1.8)–(2.4) определяем выборочные средние

$$\bar{x} = 3{,}6, \qquad \bar{y} = 3{,}5$$

и исправленные выборочные дисперсии

$$s_\xi^2 = 0{,}0267, \qquad s_\eta^2 = 0{,}0255.$$

Исправленные дисперсии различны, тогда как рассматриваемый критерий предполагает, что генеральные дисперсии одинаковы. Поэтому необходимо сравнить дисперсии, используя критерий Фишера-Снедекора.

Наблюдаемое значение критерия вычисляем по формуле (4.3):

$$F_{\text{набл}} = \frac{0{,}0267}{0{,}0255} = 1{,}05.$$

Критическую точку находим по таблице Приложения 6 критических точек распределения Фишера-Снедекора на уровне значимости 0.005 (половина от указанного в задаче) со степенями свободы $k_1 = n - 1 = 9$ и $k_2 = m - 1 = 11$: $F_{\text{кр}} = 5{,}54$. Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то дисперсии различаются незначимо, и, следовательно, можно считать, что допущение о равенстве генеральных дисперсий выполняется.

Сравним средние, для чего вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента (4.4): $t_{\text{набл}} = 1{,}45$. По уровню значимости $2\alpha = 0{,}01$ и числу степеней свободы $k = n + m - 2 = 20$ находим в таблице Приложения 4 критическое значение $t_{\text{кр}} = 2{,}85$.

Так как $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве средних. Таким образом, средние размеры изделий существенно не различаются. □

## 4.4 Критерий Пирсона

Критерий согласия Пирсона (или критерий хи-квадрат) используют для проверки гипотезы о том, что случайная величина $\xi$ имеет функцию распределения $F(x)$. Для проверки гипотезы множество значений случайной величины разбивается на $s$ интервалов, и для каждого интервала сравниваются эмпирические частоты с вероятностями, которые вычисляются через $F(x)$. Если гипотеза верна, то по закону больших чисел частоты попадания в интервал $[a,b)$ стремятся к вероятностям $F(b) - F(a)$, когда объем выборки $n \to \infty$.

Итак, проверяется нулевая гипотеза $H_0$: $F_\xi(x) = F(x)$. В качестве меры отклонения от гипотезы $H_0$ служит статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}\,. \tag{4.5}$$

Здесь $n_i$ — частота попадания в каждый из $s$ промежутков $[a_i, b_i)$, на которые разбито множество значений случайного признака. Ясно, что $n_1 + \ldots + n_s = n$. Вероятность попадания в каждый интервал $p_i = F(b_i) - F(a_i)$.

Когда $n \to \infty$, распределение статистики (4.5) стремится к распределению Пирсона с $s-1$ степенью свободы вне зависимости от предполагаемого вида $F(x)$. На практике использование закона распределения $\chi^2_{s-1}$ является довольно точным при $n > 50$.

Число промежутков $s$ не должно быть слишком велико, так как нужно обеспечить попадание хотя бы нескольких значений выборки в каждый интервал. Для лучшей точности приближения желательно, чтобы в любом интервале ожидаемое количество попаданий $np_i$ было достаточно большим (на практике $np_i > 5$). С другой стороны, интервалов не должно быть слишком мало, так как в этом случае вычисленные вероятности $p_i$ будут недостаточно хорошо представлять гипотетическую функцию распределения $F(x)$. Для практических задач обычно используют значение $s = \ln n$.

Критерий Пирсона — правосторонний, поэтому критическая точка определяется по заданному уровню значимости $\alpha$ с помощью уравнения

$$\mathsf{P}(\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Таблица критических точек распределения хи-квадрат дана в Приложении 5.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о предполагаемом распределении случайной величины $\xi$. В случае, когда $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, гипотезу отвергают.

Этот метод подходит и в том случае, когда гипотетическая функция распределения $F(x)$ принадлежит некоторому классу функций распределения, который определяется одним или несколькими неопределенными параметрами. В этом случае статистика (4.5) снова в пределе $n \to \infty$ будет иметь распределение хи-квадрат, но теперь с $s - r - 1$ степенями свободы, где $r$ — число неизвестных параметров распределения. В качестве параметров нужно подставить их точечные оценки, полученные, например, методом наибольшего правдоподобия.

**Пример 4.3.** Используя критерий согласия Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности $\xi$ с эмпирическим распределением выборки объема $n = 100$:

| Интервал | (3;8) | (8;13) | (13;18) | (18;23) | (23;28) | (28;33) | (33;38) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота $n_i$ | 6 | 8 | 15 | 40 | 16 | 8 | 7 |

*Решение.* В качестве нулевой гипотезы принимаем, что случайный признак имеет распределение Гаусса с неизвестными праметрами $a$ и $\sigma^2$. Методом наибольшего правдоподобия определяем, что $a^* = \bar{x}$ и $(\sigma^2)^* = D_{\text{в}}$ (эту задачу студентам предлагается решить самостоятельно).

Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение, приняв в качестве вариант середины интервалов. Обозначим границы $i$-го интервала $x_i$ и $x_{i+1}$, тогда середины интервалов будут $x_i^* = (x_{i+1} - x_i)/2$:

| $x_i^*$ | 5.5 | 10.5 | 15.5 | 20.5 | 25.5 | 30.5 | 35.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 8 | 15 | 40 | 16 | 8 | 7 |

По формулам (1.8) и (1.9) находим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} x_i^* n_i = 20.7, \\ D_{\text{в}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} (x_i^* - \bar{x})^2 n_i = 52.96. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве теоретического распределения будем рассматривать нормальное распределение с параметрами $a = \bar{x} = 20.7$ и $\sigma^2 = D_{\text{в}} = 52.96$.

Чтобы вычислить вероятности $p_i$ попадания в $i$-й интервал, перейдем от случайной величины $\xi$ к величине $\eta = (\xi - a)/\sigma$, имеющей нормальное распределение с параметрами (0;1). Найдем соответствующие границы интервалов $y_i = (x_i - a)/\sigma$; при этом крайние интервалы преобразуем в бесконечные полуинтервалы, т. е. примем, что $y_1 = -\infty$, а $y_8 = \infty$. Это делается, чтобы сохранить нормировку вероятности $\sum p_i = 1$. В результате получаем следующее соответствие между границами интервала:

| $x_i$ | 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $-\infty$ | -1.75 | -1.06 | -0.37 | 0.32 | 1.00 | 1.69 | $\infty$ |
| $\Phi(y_i)$ | -0.5 | -0.4599 | -0.3554 | -0.1443 | 0.1255 | 0.3413 | 0.4545 | 0.5 |

В нижней строке таблицы выписаны значения функции Лапласа на границах интервалов: вероятность попадания в $i$-й интервал $p_i = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i)$. Значения функции Лапласа берем из таблицы Приложения 3. Результаты вычисления вероятностей и теоретических частот приведены в таблице:

| Интервал $(y_i; y_{i+1})$ | Частота $n_i$ | Вероятность $p_i$ | $np_i$ | $n_i - np_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; -1.75)$ | 6 | 0.0401 | 4.01 | 1.99 |
| $(-1.75; -1.06)$ | 8 | 0.1045 | 10.45 | $-2.45$ |
| $(-1.06; -0.37)$ | 15 | 0.2111 | 21.11 | $-6.11$ |
| $(-0.37; 0.32)$ | 40 | 0.2698 | 26.98 | 13.02 |
| (0.32;1.00) | 16 | 0.2158 | 21.58 | $-5.58$ |
| (1.00;1.69) | 8 | 0.1137 | 11.37 | $-3.37$ |
| (1.69;$\infty$) | 7 | 0.0455 | 4.55 | 2.45 |

По формуле (4.5) вычисляем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}} = 13.39$.

Для определения критической точки используем таблицу из Приложения 5 с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ и числом степеней свободы

$$k = s - r - 1 = 7 - 2 - 1 = 4\,,$$

где $s = 7$ — число интервалов, $r = 2$ — число параметров распределения, вычисленных по выборке. Для данных параметров $\chi^2_{\text{кр}} = 9.49$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности $\xi$ отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо. Это означает, что данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности. $\square$

# Приложения

## Приложение 1. Распределение Пирсона

Пусть даны независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, распределенные нормально с параметрами $(0; 1)$. Нужно найти распределение случайной величины $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

По определению, функция распределения $F_{\chi_n^2}(x) = \mathbf{P}(\chi_n^2 < x)$. Чтобы найти эту вероятность, нужно вычислить интеграл от совместной плотности распределения $p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$ по области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < x$. Совместная плотность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ задана функцией

$$p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x_1^2/2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x_n^2/2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2/2},$$

поэтому

$$F_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \underset{x_1^2 + \ldots + x_n^2 < x}{\int \cdots \int} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2/2}\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\,. \qquad (\text{П.1})$$

При этом для $x < 0$ значение интеграла будет равно нулю, так как сумма квадратов заведомо неотрицательна.

Интеграл (П.1) вычисляется путем перехода к обобщенным сферическим координатам:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{n-1}\,, \\
x_2 &= r \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{n-1}\,, \\
x_3 &= r \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \ldots \sin\alpha_{n-1}\,, \\
\ldots & \\
x_n &= r \cos\alpha_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Радиальная координата $r$ меняется от 0 до $\infty$, значения угловой переменной $\alpha_1$ лежат в диапазоне от 0 до $2\pi$, а переменных $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ — от 0 до $\pi$. В этом случае $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$, а якобиан перехода $J = r^{n-1} J_{\text{угл}}$, где $J_{\text{угл}}$ зависит только от угловых переменных:

$$J_{\text{угл}} = \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_2 \ldots \sin^{n-2}\alpha_2\,.$$

В новых переменных (П.1) примет вид

$$F_{\chi^2_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \underset{r^2<x}{\int \cdots \int} e^{-r^2/2} r^{n-1} J_{\text{угл}} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_{n-1} \,. \tag{П.2}$$

Чтобы получить результат, можно выполнить непосредственное вычисление кратного интеграла (П.2). Проще, однако, поступить по-другому. Выполним в (П.2) замену переменной $r^2 = t$ и перепишем интеграл в виде

$$F_{\chi^2_n}(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n/2}} \int\limits_0^x \mathrm{d}t \, e^{-t/2} t^{(n-2)/2} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha_1 \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\alpha_2 \ldots \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha_{n-1} J_{\text{угл}} \,. \tag{П.3}$$

Интегралы по угловым переменным в (П.3) дадут некоторое число (зависящее от $n$), поэтому можно записать, что

$$F_{\chi^2_n}(x) = C_n \int\limits_0^x e^{-t/2} t^{(n-2)/2} \, \mathrm{d}t \,.$$

Это значит, что для положительных $x$ плотность распределения

$$p_{\chi^2_n}(x) = C_n e^{-x/2} x^{(n-2)/2} \,,$$

а константа $C_n$ может быть найдена из условия нормировки:

$$\int\limits_0^\infty p_{\chi^2_n}(x) \, \mathrm{d}x = 1 \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \,.$$

Здесь учтено, что гамма-функция определена интегралом

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x \,.$$

Распределение с плотностью

$$p_{\chi^2_n}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \, e^{-x/2} x^{(n-2)/2} \tag{П.4}$$

называется распределением хи-квадрат (или распределением Пирсона) с $n$ степенями свободы.

## Приложение 2. Распределение Стьюдента

Пусть случайные величины $\xi$ и $\chi_n^2$ независимы. При этом случайная величина $\xi$ имеет гауссово распределение с параметрами $(0;1)$, а $\chi_n^2$ имеет распределение Пирсона с $n$ степенями свободы (П.4). Нужно найти распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2/n}}\,.$$

Функция распределения случайной величины $\tau_n$ дается двойным интегралом

$$F_{\tau_n}(x) \equiv \mathsf{P}(\tau_n < x) = \iint\limits_{\frac{z}{\sqrt{y/n}}<x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} \cdot \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, e^{-y/2} y^{(n-2)/2}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\,, \quad (\text{П.5})$$

где принята во внимание независимость $\xi$ и $\chi_n^2$.

Введем новые переменные $v = \dfrac{z}{\sqrt{y/n}}$, $u = y$. Тогда якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{2\sqrt{un}} & \sqrt{\dfrac{u}{n}} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{u}{n}}\,,$$

а область интегрирования в (П.5) теперь определяется неравенством $v < x$. С учетом того, что переменная $u$ может принимать только положительные значения, запишем (П.5) в виде повторного интеграла

$$F_{\tau_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}\pi n}\,\Gamma(n/2)} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{d}v \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}u\, \exp\left\{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{v^2}{n}\right)\right\}\, u^{(n-1)/2}\,. \quad (\text{П.6})$$

Чтобы вычислить интеграл по $u$, выполним замену переменной $u\left(1+\dfrac{v^2}{n}\right) = w$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{v^2}{n}\right)\right\}\, u^{(n-1)/2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\left(1+\dfrac{v^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \int\limits_0^\infty e^{-w/2}\, w^{(n-1)/2}\, \mathrm{d}w =$$

$$= \frac{2^{(n+1)/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{v^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}\,.$$

Подставив полученное значение в (П.6), получим, что функция распределения примет вид

$$F_{\tau_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{v^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \, \mathrm{d}v\,,$$

который соответствует распределению Стьюдента (или тау-распределению) с $n$ степенями свободы.

# Приложение 3. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 0.00000 | 0.26 | 0.10257 | 0.52 | 0.19847 | 0.78 | 0.28230 | 1.04 | 0.35083 |
| 0.01 | 0.00399 | 0.27 | 0.10642 | 0.53 | 0.20194 | 0.79 | 0.28524 | 1.05 | 0.35314 |
| 0.02 | 0.00798 | 0.28 | 0.11026 | 0.54 | 0.20540 | 0.8 | 0.28814 | 1.06 | 0.35543 |
| 0.03 | 0.01197 | 0.29 | 0.11409 | 0.55 | 0.20884 | 0.81 | 0.29103 | 1.07 | 0.35769 |
| 0.04 | 0.01595 | 0.3 | 0.11791 | 0.56 | 0.21226 | 0.82 | 0.29389 | 1.08 | 0.35993 |
| 0.05 | 0.01994 | 0.31 | 0.12172 | 0.57 | 0.21566 | 0.83 | 0.29673 | 1.09 | 0.36214 |
| 0.06 | 0.02392 | 0.32 | 0.12552 | 0.58 | 0.21904 | 0.84 | 0.29955 | 1.1 | 0.36433 |
| 0.07 | 0.02790 | 0.33 | 0.12930 | 0.59 | 0.22240 | 0.85 | 0.30234 | 1.11 | 0.36650 |
| 0.08 | 0.03188 | 0.34 | 0.13307 | 0.6 | 0.22575 | 0.86 | 0.30511 | 1.12 | 0.36864 |
| 0.09 | 0.03586 | 0.35 | 0.13683 | 0.61 | 0.22907 | 0.87 | 0.30785 | 1.13 | 0.37076 |
| 0.1 | 0.03983 | 0.36 | 0.14058 | 0.62 | 0.23237 | 0.88 | 0.31057 | 1.14 | 0.37286 |
| 0.11 | 0.04380 | 0.37 | 0.14431 | 0.63 | 0.23565 | 0.89 | 0.31327 | 1.15 | 0.37493 |
| 0.12 | 0.04776 | 0.38 | 0.14803 | 0.64 | 0.23891 | 0.9 | 0.31594 | 1.16 | 0.37698 |
| 0.13 | 0.05172 | 0.39 | 0.15173 | 0.65 | 0.24215 | 0.91 | 0.31859 | 1.17 | 0.37900 |
| 0.14 | 0.05567 | 0.4 | 0.15542 | 0.66 | 0.24537 | 0.92 | 0.32121 | 1.18 | 0.38100 |
| 0.15 | 0.05962 | 0.41 | 0.15910 | 0.67 | 0.24857 | 0.93 | 0.32381 | 1.19 | 0.38298 |
| 0.16 | 0.06356 | 0.42 | 0.16276 | 0.68 | 0.25175 | 0.94 | 0.32639 | 1.2 | 0.38493 |
| 0.17 | 0.06749 | 0.43 | 0.16640 | 0.69 | 0.25490 | 0.95 | 0.32894 | 1.21 | 0.38686 |
| 0.18 | 0.07142 | 0.44 | 0.17003 | 0.7 | 0.25804 | 0.96 | 0.33147 | 1.22 | 0.38877 |
| 0.19 | 0.07535 | 0.45 | 0.17364 | 0.71 | 0.26115 | 0.97 | 0.33398 | 1.23 | 0.39065 |
| 0.2 | 0.07926 | 0.46 | 0.17724 | 0.72 | 0.26424 | 0.98 | 0.33646 | 1.24 | 0.39251 |
| 0.21 | 0.08317 | 0.47 | 0.18082 | 0.73 | 0.26730 | 0.99 | 0.33891 | 1.25 | 0.39435 |
| 0.22 | 0.08706 | 0.48 | 0.18439 | 0.74 | 0.27035 | 1. | 0.34134 | 1.26 | 0.39617 |
| 0.23 | 0.09095 | 0.49 | 0.18793 | 0.75 | 0.27337 | 1.01 | 0.34375 | 1.27 | 0.39796 |
| 0.24 | 0.09483 | 0.5 | 0.19146 | 0.76 | 0.27637 | 1.02 | 0.34614 | 1.28 | 0.39973 |
| 0.25 | 0.09871 | 0.51 | 0.19497 | 0.77 | 0.27935 | 1.03 | 0.34849 | 1.29 | 0.40147 |

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.3 | 0.40320 | 1.56 | 0.44062 | 1.82 | 0.46562 | 2.16 | 0.48461 | 2.68 | 0.49632 |
| 1.31 | 0.40490 | 1.57 | 0.44179 | 1.83 | 0.46638 | 2.18 | 0.48537 | 2.7 | 0.49653 |
| 1.32 | 0.40658 | 1.58 | 0.44295 | 1.84 | 0.46712 | 2.2 | 0.48610 | 2.72 | 0.49674 |
| 1.33 | 0.40824 | 1.59 | 0.44408 | 1.85 | 0.46784 | 2.22 | 0.48679 | 2.74 | 0.49693 |
| 1.34 | 0.40988 | 1.6 | 0.44520 | 1.86 | 0.46856 | 2.24 | 0.48745 | 2.76 | 0.49711 |
| 1.35 | 0.41149 | 1.61 | 0.44630 | 1.87 | 0.46926 | 2.26 | 0.48809 | 2.78 | 0.49728 |
| 1.36 | 0.41309 | 1.62 | 0.44738 | 1.88 | 0.46995 | 2.28 | 0.48870 | 2.8 | 0.49744 |
| 1.37 | 0.41466 | 1.63 | 0.44845 | 1.89 | 0.47062 | 2.3 | 0.48928 | 2.82 | 0.49760 |
| 1.38 | 0.41621 | 1.64 | 0.44950 | 1.9 | 0.47128 | 2.32 | 0.48983 | 2.84 | 0.49774 |
| 1.39 | 0.41774 | 1.65 | 0.45053 | 1.91 | 0.47193 | 2.34 | 0.49036 | 2.86 | 0.49788 |
| 1.4 | 0.41924 | 1.66 | 0.45154 | 1.92 | 0.47257 | 2.36 | 0.49086 | 2.88 | 0.49801 |
| 1.41 | 0.42073 | 1.67 | 0.45254 | 1.93 | 0.47320 | 2.38 | 0.49134 | 2.9 | 0.49813 |
| 1.42 | 0.42220 | 1.68 | 0.45352 | 1.94 | 0.47381 | 2.4 | 0.49180 | 2.92 | 0.49825 |
| 1.43 | 0.42364 | 1.69 | 0.45449 | 1.95 | 0.47441 | 2.42 | 0.49224 | 2.94 | 0.49836 |
| 1.44 | 0.42507 | 1.7 | 0.45543 | 1.96 | 0.47500 | 2.44 | 0.49266 | 2.96 | 0.49846 |
| 1.45 | 0.42647 | 1.71 | 0.45637 | 1.97 | 0.47558 | 2.46 | 0.49305 | 2.98 | 0.49856 |
| 1.46 | 0.42785 | 1.72 | 0.45728 | 1.98 | 0.47615 | 2.48 | 0.49343 | 3. | 0.49865 |
| 1.47 | 0.42922 | 1.73 | 0.45818 | 1.99 | 0.47670 | 2.5 | 0.49379 | 3.2 | 0.49931 |
| 1.48 | 0.43056 | 1.74 | 0.45907 | 2. | 0.47725 | 2.52 | 0.49413 | 3.4 | 0.49966 |
| 1.49 | 0.43189 | 1.75 | 0.45994 | 2.02 | 0.47831 | 2.54 | 0.49446 | 3.6 | 0.49984 |
| 1.5 | 0.43319 | 1.76 | 0.46080 | 2.04 | 0.47932 | 2.56 | 0.49477 | 3.8 | 0.49993 |
| 1.51 | 0.43448 | 1.77 | 0.46164 | 2.06 | 0.48030 | 2.58 | 0.49506 | 4. | 0.49997 |
| 1.52 | 0.43574 | 1.78 | 0.46246 | 2.08 | 0.48124 | 2.6 | 0.49534 | 4.5 | 0.5 |
| 1.53 | 0.43699 | 1.79 | 0.46327 | 2.1 | 0.48214 | 2.62 | 0.49560 | 5. | 0.5 |
| 1.54 | 0.43822 | 1.8 | 0.46407 | 2.12 | 0.48300 | 2.64 | 0.49585 | 5.5 | 0.5 |
| 1.55 | 0.43943 | 1.81 | 0.46485 | 2.14 | 0.48382 | 2.66 | 0.49609 | 6. | 0.5 |

## Приложение 4. Критические точки распределения Стьюдента *(Решение уравнения* $2F_{\tau_n}(x) = \beta = 1 - 2\alpha$*)*

| Число степеней свободы $n$ | Доверительная вероятность $\beta$ | | | Число степеней свободы $n$ | Доверительная вероятность $\beta$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.95 | 0.99 | 0.999 | | 0.95 | 0.99 | 0.999 |
| 1 | 12.7 | 63.7 | 637. | 18 | 2.1 | 2.88 | 3.92 |
| 2 | 4.3 | 9.92 | 31.6 | 19 | 2.09 | 2.86 | 3.88 |
| 3 | 3.18 | 5.84 | 12.9 | 20 | 2.09 | 2.85 | 3.85 |
| 4 | 2.78 | 4.6 | 8.61 | 21 | 2.08 | 2.83 | 3.82 |
| 5 | 2.57 | 4.03 | 6.87 | 22 | 2.07 | 2.82 | 3.79 |
| 6 | 2.45 | 3.71 | 5.96 | 23 | 2.07 | 2.81 | 3.77 |
| 7 | 2.36 | 3.5 | 5.41 | 24 | 2.06 | 2.8 | 3.75 |
| 8 | 2.31 | 3.36 | 5.04 | 25 | 2.06 | 2.79 | 3.73 |
| 9 | 2.26 | 3.25 | 4.78 | 26 | 2.06 | 2.78 | 3.71 |
| 10 | 2.23 | 3.17 | 4.59 | 27 | 2.05 | 2.77 | 3.69 |
| 11 | 2.2 | 3.11 | 4.44 | 28 | 2.05 | 2.76 | 3.67 |
| 12 | 2.18 | 3.05 | 4.32 | 29 | 2.05 | 2.76 | 3.66 |
| 13 | 2.16 | 3.01 | 4.22 | 30 | 2.04 | 2.75 | 3.65 |
| 14 | 2.14 | 2.98 | 4.14 | 40 | 2.02 | 2.70 | 3.55 |
| 15 | 2.13 | 2.95 | 4.07 | 60 | 2.00 | 2.66 | 3.46 |
| 16 | 2.12 | 2.92 | 4.01 | 120 | 1.98 | 2.62 | 3.37 |
| 17 | 2.11 | 2.9 | 3.97 | $\infty$ | 1.96 | 2.58 | 3.29 |
| | 0.05 | 0.01 | 0.001 | | 0.05 | 0.01 | 0.001 |
| | Уровень значимости $2\alpha$ | | | | Уровень значимости $2\alpha$ | | |

# Приложение 5. Критические точки распределения $\chi^2$ Пирсона *(Решение уравнения* $F_{\chi^2_n}(x) = 1 - \alpha$*)*

| Число степеней свободы $n$ | Уровень значимости $\alpha$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.005 | 0.025 | 0.05 | 0.95 | 0.975 | 0.995 |
| 1 | 7.88 | 5.02 | 3.84 | 0.0039 | 0.001 | 0.0000 |
| 2 | 10.6 | 7.38 | 5.99 | 0.1026 | 0.0506 | 0.01 |
| 3 | 12.84 | 9.35 | 7.81 | 0.3518 | 0.2158 | 0.0717 |
| 4 | 14.86 | 11.14 | 9.49 | 0.7107 | 0.4844 | 0.207 |
| 5 | 16.75 | 12.83 | 11.07 | 1.1455 | 0.8312 | 0.4117 |
| 6 | 18.55 | 14.45 | 12.59 | 1.6354 | 1.2373 | 0.6757 |
| 7 | 20.28 | 16.01 | 14.07 | 2.17 | 1.69 | 0.99 |
| 8 | 21.95 | 17.53 | 15.51 | 2.73 | 2.18 | 1.34 |
| 9 | 23.59 | 19.02 | 16.92 | 3.33 | 2.7 | 1.73 |
| 10 | 25.19 | 20.48 | 18.31 | 3.94 | 3.25 | 2.16 |
| 11 | 26.76 | 21.92 | 19.68 | 4.57 | 3.82 | 2.6 |
| 12 | 28.3 | 23.34 | 21.03 | 5.23 | 4.4 | 3.07 |
| 13 | 29.82 | 24.74 | 22.36 | 5.89 | 5.01 | 3.57 |
| 14 | 31.32 | 26.12 | 23.68 | 6.57 | 5.63 | 4.07 |
| 15 | 32.8 | 27.49 | 25. | 7.26 | 6.26 | 4.6 |
| 16 | 34.27 | 28.85 | 26.3 | 7.96 | 6.91 | 5.14 |
| 17 | 35.72 | 30.19 | 27.59 | 8.67 | 7.56 | 5.7 |
| 18 | 37.16 | 31.53 | 28.87 | 9.39 | 8.23 | 6.26 |
| 19 | 38.58 | 32.85 | 30.14 | 10.12 | 8.91 | 6.84 |
| 20 | 40. | 34.17 | 31.41 | 10.85 | 9.59 | 7.43 |
| 21 | 41.4 | 35.48 | 32.67 | 11.59 | 10.28 | 8.03 |
| 22 | 42.8 | 36.78 | 33.92 | 12.34 | 10.98 | 8.64 |
| 23 | 44.18 | 38.08 | 35.17 | 13.09 | 11.69 | 9.26 |
| 24 | 45.56 | 39.36 | 36.42 | 13.85 | 12.4 | 9.89 |
| 25 | 46.93 | 40.65 | 37.65 | 14.61 | 13.12 | 10.52 |
| 30 | 53.67 | 46.98 | 43.77 | 18.49 | 16.79 | 13.79 |
| 40 | 66.77 | 59.34 | 55.76 | 26.51 | 24.43 | 20.71 |
| 50 | 79.49 | 71.42 | 67.5 | 34.76 | 32.36 | 27.99 |

# Приложение 6. Критические точки распределения Фишера-Снедекора

Уровень значимости $2\alpha = 0.005$

| $k_2 \backslash k_1$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 14.9 | 14.5 | 14.2 | 14. | 13.8 | 13.6 | 13.5 | 13.4 | 13.3 | 13.2 | 13.1 | 13.1 | 13. | 13. | 12.9 | 12.9 |
| 6 | 11.5 | 11.1 | 10.8 | 10.6 | 10.4 | 10.3 | 10.1 | 10. | 9.95 | 9.88 | 9.81 | 9.76 | 9.71 | 9.66 | 9.62 | 9.59 |
| 7 | 9.52 | 9.16 | 8.89 | 8.68 | 8.51 | 8.38 | 8.27 | 8.18 | 8.1 | 8.03 | 7.97 | 7.91 | 7.87 | 7.83 | 7.79 | 7.75 |
| 8 | 8.3 | 7.95 | 7.69 | 7.5 | 7.34 | 7.21 | 7.1 | 7.01 | 6.94 | 6.87 | 6.81 | 6.76 | 6.72 | 6.68 | 6.64 | 6.61 |
| 9 | 7.47 | 7.13 | 6.88 | 6.69 | 6.54 | 6.42 | 6.31 | 6.23 | 6.15 | 6.09 | 6.03 | 5.98 | 5.94 | 5.9 | 5.86 | 5.83 |
| 10 | 6.87 | 6.54 | 6.3 | 6.12 | 5.97 | 5.85 | 5.75 | 5.66 | 5.59 | 5.53 | 5.47 | 5.42 | 5.38 | 5.34 | 5.31 | 5.27 |
| 11 | 6.42 | 6.1 | 5.86 | 5.68 | 5.54 | 5.42 | 5.32 | 5.24 | 5.16 | 5.1 | 5.05 | 5. | 4.96 | 4.92 | 4.89 | 4.86 |
| 12 | 6.07 | 5.76 | 5.52 | 5.35 | 5.2 | 5.09 | 4.99 | 4.91 | 4.84 | 4.77 | 4.72 | 4.67 | 4.63 | 4.59 | 4.56 | 4.53 |
| 13 | 5.79 | 5.48 | 5.25 | 5.08 | 4.94 | 4.82 | 4.72 | 4.64 | 4.57 | 4.51 | 4.46 | 4.41 | 4.37 | 4.33 | 4.3 | 4.27 |
| 14 | 5.56 | 5.26 | 5.03 | 4.86 | 4.72 | 4.6 | 4.51 | 4.43 | 4.36 | 4.3 | 4.25 | 4.2 | 4.16 | 4.12 | 4.09 | 4.06 |
| 15 | 5.37 | 5.07 | 4.85 | 4.67 | 4.54 | 4.42 | 4.33 | 4.25 | 4.18 | 4.12 | 4.07 | 4.02 | 3.98 | 3.95 | 3.91 | 3.88 |
| 16 | 5.21 | 4.91 | 4.69 | 4.52 | 4.38 | 4.27 | 4.18 | 4.1 | 4.03 | 3.97 | 3.92 | 3.87 | 3.83 | 3.8 | 3.76 | 3.73 |
| 17 | 5.07 | 4.78 | 4.56 | 4.39 | 4.25 | 4.14 | 4.05 | 3.97 | 3.9 | 3.84 | 3.79 | 3.75 | 3.71 | 3.67 | 3.64 | 3.61 |
| 18 | 4.96 | 4.66 | 4.44 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.86 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.6 | 3.56 | 3.53 | 3.5 |
| 19 | 4.85 | 4.56 | 4.34 | 4.18 | 4.04 | 3.93 | 3.84 | 3.76 | 3.7 | 3.64 | 3.59 | 3.54 | 3.5 | 3.46 | 3.43 | 3.4 |
| 20 | 4.76 | 4.47 | 4.26 | 4.09 | 3.96 | 3.85 | 3.76 | 3.68 | 3.61 | 3.55 | 3.5 | 3.46 | 3.42 | 3.38 | 3.35 | 3.32 |

Уровень значимости $2\alpha = 0.05$

| $k_2$ \ $k_1$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.7 | 4.68 | 4.66 | 4.64 | 4.62 | 4.6 | 4.59 | 4.58 | 4.57 | 4.56 |
| 6 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.1 | 4.06 | 4.03 | 4. | 3.98 | 3.96 | 3.94 | 3.92 | 3.91 | 3.9 | 3.88 | 3.87 |
| 7 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.6 | 3.57 | 3.55 | 3.53 | 3.51 | 3.49 | 3.48 | 3.47 | 3.46 | 3.44 |
| 8 | 3.69 | 3.58 | 3.5 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.31 | 3.28 | 3.26 | 3.24 | 3.22 | 3.2 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.15 |
| 9 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.1 | 3.07 | 3.05 | 3.03 | 3.01 | 2.99 | 2.97 | 2.96 | 2.95 | 2.94 |
| 10 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.94 | 2.91 | 2.89 | 2.86 | 2.85 | 2.83 | 2.81 | 2.8 | 2.79 | 2.77 |
| 11 | 3.2 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.9 | 2.85 | 2.82 | 2.79 | 2.76 | 2.74 | 2.72 | 2.7 | 2.69 | 2.67 | 2.66 | 2.65 |
| 12 | 3.11 | 3. | 2.91 | 2.85 | 2.8 | 2.75 | 2.72 | 2.69 | 2.66 | 2.64 | 2.62 | 2.6 | 2.58 | 2.57 | 2.56 | 2.54 |
| 13 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.63 | 2.6 | 2.58 | 2.55 | 2.53 | 2.51 | 2.5 | 2.48 | 2.47 | 2.46 |
| 14 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.7 | 2.65 | 2.6 | 2.57 | 2.53 | 2.51 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.43 | 2.41 | 2.4 | 2.39 |
| 15 | 2.9 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.51 | 2.48 | 2.45 | 2.42 | 2.4 | 2.38 | 2.37 | 2.35 | 2.34 | 2.33 |
| 16 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.46 | 2.42 | 2.4 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.32 | 2.3 | 2.29 | 2.28 |
| 17 | 2.81 | 2.7 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.33 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.26 | 2.24 | 2.23 |
| 18 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.37 | 2.34 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.2 | 2.19 |
| 19 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.28 | 2.26 | 2.23 | 2.21 | 2.2 | 2.18 | 2.17 | 2.16 |
| 20 | 2.71 | 2.6 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.28 | 2.25 | 2.22 | 2.2 | 2.18 | 2.17 | 2.15 | 2.14 | 2.12 |

# Литература


[1] Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. 480 с.

[2] Бренерман М. Х. Теория вероятностей. Часть 2. Случайные функции, статистическая обработка данных. Казань: Изд-во КГТУ, 2010. 112 с.

[3] Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. 552с.

[4] Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982. 256 с.

[5] Лагутин М. Б. Наглядная математическая статистика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 472 с.

[6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1984. 484 с.

[7] Попов В. А. Теория вероятностей. Часть 2. Случайные величины. Казань: Изд-во КФУ, 2013. 46 с.

[8] Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979. 402 с.

[9] Попов В. А., Бренерман М. Х. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Казань: Изд-во КГУ, 2008. 120 с.

# Оглавление


§ 1 Выборочные распределения . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.1 Задачи математической статистики . . . . . . . . . . . 5

1.2 Простейшие приемы статистического описания . . . . . . 6

1.3 Выборочные моменты . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

§ 2 Точечные оценки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

2.1 Основные определения . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

2.2 Методы получения точечных оценок . . . . . . . . . . . 17

§ 3 Интервальные оценки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.1 Основные понятия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.2 Точное распределение статистик в нормальной модели . 21

3.3 Доверительные интервалы в нормальной модели . . . . . 23

§ 4 Статистическая проверка гипотез . . . . . . . . . . . . . 28

4.1 Общие принципы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

4.2 Критерии, основанные на интервальных оценках . . . . . 31

4.3 Гипотезы о совпадении значений параметров . . . . . . . 32

4.4 Критерий Пирсона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

**Приложения** **41**

**Литература** **51**