КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра теории относительности и гравитации

**Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский,
П. Е. Кашаргин**

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Казань — 2022

УДК 514
ББК 22.151.5

Рекомендовано к печати
Учебно-методической комиссией Института физики КФУ
Протокол № 7 от 11 апреля 2022 года

Рецензент
доктор физико-математических наук, доцент А. А. Попов

Кропотова Т. В.
Векторная алгебра. Решение задач: Учебно-методическое пособие / Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский, П. Е. Кашаргин. — Казань: Казанский университет, 2022. — 75 с.

Пособие представляет собой руководство по решению задач раздела «Векторная алгебра» дисциплин «Аналитическая геометрия», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Основы алгебры и геометрии», «Высшая математика» и «Математика», изучаемых на первом курсе Института физики КФУ. Пособие содержит необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых задач курса, упражнения и задачи для работы в аудитории и самостоятельной работы. Предназначено для студентов всех направлений подготовки Института физики КФУ. Может быть полезным для студентов других институтов и факультетов, изучающих дисциплины высшей математики.

Векторы и координаты

Определение вектора

При изложении материала данного учебно-методического пособия предполагается, что читателю уже известны из школьного курса математики определение и свойства действительных чисел, а также такие геометрические понятия, как точка, отрезок, расстояние между точками, длина отрезка, луч, прямая, плоскость, пространство.

Понятие вектора и операции с векторами тоже вводятся в курсе элементарной геометрии. Прежде чем начать с ними работать, напомним читателю связанные с векторами основные определения и дополним их новыми[1].

Если для двух точек A и B указано, какая из них является начальной, а какая конечной, то такую пару называют *упорядоченной парой точек* (A, B), где A – *начальная*, B – *конечная точка*.

Отрезок прямой, концами которого является упорядоченная пара точек (A, B), называют *направленным отрезком* или *геометрическим вектором* (вектором) и обозначают символом $\overrightarrow{AB}$.

Часто для обозначения вектора используют одну (обычно малую латинскую) букву, например, $\vec{a}$. Иногда сверху вместо стрелки ставят черту: $\overline{AB}$, $\bar{a}$. В некоторой литературе при однобуквенном обозначении вектора вместо стрелки (черты) сверху используют полужирный шрифт, например, $\boldsymbol{a}$.

Расстояние между началом и концом вектора называют *длиной* (*модулем*, *абсолютной величиной*) *вектора* и обозначают символом модуля: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$, $|\boldsymbol{a}|$ и т.д. Вектор, длина которого равна единице, называют *единичным*.

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называют *нулевым* и обозначают $\vec{0}$ или $\mathbf{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено.

Ортом ненулевого *вектора* $\vec{a}$ называют вектор единичной дли-

[1] Основные определения приводятся в соответствии с [1], [2].

ны, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$ (обычно его обозначают $\overrightarrow{a^0}$):

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \tag{1}$$

Векторы называют *коллинеарными*, если существует такая прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Векторы называют *компланарными*, если существует такая плоскость, которой они параллельны.

Векторы называют *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены (сонаправлены) и имеют равные длины.

Векторы, начальная точка (*точка приложения*) которых может быть выбрана произвольно, называют *свободными*. В дальнейшем, если не оговаривается противное, мы будем рассматривать только свободные векторы.

Линейные операции

Линейными называют операции сложения векторов и умножения вектора на число. Напомним их определения.

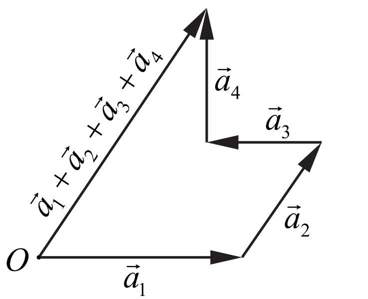

Рис. 1: Сумма векторов: $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4$

Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называют вектор $\vec{a}$, который замыкает ломаную линию, построенную на данных векторах так, что начало каждого последующего вектора совмещается с концом предыдущего. Замыкающий вектор $\vec{a}$ направлен из начала первого вектора к концу последнего. На рисунке 1 приведена иллюстрация данного определения для суммы четырёх векторов.

Для случая двух векторов приведённое выше определение даёт так называемое *правило треугольника* (рис. 2). Наряду с правилом треугольника для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов часто используют *правило параллелограмма*: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3). Отметим, что из правила параллелограмма следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

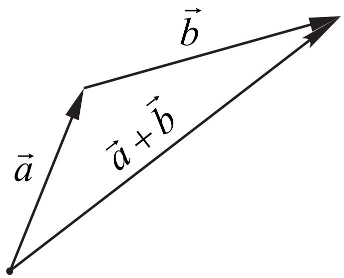

Рис. 2: Правило треугольника

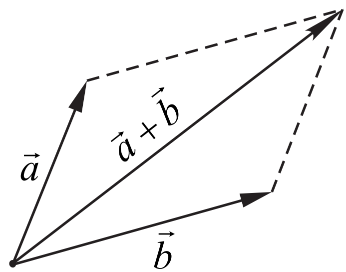

Рис. 3: Правило параллелограмма

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* $\lambda \in \mathbb{R}$ называют вектор $\lambda\vec{a}$ такой, что

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,

2) векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ сонаправлены, если $\lambda > 0$; противоположно направлены, если $\lambda < 0$; и $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, если $\lambda = 0$.

Вектор $\vec{b}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, а направления противоположны. Противоположный вектор обозначается символом $-\vec{a}$ и может быть получен путём умножения вектора $\vec{a}$ на число (-1).

Перечислим без доказательства основные свойства линейных операций.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых действительных чисел λ, μ справедливо:

1) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (*сложение коммутативно*);

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (*сложение ассоциативно*);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

6) $(\lambda\mu)\,\vec{a}=\lambda\,(\mu\vec{a})$;

7) $(\lambda+\mu)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

8) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

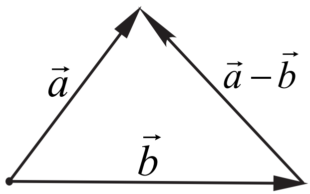

Рис. 4: Разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $(-\vec{b})$, противоположного вектору $\vec{b}$, т. е.

$$\vec{a}-\vec{b}\overset{def}{=}\vec{a}+(-1)\vec{b}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ идёт из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ (рис. 4).

Заметим, что вычитание не считается отдельной линейной операцией.

Применяя обе линейные операции – сложение векторов и умножение вектора на число, можно получить так называемые *линейные комбинации векторов*. Например, для векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ произвольная линейная комбинация выглядит так:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n.$$

Числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, входящие в линейную комбинацию, называют её *коэффициентами*.

Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, такую линейную комбинацию называют *тривиальной*. Очевидно, что тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору:

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Перечисленные выше свойства 1–8 линейных операций позволяют при сложении линейных комбинаций векторов и умножении их на числа использовать обычные правила алгебры: раскрывать скобки, приводить подобные члены, переносить слагаемые в другую часть равенства с противоположным знаком и т.д.

Линейная зависимость векторов

Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \tag{2}$$

выполняется не только тогда, когда все коэффициенты слева равны нулю, но и тогда, когда среди чисел λ_1, λ_2, ..., λ_k есть хотя бы одно, не равное нулю.

Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, т.е. равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда все коэффициенты слева равны нулю:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

П р и м е р 1. Докажите, что система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

◀ *Доказательство.*

Рассмотрим конкретную линейную комбинацию заданных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{0}$, ..., $\vec{a}_k$, в которой коэффициент перед нулевым вектором равен 1, а все остальные коэффициенты равны 0. Очевидно, что такая линейная комбинация векторов равна нулевому вектору:

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{0} + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Поскольку рассмотренная зануляющаяся линейная комбинация не является тривиальной (один из коэффициентов не равен 0), то заданная система векторов является линейно зависимой согласно определению. ►

Сформулируем без доказательств некоторые важные *утверждения*, касающиеся линейной зависимости систем векторов.

1) Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

2) Система из двух геометрических векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

3) Система из трёх геометрических векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

4) Любые четыре геометрических вектора линейно зависимы.

5) Если в системе векторов какая-то часть линейно зависима, то вся система тоже линейно зависима.

6) Если система векторов линейно независима, то любая её часть тоже линейно независима.

Для формулировки следующих утверждений нам понадобится ещё одно определение – говорят, что вектор $\vec{b}$ *раскладывается* по векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$, если его можно записать в виде линейной комбинации этих векторов:

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

А теперь – два новых *утверждения*.

7) Система из $k (k > 1)$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы раскладывается по остальным.

8) Пусть вектор $\vec{x}$ раскладывается по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$. Это разложение единственно тогда и только тогда, когда система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ линейно независима.

П р и м е р 2. Докажите *утверждение* (8).

А. Докажем, что из единственности разложения следует линейная независимость системы векторов.

◀ *Доказательство.*

Предположим противное – вектор $\vec{x}$ раскладывается по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ единственным образом, но система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ при этом линейно зависима.
Поскольку система векторов линейно зависима, то существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору (что равносильно тому, что нулевой вектор можно представить в виде нетривиальной линейной комбинации этих векторов):

$$\vec{0} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \ldots + \mu_k\vec{a}_k, \qquad (A_1)$$

где среди чисел μ_1, μ_2, ..., μ_k есть хотя бы одно число, не равное 0.
По условию вектор $\vec{x}$ тоже раскладывается по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k. \qquad (A_2)$$

Сложив почленно равенства (A_1) и (A_2), получим новое разложение для вектора $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{a}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\vec{a}_2 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k)\vec{a}_k,$$

не совпадающее с исходным. Таким образом, разложение вектора $\vec{x}$ по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ не является единственным, что противоречит условию. И к этому противоречию привело наше предположение о линейной зависимости векторов.
Следовательно, если разложение вектора $\vec{x}$ по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ является единственным, то система этих векторов линейно независима.▶

B. Докажем теперь, что из линейной независимости системы векторов следует единственность разложения.

◀ *Доказательство.*

Предположим противное – система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ линейно независима, но вектор $\vec{x}$ раскладывается по ней не единственным образом.
Согласно нашему предположению, существуют по меньшей мере два различных разложения вектора $\vec{x}$ по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \qquad (B_1)$$

и

$$\vec{x} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \ldots + \mu_k\vec{a}_k, \qquad (B_2)$$

причём $\lambda_i \neq \mu_i$ хотя бы для одного $i = \overline{1,k}$.
Вычтя почленно из равенства (B_1) равенство (B_2), получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$, равную нулевому вектору:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{a}_2 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\vec{a}_k.$$

Это невозможно, поскольку по условию система векторов линейно независима. Таким образом, предположение о неединственности разложения вектора приводит к противоречию с определением линейно независимой системы.
Следовательно, если система векторов линейно независима, то разложение вектора по этой системе векторов всегда является единственным. ▶

Рассмотрим несколько примеров получения разложения конкретного вектора по заданной системе векторов.

П р и м е р 3. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка K – середина стороны BC, точка M лежит на стороне CD так, что $CM = 2MD$. Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

◀ По правилу треугольника вектор $\overrightarrow{KM}$ можно представить следующим образом:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CM}.$$

Используя свойства параллелограмма и условия задачи, получим

$$\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{2}{3}\vec{a}.$$

Тогда искомое разложение будет выглядеть так:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}. \ ▶$$

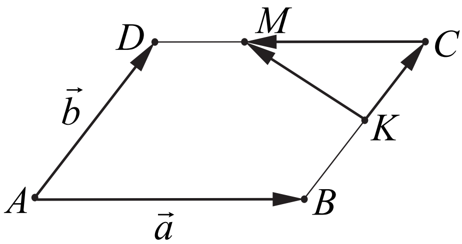

Рис. 5: Рисунок к примеру 3

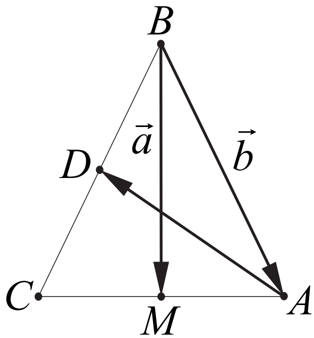

Рис. 6: Рисунок к примеру 4

П р и м е р 4. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ точка D – середина стороны BC, BM – высота треугольника. Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{BM} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$.

◀ Имеем:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\right) = \\ &= -\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \overrightarrow{AM}\right) = -\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + (\vec{a} - \vec{b})\right) = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}. \ ▶\end{aligned}$$

П р и м е р 5. Дан тетраэдр $ABCD$; точка K принадлежит стороне BC, $CK = KB$; $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

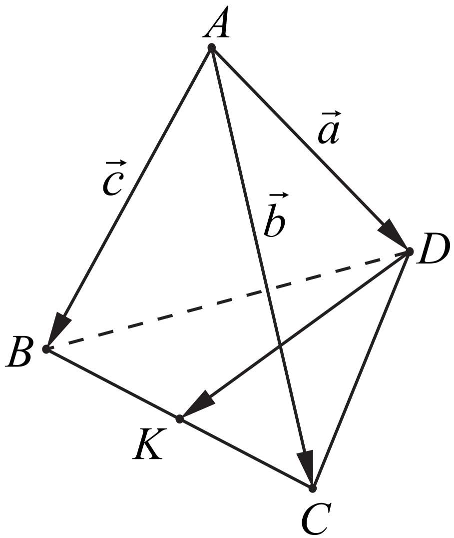

Рис. 7: Рисунок к примеру 5

◀ Вектор $\overrightarrow{DK}$ равен половине диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DK} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\Big((\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{a})\Big) = \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}. \text{ ▶}\end{aligned}$$

Базис и координаты вектора

Базисом в векторном пространстве называется такая упорядоченная линейно независимая система векторов, по которой раскладывается любой вектор этого пространства. Это означает, что:

на прямой линии (в *одномерном геометрическом пространстве*) базисом является любой ненулевой вектор,
на плоскости (в *двумерном геометрическом пространстве*) базисом является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов,
в пространстве (в *трёхмерном геометрическом пространстве*) базисом является любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Рассмотрим тройку некомпланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, приведённых к общему началу.
Если кратчайший поворот вокруг вектора $\vec{e}_3$ от вектора $\vec{e}_1$ к вектору $\vec{e}_2$ совершается *против часовой стрелки*, то такая векторная тройка называется *правой тройкой.*
Если кратчайший поворот вокруг вектора $\vec{e}_3$ от вектора $\vec{e}_1$ к вектору $\vec{e}_2$ совершается *по ходу часовой стрелки*, то такая векторная тройка называется *левой тройкой.*
Если в пространстве в качестве базиса выбрана правая (левая) тройка векторов, то такой базис называется *правым* (*левым*).

Аналогично и для упорядоченной пары неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, приведённых к общему началу.
Если на плоскости этих векторов кратчайший поворот от вектора $\vec{e}_1$ к вектору $\vec{e}_2$ происходит *против часовой стрелки*, то такая пара векторов называется *правой парой.*
Если на плоскости этих векторов кратчайший поворот от вектора $\vec{e}_1$ к вектору $\vec{e}_2$ происходит *по ходу часовой стрелки*, то такая пара векторов называется *левой парой.*
Если на плоскости в качестве базиса выбрана правая (левая) пара векторов, то такой базис называется *правым* (*левым*).

Заметим, что в аналитической геометрии преимущественно используются правые базисы.

Пусть тройка векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ является базисом в пространстве. Согласно определению любой вектор $\vec{x}$ этого пространства может быть разложен по этому базису, т.е. представлен в виде: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. Числа x_1, x_2, x_3 (коэффициенты разложения) называются *координатами вектора $\vec{x}$ в указанном базисе* и определяются однозначно.

Координаты вектора указываются в скобках справа от символического обозначения самого вектора. Мы будем, в основном, использовать запись $\vec{x}\,(x_1, x_2, x_3)$.

Замечание. В некоторых учебных пособиях по аналитической геометрии можно встретить и другие варианты записи координат вектора: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{x}\,\{x_1, x_2, x_3\}$, $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

На плоскости векторы имеют две координаты, на прямой – одну.

Рассмотрим несколько простых примеров получения координат вектора в указанном базисе.

П р и м е р 6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка K – середина стороны BC, точка M лежит на стороне CD так, что $CM = 2MD$. Убедившись, что векторы $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right\}$ можно принять за базис, получите в этом базисе координаты вектора $\overrightarrow{KM}$.

◀ Условие задачи очень напоминает условие П р и м е р а 3, изменилось только требование задачи.

Убедимся, что в данной ситуации векторы $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right\}$ можно принять за базис.

Как было отмечено выше, на плоскости любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов может быть выбрана в качестве базиса. Мы работаем на плоскости – плоскости, в которой лежит параллелограмм $ABCD$; векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ неколлинеарны. Следовательно, пару векторов $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right\}$ можно принять за базис.

Для нахождения координат вектора $\overrightarrow{KM}$ воспользуемся итоговым результатом П р и м е р а 3 – в нём мы получили разложение вектора $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$:

$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

Запишем это разложение соответственно требованию нашей задачи:

$$\overrightarrow{KM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Коэффициенты при базисных векторах в этом разложении и есть искомые координаты вектора $\overrightarrow{KM}$ в базисе $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right\}$.

О т в е т: $\overrightarrow{KM}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$. ►

П р и м е р 7. В тетраэдре $ABCD$ точка K является серединой стороны BC. Убедившись, что векторы $\left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right\}$ можно принять за базис, получите в этом базисе координаты вектора $\overrightarrow{DK}$.

◄ И на этот раз мы хотим использовать результат рассмотренной ранее задачи – П р и м е р а 5, немного изменив требование задачи.

Убедимся, что векторы $\left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right\}$ можно принять за базис. Как было отмечено выше, в пространстве любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов может быть выбрана в качестве базиса. Мы работаем в пространстве – с тетраэдром; векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ некомпланарны. Следовательно, эту тройку векторов можно выбрать в качестве базиса.

Для определения координат вектора $\overrightarrow{DK}$ воспользуемся уже полученным ранее в П р и м е р е 5 разложением вектора $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$:

$$\overrightarrow{DK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Запишем это разложение соответственно требованию нашей задачи:

$$\overrightarrow{DK} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Коэффициенты при базисных векторах в этом разложении и есть искомые координаты вектора $\overrightarrow{DK}$ в базисе $\left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right\}$.

О т в е т: $\overrightarrow{DK}\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ►

При выполнении линейных операций над векторами к их координатам применяются следующие правила:
при сложении векторов складываются их соответствующие координаты,
при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

П р и м е р 8. Даны четыре вектора $\vec{a}(3, 1, 2)$, $\vec{b}(-1, 5, 4)$, $\vec{c}(0, -2, 2)$, $\vec{d}(7, 3, -1)$. Найдите координаты вектора $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$.

◄ Выполним указанные действия с соответствующими координатами векторов:

$$2(3, 1, 2) - 3(-1, 5, 4) + (0, -2, 2) - (7, 3, -1) =$$

$$= (6 + 3 + 0 - 7,\ 2 - 15 - 2 - 3,\ 4 - 12 + 2 + 1) = (2, -18, -5)\,.$$

О т в е т: $(2, -18, -5)$. ►

При работе с координатами равных векторов используют следующее правило, не зависящее от выбора базиса: *равные векторы имеют одинаковые координаты.*

П р и м е р 9. Даны четыре вектора $\vec{a}(3, 1, 0)$, $\vec{b}(-1, 2, 1)$, $\vec{c}(-1, 0, 2)$, $\vec{d}(-3, -3, 1)$. Найдите числа α, β, γ такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

◄ Заменим в векторном равенстве $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ каждый вектор упорядоченным набором своих координат:

$$\alpha(3, 1, 0) + \beta(-1, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 2) + (-3, -3, 1) = (0, 0, 0).$$

Выполнив слева указанные действия с соответствующими координатами, получим:

$$(3\alpha - \beta - \gamma - 3,\ \alpha + 2\beta - 3,\ \beta + 2\gamma + 1) = (0, 0, 0).$$

Приравняв соответствующие координаты слева и справа, получим однородную систему трёх линейных уравнений на три неизвестных α, β, γ:

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta - \gamma - 3 = 0, \\ \alpha + 2\beta - 3 = 0, \\ \beta + 2\gamma + 1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$.

Ответ: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. ►

Пример 10. Даны четыре вектора:
$\vec{a}(2,1,1)$, $\vec{b}(-2,0,-3)$, $\vec{c}(-1,2,1)$, $\vec{d}(-3,5,5)$.
Известно, что тройка векторов $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ линейно независима и может быть выбрана в качестве базиса в пространстве. Найдите координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

◄ Согласно определению, координаты вектора в указанном базисе – это коэффициенты при базисных векторах в разложении вектора по этому базису. Запишем разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$, обозначив коэффициенты α, β, γ:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Заменим в этом равенстве каждый вектор упорядоченным набором своих координат:

$$(-3,5,5) = \alpha(2,1,1) + \beta(-2,0,-3) + \gamma(-1,2,1).$$

Выполнив справа указанные действия с соответствующими координатами, получим:

$$(-3,5,5) = (2\alpha - 2\beta - \gamma,\ \alpha + 2\gamma,\ \alpha - 3\beta + \gamma).$$

Приравняв соответствующие координаты слева и справа, получим однородную систему трёх линейных уравнений на неизвестные координаты α, β, γ:

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta - \gamma = -3, \\ \alpha + 2\gamma = 5, \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Это и есть искомые координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$.

О т в е т: $(-1, -1, 3)$. ►

Выше было сказано, что два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда система этих векторов линейно зависима, т.е. существует такое число λ, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. При работе с координатами это означает, что *векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.*

П р и м е р 11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в некотором базисе: $\vec{a}(\alpha, -2, 5)$, $\vec{b}(1, \beta, -3)$. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарны?

◄ У коллинеарных векторов координаты должны быть пропорциональны. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ это означает, что

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{-2}{\beta} = \frac{5}{-3}.$$

Приравняв первую и третью дроби, получим $\alpha = -\dfrac{5}{3}$, приравняв вторую и третью дроби, получим $\beta = \dfrac{6}{5}$.

О т в е т: $\alpha = -\dfrac{5}{3}$, $\beta = \dfrac{6}{5}$. ►

П р и м е р 12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в некотором базисе: $\vec{a}(3, 7, 0)$, $\vec{b}(4, 6, -1)$. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются их линейными комбинациями: $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 5\vec{a} - 7\vec{b}$. Выясните, будут ли $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарными.

◀ Найдём координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$(p_1, p_2, p_3) = 3(3, 7, 0) + 2(4, 6, -1) = (9+8, 21+12, -2) = (17, 33, -2)$;

$(q_1, q_2, q_3) = 5(3, 7, 0) - 7(4, 6, -1) = (15-28, 35-42, 7) = (-13, -7, 7)$.

Проверим, выполняется ли в нашем случае условие пропорциональности координат

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_2}{q_3}.$$

Отношения первых и вторых координат различны: $\dfrac{17}{-13} \neq \dfrac{33}{-7}$, координаты непропорциональны. Следовательно, векторы неколлинеарны.

О т в е т: векторы неколлинеарны. ▶

Проекции вектора

Приведём основные определения.

Осью называется прямая, на которой задано направление. Единичный вектор, задающий направление оси, называется *ортом оси.*

Для удобства формулировки дальнейших определений этого пункта назовём ось осью Ox, а её орт обозначим $\vec{i}$.

Обозначим за A', B' основания перпендикуляров, опущенных из точек A, B на ось Ox с ортом $\vec{i}$ (рис. 8).

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* Ox называется длина отрезка $A'B'$ этой оси, взятая со знаком плюс, если направления $\overrightarrow{A'B'}$ и $\vec{i}$ одинаковы, и взятая со знаком минус, если направления $\overrightarrow{A'B'}$ и $\vec{i}$ противоположны. Кратко:

$$\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \;\;|\overrightarrow{A'B'}|, \text{если направления } \vec{i} \text{ и } \overrightarrow{A'B'} \text{ совпадают,} \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, \text{если направления } \vec{i} \text{ и } \overrightarrow{A'B'} \text{ противоположны.} \end{cases}$$

Углом вектора $\overrightarrow{AB}$ (равного $\overrightarrow{A'B_1}$) *с осью* Ox называется угол α, на который нужно кратчайшим способом повернуть ось Ox около точки A', чтобы совместить с вектором $\overrightarrow{A'B_1}$ (см. рис. 8). При этом $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

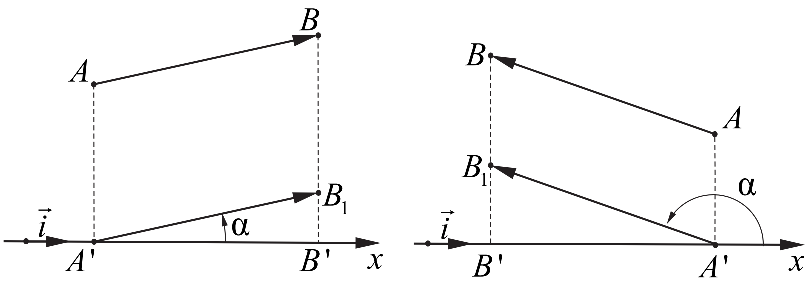

Рис. 8: Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось Ox, угол вектора $\overline{AB}$ с осью Ox

Легко доказать, что проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла α:

$$\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.$$

Если длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна единице, то $\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = \cos\alpha$. Косинус угла α называется *направляющим косинусом* единичного вектора *с осью* Ox.

При выполнении линейных операций над векторами их проекции на оси подчиняются следующим правилам:
проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на указанную ось,
при умножении вектора на число его проекция на ось тоже умножается на это число.

П р и м е р 13. Известно, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{e}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \vec{e}}\right) = 45°$, $\vec{e}$ является ортом оси l.
Найдите $\text{Пр}_l\overrightarrow{AC}$.

◀ Сначала воспользуемся правилом нахождения проекции суммы векторов:

$$\text{Пр}_l\overrightarrow{AC} = \text{Пр}_l\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \text{Пр}_l\overrightarrow{AB} + \text{Пр}_l\overrightarrow{BC}.$$

Затем – правилом для нахождения проекции на ось каждого вектора:

$$\text{Пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{e}}\right) = 6\cdot\cos 60^\circ = 6\cdot\frac{1}{2} = 3;$$

$$\text{Пр}_l\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BC}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\vec{e}}\right) = 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

Таким образом, $\text{Пр}_l\overrightarrow{AC} = 3 + 2 = 5$.

Ответ: 5. ▶

Системы координат

Приведём основные определения.

Аффинной системой координат $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *в пространстве* называется совокупность некоторой точки O и базиса $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, приведённого к общему началу в этой точке.

Точка O в этом случае называется *началом координат.*

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат.*

Вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат и произвольную точку M пространства, называется *радиус-вектором* этой точки M.

Аффинными координатами (координатами) точки M пространства *в данной аффинной системе координат* $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ называются координаты радиус-вектора этой точки $\overrightarrow{OM}$ относительно базиса $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

Координаты точки указывают в скобках после буквы, обозначающей точку, например, $M(x, y, z)$.

В заданной системе координат координаты точки определены однозначно.

Аналогично определяются *аффинная система координат* $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ *на плоскости* и *аффинная система координат* $\{O, \vec{e}\}$ *на прямой.*

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в пространстве выражаются через координаты начальной точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и конечной точки $B(x_B, y_B, z_B)$ следующим образом:

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right).$$

Удобна словесная формулировка этого правила – *чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.*
Это правило справедливо также на плоскости и на прямой.

Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице.

Аффинная система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной системой координат.*

Декартова прямоугольная система координат в пространстве, как правило, обозначается $\left\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ (на плоскости – $\left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$).

Базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называют *ортами координатных осей* Ox, Oy, Oz соответственно.

Декартовы прямоугольные координаты точки называются так: первая координата – *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой.*

Из определения проекции вектора на ось следует геометрический смысл декартовых прямоугольных координат (рис. 9)
точки $M(x, y)$ на плоскости:

$$x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM}, \quad y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM},$$

точки $M(x, y, z)$ в пространстве:

$$x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM}, \quad y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM}, \quad z = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM}.$$

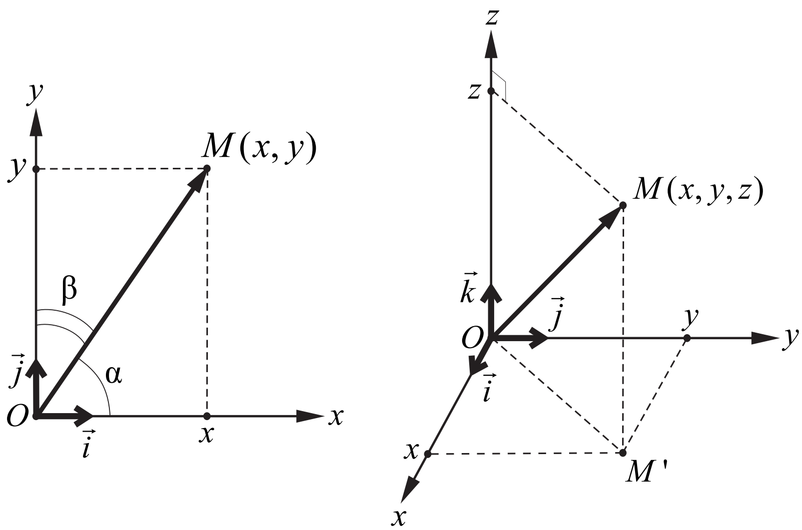

Рис. 9: Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве

Для единичного вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскости:

$$\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = \cos\alpha, \quad \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = \cos\beta,$$

где α, β – это углы вектора $\overrightarrow{OM}$ соответственно с осями Ox, Oy, т.е.

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}), \quad \beta = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{j}}).$$

При этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1;$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами вектора* $\overrightarrow{OM}$ *на плоскости*.

Аналогично для единичного вектора $\overrightarrow{OM}$ в пространстве:

$$\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = \cos\alpha, \quad \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = \cos\beta, \quad \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} = \cos\gamma,$$

где α, β, γ – это углы вектора $\overrightarrow{OM}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz, т.е.

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}), \quad \beta = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{j}}), \quad \gamma = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}).$$

При этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора $\overrightarrow{OM}$ в пространстве.*

П р и м е р 14. Найдите прямоугольные координаты точки M в пространстве, если известно, что

$$|\overrightarrow{OM}| = 6, \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}\right) = 120^\circ, \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{j}}\right) = 60^\circ, \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}\right) = 45^\circ.$$

◀ Воспользуемся тем, что для точки $M(x, y, z)$ в пространстве

$$x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}\right),$$

$$y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{j}}\right),$$

$$z = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}\right).$$

Подставив данные из условия задачи, получим:

$$x = 6 \cdot \cos 120^\circ = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3;$$

$$y = 6 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$z = 6 \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

О т в е т: $M\left(-3, 3, 3\sqrt{2}\right)$. ▶

Задачи

1.1. Сколько различных векторов задают всевозможные упорядоченные пары точек, составленные из вершин:
1) треугольника; 2) параллелограмма;
3) тетраэдра; 4) параллелепипеда?

1.2. Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите суммы векторов:
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$;
3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}$.

1.3. На плоскости треугольника ABC взята точка O. Отложите от точки O векторы:
1) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$; 2) $-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

1.4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Постройте векторы:
1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$.

1.5. Докажите равенства:
1) $\vec{a}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$; 2) $\vec{a}-\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.
Каков геометрический смысл этих равенств?

1.6. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CK. Докажите, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.

1.7. Точки A, B, C, D – середины последовательных сторон выпуклого четырёхугольника. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

1.8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Выразите через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектор, сонаправленный $\overrightarrow{AD}$.

1.9. Докажите, что конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

1.10. Докажите, что для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых трёх чисел α, β, γ векторы $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b}-\alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ линейно зависимы.

1.11. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD взята точка K, удовлетворяющая условию $AK : KD = 1 : 6$. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 4 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

1.12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{OA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AB_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, если точка O является центром симметрии куба.

1.13. Даны три вектора $\vec{a}(2, 1)$, $\vec{b}(-3, 4)$, $\vec{c}(5, -7)$. Найдите координаты векторов: 1) $-\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$, 2) $11\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$.

1.14. Даны векторы $\vec{a}(-1, 3, 2)$, $\vec{b}(2, 0, 5)$, $\vec{c}(4, -1, 3)$, $\vec{d}(0, 1, -2)$. Найдите координаты векторов: 1) $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+3\vec{d}$, 2) $-3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}-5\vec{d}$.

1.15. Даны три вектора $\vec{a}(3, 1)$, $\vec{b}(5, -4)$, $\vec{c}(2, -1)$. Найдите числа α и β такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

1.16. Даны четыре вектора $\vec{a}(4, 1, -1)$, $\vec{b}(3, -1, 0)$, $\vec{c}(-1, 1, 1)$, $\vec{d}(-1, 3, 4)$. Найдите числа α, β, γ такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

1.17. Убедитесь, что векторы $\vec{a}(-5, -1)$ и $\vec{b}(-1, 3)$ образуют базис на плоскости. Найдите координаты векторов $\vec{c}(-1, 2)$ и $\vec{d}(2, -6)$ в этом базисе.

1.18. Даны четыре вектора $\vec{a}(1, -2, 0)$, $\vec{b}(-1, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 4)$, $\vec{d}(6, -1, 7)$. Известно, что тройка векторов $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ линейно независима и может быть выбрана в качестве базиса в пространстве. Найдите координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1.19. Известно, что векторы $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ некомпланарны. Векторы $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$ можно выбрать в качестве базиса в пространстве. Найдите координаты вектора $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ в базисе $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$.

1.20. Докажите, что для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

1.21. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите, при каких значениях λ и μ векторы $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ коллинеарны.

1.22. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в некотором базисе: $\vec{a}(2,-1,6)$, $\vec{b}(-1,3,8)$. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются их линейными комбинациями: $\vec{p}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-5\vec{b}$. Выясните, являются ли $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарными.

1.23. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{q}=-9\vec{a}+12\vec{b}$. Выясните, являются ли $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарными.

1.24. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина отрезка BC, точка O – точка пересечения диагоналей. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{KD}$.

1.25. В треугольнике ABC точка M – середина отрезка AB, точка O – точка пересечения медиан. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$.

1.26. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $3:2$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

1.27. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$, найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$.

1.28. В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, точки K и L расположены соответственно на сторонах AB и BC так, что $AK:KB=3:5$, а $BL:LC=2:3$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BM}$ в базисе $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{CK}$.

1.29. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найдите:

1) координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $AM : BM = a : b$;
2) координаты вектора $\overrightarrow{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $AN : BN = a : b$.

1.30. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в базисе, образованном векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.31. Даны радиус-векторы $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$ точек M_1, M_2 соответственно. Найдите радиус-вектор $\overrightarrow{r_0}$ точки M_0, являющейся серединой отрезка M_1M_2.

1.32. Даны радиус-векторы $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r_3}$ вершин треугольника. Найдите радиус-вектор точки пересечения медиан этого треугольника.

1.33. Даны радиус-векторы $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r_3}$ трёх последовательных вершин параллелограмма. Найдите:
1) радиус-вектор $\overrightarrow{r_4}$ четвёртой вершины этого параллелограмма;
2) радиус-вектор $\overrightarrow{r_0}$ точки пересечения диагоналей этого параллелограмма.

1.34. Даны радиус-векторы $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r_3}$, $\overrightarrow{r_4}$ соответственно вершин A, B, D, A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите радиус-векторы остальных четырёх вершин этого параллелепипеда.

1.35. Три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты четвёртой вершины D этого параллелограмма.

1.36. Три точки $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$, $C(5, 0, 2)$ являются последовательными вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты четвёртой вершины D этого параллелограмма.

1.37. Даны две различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдите координаты:
1) точки M, лежащей на отрезке AB так, что $AM : BM = a : b$;

2) точки N, лежащей на прямой AB вне отрезка AB так, что $AN : BN = a : b$.

1.38. Даны три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

1.39. Известно, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BC}| = 10$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{e}}\right) = 135°$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \vec{e}}\right) = 60°$, $\vec{e}$ является ортом оси l.

Найдите $\text{Пр}_l\overrightarrow{AC}$.

1.40. Найдите прямоугольные координаты точки M в пространстве, если известны длина её радиус-вектора $|\overrightarrow{OM}|$ и углы

$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}\right)$, $\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{j}}\right)$, $\gamma = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}\right)$.

1) $|\overrightarrow{OM}| = 4, \alpha = 60°, \beta = 45°, \gamma = 60°$;

2) $|\overrightarrow{OM}| = 8, \alpha = 135°, \beta = 60°, \gamma = 60°$;

3) $|\overrightarrow{OM}| = 2, \alpha = 120°, \beta = 45°, \gamma = 120°$.

Ответы и указания

1.1. 1) 7; 2) 9; 3) 13; 4) 27. **1.2**. 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\vec{0}$. **1.8**. $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$.
1.11. $\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}$. **1.12**. $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$. **1.13**. 1) $(-1,-3)$, 2) $(5,34)$.
1.14. 1) $(-4,10,0)$, 2) $(3,-12,18)$. **1.15**. $\alpha=-3/17$, $\beta=-5/17$.
1.16. $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=-4$. **1.17**. $\vec{c}(1/16,11/16)$, $\vec{d}(0,-2)$.
1.18. $(-1,-3,4)$. **1.19**. $(2/5,3/5,3/5)$. **1.21**. $\lambda=1$, $\mu=1$. **1.22**. Нет.
1.23. Да. **1.24**. $\overrightarrow{BD}(-1,1)$, $\overrightarrow{CO}\,(-1/2,-1/2)$, $\overrightarrow{KD}\,(-1,1/2)$.
1.25. $\overrightarrow{AM}(1/2,0)$, $\overrightarrow{AO}\,(1/3,1/3)$, $\overrightarrow{MO}\,(-1/6,1/3)$.
1.26. $\overrightarrow{AB}(3/5,-2/5)$, $\overrightarrow{BC}\,(2/5,2/5)$, $\overrightarrow{CD}\,(-2/5,3/5)$, $\overrightarrow{DA}\,(-3/5,-3/5)$.
1.27. $\overrightarrow{BC}(1,1)$, $\overrightarrow{CD}(0,1)$, $\overrightarrow{DE}(-1,0)$, $\overrightarrow{EF}(-1,-1)$, $\overrightarrow{BD}(1,2)$, $\overrightarrow{CF}(-2,0)$, $\overrightarrow{CE}(-1,1)$. **1.28**. $(-13/12,-14/15)$. **1.29**. 1) $\overrightarrow{OM}\left(\dfrac{b}{a+b},\dfrac{a}{a+b}\right)$; 2) $\overrightarrow{ON}\left(\dfrac{b}{b-a},-\dfrac{a}{b-a}\right)$. **1.30**. $\left(\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|},\ \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\right)$.
1.31. $\dfrac{\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}}{2}$. **1.32**. $\dfrac{\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}}{3}$. **1.33**. 1) $\overrightarrow{r_4}=\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}$; 2) $\overrightarrow{r_0}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_3})$. **1.34**. $\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}-\overrightarrow{r_1}$; $\overrightarrow{r_{B_1}}=\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_4}-\overrightarrow{r_1}$; $\overrightarrow{r_{C_1}}=\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}+\overrightarrow{r_4}-2\overrightarrow{r_1}$; $\overrightarrow{r_{D_1}}=\overrightarrow{r_3}+\overrightarrow{r_4}-\overrightarrow{r_1}$. **1.35**. $(x_1-x_2+x_3,y_1-y_2+y_3)$.
1.36. $(-1,1,1)$. **1.37**. 1) $M\left(\dfrac{bx_1+ax_2}{a+b},\ \dfrac{by_1+ay_2}{a+b},\ \dfrac{bz_1+az_2}{a+b}\right)$, 2) $N\left(\dfrac{bx_1-ax_2}{b-a},\ \dfrac{by_1-ay_2}{b-a},\ \dfrac{bz_1-az_2}{b-a}\right)$. *Указание*: используйте результат задачи 1.29. **1.38**. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.
Указание: используйте результат задачи 1.32. **1.39**. 2.
1.40. 1) $(2,2\sqrt{2},2)$; 2) $(-4\sqrt{2},4,4)$; 3) $(-1,\sqrt{2},-1)$.

Скалярное произведение векторов

Основные определения

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$) называется наименьший угол между этими векторами, приведёнными к общему началу. Величина этого угла обозначается так: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Очевидно, что $0 \leqslant (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leqslant \pi$.

Если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными.*

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определён.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается так: $(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$. Мы будем использовать обозначение $(\vec{a}, \vec{b})$. Итак, по определению,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \tag{3}$$

Скалярное произведение двух векторов, среди которых хотя бы один вектор нулевой, равно нулю.

Два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. При этом нулевой вектор полагают ортогональным любому другому вектору.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно описать через проекцию вектора на ось:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}, \tag{4}$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию второго вектора на ось, направление которой определяется первым вектором.

Свойства скалярного произведения

1) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (*коммутативность*).

2) Скалярный квадрат $\vec{a}^2$ любого вектора $\vec{a}$ равен квадрату его длины: $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$, причём
при $\vec{a} \neq \vec{0}$: $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 > 0$,
при $\vec{a} = \vec{0}$: $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 = 0$.

3) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно:
$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}).$$

4) Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ верно:
$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}).$$

Вычисление через координаты векторов

Если векторы $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\vec{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, то

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3},\ \ \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3},$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3},\ \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}),$$

и скалярное произведение с использованием свойств 1)–4) раскрывается так:

$$\begin{gathered}(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha_1\beta_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + \alpha_1\beta_2(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + \alpha_1\beta_3(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) + \\ +\alpha_2\beta_1(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) + \alpha_2\beta_2(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) + \alpha_2\beta_3(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + \\ +\alpha_3\beta_1(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) + \alpha_3\beta_2(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) + \alpha_3\beta_3(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) = \\ = \alpha_1\beta_1|\overrightarrow{e_1}|^2 + \alpha_2\beta_2|\overrightarrow{e_2}|^2 + \alpha_3\beta_3|\overrightarrow{e_3}|^2 + \\ +(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).\end{gathered}$$

Для получения окончательного результата необходимо найти скалярные произведения пар базисных векторов и выполнить указанные действия.

Основные формулы для вычислений в ортонормированном базисе

Перейдём к описанию скалярного произведения векторов в случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ описаны координатами в ортонормированном базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Поскольку базис $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ ортонормированный, то скалярные произведения пар базисных векторов равны:

$$\begin{array}{lll} (\vec{i},\vec{i}) = 1, & (\vec{i},\vec{j}) = 0, & (\vec{i},\vec{k}) = 0, \\ (\vec{j},\vec{i}) = 0, & (\vec{j},\vec{j}) = 1, & (\vec{j},\vec{k}) = 0, \\ (\vec{k},\vec{i}) = 0, & (\vec{k},\vec{j}) = 0, & (\vec{k},\vec{k}) = 1, \end{array} \tag{5}$$

и это приводит к следующим результатам.

1) В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноимённых координат этих векторов, т.е.

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{6}$$

2) В ортонормированном базисе длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{7}$$

3) В ортонормированном базисе орт вектора $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$):

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \tag{8}$$

и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ находятся так:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{9}$$

4) В ортонормированном базисе проекция вектора $\vec{b}$ на ось, направление которой задаётся вектором $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), равна

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{10}$$

5) В ортонормированном базисе косинус угла между векторами ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$):

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{11}$$

При работе с векторами, заданными координатами в ортонормированном базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ на плоскости, используются формулы, аналогичные (6)–(11), в которых отсутствуют выражения, связанные с третьей координатой.

В дальнейшем, если не указано иное, полагаем, что координаты векторов приведены в ортонормированном базисе.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 7$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

◀ Используя определение скалярного произведения (3), получим:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\frac{2\pi}{3} = 6 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -21. \ ▶$$

П р и м е р 2. Найдите значение выражения $|\vec{a}|^2 - \sqrt{2}(\vec{a}, \vec{b}) + 5|\vec{b}|^2$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45°$.

◀ Используя определение скалярного произведения, выполним указанные действия:

$$|\vec{a}|^2 - \sqrt{2}(\vec{a}, \vec{b}) + 5|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - \sqrt{2}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 45^\circ + 5|\vec{b}|^2 =$$

$$= 4 - \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 9 = 4 - 6 + 45 = 43. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: $\vec{a}(2, 1, 5)$, $\vec{b}(-4, 15, 1)$.

◀ Используя формулу (6), получим:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 15 + 5 \cdot 1 = 12. \ \blacktriangleright$$

Пример 4. Найдите угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами: $\vec{a}(1, -1, 1)$, $\vec{b}(3, -3, 3)$.

◀ Используя формулу (11), получим:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3 + 3 + 3}{\sqrt{1 + 1 + 1}\,\sqrt{9 + 9 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = 1, \quad \varphi = 0. \ \blacktriangleright$$

Пример 5. Найдите расстояние между точками A и B, заданными своими прямоугольными координатами:
а) $A(3, -2)$, $B(1, 3)$; б) $A(4, -3, 3)$, $B(6, -5, 4)$.

◀

а) Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(1 - 3, 3 - (-2))$, $\overrightarrow{AB}(-2, 5)$. Используя формулу (7), получим:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

б) Аналогично а): $\overrightarrow{AB}(6 - 4, -5 - (-3), 4 - 3)$, $\overrightarrow{AB}(2, -2, 1)$,

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3. \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 6. Даны три вектора $\vec{a}(-1,2)$, $\vec{b}(5,1)$, $\vec{c}(4,-2)$. Найдите $\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$.

◀ Найдём сначала значения скалярных произведений $(\vec{a},\vec{c})$ и $(\vec{a},\vec{b})$: $(\vec{a},\vec{c}) = -4-4 = -8$, $(\vec{a},\vec{b}) = -5+2 = -3$. А теперь вернёмся к искомому вектору – линейной комбинации векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}) = -8\vec{b}-(-3)\vec{c} = -8\vec{b}+3\vec{c}.$$

Выполнив соответствующие действия с координатами, получим координаты искомого вектора:

$$-8(5,1)+3(4,-2) = (-40,-8)+(12,-6) = (-28,-14). \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 7. Даны три вектора $\vec{a}(1,-1,1)$, $\vec{b}(5,1,1)$, $\vec{c}(0,3,-2)$. Найдите $|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2-(\vec{a},\vec{b})(\vec{b},\vec{c})$.

$$\blacktriangleleft \ |\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2-(\vec{a},\vec{b})(\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{a})+(\vec{c},\vec{c})-(\vec{a},\vec{b})(\vec{b},\vec{c}) =$$
$$= (1+1+1)+(9+4)-(5-1+1)(3-2) = 11. \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 8. Найдите координаты единичного вектора $\vec{c}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{a}(1,1,0)$ и $\vec{b}(7,4,-6)$.

◀ Введём обозначения для искомых координат вектора $\vec{c}$: $\vec{c}(x,y,z)$. На три неизвестные величины x,y,z можно наложить три условия. Первые два – равенство нулю скалярных произведений $(\vec{c},\vec{a})$ и $(\vec{c},\vec{b})$ (это необходимое и достаточное условие ортогональности векторов). Третье условие – равенство единице длины вектора $\vec{c}$. Имеем:

$$\left\{\begin{array}{l}(\vec{c},\vec{a})=0,\\(\vec{c},\vec{b})=0,\\(\vec{c},\vec{c})=1,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}x+y=0,\\7x+4y-6z=0,\\x^2+y^2+z^2=1,\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-x,\\x=2z,\\x^2+y^2+z^2=1,\end{array}\right.$$

$$x=2z, \ y=-2z, \ 4z^2+4z^2+z^2=1, \ z^2=\frac{1}{9}, \ z=\pm\frac{1}{3}.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют два вектора: $\vec{c}_1\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ и $\vec{c}_2\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. ►

П р и м е р 9. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условиям $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$. Найдите $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$.

◄ Умножим вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ скалярно на вектор $\vec{a}$ и используем условие $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Получим:

$$(\vec{a},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})=(\vec{a},\vec{0})=0.$$

Выполнив аналогичные действия с векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, получим:

$$\begin{aligned}&(\vec{a},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})=0,\\&(\vec{b},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})=0,\\&(\vec{c},\vec{a})+(\vec{c},\vec{b})+(\vec{c},\vec{c})=0.\end{aligned}$$

Сложив соответствующие стороны полученных равенств и использовав свойство коммутативности скалярного произведения, получим:

$$(\vec{a},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})+(\vec{c},\vec{c})+2\Big((\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})\Big)=0,$$

$$2\Big((\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})\Big)=-\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right),$$

$$(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})=-\frac{9+1+16}{2}=-13.$$

Итак, $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})=-13$. ►

П р и м е р 10. Найдите угол α между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\dfrac{\pi}{6}$.

◄ Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{p},\vec{q})}{|\vec{p}|\,|\vec{q}|}.$$

Вычислим отдельно числитель и каждый множитель в знаменателе данной дроби.

$$\begin{aligned}
(\vec{p}\vec{q}) &= (\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a},\vec{a}) + (\vec{b},\vec{a}) - (\vec{a},\vec{b}) - (\vec{b},\vec{b}) = \\
&= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 1 = 2, \\
|\vec{p}| &= \sqrt{(\vec{p},\vec{p})} = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{(\vec{a},\vec{a}) + 2(\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{b})} = \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{7}, \\
|\vec{q}| &= \sqrt{(\vec{q},\vec{q})} = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{(\vec{a},\vec{a}) - 2(\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{b})} = \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = 1.
\end{aligned}$$

Используя полученные результаты, найдём $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{p},\vec{q})}{|\vec{p}|\;|\vec{q}|} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}. \;\blacktriangleright$$

П р и м е р 11. Найдите координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что $|\vec{x}| = 50$, он коллинеарен вектору $\vec{a}(6; -8; -7,5)$ и образует острый угол с осью Oz.

◀ Начнём с использования условия коллинеарности вектору $\vec{a}$. Т.к. $\vec{x}\,||\,\vec{a}$, то вектор $\vec{x}$ имеет координаты, пропорциональные координатам вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{x}(6\lambda; -8\lambda; -7,5\lambda)$.

По условию $|\vec{x}| = 50$, следовательно,

$$\sqrt{36\lambda^2 + 64\lambda^2 + 56,25\lambda^2} = 50;\; 12,5|\lambda| = 50;\; |\lambda| = 4;\; \lambda = \pm 4.$$

Поскольку вектор $\vec{x}$ образует с осью Oz острый угол, то его третья координата положительна: $-7,5\lambda > 0$, $\lambda = -4$.
Окончательно: $\vec{x}(-24, 32, 30)$. ▶

П р и м е р 12. Найдите направляющие косинусы вектора $\vec{c}$, если известно, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(2,3,-1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $(\vec{c}, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

◀ Введём обозначения для координат вектора $\vec{c}$: $\vec{c}(x, y, z)$. Найдём эти координаты, наложив на них три условия.
1) $\vec{c} \perp \vec{a} \Leftrightarrow (\vec{c}, \vec{a}) = 0,\ 2x + 3y - z = 0.$
2) $\vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{c}, \vec{b}) = 0,\ x - 2y + 3z = 0.$
3) $(\vec{c}, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6,\ 2x - y + z = -6$ (при вычислении скалярного произведения мы использовали координаты обоих векторов – (x, y, z) и $(2, -1, 1)$).

Получили систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ 2x - y + z = -6. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим сначала координаты вектора $\vec{c}$: $\vec{c}(-3, 3, 3)$. Затем, используя формулы (9), найдём и направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{-3}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\ ▶$$

П р и м е р 13. Даны точки $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$ и $D(3, 2, -4)$. Найдите $\text{Пр}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB}$.

◀ По формуле (4) имеем:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = |\overrightarrow{CD}| \text{Пр}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{Пр}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB} = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{CD}|}.$$

Для того, чтобы воспользоваться этой формулой, предварительно найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, затем вычислим их скалярное произведение и длину вектора $\overrightarrow{CD}$.
Итак:

$$\overrightarrow{AB}(5, -1, 9),\ \overrightarrow{CD}(2, 3, -6),\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 10 - 3 - 54 = -47,$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4+9+36} = 7,\ \text{Пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = \frac{-47}{7}.\ \blacktriangleright$$

Задачи

2.1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

2.2. Найдите значение выражения $2|\vec{a}|^2 - 5\sqrt{3}(\vec{a},\vec{b}) + 6|\vec{b}|^2$, если:

1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 30°$;

2) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 150°$.

2.3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(-4,2)$;

2) $\vec{a}(3,2,-5)$, $\vec{b}(10,1,2)$.

2.4. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами:

1) $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(2,4)$;

2) $\vec{a}(1,-1,1)$, $\vec{b}(3,1,-2)$;

3) $\vec{a}(0,1,1)$, $\vec{b}(3,3,0)$;

4) $\vec{a}(-3,0,-4)$, $\vec{b}(7,0,1)$;

5) $\vec{a}(1,-1,1)$, $\vec{b}(4,4,-4)$.

2.5. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(-1,2)$, $B(5,10)$;

2) $A(3,-3,-7)$, $B(1,-4,-5)$.

2.6. Даны три вектора: $\vec{a}(-1,2)$, $\vec{b}(5,1)$, $\vec{c}(4,-2)$. Найдите:

1) $|\vec{a}|^2-(\vec{b},\vec{c})$;

2) $|\vec{b}|^2+(\vec{b},\vec{a}+3\vec{c})$.

2.7. Даны три вектора $\vec{a}(2,1,-1)$, $\vec{b}(-3,2,5)$, $\vec{c}(4,-1,3)$. Найдите:

1) $\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$;

2) $|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+3(\vec{a},\vec{b})(\vec{b},\vec{c})$.

2.8. Найдите $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$, если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, и известны длины этих векторов:

1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$;

2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=2$.

2.9. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\widehat{(\vec{a},\vec{c})}=\widehat{(\vec{b},\vec{c})}=60^\circ$.

2.10. Найдите длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+2\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $\widehat{(\vec{p},\vec{q})}=\dfrac{\pi}{4}$.

2.11. Длины базисных векторов $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ равны соответственно $3,\sqrt{2},4$, а углы между ними равны $\widehat{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})}=45^\circ$, $\widehat{(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}=45^\circ$, $\widehat{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3})}=60^\circ$. Найдите длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, имеющих в базисе $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ координаты соответственно $(1,-3,0)$ и $(-1,2,1)$.

2.12. Длины базисных векторов $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ равны соответственно $1,1,2$, а углы между ними равны $\widehat{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})}=90^\circ$, $\widehat{(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}=60^\circ$, $\widehat{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3})}=60^\circ$. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, имеющих в базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ координаты соответственно $(-1, 0, 2)$ и $(2, -1, 1)$.

2.13. Докажите, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \dfrac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|^2}$ ортогонален ненулевому вектору $\vec{a}$.

2.14. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определите, при каких значениях α ортогональны векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$.

2.15. Длина вектора $\vec{c}$ равна $4\sqrt{3}$, а угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{b}$ равен $\dfrac{5\pi}{6}$. Известно, что векторы $(3\vec{c} + 4\vec{b})$ и $\vec{c}$ ортогональны. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

2.16. Длина вектора $\vec{a}$ равна $3\sqrt{3}$, а длина вектора $\vec{b}$ равна $\sqrt{6}$. Известно, что векторы $(2\vec{a} - 3\vec{b})$ и $\vec{b}$ ортогональны. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.17. Найдите угол, образованный единичными векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, если известно, что векторы $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ и $\vec{b} = 5\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$ ортогональны.

2.18. Вычислите координаты единичного вектора $\vec{e}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{b}(1, 1, 0)$, $\vec{c}(0, 1, 1)$ и образует тупой угол с осью Ox.

2.19. Даны два вектора: $\vec{a}(3, -1, 5)$, $\vec{b}(1, 2, -3)$. Найдите координаты вектора $\vec{x}$ при условии, что $\vec{x}$ перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

2.20. Найдите вектор $\vec{x}$, ортогональный векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, зная, что $|\vec{x}| = 14$ и он образует тупой угол с осью Oy.

2.21. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2, 1, 0)$, $\vec{b}(0, -2, 1)$.

2.22. Даны векторы $\vec{a}(\sqrt{3}, -3)$ и $\vec{b}(1, -1)$. Найдите все векторы $\vec{x}$, образующие угол $\dfrac{\pi}{3}$ с вектором $\vec{a}$ и такие, что $(\vec{b}, \vec{x}) = 1$.

2.23. Найдите координаты вектора $\vec{x}$, который коллинеарен вектору $\vec{a}(2,1,-1)$ и удовлетворяет условию $(\vec{x},\vec{a})=3$.

2.24. Даны три вектора: $\vec{a}(4,1,5)$, $\vec{b}(0,5,2)$, $\vec{c}(-6,2,3)$. Найдите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений:
$(\vec{x},\vec{a})=18$, $(\vec{x},\vec{b})=1$, $(\vec{x},\vec{c})=1$.

2.25. Даны компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, если известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=60^\circ$, векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$ неколлинеарны.

2.26. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$. Найдите внутренний угол при вершине B этого треугольника.

2.27. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(3,2,-3)$, $B(5,1,-1)$, $C(1,-2,1)$. Найдите внутренний угол при вершине A этого треугольника.

2.28. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1,1,0)$, $B(1,1,2)$, $C(3,3,1)$. Найдите угол α при вершине A и угол β между медианами, проведёнными из вершин A и B этого треугольника.

2.29. Найдите угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

2.30. Найдите $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ и $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, если

1) $\vec{a}(2,1)$, $\vec{b}(1,1)$;

2) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$;

3) $\vec{a}(4,-3,2)$, $\vec{b}(1,1,1)$;

4) $\vec{a}=-4\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

2.31. Даны три вектора: $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислите $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

2.32. Даны три вектора: $\vec{a}(1,-3,4)$, $\vec{b}(3,-4,2)$, $\vec{c}(-1,1,4)$. Вычислите $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

2.33. Даны три вектора: $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Вычислите $\text{Пр}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

2.34. Даны две точки $M(-5,7,-6)$ и $N(7,-9,-6)$. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}(1,-3,1)$ на ось, направление которой задаётся вектором $\overrightarrow{MN}$.

2.35. Даны две точки $A(3,-4,-2)$, $B(2,5,-2)$. Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy соответственно углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, с осью Oz – тупой угол γ.

Ответы и указания

2.1. -5. **2.2**. 1) -3; 2) 29. **2.3**. 1) 0; 2) 22. **2.4**. 1) 0; 2) 90°; 3) 60°; 4) -135°; 5) $\arccos(-\frac{1}{3})$. **2.5**. 1) 10; 2) 3. **2.6**. 1) -13; 2) 77. **2.7**. 1) $(24, -1, 47)$; 2) 37. **2.8**. 1) -25; 2) -6. **2.9**. 10. **2.10**. 15; $\sqrt{593}$. **2.11**. Длины сторон 3 и 5; острый угол $\arccos(4/5)$. **2.12**. $\sqrt{94}$. **2.14**. $\alpha = \pm 3/5$. **2.15**. 6. **2.16**. $\dfrac{\pi}{4}$. **2.17**. $\dfrac{\pi}{3}$. **2.18**. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **2.19**. $(2, -3, 0)$. **2.20**. $-4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$. **2.21**. 90°. **2.22**. $(1, 0)$ или $\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$. **2.23**. $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. **2.24**. $(1, -1, 3)$. **2.25**. 7. **2.26**. 45°. **2.27**. $\arccos(\frac{4}{9})$. **2.28**. $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{17}\right)$. **2.29**. 60°. **2.30**. 1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; 2) 0, 0; 3) $\sqrt{3}$, $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$; 4) $-\dfrac{10}{3}$, $-\dfrac{10}{\sqrt{33}}$. **2.31**. -4. **2.32**. 5. **2.33**. -11. **2.34**. 3. **2.35**. -5.

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторное произведение векторов: определение и основные свойства

Векторным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который обладает следующими тремя свойствами:

1) он перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ правая;

3) его модуль равен
$$|\vec{c}\,| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Векторное произведение двух векторов, среди которых хотя бы один вектор нулевой, равно нулевому вектору.

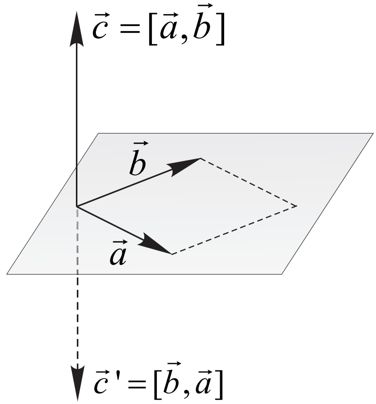

Рис. 10: Векторное произведение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{c}\,' = [\vec{b}, \vec{a}]$. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{c}\,'$ направлены в противоположные стороны, т.е. $\vec{c}\,' = -\vec{c}$.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается так: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$. Мы будем использовать обозначение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Условие 3) определения означает, что *модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.*

Из определения следует, что векторный квадрат – векторное произведение вектора на себя – есть нулевой вектор, т.е.:
для любого вектора $\vec{a}$ верно, что $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

Наглядное представление о векторном произведении даёт рисунок 10.

Перечислим основные свойства векторного произведения.

1) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно: $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ (антикоммутативность).

2) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно:

$$\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

3) Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно:

$$\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right].$$

Связь векторного произведения векторов с их коллинеарностью: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.
Заметим, что приведённое на странице 18 условие пропорциональности координат для коллинеарных векторов и условие равенства нуль-вектору их векторного произведения эквивалентны.

Смешанное произведение векторов: определение и основные свойства

Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, полученное умножением вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ скалярно на $\vec{c}$, т. е. $\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)$.
Обозначается смешанное произведение так: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.
Мы будем использовать обозначение $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$. Итак, по определению,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right).$$

В случае правой тройки векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ их *смешанное произведение равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах*, а в случае левой тройки – объёму параллелепипеда, взятому со знаком минус.

Связь смешанного произведения с компланарностью векторов: тройка векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ компланарна тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

Перечислим основные свойства смешанного произведения.

1) Смешанное произведение не изменится, если, сохраняя порядок следования множителей, перенести операцию векторного умножения с пары «первый и второй множители» на пару «второй и третий множители», а именно:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right).$$

2) Круговая перестановка множителей не меняет величины смешанного произведения. Перестановка двух соседних множителей меняет знак смешанного произведения на противоположный, а именно:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=$$
$$=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right).$$

Заметим, что из вышеперечисленных свойств следует, что смешанное произведение векторов, среди которых есть, по меньшей мере, два равных вектора, равно нулю. То есть
$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)=0$, $\left(\vec{b},\vec{b},\vec{b}\right)=0$ и т.д.

Вычисление через координаты векторов

Векторное произведение векторов

Если векторы $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\vec{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$, то

$$\vec{a}=\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\overrightarrow{e_2}+\alpha_3\overrightarrow{e_3},\ \vec{b}=\beta_1\overrightarrow{e_1}+\beta_2\overrightarrow{e_2}+\beta_3\overrightarrow{e_3},$$

$$[\vec{a},\vec{b}] = [\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3},\ \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}]\,,$$

и векторное произведение с использованием свойств 1)–3) раскрывается так:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \alpha_1\beta_1\,[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}] + \alpha_1\beta_2\,[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] + \alpha_1\beta_3\,[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}] +$$

$$+\alpha_2\beta_1\,[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}] + \alpha_2\beta_2\,[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}] + \alpha_2\beta_3\,[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}] +$$

$$+\alpha_3\beta_1\,[\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}] + \alpha_3\beta_2\,[\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}] + \alpha_3\beta_3\,[\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3}] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}] +$$

$$+(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]\,. \tag{12}$$

Для получения окончательного результата необходимо найти векторные произведения пар базисных векторов и выполнить указанные действия.

Смешанное произведение векторов

Если три вектора $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\vec{c}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$, то смешанное произведение этих векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)$ может быть вычислено так:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})\,. \tag{13}$$

Здесь второй множитель $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ – это смешанное произведение тройки базисных векторов, а первый множитель – это *определитель* (или *детерминант*) *третьего порядка*, который может быть вычислен, например, с помощью *разложения по первой строке*, а именно:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Каждый *определитель второго порядка* в формуле (14) вычисляется (*раскрывается*) по правилу

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{15}$$

Основные формулы для вычислений в ортонормированном базисе

В ортонормированном правом базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ векторные произведения пар базисных векторов равны:

$$\begin{array}{lll} [\vec{i}, \vec{i}\,] = \vec{0}, & [\vec{i}, \vec{j}\,] = \vec{k}, & [\vec{i}, \vec{k}\,] = -\vec{j}, \\ [\vec{j}, \vec{i}\,] = -\vec{k}, & [\vec{j}, \vec{j}\,] = \vec{0}, & [\vec{j}, \vec{k}\,] = \vec{i}, \\ [\vec{k}, \vec{i}\,] = \vec{j}, & [\vec{k}, \vec{j}\,] = -\vec{i}, & [\vec{k}, \vec{k}\,] = \vec{0}. \end{array} \tag{16}$$

Дополнив приведённый ранее для произвольного базиса результат (12) соотношениями (16), получают *правило для вычисления векторного произведения векторов в ортонормированном правом базисе*, а именно:
если векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в ортонормированном правом базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, то их векторное произведение равно

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}. \tag{17}$$

Более компактно правило (17) записывается с помощью определителя третьего порядка:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Поскольку смешанное произведение векторов ортонормированного правого базиса $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ равно единице:

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = ([\vec{i}, \vec{j}], \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{k}) = |\vec{k}|^2 = 1,$$

то, согласно формуле (13), смешанное произведение векторов

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3),$$

заданных своими координатами в ортонормированном правом базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, может быть вычислено с помощью определителя так:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

В дальнейшем, если не указано иное, предполагается, что координаты векторов приведены в ортонормированном правом базисе.

Двойное векторное произведение векторов

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется вектор вида $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$, который получается, когда вектор $\vec{a}$ векторно умножается на векторное произведение $[\vec{b}, \vec{c}]$ векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Векторное произведение $[\vec{b}, \vec{c}]$ при этом называется *внутренним.*

Нетрудно показать, что вектор $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$ компланарен векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и *раскладывается по векторам внутреннего произведения* следующим образом:

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \tag{20}$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Для двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Найдите:
1) $|[\vec{a}, \vec{b}]|$; 2) $|[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]|^2$; 3) $|[\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}]|$.

◀

1) Используя определение векторного произведения, получим:
$|[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\dfrac{2\pi}{3} = 1\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$

2) Сначала, используя свойства векторного произведения, упростим вектор, длину которого нужно найти:

$$[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}] = 2[\vec{a},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{a}]+4[\vec{a},\vec{b}]+2[\vec{b},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{b}]+4[\vec{a},\vec{b}] = 3[\vec{a},\vec{b}].$$

Теперь, используя полученный ранее в пункте 1) результат для $|[\vec{a},\vec{b}]|$, найдём искомое:

$$|[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]|^2 = 3^2|[\vec{a},\vec{b}]|^2 = 3^2\cdot(\sqrt{3})^2 = 9\cdot 3 = 27.$$

3) Решив этот пример, мы продемонстрируем, что формулы сокращённого умножения, используемые при работе с алгебраическими выражениями, в случае с векторным произведением векторов не работают.
Аналогично пункту 2) сначала упростим вектор, длину которого нужно найти. Разности квадратов, ожидаемой при работе с алгебраическими выражениями, при этом не получится:

$$[\vec{a}+3\vec{b},\vec{a}-3\vec{b}] = [\vec{a},\vec{a}]+3[\vec{b},\vec{a}]-3[\vec{a},\vec{b}]-9[\vec{b},\vec{b}] = -3[\vec{a},\vec{b}]-3[\vec{a},\vec{b}] = -6[\vec{a},\vec{b}].$$

Теперь, используя полученный ранее в пункте 1) результат для $|[\vec{a},\vec{b}]|$, найдём искомое:

$$|[\vec{a}+3\vec{b},\vec{a}-3\vec{b}]| = |-6|\cdot|[\vec{a},\vec{b}]| = 6\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.\quad ▶$$

П р и м е р 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$?

◀ Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору. Потребуем, чтобы векторное произведение векторов $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$ было равно нуль-вектору, и найдём λ:

$$[\lambda\vec{a}+\vec{b}, 3\vec{a}+\lambda\vec{b}] = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \lambda^2[\vec{a},\vec{b}]+3[\vec{b},\vec{a}] = \vec{0} \;\Leftrightarrow$$
$$(\lambda^2-3)[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}.$$

Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $[\vec{a},\vec{b}] \neq \vec{0}$. Следовательно,

$$\lambda^2-3=0, \quad \lambda = \pm\sqrt{3}. \;\blacktriangleright$$

П р и м е р 3. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $\vec{a} \neq \vec{0}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ хотя бы один вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условию $[\vec{x},\vec{a}] = \vec{b}$.

◀ Из условия $[\vec{x},\vec{a}] = \vec{b}$ и определения векторного произведения следует, что вектор $\vec{b}$ ортогонален плоскости векторов $\vec{x}$ и $\vec{a}$. Это означает, что вектор $\vec{x}$ нужно искать в плоскости, которая содержит вектор $\vec{a}$ и перпендикулярна вектору $\vec{b}$. Поскольку требуется найти «хотя бы один вектор $\vec{x}$», удовлетворяющий указанному в задании условию, то можно руководствоваться соображениями удобства и искать тот вектор $\vec{x}$, который ортогонален не только вектору $\vec{b}$, но и вектору $\vec{a}$.
Имеем: $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $\vec{x} \perp \vec{b}$, следовательно вектор $\vec{x}$ можно искать в виде $\vec{x} = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$, и для получения окончательного результата нужно найти только множитель λ.
Используя условие $[\vec{x},\vec{a}] = \vec{b}$, получим

$$[\lambda[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}] = \vec{b};\;\; \lambda[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}] = \vec{b};\;\; |\lambda|\cdot|[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}]| = |\vec{b}|;$$
$$[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{a} \Rightarrow |[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}]| = |[\vec{a},\vec{b}]|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\frac{\pi}{2} = |[\vec{a},\vec{b}]|\cdot|\vec{a}|;$$
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{2} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Таким образом, для нашего случая

$$|[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|,$$

и требование $|\lambda|\cdot|[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}]|=|\vec{b}|$ приводит к

$$|\lambda|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|\Rightarrow|\lambda|=\frac{1}{|\vec{a}|^2}.$$

Таким образом, $\lambda=\pm\dfrac{1}{|\vec{a}|^2}$, и один из векторов вида $\vec{x}=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$, удовлетворяющий условию задачи, выглядит так: $\vec{x}=\dfrac{[\vec{a},\vec{b}]}{|\vec{a}|^2}$. ►

П р и м е р 4. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: $\vec{a}(3,-1,2)$, $\vec{b}(2,-3,-5)$.

◄ Используя формулы (18), (14) и (15), получим:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&2\\2&-3&-5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1&2\\-3&-5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3&2\\2&-5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3&-1\\2&-3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,((-1)\cdot(-5)-(-3)\cdot 2)-\vec{j}\,(3\cdot(-5)-2\cdot 2)+\vec{k}\,(3\cdot(-3)-2\cdot(-1))=$$

$$=11\vec{i}+19\vec{j}-7\vec{k};\quad [\vec{a},\vec{b}]\,(11,19,-7).$$ ►

П р и м е р 5. На векторах $\vec{a}(2,3,1)$ и $\vec{b}(-1,1,2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найдите:

а) площадь этого треугольника;

б) длину высоты треугольника, опущенной из указанной точки.

◄

а) Длина векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах-множителях. Следовательно, для площади треугольника, в два раза меньшей площади параллелограмма, получим:

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|[\vec{a},\vec{b}]|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&1\\-1&1&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|5\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{25+25+25}=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

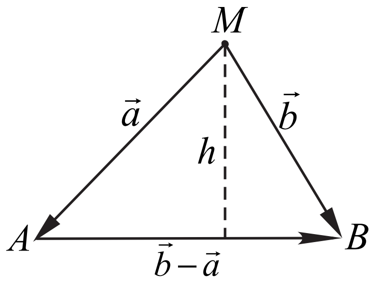

Рис. 11: Рисунок к примеру 5

б) Площадь треугольника можно найти и по-другому – как полупроизведение основания на высоту:

$$\begin{aligned} S_\triangle &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\,h = \frac{1}{2}|\vec b - \vec a|\,h = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2}\cdot h = \frac{\sqrt{14}}{2}h. \end{aligned}$$

Приравняв данное выражение для площади треугольника к результату, полученному в пункте а), получим:

$$\frac{\sqrt{14}}{2}h = \frac{5}{2}\sqrt{3},\ h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}},\ h = \frac{5\sqrt{42}}{14}. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 6. Даны вершины треугольника: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

◀ Используем метод площадей:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\,h \Rightarrow h = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|},$$

где площадь треугольника можно вычислить, используя векторное произведение: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|$.

В результате для высоты h получим:

$$h = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\frac{1}{2}|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|}, \quad h = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|}{|\overrightarrow{AC}|}.$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ и выполним указанные действия:

$$\overrightarrow{BA}\,(-4, 5, 0);\ \ \overrightarrow{BC}\,(-4, 9, -3);\ \ \overrightarrow{AC}\,(0, 4, -3);$$

$$[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k},$$

$$|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25;$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5; \quad h = \frac{25}{5}; \quad h = 5. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 7. Вычислите проекцию вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на ось, направление которой задаётся вектором $\vec{b} = [\vec{i} - 2\vec{k}, \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}]$.

◀ Для вычисления проекции сначала найдём координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, затем используем формулу $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$.

Координаты вектора $\vec{a}$ определяются непосредственно из его разложения по базису: $\vec{a}\,(3, -12, 4)$. Для нахождения координат вектора $\vec{b}$ используем формулу (18):

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \vec{b}(6, 2, 3).$$

Таким образом, $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \dfrac{3 \cdot 6 + (-12) \cdot 2 + 4 \cdot 3}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \dfrac{6}{7}$. ▶

П р и м е р 8. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он ортогонален векторам $\vec{a}(2,3,-1)$, $\vec{b}(1,-2,3)$, и удовлетворяет условию $(\vec{x}, 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = -6$.

◀ Аналогичный пример с несколько изменённым требованием уже рассматривался нами на странице 37. На этот раз мы решим задачу другим способом, используя векторное произведение векторов.

Так как $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $\vec{x} \perp \vec{b}$, то $\vec{x}$ коллинеарен вектору $[\vec{a}, \vec{b}]$, следовательно:

$$\vec{x} = \lambda[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\lambda\vec{i} - 7\lambda\vec{j} - 7\lambda\vec{k}.$$

Используя условие $(\vec{x}, 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = -6$, найдём λ:

$$14\lambda + 7\lambda - 7\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{7}, \quad \vec{x} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}. \quad ▶$$

П р и м е р 9. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}(8,-15,3)$, образует острый угол с осью Ox. Найдите координаты $\vec{x}$, зная, что $|\vec{x}| = 51$.

◀ Поскольку $\vec{x} \perp \vec{k}$, $\vec{x} \perp \vec{a}$, то

$$\vec{x} = \lambda[\vec{k}, \vec{a}] = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -15 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(15\vec{i} + 8\vec{j}); \quad \vec{x}\,(15\lambda, 8\lambda, 0).$$

Используя, что $|\vec{x}| = 51$, получим: $\sqrt{289\lambda^2} = 51$, $17|\lambda| = 51$, $|\lambda| = 3$, $\lambda = \pm 3$. Согласно условию искомый вектор образует острый угол с осью Ox, следовательно, первая координата вектора $\vec{x}$ положительна: $15\lambda > 0 \Rightarrow \lambda > 0$. Таким образом, $\lambda = 3$ и $\vec{x}(45, 24, 0)$. ▶

П р и м е р 10. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, найдите $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

◀ Найдём $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, используя определение смешанного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}}).$$

По определению векторного произведения

$$|[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 6\cdot 3\cdot\sin 30^\circ = 6\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 9,$$

следовательно, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 9\cdot 3\cdot\cos(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}}) = 27\cos(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}})$.

По условию $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$, следовательно, $\vec{c}\parallel[\vec{a},\vec{b}]$, и $(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}})$ может принимать два значения:
1) $(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}}) = 0^\circ$, если $\vec{c}$ сонаправлен $[\vec{a},\vec{b}]$, т.е., когда тройка векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ правая; в этом случае $\cos(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}}) = 1$;
2) $(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}}) = 180^\circ$, если $\vec{c}$ противонаправлен $[\vec{a},\vec{b}]$, т.е., когда тройка векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ левая; в этом случае $\cos(\widehat{[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}}) = -1$.
Окончательно:

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 27$, если тройка векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ правая;
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -27$, если тройка векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ левая. ►

П р и м е р 11. Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отложены из одной точки. Найдите

а) объём треугольной призмы, основание которой построено на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а боковое ребро совпадает с вектором $\vec{c}$;

б) объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

◄ а) Напомним, что модуль смешанного произведения $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ численно равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 12). Кратко: $V_{\text{парал-да}} = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.
С другой стороны, объём параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту параллелепипеда. Кратко:

$$V_{\text{парал-да}} = S_{\text{осн.парал-да}}\cdot h.$$

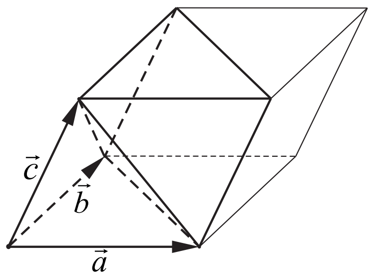

Рис. 12: Рисунок к примеру 11

Объём призмы находится по аналогичной формуле:

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.призмы}} \cdot h.$$

Поскольку высота h у параллелепипеда и призмы одинакова, а площади оснований связаны соотношением

$$S_{\text{осн.треуг.призмы}} = \frac{1}{2} S_{\text{осн.парал-да}},$$

то

$$V_{\text{треуг.призмы}} = \frac{1}{2} V_{\text{парал-да}} \;\Rightarrow\; V_{\text{треуг.призмы}} = \frac{1}{2} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

б) Объём тетраэдра вычисляется по формуле:

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.тетраэдра}} \cdot h.$$

Поскольку высота h у параллелепипеда и тетраэдра одинакова, а площади оснований связаны соотношением

$$S_{\text{осн.тетраэдра}} = \frac{1}{2} S_{\text{осн.парал-да}},$$

то

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал-да}} \;\Rightarrow\; V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 12. Зная, что $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, найдите соотношение между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, не содержащее коэффициентов λ и μ.

◀

1-й способ. Условие $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ означает, что вектор $\vec{c}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны. А это равносильно тому, что смешанное произведение этих векторов равно нулю. Таким образом, искомое соотношение между векторами, не содержащее коэффициентов λ и μ, выглядит так: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

2-й способ. Будем последовательно исключать коэффициенты λ и μ в соотношении $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.
Для этого сначала умножим обе части равенства $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ векторно на $\vec{a}$:

$$[\vec{c}, \vec{a}] = \lambda[\vec{a}, \vec{a}] + \mu[\vec{b}, \vec{a}] \;\Rightarrow\; [\vec{c}, \vec{a}] = \mu[\vec{b}, \vec{a}].$$

Теперь умножим последнее равенство скалярно на $\vec{b}$:

$$([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}) = \mu([\vec{b}, \vec{a}], \vec{b}).$$

Поскольку $[\vec{b}, \vec{a}] \perp \vec{b}$, то $([\vec{b}, \vec{a}], \vec{b}) = 0$. Следовательно,

$$([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 13. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданных своими координатами: $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(7, 3-5)$, $\vec{c}(4, 1, -2)$.

◀ Воспользуемся формулой (19):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-6 + 5) - 2 \cdot (-14 + 20) + 3 \cdot (7 - 12) = -1 - 12 - 15 = -28. \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 14. Выясните, лежат ли четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости.

◀ Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны. В свою очередь, тройка векторов компланарна тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов равно нулю. Таким образом, нам нужно найти смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и сравнить его с нулём.

Сначала найдём координаты этих векторов:
$\overrightarrow{AB}(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}(1,-1,4)$.

Далее вычислим их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 0$, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. ▶

П р и м е р 15. Даны вершины тетраэдра:
$A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$.
Найдите длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D.

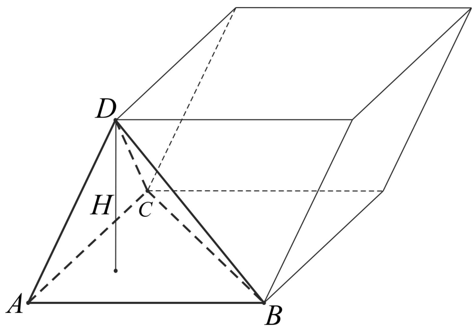

Рис. 13: Рисунок к примеру 15.

◀ Заметим, что у тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\}$, высоты, опущенные из вершины D к основанию, содержащему векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, совпадают. Поскольку

векторным способом высоту параллелепипеда найти проще, будем искать именно высоту параллелепипеда.
Используем метод объёмов. С одной стороны, объём параллелепипеда можно найти через смешанное произведение векторов:

$$V_{\text{парал-да}} = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

С другой стороны,

$$V_{\text{парал-да}} = S_{\text{осн.парал-да}} \cdot h,$$

где площадь основания параллелепипеда – это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$, которая численно равна модулю векторного произведения этих векторов:

$$S_{\text{осн.парал-да}} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Таким образом:

$$V_{\text{парал-да}} = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| \cdot h.$$

Следовательно,

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}. \tag{21}$$

Осталось только найти координаты векторов и выполнить указанные в формуле (21) действия.
Итак:

$$\overrightarrow{AB}\,(2, -2, -3),\ \ \overrightarrow{AC}\,(4, 0, 6),\ \ \overrightarrow{AD}\,(-7, -7, 7).$$

Далее:

$$|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} \right| = 308,$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k},$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{784} = 28;\ h = \frac{308}{28} = 11. \blacktriangleright$$

Рассмотрим несколько примеров на двойное векторное произведение.

П р и м е р 16. Разложите вектор $[[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$ по векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

$\blacktriangleleft$ Воспользуемся антикоммутативностью векторного произведения и формулой (20):

$$[[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}] = -[\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] = -(\vec{x}(\vec{y}, \vec{z}) - \vec{y}(\vec{x}, \vec{z})) = \vec{y}(\vec{x}, \vec{z}) - \vec{x}(\vec{y}, \vec{z}). \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 17. Проверьте, компланарны ли векторы $\{\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}\}$: $\vec{p} = [\vec{a}, \vec{m}]$, $\vec{q} = [\vec{b}, \vec{m}]$, $\vec{r} = [\vec{c}, \vec{m}]$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$ – произвольные векторы).

$\blacktriangleleft$ Найдём смешанное произведение векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, отталкиваясь от его определения:

$$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = ([\vec{p}, \vec{q}], \vec{r}).$$

Если в векторном произведении $[\vec{p}, \vec{q}]$ один из множителей заменить на своё, данное в условии задачи, выражение, то получится двойное векторное произведение. Заменяя вектор $\vec{q}$, используя формулу (20) и свойства скалярного произведения, получим:

$$([\vec{p}, \vec{q}], \vec{r}) = \left(\left[\vec{p}, \left[\vec{b}, \vec{m}\right]\right], \vec{r}\right) = \left(\vec{b}(\vec{p}, \vec{m}) - \vec{m}(\vec{p}, \vec{b}), \vec{r}\right) =$$

$$= (\vec{p}, \vec{m})(\vec{b}, \vec{r}) - (\vec{p}, \vec{b})(\vec{m}, \vec{r}).$$

Вычислим отдельно каждый множитель:

$$(\vec{p}, \vec{m}) = ([\vec{a}, \vec{m}], \vec{m}) = (\vec{a}, \vec{m}, \vec{m});$$

$$(\vec{b}, \vec{r}) = \left(\vec{b}, [\vec{c}, \vec{m}]\right) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{m});$$

$$(\vec{p}, \vec{b}) = \left([\vec{a}, \vec{m}], \vec{b}\right) = (\vec{a}, \vec{m}, \vec{b});$$

$$(\vec{m}, \vec{r}) = (\vec{m}, [\vec{c}, \vec{m}]) = (\vec{m}, \vec{c}, \vec{m}).$$

Смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{m}, \vec{m})$ равно нулю, поскольку среди векторов-множителей есть два равных вектора. По этой же причине равно нулю и смешанное произведение $(\vec{m}, \vec{c}, \vec{m})$.
Окончательно получим:

$$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = ([\vec{p}, \vec{q}]\,, \vec{r}) = 0 \cdot (\vec{b}, \vec{c}, \vec{m}) - (\vec{a}, \vec{m}, \vec{b}) \cdot 0 = 0.$$

Поскольку смешанное произведение векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ равно нулю, тройка векторов $\{\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}\}$ компланарна. ►

П р и м е р 18. Докажите тождества:

а) $\Big[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]\Big] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

б) $\Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \vec{b}\Big]\Big]\Big]\Big] = |\vec{a}|^4\,\vec{b}$ при условии, что векторы $\vec{a} \perp \vec{b}$;

в) $\Big(\Big[\vec{a}, \vec{b}\Big]\,, \Big[\vec{c}, \vec{d}\Big]\Big) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c})$.

◄ а) Чтобы доказать требуемое, нужно разложить векторное произведение $\Big[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]\Big]$ по векторам внутреннего векторного произведения $[\vec{c}, \vec{d}]$. Для получения этого разложения сначала для удобства введём $\vec{x} = [\vec{a}, \vec{b}]$ и используем формулу (20), затем вернёмся к прежним обозначениям:

$$\Big[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]\Big] = \Big[\vec{x}, [\vec{c}, \vec{d}]\Big] = \vec{c}(\vec{x}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{x}, \vec{c}) =$$

$$= \vec{c}\Big([\vec{a}, \vec{b}], \vec{d}\Big) - \vec{d}\Big([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\Big) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \text{ ч. т. д.}$$

б) Рассмотрим внутреннее двойное векторное произведение:

$$\Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \vec{b}\Big]\Big] = \vec{a}(\vec{a}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot 0 - \vec{b} \cdot |\vec{a}|^2 = -|\vec{a}|^2\,\vec{b}$$

(при вычислении мы учли, что $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ из-за ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$).
Продолжим вычисления:

$$\Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, \vec{b}\Big]\Big]\Big]\Big] = \Big[\vec{a}, \Big[\vec{a}, -|\vec{a}|^2\,\vec{b}\Big]\Big] = \Big[\vec{a}, -|\vec{a}|^2\ \Big[\vec{a}, \vec{b}\Big]\Big] =$$

$$= -|\vec{a}|^2 \left[\vec{a}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right] = -|\vec{a}|^2 \cdot \left(-|\vec{a}|^2\right) \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^4 \, \vec{b}, \text{ ч. т. д.}$$

в) Сначала для удобства введём $\vec{x} = [\vec{c}, \vec{d}]$, затем используем свойство 1 смешанного произведения, далее вернёмся к прежним обозначениям и применим формулу (20) для раскрытия двойного векторного произведения:

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{x}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{x}\right]\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right]\right) =$$

$$= \left(\vec{a},\ \vec{c}\,(\vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}\,(\vec{b}, \vec{c})\right) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c}), \text{ ч. т. д. } \blacktriangleright$$

П р и м е р 19. Можно ли найти вектор $\vec{x}$, одновременно удовлетворяющий двум условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = \lambda$ и $[\vec{x}, \vec{b}] = \vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – заданные векторы и λ – заданное число?

◀ Умножив обе части равенства $[\vec{x}, \vec{b}] = \vec{c}$ векторно на $\vec{a}$ с левой стороны, получим:

$$\left[\vec{a}, [\vec{x}, \vec{b}]\right] = [\vec{a}, \vec{c}]; \quad \vec{x}(\vec{a}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}, \vec{x}) = [\vec{a}, \vec{c}].$$

Используя коммутативность скалярного произведения и условие $(\vec{x}, \vec{a}) = \lambda$, получим:

$$(\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}) = \lambda; \quad \vec{x}(\vec{a}, \vec{b}) - \lambda\vec{b} = [\vec{a}, \vec{c}]; \quad \vec{x}(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}].$$

Следовательно, вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий указанным в условии задачи требованиям, можно найти, если $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$, т.е., когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неортогональны. В этом случае

$$\vec{x} = \frac{\lambda\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}]}{(\vec{a}, \vec{b})}. \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 20. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(2, -1, -3)$, $B(1, 2, -4)$, $C(3, -1, -2)$. Найдите координаты вектора $\vec{h}$, коллинеарного высоте AD треугольника, опущенной из

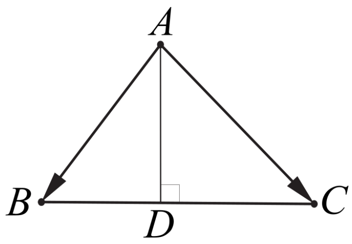

Рис. 14: Рисунок к примеру 20

вершины A на противоположную сторону, при условии, что вектор $\vec{h}$ образует с осью Oy тупой угол и что его модуль равен $2\sqrt{34}$.

◀ 1-й способ. Поскольку вектор $\vec{h}$ коллинеарен высоте AD треугольника ABC, то он лежит в плоскости этого треугольника и может быть разложен по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{h} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. Определим координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,(-1, 3, -1);\ \overrightarrow{AC}\,(1, 0, 1);\ \vec{h}(-\lambda + \mu,\, 3\lambda, -\lambda + \mu).$$

Вектор $\vec{h}$ ортогонален $\overrightarrow{BC}\,(2, -3, 2)$, его модуль $|\vec{h}| = 2\sqrt{34}$, следовательно:

$$\begin{cases} (\vec{h}, \overrightarrow{BC}) = 0, \\ |\vec{h}| = 2\sqrt{34}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-\lambda + \mu) - 3 \cdot 3\lambda + 2(-\lambda + \mu) = 0, \\ (-\lambda + \mu)^2 + 9\lambda^2 + (-\lambda + \mu)^2 = 136. \end{cases}$$

Решая эту систему методом подстановки, получим:

$$\mu = \frac{13}{4}\lambda; \quad \lambda^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{8}{3}.$$

Так как по условию вектор $\vec{h}$ образует с осью Oy тупой угол, то его вторая координата 3λ должна быть меньше нуля, следовательно, $\lambda < 0$. Таким образом:

$$\lambda = -\frac{8}{3}, \quad \mu = -\frac{26}{3}, \quad \vec{h}(-6, -8, -6).$$

2-й способ. Покажем, что эта же задача может быть решена с помощью использования двойного векторного произведения.
Рассмотрим векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, – этот вектор по определению ортогонален плоскости треугольника ABC. Для удобства введём его краткое обозначение: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{x}$.
Далее рассмотрим векторное произведение $[\vec{x}, \overrightarrow{BC}]$, – этот вектор расположен уже в плоскости треугольника ABC и ортогонален вектору $\overrightarrow{BC}$, т.е. параллелен высоте AD.
Таким образом, искомый вектор $\vec{h}$ коллинеарен вектору $[\vec{x}, \overrightarrow{BC}]$, следовательно:

$$\vec{h} = \alpha[\vec{x}, \overrightarrow{BC}] = \alpha[[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{BC}] = \alpha\left(\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})\right).$$

Определим координаты рассматриваемых векторов и выполним указанные действия:

$$\overrightarrow{AB}\,(-1, 3, -1);\ \overrightarrow{AC}\,(1, 0, 1);\ \overrightarrow{BC}\,(2, -3, 2);$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -2 - 9 - 2 = -13; \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 2 + 2 = 4.$$

Таким образом:

$$\vec{h} = \alpha(-13\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}); \quad \vec{h}\,(\alpha(-13+4),\, \alpha(0-12),\, \alpha(-13+4))\,;$$

$$\vec{h}(-9\alpha, -12\alpha, -9\alpha); \quad |\vec{h}| = \sqrt{81\alpha^2 + 144\alpha^2 + 81\alpha^2} = \sqrt{306\alpha^2}.$$

Используя условие $|\vec{h}| = 2\sqrt{34}$, получим:

$$\sqrt{306\alpha^2} = 2\sqrt{34};\ 306\alpha^2 = 136,\ \alpha^2 = \frac{136}{306} = \frac{4 \cdot 34}{9 \cdot 34} = \frac{4}{9},\ \alpha = \pm\frac{2}{3}.$$

Так как вектор $\vec{h}$ образует с осью Oy тупой угол, то его вторая координата $-12\alpha < 0$. Таким образом:

$$\alpha > 0; \quad \alpha = \frac{2}{3}; \quad \vec{h}(-6, -8, -6). \qquad \blacktriangleright$$

Задачи

3.1. Докажите, что $\left[\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\right]=2\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и выясните геометрический смысл этого тождества.

3.2. Упростите выражения:

1) $\left[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{c}\right]+\left[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{b}\right]+\left[\vec{b}-\vec{c}, \vec{a}\right]$;

2) $\left[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}-\vec{a}\right]+\left[\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}\right]$;

3) $\left[\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{\vec{c}}{2}, -\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c}\right]$;

4) $\left[\vec{i}, \vec{j}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j}, \vec{i}+\vec{k}\right]+\left[\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]$;

5) $\left(2\vec{i}, \left[\vec{j}, \vec{k}\right]\right)+\left(3\vec{j}, \left[\vec{i}, \vec{k}\right]\right)+\left(4\vec{k}, \left[\vec{i}, \vec{j}\right]\right)$.

3.3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, вычислите $|[3\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}]|$.

3.4. Известно, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$. Найдите длины векторов:

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$; 2) $\left[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}\right]$; 3) $\left[3\vec{a}-4\vec{b}, 3\vec{a}+4\vec{b}\right]$.

3.5. Докажите тождество: $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|^2+(\vec{a}, \vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

3.6. Известно, что $|\vec{a}|=15$, $|\vec{b}|=8$, $|[\vec{a}, \vec{b}]|=72$. Найдите $(\vec{a}, \vec{b})$.

3.7. Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{a}=[\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b}=[\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c}=[\vec{a}, \vec{b}]$. Найдите длины этих векторов и углы между ними.

3.8. Векторы $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ образуют ортогональный правый базис. Выразите через эти векторы векторные произведения $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}]$, $[\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]$, $[\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}]$.

3.9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите, при каких значениях λ коллинеарны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

1) $\vec{p} = \lambda\vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{p} = 2\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{q} = \lambda\vec{a} + 8\vec{b}$.

3.10. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ и $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3.11. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ и $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45°$.

3.12. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:
1) $\vec{a}(6, -3, 3)$, $\vec{b}(-8, 4, -4)$;
2) $\vec{a}(6, 1, 0)$, $\vec{b}(3, -2, 0)$;
3) $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(5, 2, -4)$.

3.13. Даны векторы $\vec{a}(3, -1, -2)$ и $\vec{b}(1, 2, -1)$. Найдите координаты векторных произведений:
1) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$; 2) $\left[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}\right]$; 3) $\left[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}\right]$.

3.14. Даны векторы $\vec{a}(2, 1, -3)$ и $\vec{b}(1, -1, 1)$. Найдите координаты вектора $\left[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right]$.

3.15. Даны координаты точек A, B, C: $A\,(2, 2, 3)$, $B\,(1, 0, 4)$, $C\,(2, 3, 5)$. Найдите координаты вектора $\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}\right]\right]$.

3.16. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

3.17. Зная, что $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 5\vec{j}$, найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из его вершины C.

3.18. Вычислите синус угла, образованного векторами $\vec{a}(2, -2, 1)$ и $\vec{b}(2, 3, 6)$.

3.19. Вычислите синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

3.20. Найдите координаты вектора $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(2, -3, 1)$, $\vec{b}(1, -2, 3)$ и удовлетворяет условию $(\vec{x},\, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

3.21. Найдите координаты вектора $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(4,-2,-3)$ и $\vec{b}(0,1,3)$, образует с осью Oy тупой угол и имеет длину $|\vec{x}|=26$.

3.22. Векторы $\vec{a}(-1,1,-1)$, $\vec{b}(-1,1,1)$, $\vec{c}(5,-1,-1)$ и $\vec{d}$ отложены из одной точки. Вектор $\vec{d}$ имеет длину 1 и образует с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равные острые углы. Найдите координаты вектора $\vec{d}$.

3.23. Векторы $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$. Найдите $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$.

3.24. Векторы $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ образуют левую тройку, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=30^\circ$, $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$. Найдите $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$.

3.25. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a}(2,-3,2)$, $\vec{b}(3,-1,1)$, $\vec{c}(-4,6,-4)$;

2) $\vec{a}(3,5,1)$, $\vec{b}(4,0,-1)$, $\vec{c}(2,1,1)$;

3) $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(5,-2,1)$, $\vec{c}(2,1,2)$.

3.26. Даны векторы $\vec{a}(1,-1,3)$, $\vec{b}(-2,2,1)$, $\vec{c}(3,-2,5)$. Вычислите $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ и выясните, какова ориентация троек:

1) $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$; 2) $\{\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c}\}$; 3) $\{\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}\}$; 4) $\{\vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b}\}$.

3.27. Докажите, что если $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]=\vec{0}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

3.28. Выясните, компланарны ли данные векторы:

1) $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=14\vec{i}-13\vec{j}+7\vec{k}$;

2) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$.

3.29. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами. Найдите, при каких значениях λ эти векторы будут компланарны:

1) $\vec{a}(\lambda,3,1)$, $\vec{b}(5,-1,2)$, $\vec{c}(-1,5,4)$;

2) $\vec{a}(1,2\lambda,1)$, $\vec{b}(1,\lambda,0)$, $\vec{c}(0,\lambda,1)$.

3.30. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны. При каких значениях λ компланарны векторы $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}$, $\vec{q}=4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}$, $\vec{r}=7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$?

3.31. Докажите, что четыре точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$

и $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

3.32. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, если $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.

3.33. Точки $A(2,1,-1)$, $B(3,0,2)$, $C(5,1,1)$, $D(0,-1,3)$ являются вершинами тетраэдра. Найдите:
1) объём тетраэдра; 2) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины C.

3.34. Известны координаты вершин пирамиды $OABC$: $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$ и $C(1,2,4)$. Найдите:
1) объём пирамиды; 2) площадь грани ABC; 3) высоту пирамиды, опущенную на грань ABC.

3.35. Объём тетраэдра $ABCD$ равен 5, координаты трёх его вершин даны: $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найдите координаты его четвёртой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

3.36. Вычислите объём параллелепипеда, построенного на заданных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
1) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, $|\vec{m}| = \dfrac{1}{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 135^\circ$.
2) Векторы $\vec{a}(2,3,1)$, $\vec{b}(-1,4,0)$, $\vec{c}(1,2,1)$ заданы своими координатами в базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$; $|\vec{e_1}| = 1$, $|\vec{e_2}| = 2$, $|\vec{e_3}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{e_1},\vec{e_2}}) = 120^\circ$, $(\widehat{\vec{e_1},\vec{e_3}}) = 45^\circ$, $(\widehat{\vec{e_2},\vec{e_3}}) = 135^\circ$.

3.37. Докажите тождества:
1) $\left(\left[\vec{a}+\vec{b},\, \vec{a}+\vec{c}\right], \vec{b}\right) = -(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})$;
2) $(\vec{a}+\vec{b},\, \vec{b}+\vec{c},\, \vec{c}+\vec{a}) = 2(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})$;
3) $\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c},\, \left[\vec{a}-\vec{b},\, \vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right]\right) = 3(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})$.

3.38. Докажите, что векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны при любых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

3.39. Докажите тождества:
1) $(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})^2 + |[[\vec{a},\, \vec{b}], \vec{c}]|^2 = |[\vec{a},\, \vec{b}]|^2 \cdot |\vec{c}|^2$;

2) $\Big([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]\Big)=(\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{d})-(\vec{a},\vec{d})(\vec{b},\vec{c})$;

3) $\Big[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]\Big]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$;

4) $\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a},\vec{d})+\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$;

5) $\Big[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]\Big]=(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})^2$.

3.40. Докажите, что:

1) если векторы $[\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]$ компланарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ тоже компланарны;

1) если векторы $[\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

3.2. 1) $2[\vec{a},\vec{c}]$; 2) $[\vec{a},\vec{c}]$; 3) $[\vec{a},\vec{b}]+4[\vec{b},\vec{c}]+\frac{9}{2}[\vec{c},\vec{a}]$; 4) $2(\vec{k}-\vec{i})$; 5) 3. **3.3**. 60. **3.4**. 1) $5\sqrt{3}$; 2) $25\sqrt{3}$; 3) $120\sqrt{3}$. **3.6**. ± 96. **3.7**. Длины векторов $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$; векторы попарно перпендикулярны; тройка $\left\{\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\right\}$ – правая. **3.8**. $[\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}]=\dfrac{|\overrightarrow{e_1}|\cdot|\overrightarrow{e_2}|}{|\overrightarrow{e_3}|}\cdot\overrightarrow{e_3}$; $[\overrightarrow{e_2},\,\overrightarrow{e_3}]=\dfrac{|\overrightarrow{e_2}|\cdot|\overrightarrow{e_3}|}{|\overrightarrow{e_1}|}\cdot\overrightarrow{e_1}$; $[\overrightarrow{e_3},\,\overrightarrow{e_1}]=\dfrac{|\overrightarrow{e_3}|\cdot|\overrightarrow{e_1}|}{|\overrightarrow{e_2}|}\cdot\overrightarrow{e_2}$. **3.9**. 1) -15; 2) ± 4. **3.10**. $37{,}5$. **3.11**. $50\sqrt{2}$. **3.12**. 1) $(0,0,0)$; 2) $(0,0,-15)$; 3) $(-2,23,9)$. **3.13**. 1) $(5,1,7)$; 2) $(10,2,14)$; 3) $(20,4,28)$. **3.14**. $(-20,7,-11)$. **3.15**. $(5,16,7)$. **3.16**. 14. **3.17**. $3{,}8$. **3.18**. $\frac{5\sqrt{17}}{21}$. **3.19**. $\sqrt{\frac{248}{273}}$. **3.20**. $(7,5,1)$. **3.21**. $(-6,-24,8)$. **3.22**. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$. **3.23**. 24. **3.24**. $-1{,}5$. **3.25**. 1) 0; 2) -23; 3) 6. **3.26**. $(\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c})=-7$; 1) левая; 2) правая; 3) правая; 4) левая. **3.28**. 1) Да; 2) нет. **3.29**. 1) -3, 2) при любом λ. **3.30**. -4; 3. **3.32**. 18. **3.33**. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{30}}$. **3.34**. 1) 14; 2) $6\sqrt{3}$; 3) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. **3.35**. $(0,8,0)$ или $(0,-7,0)$. **3.36**. 1) 0; 2) $5\sqrt{2}$.

Список литературы

[1] Кайгородов В. Р. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*: учебное пособие / Казань: Издательство Казанского университета, 1985. – 241 с.

[2] Беклемишев Д. В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*: Учебник. – 16-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2019. – 448 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

[3] Беклемишева Л. А. и др. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*: учебное пособие: 7-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2019 – 496с.

[4] *Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 1*: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 288с.

[5] *Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии*: [Учеб. пособие для мат. и физ. спец. ун-тов и пед. ин-тов] /Под ред. А. С. Феденко. – Минск: Университетское, 1989 – 286с.

Содержание

Татьяна Владимировна Кропотова,
Вениамин Григорьевич Подольский,
Павел Евгеньевич Кашаргин

**Векторная алгебра.
Решение задач**