

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра оптики и нанофотоники

ЗАГАДКА РАДИУСА ПРОТОНА

Казань - 2022

УДК 539.18
ББК 22.38

*Принято на заседании учебно-методической комиссии Института физики КФУ
Протокол № 7 от 11 апреля 2022 года*

Рецензент:

доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент АНРТ **Л.Р. Тагиров**

Гайнутдинов Р.Х.

Загадка радиуса протона / Р. Х. Гайнутдинов, Л. Я. Набиева, А. А. Мутыгуллина, М. А. Хамадеев. – Казань: Казан. ун-т, 2022. – 26 с.

Рассматривается так называемая «загадка радиуса протона». Эта загадка связана с тем, что прецизионные эксперименты определения радиуса протона в обычном водороде и мюонном водороде обнаружили расхождение на 4%. С точки зрения квантовой электродинамики, которая на протяжении пятидесяти лет являлась локомотивом не только физики, но и науки в целом, такое расхождение указывало на возможную брешь в современной физике. Для решения проблемы было проведено большое количество экспериментов и показано, что правильным результатом является значение радиуса протона, полученное из спектроскопии мюонного водорода. С другой стороны, более поздние и более точные эксперименты, связанные с определением радиуса протона в атоме водорода, продемонстрировали совпадения с радиусом протона в мюонном водороде. В данных экспериментах в отличие от первых экспериментов теоретические значения лэмбовского сдвига не использовались. Важно то, что лэмбовский сдвиг, который напрямую определял значение радиуса протона, также совпадал с экспериментальными значениями в мюонном водороде. Однако величина лэмбовского сдвига не совпадала с его значением, определяемым квантовой электродинамикой. Данное пособие будет полезным для студентов при изучении дисциплины Б1.О.02.01. «Проблемы и развитие квантовой физики» основной образовательной программы 03.04.02 «Физика (Теоретическая физика и моделирование физических процессов)» и 03.04.02 «Физика (Физика перспективных материалов)», дисциплины Б1.О.17. «Атомная физика» основной профессиональной образовательной программы 03.03.02 «Физика (Физика квантовых систем и квантовые технологии)» и 03.03.02 «Физика (Физика живых систем)», а также дисциплины Б1.В.ДВ.02.01. «Физика. Дополнительные главы» основной профессиональной образовательной программы 09.03.04 «Программная инженерия (Технологии разработки информационных систем)».

© Гайнутдинов Р.Х., 2022

© Казанский университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
1. ТРИ РЕВОЛЮЦИИ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ.....	4
2. ПРЕЦИЗИОННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАДИУСА ПРОТОНА.....	7
3. РОЛЬ ЛЭМБОВСКОГО СДВИГА В ПОИСКАХ РЕШЕНИЯ ЗАГАДКИ РАДИУСА ПРОТОНА.....	15
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	24
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	25

1. ТРИ РЕВОЛЮЦИИ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Самая простая атомная система – атом водорода – на протяжении многих лет демонстрирует свою неисчерпаемость, подбрасывая все новые загадки. Первой загадкой было наблюдение простой серии дискретных спектральных линий вместо сплошного спектра, получившее название серии Бальмера. Попытки объяснить эти линейчатые спектры излучения атома водорода привели к созданию квантовой механики. Более точное измерение линий серии Бальмера продемонстрировало расщепление спектральных линий с главным квантовым числом n . Это расщепление, получившее название тонкое расщепление, не противоречило базовым концепциям квантовой механики. Просто надо было учесть релятивистские поправки к энергиям уровней, которые определялись уравнением Дирака. Это уравнение считалось незыблемым при описании энергетических уровней атомов. При этом согласно квантовой механике энергетические уровни ${}^2S_{1/2}$ и ${}^2P_{1/2}$ должны были совпадать, поскольку не было известно никаких физических механизмов, которые могли бы раздвинуть эти уровни. Однако на конференции, проходившей в 1947 г. на острове Шелтер, Лэмб продемонстрировал сдвиг между линиями ${}^2S_{1/2}$ и ${}^2P_{1/2}$. Этот сдвиг был в десять раз меньше, чем тонкое расщепление, составлял порядка 1000 МГц. Открытие лэмбовского сдвига вызвало огромный интерес среди физиков и впоследствии послужило началом второй квантовой революции. Важной особенностью было открытие процессов рождения и уничтожения частиц. За важнейший вклад в развитие квантовой электродинамики Фейнман, Томонага и Швингер были удостоены Нобелевской премии по физике.

На рубеже столетий развитие новых технологий позволило добиться огромного прогресса в области создания квантовых компьютеров и квантовой коммуникации. По существу, это можно рассматривать как третью квантовую революцию. В частности, группой под руководством Хэнша были развиты сверхточные методы определения частот переходов между энергетическими уровнями

атома водорода с беспрецедентной точностью порядка 10^{-12} . Эти исследования мотивировались проверкой гипотезы о возможном изменении со временем фундаментальных физических констант. Кроме того, такие точные методы позволили с большой точностью определять радиус протона. При определении радиуса протона использовались значения частот переходов, а также теоретические значения лэмбовского сдвига. Считалось, что теоретические значения лэмбовского сдвига являются на несколько порядков более точными, чем если бы они определялись экспериментально.

В середине 2000 годов две группы физиков из Института Квантовой Оптики Макса Планка, Германия, и Института Физики Частиц и Астрофизики Швейцарской Высшей Технической Школы Цюриха поставили эксперимент по измерению радиуса протона, используя атомы мюонного водорода. С одной стороны, эти эксперименты были более сложными, поскольку необходимо было с помощью ускорителя замещать электроны водорода на мюоны, которые примерно в 200 раз тяжелее, чем электрон в атоме водорода и, соответственно, примерно в 200 раз борковский радиус в мюонном водороде меньше, чем в обычном атоме водорода. Как следствие эффект конечного размера протона на мюон намного больше, чем на электрон. Соответственно, точность измерений радиуса протона в мюонном водороде должна быть больше на два порядка.

Эксперименты по определению радиуса протона в мюонном водороде были доложены в июне 2010 года на конференции в Лез-Уш, Франция, и действительно, определение радиуса протона в мюонном водороде оказалось на два порядка более точным по сравнению с измерениями радиуса протона в атоме водорода. Однако оказалось, что радиус протона в мюонном водороде примерно на 4 % меньше, чем в атоме водорода. Это означало бы нарушение Стандартной Модели, согласно которой электроны и мюоны отличаются только массами.

Решение загадки радиуса протона до сих пор не найдено несмотря на огромные усилия экспериментаторов и теоретиков. Однако, как характерно для научных революций, удалось разработать целый ряд новых подходов к решению

этой проблемы. Как часто бывает, даже если важная проблема в области квантовой физики не решена, то при ее решении рождаются совершенно новые идеи, которые составляют сущность квантовых революций. Удивительно, что периодичность квантовых революций составляет примерно 62 года (рис. 1).

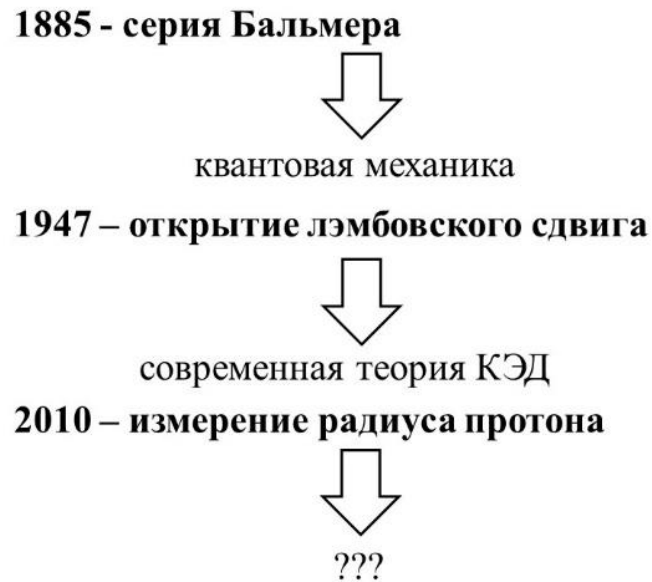


Рис. 1. Три квантовые революции

2. ПРЕЦИЗИОННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАДИУСА ПРОТОНА

Для определения радиуса протона использовались различные методы. Хэнш и его сотрудники разработали новый подход к сверхточному измерению частот переходов в атомах [1]. За этот результат Хэншу была присуждена Нобелевская премия. Опираясь на возможность определения с такой прецизионной точностью частот перехода, группе под руководством Хэнша удалось определить с большой точностью значение константы Ридберга и частот переходов в атоме водорода. Частота перехода в атоме водорода складывается из трех компонент (рис. 2). В нерелятивистском приближении решение уравнения Дирака имеет вид

$$E_{nj} = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right], \quad (1)$$

где постоянная тонкой структуры, являющаяся фундаментальной константой физики,

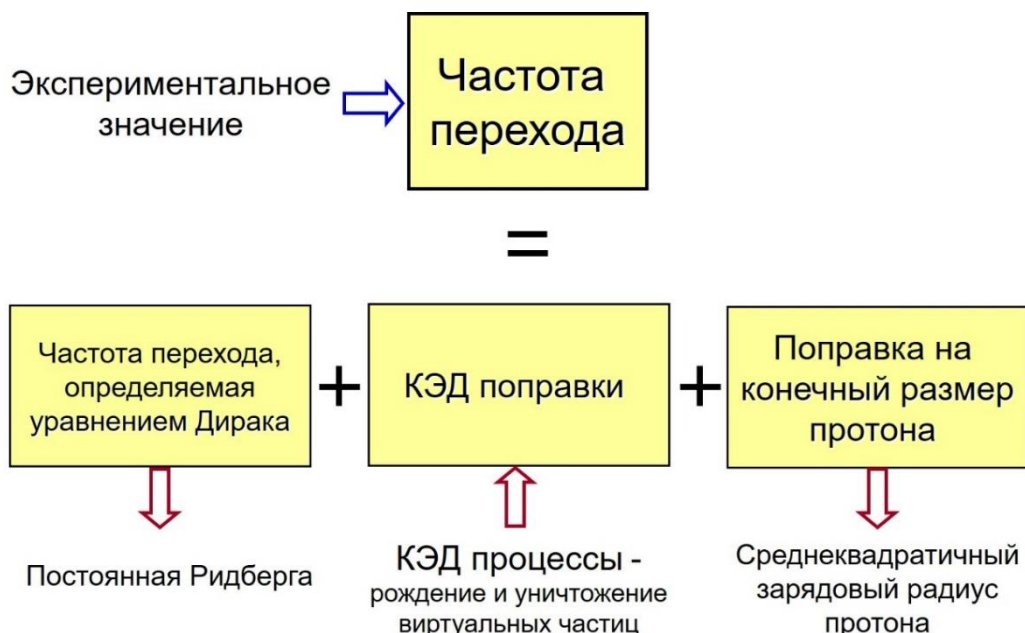


Рис. 2. Вклады в экспериментальное значение частоты перехода при спектроскопии атома водорода

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (2)$$

Исходя из уравнения Дирака для точечного ядра, частоты энергетического уровня определяется выражением

$$\nu = -\frac{Rc}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) + O(\alpha^4) \right], \quad (3)$$

где постоянная Ридберга, которая определяется из сопоставления теоретических и экспериментальных частот переходов, имеет вид

$$R = \frac{(Z\alpha)^2 m_e c}{2h}. \quad (4)$$

Дело в том, что в процессе измерений радиуса протона важнейшую роль играет лэмбовский сдвиг состояний $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$. Из-за большой ширины переходов приходилось использовать квантово-электродинамические расчеты, которые, как ожидалось, могли обеспечить точность до 15-го знака после запятой.

Поскольку атомное ядро не является точечным, уравнение Дирака имеет вид

$$[\boldsymbol{\alpha p} + \beta m_r + V(r)]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Поправка к частоте

$$\nu_{FS} = \frac{2}{3} \frac{(Z\alpha)^2}{n^3} \frac{(2\pi Z\alpha)^2}{\lambda_c^2 h} m_r^3 r_{rms}^2. \quad (6)$$

Экспериментально определяется среднеквадратичный зарядовый радиус протона

$$r_{rms} = \sqrt{\langle r_p^2 \rangle}, \quad (7)$$

$$\langle r_p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(\mathbf{x}) x^2. \quad (8)$$

где $\rho(\mathbf{x})$ - плотность вероятности нахождения частицы в точке с вектором \mathbf{x} .

Считалось, что эти результаты достаточно точные, поэтому каких-то дополнительных поправок к энергиям существующая на данный момент теория не предсказывала.

Альтернативой методам спектроскопии атома водорода [1-4] (рис. 3) и упругого электрон-протонного рассеяния в период с 2001 по 2010 гг. стала спектроскопия мюонного водорода [5,6]. В данных экспериментах по измерению радиуса протона электроны в атомах водорода с использованием ускорителей заменялись на мюоны. В силу того, что мюоны по принципу лептонной универсальности в Стандартной Модели примерно в 200 раз тяжелее электрона, борковский радиус в мюонном водороде в 200 раз меньше, чем в обычном атоме водорода, другими словами, мюон располагается в непосредственной близости к протону ядра водорода (рис. 4). Данная особенность обеспечила большую чувствительность спектра мюонного водорода к атомному ядру и позволила экспериментам на мюонном водороде на два порядка более точно определить радиус протона (рис. 5):

$$\Delta E = E(2p_{3/2}^{F=2}) - E(2s_{1/2}^{F=1}), \quad (9)$$

$$\Delta E^{th} = 206.0336(15)[\text{мэВ}] - 5.2275(10) \left[\frac{\text{мэВ}}{\text{фм}^2} \right] r_p^2, \quad (10)$$

$$r_{\text{rms}} = 0.84184(67) \text{ фм}. \quad (11)$$

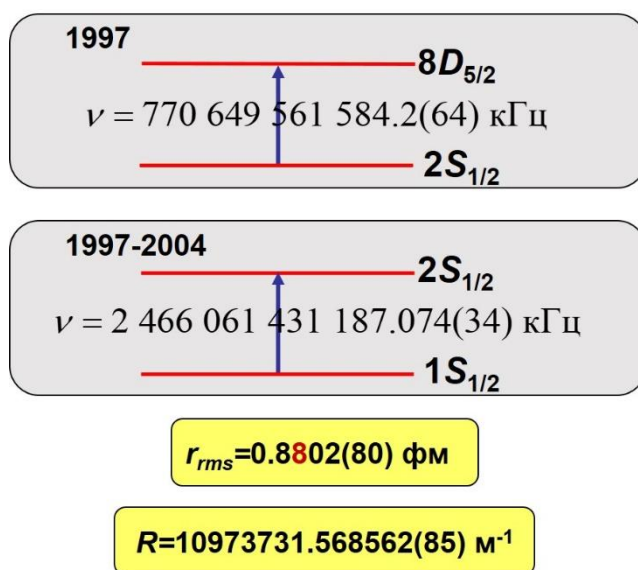


Рис. 3. Результаты спектроскопии атома водорода (1 фм = 10^{-15} м)

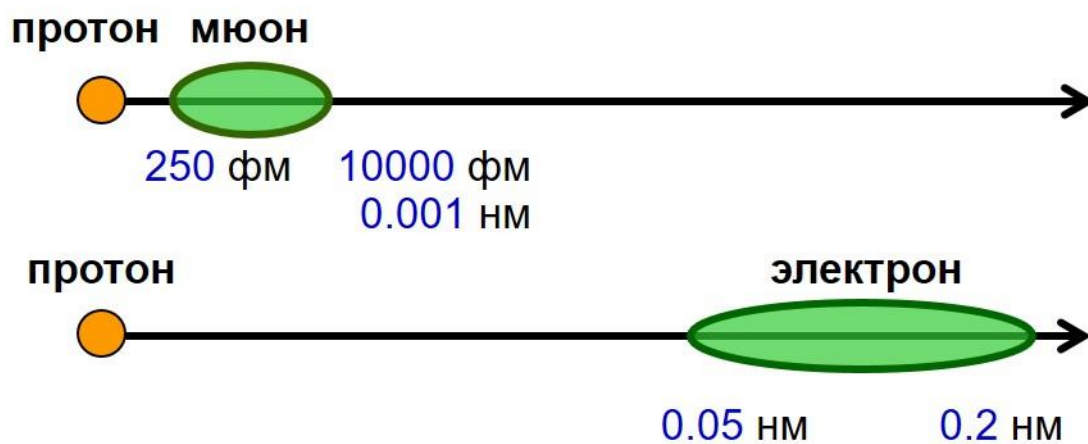


Рис. 4. Атом водорода и мюонный водород μH

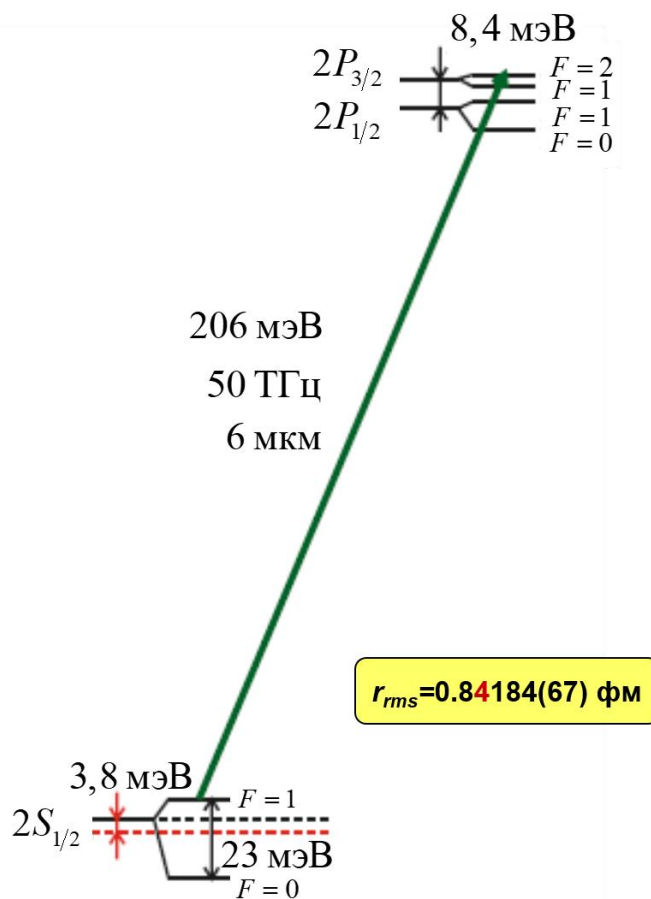


Рис. 5. Схема уровней энергии для спектроскопии мюонного водорода [5]

Оказалось, что различие между результатами экспериментов по спектроскопии атома водорода и мюонного водорода составило 4% (рис. 6). Это привело к целой революции в этой области, и возникали жаркие споры. Таким образом,

расхождение на 4% по величине среднеквадратичного зарядового радиуса протона между экспериментами спектроскопии обычного водорода и мюонного водорода в начале прошлого десятилетия ознаменовало загадку радиуса протона. Исходя из расчётов, для устранения данного расхождения к текущим значениям, полученным в ходе экспериментов, нужно было внести поправки. В атоме водорода к частоте 1S уровня необходимо было внести поправку, составляющую порядка 100 кГц. Однако квантовая электродинамика связанных состояний не могла обеспечить данные поправки. Её погрешность определялась лишь значением частоты около 4 кГц. С другой стороны, можно было уточнить значение из спектроскопии мюонного водорода, добавив к частоте перехода 2S-2P величину порядка 75 ГГц. Но и здесь теория квантовой электродинамики связанных состояний не могла обеспечить столь большие по величине поправки.

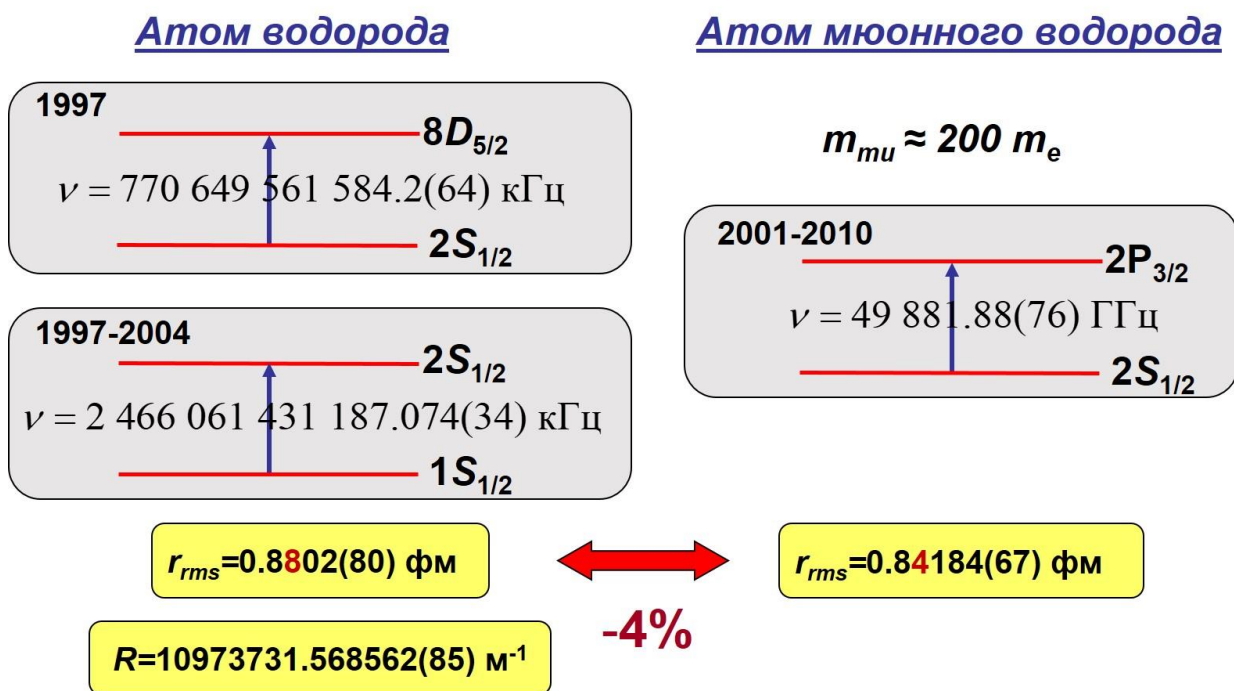


Рис. 6. Сравнение экспериментов на атоме водорода и мюонном водороде

В настоящее время благодаря усилиям многих экспериментаторов удалось обойтись без использования квантово-электродинамических расчетов лэмбовского сдвига. Ученые пришли к выводу о том, что верное значение радиуса протона дается на мюонном водороде (рис. 7,8) [7,8].

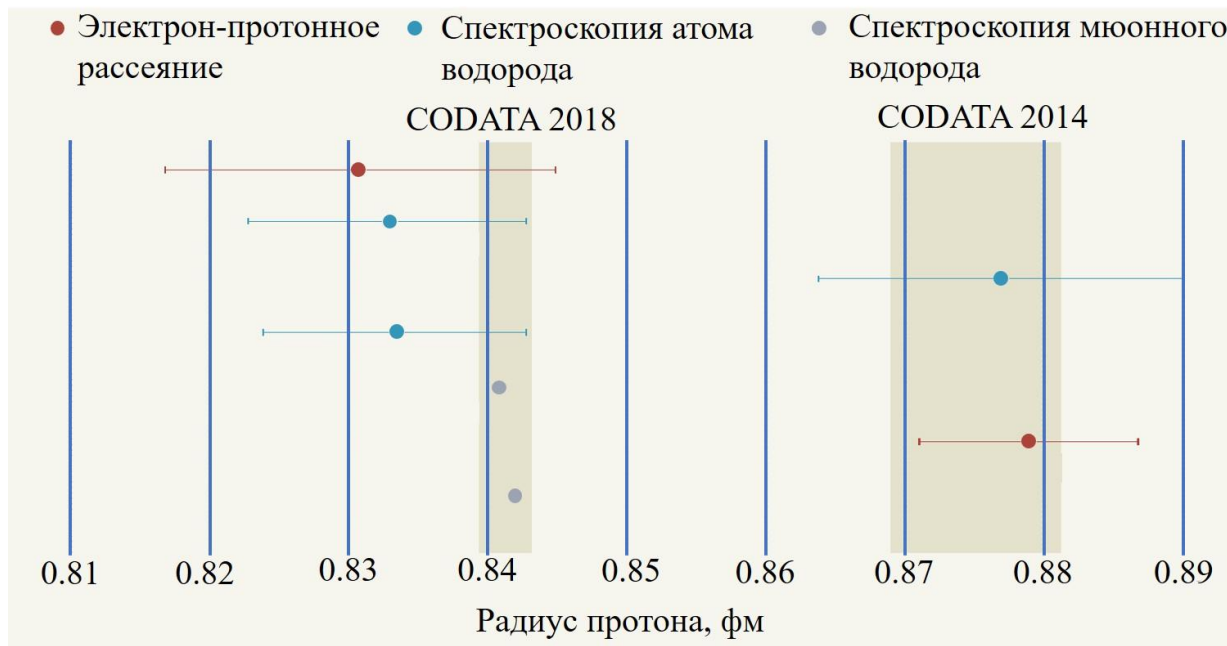


Рис. 7. Значения радиуса протона, включая погрешности [9]. Данные были получены с использованием трех различных методов измерения: электрон-протонного рассеяния [10,11], спектроскопии обычного водорода [12-14] и спектроскопии мюонного водорода [5,15]. Полосы здесь и далее обозначают значения, принятые Комитетом по данным для науки и технологий (CODATA) в 2014 г. и в 2018 г

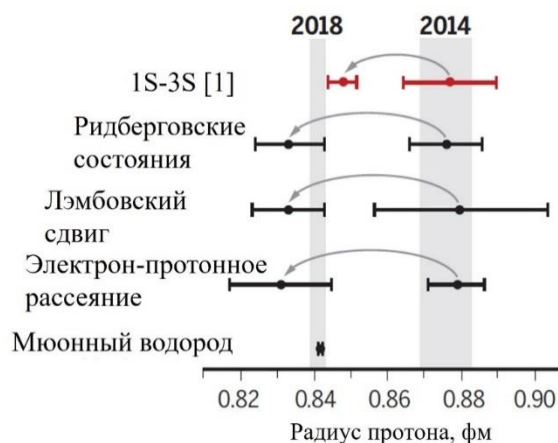


Рис. 8. Историческая поправка [16]. Справа показана последовательная картина размера протона в 2010 г. до измерения мюонного водорода. В левой части отображается текущая непротиворечивая картина, а стрелки указывают историческую коррекцию

И более того, эксперимент по лэмбовскому сдвигу (рис. 9,10) позволяет независимо определить радиус протона [12], который подтверждает значение, полученное в работах [5,15].

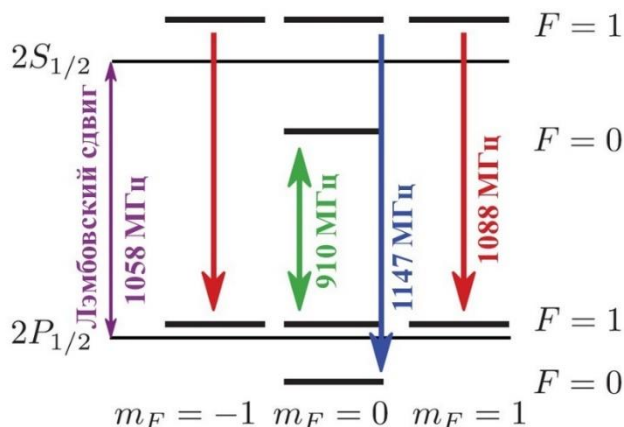


Рис. 9. Схема переходов между энергетическими уровнями в атоме водорода [12]. На рисунке представлены энергетические уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, соответствующие лэмбовскому сдвигу, а также сверхтонкие состояния $|Fm_F\rangle$ атомарного водорода. Зеленая стрелка указывает на переход, измеренный в работе [12]; переходы, отмеченные красной и синей стрелками, используются для удаления заселенностей из состояний $2S_{1/2}$ ($F = 1$). Здесь F и m_F – полный угловой момент и его проекция на направление радиочастотных полей

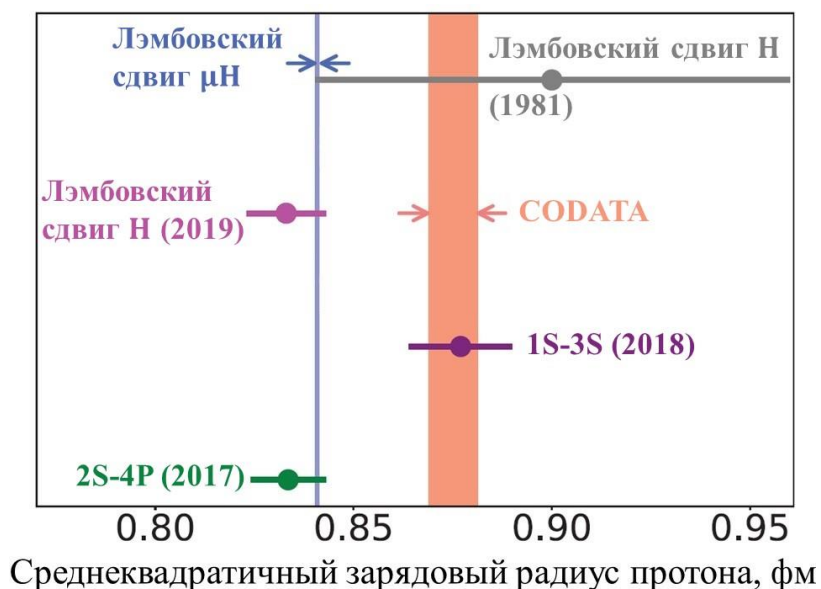


Рис. 10. Обзор данных о радиусе протона. Показаны значения среднеквадратичного зарядового радиуса протона при измерении лэмбовского сдвига в атоме водорода [12], в мюонном водороде, CODATA (Комитет по данным для науки и техники) 2014 и измерений 2S-4P перехода [14] и 1S-3S перехода [13] в сочетании с данными для 1S-2S перехода [17]. Также серым цветом показано значение по лэмбовскому сдвигу в атоме водорода [18]

3. РОЛЬ ЛЭМБОВСКОГО СДВИГА В ПОИСКАХ РЕШЕНИЯ ЗАГАДКИ РАДИУСА ПРОТОНА

При определении радиуса протона важную роль играл лэмбовский сдвиг. По предсказаниям квантовой электродинамики результат считался точным до 15-го знака после запятой. Существенным было то, что во всех лабораториях определение лэмбовского сдвига совпадало до 15 знака, то есть у всех были приблизительно одинаковые результаты. Однако дело в том, что все эти вычисления проводились по одним и тем же формулам. Это означает, что проблема, связанная с лэмбовским сдвигом в атоме водорода, осталась неразрешенной.

В пределе легких атомов решение уравнения Дирака упрощается до

$$E_n = -\frac{m\alpha^2 Z^2}{2n^2} + O(\alpha^4), \quad (12)$$

где первое слагаемое совпадает с решением уравнения Шредингера. Для легких атомов величина поправки составляет $\sim 10^{-4}$. Учет спин-орбитального взаимодействия снимает вырождение по j (рис. 10). Энергия начинает зависеть от j . Число возможных значений $(j = 1/2, \dots, n - 1/2)$ равно n . При этом, как следует из уравнения Дирака, пары состояний $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, $3S_{1/2}$ и $3P_{1/2}$, $3P_{3/2}$ и $3D_{1/2}$ и т.д. имеют одну и ту же энергию

$$\Delta E_{nj}^{(T)} \equiv E_{n,j+1} - E_{n,j} = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{\alpha^2 Z^4}{n^3} \frac{1}{(j+1/2)(j+3/2)} + O(\alpha^4). \quad (13)$$

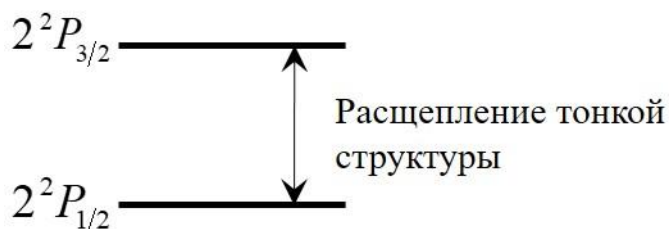


Рис. 10. Тонкая структура энергетических уровней в атоме водорода

Однако в 1947 г. Лэмб и Ризерфорд показали, что состояние $2S_{1/2}$ сдвинуто вверх по сравнению с $2P_{1/2}$. Идея опыта заключалась в том, что атом водорода в метастабильном состоянии $2S_{1/2}$ с временем жизни $\tau = 1/8$ с в результате взаимодействия с магнитным полем (рис. 11) переходил в нестабильное состояние $2P_{1/2}$ с временем жизни $\tau \approx 10^{-10}$ с. При изменении магнитного поля при определенном значении частоты происходило спонтанное излучение на частоте $\hbar\omega$ в состояние $1S_{1/2}$ (рис. 12).

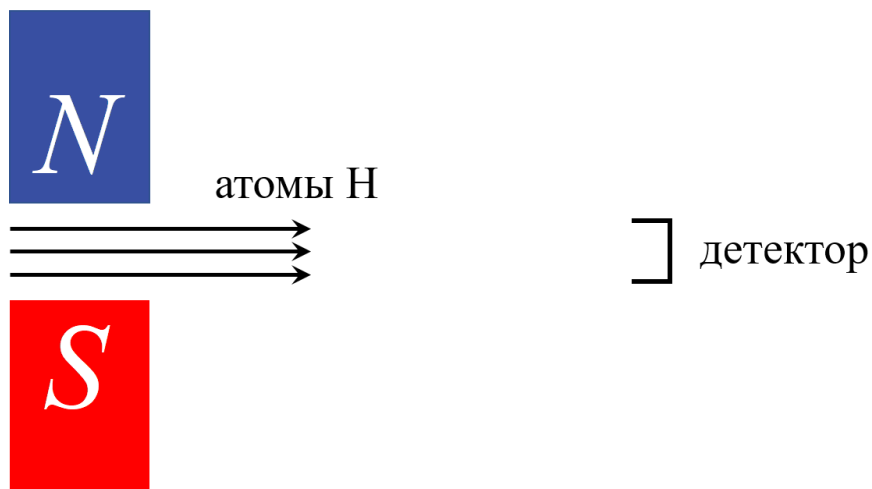


Рис. 11. Схема опыта Лэмба-Ризерфорда по определению сдвига между энергетическими уровнями $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ в атоме водорода

В результате эксперимента было получена частота перехода $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$

$$\nu_L = 1052.19 \text{ МГц},$$

а разность энергии, то есть поправка за счет лэмбовского сдвига,

$$\Delta E^{(L)} = h\nu_L = 4,35 * 10^{-6} \text{ эВ}.$$

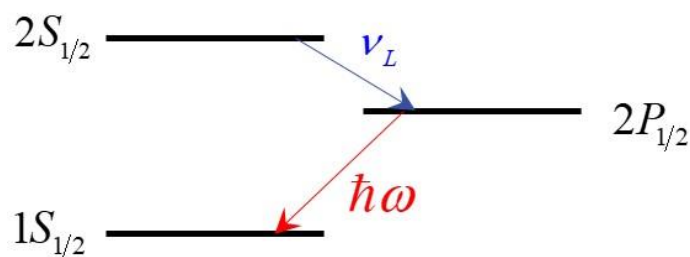


Рис. 12. Лэмбовский сдвиг между уровнями $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$

Полученное значение лэмбовского сдвига составляло порядка десятой доли от расщепления тонкой структуры

$$\frac{\Delta E_{n,1/2}^{(L)}}{\Delta E_{n,1/2}^{(T)}} \approx 0.09.$$

Уже в том же 1947 году Бете удалось получить довольно хорошую оценку лэмбовского сдвига (1040 МГц) [19].

Лэмбовский сдвиг в атоме водорода обусловлен процессами рождения и уничтожения фотонов, излучаемых электроном. В современной квантовой электродинамике процессы, связанные с рождением и уничтожением частиц, описываются диаграммами Фейнмана. Эти диаграммы позволяют описывать реально существующие процессы. При взаимодействии с собственным полем излучения (рис. 13) согласно принципу неопределенности $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ время жизни виртуального фотона, который излучается и поглощается электроном, определяется как

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}. \quad (14)$$

Квантовая электродинамика определяет только физическую (наблюдаемую) массу m_{ph} , которая в общем смысле с учетом взаимодействия с собственным полем излучения может быть представлена как сумма голой m_0 и электромагнитной m_{em} масс

$$m_0 \rightarrow m_{ph} = m_0 + m_{em}. \quad (15)$$

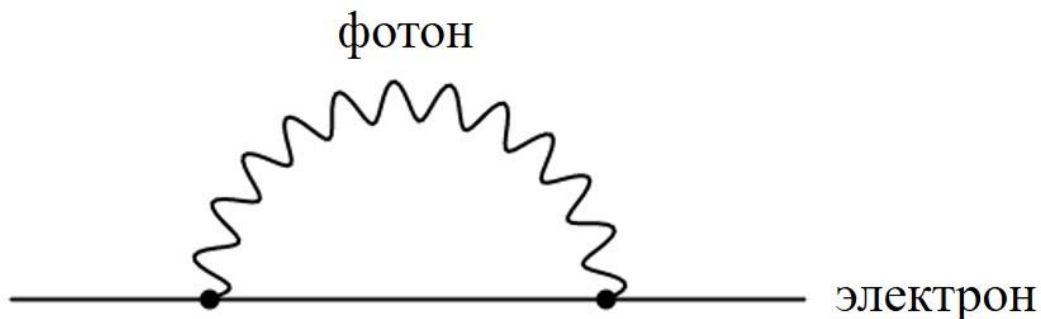


Рис. 13. Фейнмановская диаграмма, описывающая взаимодействие электрона с собственным полем излучения

По своей сути лэмбовский сдвиг есть ни что иное, как квантово-электро-динамическая поправка к кулоновскому взаимодействию (рис. 14).

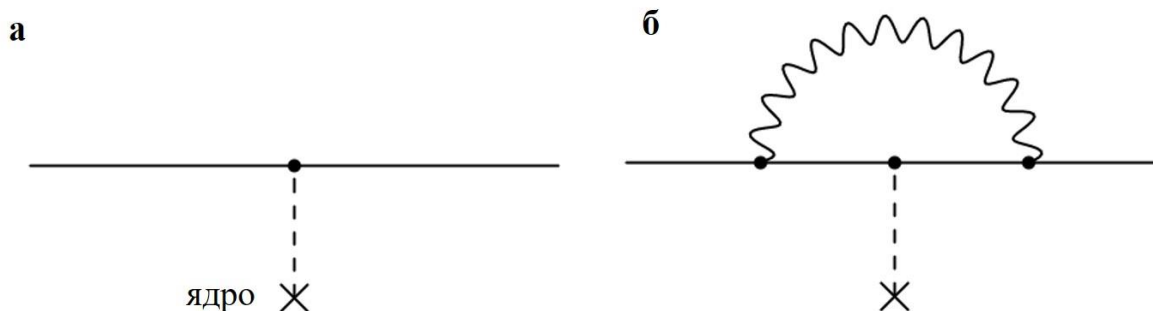


Рис. 14. Фейнмановская диаграмма, описывающая кулоновское взаимодействие электрона с ядром и поправку от лэмбовского сдвига

Лэмбовский сдвиг в атоме водорода обусловлен процессами рождения и уничтожения фотонов, излучаемых электроном или мюоном. Вклад в лэмбовский сдвиг дают процессы, описываемые диаграммами Фейнмана (рис. 15 и 16). Поправки к вершине в лидирующем порядке $\delta\Lambda_\mu^c(p', p, k_{\min})$ (рис. 15) определяются выражением

$$\delta\Lambda_\mu^c(p', p, k_{\min}) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2} \gamma_\mu \left(\ln \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right) \right], \quad (16)$$

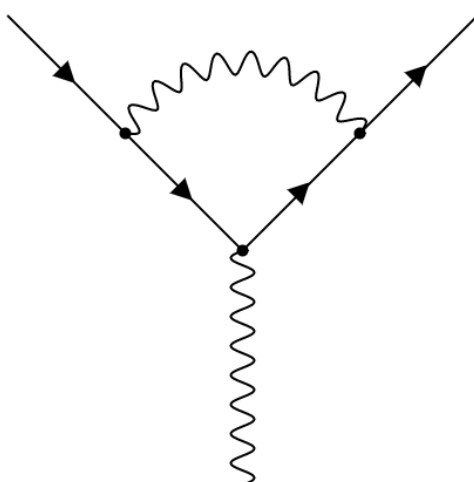


Рис. 15. Диаграмма Фейнмана, иллюстрирующая поправку к вершине в лидирующем порядке

а вклад от эффектов поляризации вакуума (рис. 16)

$$ie_R^2 \frac{\tilde{u} \gamma_0 u}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha_R}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + \mathcal{O}(\alpha_R^2) \right]. \quad (17)$$

Здесь q – импульс фотона, определяемый разностью импульсов электрона p' и физического позитрона p , q^ν – 4-импульс фотона, γ_μ – матрица размерности 4×4 , которая имеет вид $\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}$, где σ_μ – известные матрицы Паули размерности 2×2 , а $\sigma_{\mu\nu}$ – четырехмерное обобщение матриц Паули, k_{\min} – параметр обрезания по энергии, m – масса, u – дираковский спинор и \tilde{u} – сопряженный ему спинор, γ_0 – скаляр, e_R – перенормированный заряд и α_R – перенормированная постоянная тонкой структуры. Эти процессы можно рассматривать как дополнительный «эффективный» потенциал, который действует между электроном и квантовым электромагнитным полем $A^\mu(q)$

$$\tilde{u}(p') \left\{ \gamma_m \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{i\alpha}{4\pi m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right\} u(p) \times eA^\mu(q). \quad (18)$$

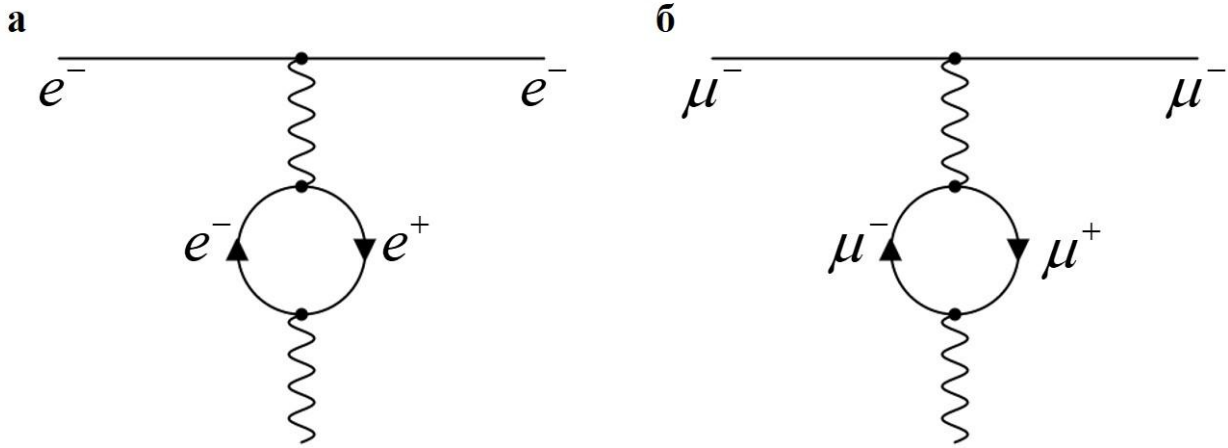


Рис. 16. Диаграмма Фейнмана, иллюстрирующая поляризацию вакуума в случае электрона (а) и мюона (б). В случае мюонного водорода в лэмбовский сдвиг основной вклад дают процессы поляризации вакуума

Данное выражение содержит поправку первого порядка по α к взаимодействию электрона с квантовым электромагнитным полем, $\tilde{y}(p')\gamma_\mu u(p)$, которая обусловлена взаимодействием с фотонами, чей импульс больше, чем k_{\min} , и справедливо для случая $|q^2/m^2| \ll 1$, то есть когда величина переданного импульса $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$ мала. В нерелятивистском приближении кулоновское взаимодействие электрона с полем ядра атома водорода описывается потенциалом $A^\mu(q) = -(e^2/|\mathbf{q}^2|, 0)$, в котором взаимодействие полагается мгновенным во времени, то есть временная компонента 4-вектора равна 0. Выражение (18) в нерелятивистском приближении принимает вид

$$-u^\dagger(p') \left\{ \frac{e^2}{|\mathbf{q}^2|} \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \frac{|\mathbf{q}|^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{\alpha}{4\pi m} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} \right\} u(p). \quad (19)$$

Здесь первый член не зависит от спина и является фурье-преобразованием эффективного потенциала, имеющего вид

$$-\frac{\alpha}{r} + \frac{4\alpha}{3} \frac{\alpha}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \delta^3(r). \quad (20)$$

Взаимодействие, описываемое потенциалом (20), в водородоподобных атомах приводит к сдвигу уровней энергии, обусловленному фотонами с моментами больше, чем k_{\min} . Выражение для сдвига энергетических уровней в первом порядке теории возмущений с потенциалом (20) имеет вид

$$\Delta E_n^> = \frac{4\alpha}{3} \frac{\alpha}{m^2} |\psi_{nlm}(0)|^2 \left(\ln \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right). \quad (21)$$

Однако также необходимо учитывать поправку при взаимодействии с мягкими фотонами, чей импульс меньше, чем k_{\min} .

Параметр обрезания должен быть порядка $k_{\min} \lesssim \alpha m$ для длин волн фотонов, превышающих размеры атома. Действительно, k_{\min} не может быть сколь угодно малым, поскольку пропагатор электрона в атоме имеет вид

$$p^\mu \sim (m + V, \mathbf{p}),$$

где

$$V \sim \alpha^2 m, \quad \text{и} \quad |\mathbf{p}| \sim \alpha m.$$

Здесь мы также предполагаем, что

$$k \cdot p \approx k_{\min} m \gg p^2 - m^2 \sim \alpha^2 m^2.$$

В случае, когда мы имеем дело с фотонами с импульсом меньше чем k_{\min} , релятивистскими поправками можно пренебрегать и проводить расчеты в нерелятивистском приближении. Во втором порядке теории возмущений сдвиг энергии обусловлен тем, что электрон в состоянии $|n\rangle$ испускает и вновь поглощает фотон, равен

$$\Delta E_n^< = e^2 \int_0^{k_{\min}} \frac{d^2 k}{2k(2\pi)^3} \sum_{m,\varepsilon} \frac{\langle n | \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | m \rangle \langle m | \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | n \rangle}{E_n - k - E_m}. \quad (22)$$

Здесь суммирование проводится по поперечным поляризациям фотона и по всем электронным состояниям. Интегрируя по k , мы получаем

$$\Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi} \left[-k_{\min} \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle + \sum_m \frac{E_m - E_n}{m^2} \ln \frac{|E_m - E_n + k_{\min}|}{|E_m - E_n|} |\langle n | \mathbf{p} | m \rangle|^2 \right], \quad (23)$$

где k_{\min} выбран удовлетворяющим условию

$$\alpha^2 m \ll k_{\min} \ll \alpha m,$$

и учтено, что \mathbf{a} можно заменить в нерелятивистском приближении на $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. Важной частью вычислений лэмбовского сдвига является перенормировка массы электрона. Учитывая, что электромагнитная масса m_{em} электрона уже включена в физическую массу m , должен быть добавлен контрчлен перенормировки в гамильтониане в форме

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2(m - \delta m)} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \right)^2 \delta m.$$

Это приводит к энергетическому сдвигу

$$\delta E_n = \frac{1}{2} \delta m \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle,$$

который имеет такую же структуру, как первый член в правой части уравнения (23). Таким образом, он поглощается в перенормировке массы. Учитывая, что $k_{\min} \gg E_n - E_m \sim \alpha^2 m$, для нерелятивистской части лэмбовского сдвига мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta E_n^< &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \sum_m (E_m - E_n) \ln \frac{k_{\min}}{|E_m - E_n|} |\langle n | \mathbf{p} | m \rangle|^2 = \\ &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \sum_m (E_m - E_n) \ln \frac{k_{\min}}{\bar{E}} |\langle n | \mathbf{p} | m \rangle|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Последнее равенство определяет величину \bar{E} . Используя стандартные коммутационные соотношения, получаем:

$$\sum_m (E_m - E_n) |\langle n | \mathbf{p} | m \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle n | [[\mathbf{p}, H], \mathbf{p}] | n \rangle.$$

Откуда

$$\Delta E_n^< = \frac{\alpha}{3\pi m^2} \ln \frac{k_{\min}}{\bar{E}} \langle n | \nabla^2 V | n \rangle = \frac{4\alpha^2}{3m^2} \ln \frac{k_{\min}}{\bar{E}} |\psi_{nlm}(0)|^2. \quad (25)$$

Добавляя к этому выражению вклады от высокоэнергетических членов, получаем

$$\Delta E_n = \frac{4\alpha^5}{3\pi n^3} \left(\ln \frac{m}{2\bar{E}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) m. \quad (26)$$

Величина \bar{E} была определена с большой точностью Бете и др. [20,21]. Поправки к уровням энергии $1s, 2s, 2p_{1/2}$ определяются выражениями

$$[\delta E]_{1s} = \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Delta E_{1s}} \right) + \frac{19}{30} \right] = 3,3612 \times 10^{-5} \text{ эВ} = 2\pi\hbar \times 8127,4 \text{ МГц},$$

$$[\delta E]_{2s} = \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2s}} \right) + \frac{19}{30} \right] = 4,2982 \times 10^{-6} \text{ эВ} = 2\pi\hbar \times 1039,31 \text{ МГц},$$

$$[\delta E]_{2p_{1/2}} = \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2p}} \right) - \frac{1}{8} \right] = -5,3267 \times 10^{-8} \text{ эВ} = 2\pi\hbar \times (-12,88) \text{ МГц}.$$

Определение лэмбовского сдвига как разность энергий $2s$ и $2p_{1/2}$ состояний атома водорода, которые были бы вырожденными в отсутствии радиационных поправок, приводит к результату

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4,35152 \times 10^{-5} \text{ эВ} = 2\pi\hbar \times 1052,19 \text{ МГц.}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Когда говорят о революциях в квантовой физике, обычно считается, что мы имеем дело с двумя революциями. Сейчас, спустя время, можно утверждать, что построение квантовой электродинамики ознаменовалось революционными идеями, которые поначалу таковыми не воспринимались. В третьей квантовой революции использовались идеи второй квантовой революции. В частности, были развиты квантовые технологии, в которых использовались процессы рождения и уничтожения частиц. Например, процессы рождения и уничтожения куперовских пар играют важнейшую роль в развитии квантовых вычислений. А загадка радиуса протона во многом связана с лэмбовским сдвигом в атоме водорода. Считалось, что теоретические вычисления позволяют достаточно точно определить лэмбовский сдвиг. Однако оказалось, что стандартные вычисления не могли обеспечить нужную точность определения лэмбовского сдвига. Поэтому при анализе результатов измерений перестали использовать значения лэмбовского сдвига. Были развиты новые методы измерений радиуса протона в атоме водорода и мюонного водорода. При этом удалось добиться согласия относительно значений радиуса протона. Но вместе с тем значения лэмбовского сдвига кардинально отличались от предсказываемой квантовой электродинамикой значений. Это можно использовать для проверки теории КЭД, что в свою очередь может привести к расширению новых горизонтов квантовой физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэнш Т. В. Страсть к точности [Текст] / Т. В. Хэнш // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176. – №. 12. – С. 1368.
2. Udem T. Phase-Coherent Measurement of the Hydrogen 1S–2S Transition Frequency with an Optical Frequency Interval Divider Chain [Text] / T. Udem, A. Huber, B. Gross, et al. // Physical Review Letters. – 1997. – V. 79. – №. 14. – P. 2646.
3. Fischer M. New limits on the drift of fundamental constants from laboratory measurements [Text] / M. Fischer, N. Kolachevsky, M. Zimmerman, et al. // Physical Review Letters. – 2004. – V. 92. – №. 23. – P. 230802.
4. De Beauvoir B. Absolute Frequency Measurement of the 2S– 8S/D Transitions in Hydrogen and Deuterium: New Determination of the Rydberg Constant [Text] / B. De Beauvoir, F. Nez, L. Julien, et al // Physical Review Letters. – 1997. – V. 78. – №. 3. – P. 440.
5. Pohl R. et al. The size of the proton [Text] / R. Pohl, A. Antognini, F. Nez, et al // Nature. – 2010. – V. 466. – №. 7303. – P. 213-216.
6. Kottmann F. The muonic hydrogen Lamb shift experiment at PSI [Text] / F. Kottmann, W. Amir, F. Biraben, et al // Hyperfine Interactions. – 2001. – V. 138. – №. 1. – P. 55-60.
7. Karr J. P. Progress on the proton-radius puzzle [Text] / J.P. Karr, D. Marchand // Nature. – 2019. – V. 575. - P. 61-62.
8. Xiong W. A small proton charge radius from an electron–proton scattering experiment [Text] / W. Xiong, A. Gasparian, H. Gao // Nature. – 2019. – V. 575. – №. 7781. – P. 147-150.
9. Bernauer J. C. High- precision determination of the electric and magnetic form factors of the proton [Text] / J. C. Bernauer, A1 Collaboration // AIP Conference Proceedings. – American Institute of Physics, 2011. – V. 1388. – №. 1. – P. 128-134.
10. Bezginov N. A measurement of the atomic hydrogen Lamb shift and the proton charge radius [Text] / N. Bezginov, T. Valdez, M. Horbatsch, et al // Science. – 2019. – V. 365. – №. 6457. – P. 1007-1012.

11. Fleurbaey H. New measurement of the 1S– 3S transition frequency of hydrogen: contribution to the proton charge radius puzzle [Text] / H. Fleurbaey, S. Galtier, S. Thomas, et al // *Physical Review Letters*. – 2018. – V. 120. – №. 18. – P. 183001.
12. Beyer A. The Rydberg constant and proton size from atomic hydrogen [Text] / A. Beyer, L. Maisenbacher, A. Matveev, et al // *Science*. – 2017. – V. 358. – №. 6359. – P. 79-85.
13. Antognini A. Proton structure from the measurement of 2S-2P transition frequencies of muonic hydrogen [Text] / A. Antognini, F. Nez, K. Schuhmann // *Science*. – 2013. – V. 339. – №. 6118. – P. 417-420.
14. Lin Y. H. New insights into the nucleon's electromagnetic structure [Text] / Y. H. Lin, H. W. Hammer, U. G. Meißner, et al // *Physical Review Letters*. – 2022. – V. 128. – №. 5. – P. 052002.
15. Gao H. The proton charge radius [Text] / H. Gao, M. Vanderhaeghen // *Reviews of Modern Physics*. – 2022. – V. 94. – №. 1. – P. 015002.
16. Ubachs W. Crisis and catharsis in atomic physics [Text] / W. Ubachs // *Science*. – 2020. – V. 370. – №. 6520. – P. 1033-1033.
17. Partney C. G. Improved measurement of the hydrogen [Text] / C. G. Partney, A. Matveev, J. Alnis, et al // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 107. – P. 203001.
18. Lundeen S. R. Measurement of the Lamb Shift in Hydrogen, $n=2$ [Text] / S. R., F. M. Pipkin // *Physical Review Letters*. – 1981. – V. 46. – №. 4. – P. 232.
19. Bethe H. A. The electromagnetic shift of energy levels [Text] / H. A. Bethe // *Physical Review*. – 1947. – V. 72. – №. 4. – P. 339.
20. Bethe H. A. Numerical value of the lamb shift [Text] / H. A. Bethe, L. M. Brown, J. R. Stehn // *Physical Review*. – 1950. – V. 77. – №. 3. – P. 370.
21. Schwartz C. L. New calculation of the numerical value of the lamb shift [Text] / C. L. Schwartz, J. J. Tiemann // *Annals of Physics*. – 1959. – V. 6. – №. 2. – P. 178.