

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**  
**КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Р.Г. Деминов, Б.И. Кочелаев**

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ**  
**ВОЗБУЖДЕНИЯ**  
**В КОНДЕНСИРОВАННЫХ**  
**СРЕДАХ**

**ЧАСТЬ 1**

**ФОРМАЛИЗМ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ**  
**КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ЖИДКОМ**  
**ГЕЛИИ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**Казань – 2022**

УДК 530.145(075.8)

ББК 22.31

Д30

*Принято на заседании кафедры теоретической физики  
Протокол № 6 от 16 марта 2022 года*

**Рецензент –**

доктор физико-математических наук, профессор

**В.В. Парфенов**

**Деминов Р.Г.**

**Д30 Коллективные возбуждения в конденсированных средах.**

**Часть 1. Формализм вторичного квантования. Коллективные возбуждения в жидком гелии. Конспект лекций / Р.Г. Деминов, Б.И. Кочелаев. – Казань: Казан. ун-т, 2022. – 32 с.**

В пособии изложен формализм вторичного квантования и теория коллективных возбуждений в жидком гелии-4.

Предназначено для магистрантов Института физики, специализирующихся в области теоретической физики, физики перспективных материалов, сложных систем и низких температур.

Данные лекции не являются оригинальными и полностью основаны на известных фундаментальных учебниках и монографиях [1-4]. Авторам принадлежит только отбор материала.

© Деминов Р.Г., Кочелаев Б.И., 2022

© Казанский университет, 2022

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Формализм вторичного квантования</b>	<b>5</b>
1.1	Тождественность частиц . . . . .	5
1.2	Операторы рождения и уничтожения частиц . . . . .	6
1.3	Операторы числа частиц и плотности числа частиц . . . . .	11
1.4	Линейные операторы в представлении вторичного квантования . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Коллективные возбуждения в жидком гелии</b>	<b>17</b>
2.1	Квантовая жидкость. Спектр бозевского типа. Критерий сверхтекучести Ландау . . . . .	17
2.2	Квантовая теория неидеального бозе-газа . . . . .	19
2.2.1	Гамильтониан неидеального бозе-газа . . . . .	19
2.2.2	Гамильтониан неидеального бозе-газа. Приближение Боголюбова	20
2.2.3	Гамильтониан неидеального бозе-газа. Каноническое преобразование Боголюбова . . . . .	21
2.2.4	Неидеальный бозе-газ. Число частиц в конденсате . . . . .	23
2.2.5	Реальный гелий . . . . .	24
2.2.6	Бозе-конденсация как фазовый переход . . . . .	26
2.2.7	Вихри в сверхтекучем $\text{He}^4$ . . . . .	28
	<b>Литература</b>	<b>31</b>



# Глава 1

## Формализм вторичного квантования

### 1.1 Тождественность частиц

Принцип полной тождественности и неразличимости частиц одного сорта в квантовой механике приводит к существенно новым чертам в поведении совокупности одинаковых частиц. В классической механике одинаковые частицы не теряют своей индивидуальности: их можно пронумеровать и следить в дальнейшем за траекторией каждой из них. В квантовой механике понятие траектории теряет смысл. Если в какой-то момент времени мы локализовали, например, электроны и перенумеровали их, то локализовав электроны в другой момент времени, мы не сможем указать, какой именно электрон попал в ту или иную точку.

Рассмотрим некоторое состояние двух одинаковых частиц, описываемое волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Квадрат модуля этой функции  $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2$  определяет плотность вероятности обнаружить одну частицу в точке  $\mathbf{r}_1$ , а другую - в точке  $\mathbf{r}_2$ . Состояние с переставленными частицами является физически эквивалентным начальному состоянию. Это значит, что перестановка частиц может привести только к изменению фазы волновой функции:

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = e^{i\varphi}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (1.1)$$

где  $\hat{P}$  - оператор перестановки частиц. Очевидно, что при повторной перестановке мы возвращаемся к исходной волновой функции  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Однако вследствие (1.1) мы имеем следующее соотношение:

$$\hat{P}^2\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i2\varphi}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.2)$$

Отсюда видно, что  $e^{i2\varphi} = 1$  и  $e^{i\varphi} = \pm 1$ , то есть

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.3)$$

Таким образом, волновая функция двух частиц должна быть либо симметричной, либо антисимметричной относительно их перестановок. В силу произвольности рассмотренного состояния можно утверждать, что волновые функции всех возможных состояний данной системы должны иметь одинаковую четность, так как их линейная комбинация, составленная из функций разной четности, была бы ни симметрична, ни антисимметрична. Этот результат обобщается на систему с произвольным числом частиц.

## 1.2 Операторы рождения и уничтожения частиц

Из сказанного выше следует, что принцип тождественности частиц приводит к необходимости симметризации или антисимметризации волновых функций, описывающих состояние системы одинаковых частиц. Процедура эта довольно громоздка для большого числа частиц. Поэтому в квантовой механике систем многих частиц вводится математический аппарат, который называется формализмом вторичного квантования. Этот формализм позволяет упростить громоздкие и сложные процедуры симметризации и антисимметризации волновых функций большого числа частиц, поскольку учитывает свойства симметрии системы относительно перестановок частиц автоматически. Кроме того, этот формализм очень удобен для описания процессов, сопровождающихся рождением и уничтожением квазичастиц и элементарных возбуждений в системе большого числа частиц.

Для того чтобы показать, как можно прийти к формализму вторичного квантования, нам потребуется понятие вектора состояния в обычном шредингеровском представлении, введенное Дираком еще в 1930 году (Дирак П. Принципы квантовой механики. - М.: Наука, 1979). Рассмотрим полный набор волновых функций  $\varphi_f(\mathbf{r}, \sigma)$ , описывающих состояние частицы с проекцией спина  $\sigma$  и пространственной координатой  $\mathbf{r}$ . Для краткости обозначим эти координаты одной буквой  $\xi = \mathbf{r}, \sigma$ . Эти функции удовлетворяют соотношениям ортогональности и полноты:

$$\int d\xi \varphi_{f'}^*(\xi) \varphi_f(\xi) = \delta_{ff'}, \quad (1.4)$$

$$\sum_f \varphi_f^*(\xi) \varphi_f(\xi') = \delta(\xi - \xi') \equiv \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.5)$$

Здесь  $\int d\xi = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r}$ . Произвольная волновая функция может быть разложена по состояниям введенного базиса функций:

$$\psi(\xi) = \sum_f c_f \varphi_f(\xi), \quad (1.6)$$

где коэффициенты разложения определяются формулой

$$c_f = \int d\xi \varphi_f^*(\xi) \psi(\xi). \quad (1.7)$$

Вследствие нормировки функции  $\psi(\xi)$ :

$$\int d\xi \psi^*(\xi) \psi(\xi) = 1 = \sum_{f,f'} c_{f'}^* c_f \int d\xi \varphi_{f'}^*(\xi) \varphi_f(\xi)$$

коэффициенты разложения  $c_f$  также нормированы:

$$\sum_{f,f'} c_{f'}^* c_f \delta_{ff'} = \sum_f |c_f|^2 = 1. \quad (1.8)$$

Введем вектор состояния (кэт-вектор), перенумеровав все коэффициенты  $c_f$  и расположив их в виде столбца:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_{f1} \\ c_{f2} \\ c_{f3} \\ \dots \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Очевидно, что этот вектор содержит ту же информацию о состоянии частицы, что и волновая функция  $\psi(\xi)$ . Эрмитово сопряженный к  $|\psi\rangle$  вектор (бра-вектор) записывается, естественно, в виде строки:

$$|\psi\rangle^+ = \langle\psi| = [c_{f1}^* \ c_{f2}^* \ c_{f3}^* \ \dots]. \quad (1.10)$$

Матричное произведение (называемое скалярным) этих векторов дает, очевидно, 1 в согласии с формулой (1.8):

$$\langle\psi|\psi\rangle = [c_{f1}^* \ c_{f2}^* \ c_{f3}^* \ \dots] \times \begin{bmatrix} c_{f1} \\ c_{f2} \\ c_{f3} \\ \dots \end{bmatrix} = \sum_f |c_f|^2 = 1. \quad (1.11)$$

Заметим, что состоянию  $\varphi_f(\xi)$  соответствует кэт-вектор вида (1.9):  $\varphi_f(\xi) \implies |f\rangle$ , в котором все коэффициенты разложения равны нулю, за исключением единственного  $c_f = 1$ . То же самое, конечно, относится и к эрмитово сопряженному бра-вектору. Очевидно, что соотношению ортогональности (1.4) теперь соответствует скалярное произведение векторов:

$$\langle f' | f \rangle = \delta_{ff'}. \quad (1.12)$$

Теперь мы перейдем к изложению формализма вторичного квантования для описания состояний большого числа тождественных частиц. Введем новое понятие - вектор состояния квантовой системы, в которой нет ни одной частицы, так называемый вектор вакуумного состояния  $|0\rangle$ . Вектор состояния, в котором имеется одна частица в состоянии  $f$ , определен как

$$|f\rangle = a_f^+ |0\rangle. \quad (1.13)$$

Иными словами, мы ввели оператор  $a_f^+$  рождения частицы в состоянии  $f$ . Эрмитово сопряженный вектор (бра-вектор) записывается как

$$|f\rangle^+ \equiv \langle f| = \langle 0| a_f, \quad (1.14)$$

где  $a_f$  - оператор, эрмитово сопряженный к  $a_f^+$ . Очевидно, что скалярное произведение этих векторов в соответствии с (1.12) имеет вид

$$\langle f' | f \rangle = \langle 0| a_{f'} a_f^+ |0\rangle = \delta_{ff'}. \quad (1.15)$$

Ясно, что соотношения (1.12) - (1.15) для одной частицы являются лишь новыми обозначениями. Формализм вторичного квантования становится полезным и удобным только при описании систем, содержащих две и более частиц. Вектор двухчастичного состояния запишем в виде

$$|f, f'\rangle = a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle. \quad (1.16)$$

Здесь нет номеров частиц, указывающих, какая именно частица находится в состоянии  $f$ , а какая в  $f'$ . Отсюда следует, что физически эквивалентное состояние для состояния (1.16) можно записать в виде

$$|f', f\rangle = a_{f'}^+ a_f^+ |0\rangle, \quad (1.17)$$

которое должно отличаться от (1.16) не более, чем фазой, т.е. перестановка операторов дает лишь фазовый множитель:

$$a_f^+ a_{f'}^+ = e^{i\varphi} a_{f'}^+ a_f^+. \quad (1.18)$$

Переставив еще раз, получаем подобно (1.2)  $e^{i\varphi} = \pm 1$ , т.е. для операторов рождения частиц должно быть справедливо соотношение

$$a_f^+ a_{f'}^+ \pm a_{f'}^+ a_f^+ = 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, операторы рождения частиц должны либо антикоммутировать (знак плюс в (1.19)), либо коммутировать (знак минус в (1.19)), которые в соответствии с их правилом коммутации порождают два вида частиц. То же самое относится и к эрмитово сопряженным операторам, которые удовлетворяют аналогичному соотношению:

$$a_f a_{f'} \pm a_{f'} a_f = 0. \quad (1.20)$$

Частицы, операторы рождения которых антикоммутируют, называются фермионами, а частицы, операторы рождения которых коммутируют, называются бозонами. Далее мы будем обозначать их различными буквами:  $c$  для фермионов,  $b$  для бозонов.

Эти простые правила коммутации операторов позволяют сразу же установить ряд важнейших физических свойств квантовых многочастичных систем (состоящих из фермионов или бозонов). Например, соотношения (1.19) и (1.20) в случае  $f = f'$  для бозонов превращаются в тривиальные тождества:

$$b_f^+ b_f^+ = b_f^+ b_f^+, \quad b_f b_f = b_f b_f .$$

Для фермионов из формул (1.19) и (1.20) получаем

$$c_f^+ c_f^+ = -c_f^+ c_f^+ = 0, \quad c_f c_f = -c_f c_f = 0.$$

Следовательно, два фермиона не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии (принцип запрета или принцип Паули).

Возвращаясь к общим обозначениям операторов, эрмитово сопряженный вектор состояния, соответствующий (1.16), запишется аналогично (1.14):

$$|f, f'\rangle^+ = \langle f, f'| = \langle 0| a_{f'} a_f . \quad (1.21)$$

Нормировка данной двухчастичной функции равна скалярному произведению векторов (1.21) и (1.16):

$$\langle f, f'| f, f'\rangle = \langle 0| a_{f'} a_f a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle = N_{ff'}, \quad (1.22)$$

где  $N_{ff'}$  - постоянная, подлежащая определению. Более общая формула, включающая в себя условие ортогональности, имеет следующий вид:

$$\langle f, f''| f, f'\rangle = \langle 0| a_{f''} a_f a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle = N_{ff'} \delta_{ff''}. \quad (1.23)$$

Из этой формулы можно понять интерпретацию оператора  $a_f$ : это выражение можно рассматривать как произведение бра-вектора  $\langle 0| a_{f''}$  на кэт-вектор  $a_f a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle$ , которое, согласно (1.15), с точностью до множителя  $N_{ff'}$  является соотношением ортонормировки двух одночастичных векторов. Таким образом, вектор  $a_f a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle$  можно записать в виде

$$a_f a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle = N_{ff'} a_{f'}^+ |0\rangle, \quad (1.24)$$



и его скалярное произведение на вектор  $\langle 0 | a_{f'} \rangle$  дает (1.23). Отсюда следует, что оператор  $a_f$  превращает двухчастичное состояние  $a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle$  в одночастичное. Таким образом, из формул (1.21) - (1.24) мы видим, что эрмитово сопряженный к  $a_f^+$  оператор  $a_f$  можно рассматривать либо как оператор уничтожения частицы, действующий на правый вектор (кэт-вектор), либо как оператор рождения частицы, действующий на левый вектор (бра-вектор). Очевидно, что, действуя на вакуумное состояние, оператор уничтожения  $a_f$  должен давать нуль:

$$a_f |0\rangle = 0, \quad (1.25)$$

так как он не может уменьшить число частиц в вакуумном состоянии. Действуя на одночастичное состояние, этот оператор дает либо вакуумное состояние, либо нуль:

$$a_f a_{f'}^+ |0\rangle = \delta_{ff'} |0\rangle, \quad (1.26)$$

что следует из условия ортонормировки одночастичных состояний, см. (1.15).

Получим теперь перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения частицы. Действуя сначала оператором  $a_f a_{f'}^+ \pm a_{f'}^+ a_f$  на вакуумное состояние, получаем с учетом (1.25) и (1.26)

$$(a_f a_{f'}^+ \pm a_{f'}^+ a_f) |0\rangle = \delta_{ff'} |0\rangle, \quad (1.27)$$

где верхний знак берется для фермионов, а нижний для бозонов. Теперь подействуем этим оператором на произвольное одночастичное состояние  $|f\rangle$ . Используя (1.19) и (1.24), получим

$$\begin{aligned} (a_f a_{f'}^+ \pm a_{f'}^+ a_f) a_f^+ |0\rangle &= \mp a_f a_f^+ a_{f'}^+ |0\rangle \pm a_{f'}^+ |0\rangle = \\ \mp N_{ff'} a_{f'}^+ |0\rangle \pm a_{f'}^+ |0\rangle &= \mp (N_{ff'} - 1) a_{f'}^+ |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Отсюда ясно, что антикоммутатор фермионов и коммутатор бозонов есть число. Конечно, нужно выбрать нормировку  $N_{ff'}$  так, чтобы это число не зависело от того, на какое состояние мы действуем. Сравнивая (1.27) и (1.28), имеем

$$\mp (N_{ff'} - 1) = \delta_{ff'},$$

тогда

$$N_{ff'} - 1 = \mp \delta_{ff'}; \quad N_{ff'} = 1 \mp \delta_{ff'}. \quad (1.29)$$

Таким образом, если  $f = f'$ , то для фермионов  $N_{ff} = 0$ , что и следовало ожидать, так как два фермиона не могут занимать одно состояние, и нормировочный множитель такой волновой функции равен нулю. Для бозонов, наоборот,  $N_{ff} = 2$ , т.е. бозоны “предпочитают” находиться в одном и том же квантовом состоянии.

Итак, полностью правила антикоммутации и коммутации для фермионных и бозонных операторов имеют вид

$$a_f^+ a_{f'}^+ \pm a_{f'}^+ a_f^+ = 0, \quad a_f a_{f'} \pm a_{f'} a_f = 0, \quad a_f a_{f'}^+ \pm a_{f'}^+ a_f = \delta_{ff'}. \quad (1.30)$$

Для бозонов возможно накопление какого угодно числа частиц в одном и том же состоянии. Согласно (1.19) и (1.23), для двухчастичной функции бозонов имеем:

$$\langle 0 | b_f b_f b_f^+ b_f^+ |0\rangle = \langle 0 | (b_f)^2 (b_f^+)^2 |0\rangle = 2. \quad (1.31)$$

Нормировку для трех бозонов получаем, применяя последовательно правила коммутации (1.30) в скалярном произведении  $\langle 0 | (b_f)^3 (b_f^+)^3 | 0 \rangle$  с использованием (1.31):

$$\begin{aligned} \langle 0 | (b_f)^3 (b_f^+)^3 | 0 \rangle &= \langle 0 | (b_f)^2 (1 + b_f^+ b_f) (b_f^+)^2 | 0 \rangle = \\ 2 + \langle 0 | (b_f)^2 b_f^+ (1 + b_f^+ b_f) b_f^+ | 0 \rangle &= 4 + \langle 0 | (b_f)^2 (b_f^+)^2 (1 + b_f^+ b_f) | 0 \rangle = 6 = 3! \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного числа бозонов получаем

$$\langle 0 | (b_f)^n (b_f^+)^n | 0 \rangle = n! \quad (1.32)$$

Тогда нормированный на единицу вектор, описывающий состояние с  $n$  бозонами, находящимися в одном и том же состоянии  $f$ , запишется в виде

$$|n_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b_f^+)^n |0\rangle. \quad (1.33)$$

В более общем виде нормированный вектор состояния, который описывает  $n_1$  бозонов в состоянии  $f_1$ ,  $n_2$  бозонов в состоянии  $f_2$  и т.д., имеет вид

$$|n_{1f_1}, n_{2f_2}, n_{3f_3}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! \dots}} (b_{f_1}^+)^{n_1} (b_{f_2}^+)^{n_2} (b_{f_3}^+)^{n_3} \dots |0\rangle. \quad (1.34)$$

В отношении фермионов проблема нахождения нормировочного множителя не возникает, так как в любом квантовом состоянии не может быть более одного фермиона.

Запишем теперь матричные элементы операторов рождения и уничтожения частиц. Очевидно, что единственный отличный от нуля матричный элемент оператора рождения бозона в состоянии, в котором уже есть  $n$  частиц, соответствует переходу в состояние, в котором будет  $n + 1$  частица:

$$\begin{aligned} \langle n_f + 1 | b_f^+ | n_f \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \langle 0 | (b_f)^{n+1} b_f^+ \frac{1}{\sqrt{n!}} (b_f^+)^n | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n! (n+1)!}} \langle 0 | (b_f)^{n+1} (b_f^+)^{n+1} | 0 \rangle = \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Последнее равенство следует непосредственно из (1.32). Для оператора уничтожения бозона имеем

$$\langle n_f - 1 | b_f | n_f \rangle = \frac{1}{\sqrt{(n-1)! n!}} \langle 0 | (b_f)^n (b_f^+)^n | 0 \rangle = \sqrt{n}. \quad (1.36)$$

Соответствующие матричные элементы для фермионов равны 1, так как число частиц в одном квантовом состоянии может быть равным только 0 или 1.

## 1.3 Операторы числа частиц и плотности числа частиц

Произведение операторов  $a_f^+ a_f$  при действии на одночастичный вектор состояния оставляет его неизменным:

$$a_f^+ a_f |f\rangle = a_f^+ |0\rangle = |f\rangle.$$

Поэтому удобно это произведение рассматривать как новый оператор  $\hat{n}_f$ :

$$\hat{n}_f = a_f^+ a_f. \quad (1.37)$$

Из соотношений (1.30) нетрудно получить следующий коммутатор:

$$[\hat{n}_f, a_f^+] = \hat{n}_f a_f^+ - a_f^+ \hat{n}_f = a_f^+. \quad (1.38)$$

Для бозонов коммутатор  $\hat{n}_f$  и  $(b_f^+)^m$  с помощью (1.30) приводится к виду

$$[\hat{n}_f, (b_f^+)^m] = \hat{n}_f (b_f^+)^m - (b_f^+)^m \hat{n}_f = m (b_f^+)^m. \quad (1.39)$$

Учитывая, что для фермионов  $(c_f^+)^m = 0$  для  $m \geq 2$ , можно считать справедливым выражение (1.39) и для фермионов. Тогда имеем

$$[\hat{n}_f, (a_f^+)^m] = \hat{n}_f (a_f^+)^m - (a_f^+)^m \hat{n}_f = m (a_f^+)^m. \quad (1.40)$$

Действуя коммутатором (1.40) на вакуумное состояние, получаем

$$[\hat{n}_f (a_f^+)^m - (a_f^+)^m \hat{n}_f] |0\rangle = \hat{n}_f (a_f^+)^m |0\rangle = m (a_f^+)^m |0\rangle, \quad (1.41)$$

где  $(a_f^+)^m |0\rangle = |m_f\rangle$  - вектор, описывающий  $m$  частиц, находящихся в одном и том же одночастичном состоянии  $f$ . Таким образом, этот вектор является собственным вектором оператора  $\hat{n}_f$  с собственным значением  $m$ . Поэтому оператор  $\hat{n}_f$  называется оператором числа частиц, а его собственные значения - это числа частиц, заполняющих состояние  $f$ . Очевидно, что для фермионов возможные собственные значения  $m$  равны только 0 или 1.

Сумма операторов чисел заполнения, соответствующих полному набору состояний  $f$ , дает оператор  $\hat{N}$  полного числа частиц в системе:

$$\hat{N} = \sum_f \hat{n}_f. \quad (1.42)$$

Следовательно, произвольное состояние любой квантовой системы, имеющей вполне определенное число частиц, должно описываться таким вектором состояния, который является собственным вектором оператора  $\hat{N}$  с собственным значением, как раз равным полному числу частиц в рассматриваемой системе.

Введем теперь полевые операторы уничтожения и рождения частицы в некоторой точке  $\mathbf{r}$  и со спиновой проекцией  $\sigma$  в виде линейной комбинации операторов  $a_f$  и  $a_f^+$  (см. (1.4) - (1.7)):

$$\psi(\xi) = \sum_f a_f \varphi_f(\xi), \quad (1.43)$$

$$\psi^+(\xi) = \sum_f a_f^+ \varphi_f^*(\xi), \quad (1.44)$$

где в качестве коэффициентов разложения использован полный набор волновых функций  $\varphi_f(\xi)$  в координатном представлении. На основе правил коммутации (1.30) нетрудно получить, что антикоммутаторы этих операторов для фермионов и коммутаторы для бозонов таковы:

$$\psi^+(\xi)\psi^+(\xi') \pm \psi^+(\xi')\psi^+(\xi) = [\psi^+(\xi), \psi^+(\xi')]_{\pm} = \quad (1.45)$$

$$\sum_{f,f'} [a_f^+, a_{f'}^+]_{\pm} \varphi_f^*(\xi)\varphi_{f'}^*(\xi') = 0,$$

$$[\psi(\xi), \psi(\xi')]_{\pm} = \sum_{f,f'} [a_f, a_{f'}]_{\pm} \varphi_f(\xi)\varphi_{f'}(\xi') = 0, \quad (1.46)$$

$$[\psi(\xi), \psi^+(\xi')]_{\pm} = \sum_{f,f'} [a_f, a_{f'}^+]_{\pm} \varphi_f(\xi)\varphi_{f'}^*(\xi') = \quad (1.47)$$

$$\delta(\xi - \xi') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\sigma\sigma'}.$$

Последнее равенство следует из полноты системы волновых функций  $\varphi_f(\xi)$ . Из (1.45) - (1.47) видно, что полевые операторы  $\psi(\xi)$  и  $\psi^+(\xi)$  удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы  $a_f$  и  $a_f^+$  с учетом непрерывности переменной  $\mathbf{r}$ , т.е. соотношения (1.43) - (1.44) являются каноническими преобразованиями.

Нетрудно найти обратное преобразование. Используя ортонормированность системы волновых функций  $\varphi_f(\xi)$ , легко получить

$$a_f = \int d\xi \varphi_f^*(\xi)\psi(\xi), \quad (1.48)$$

$$a_f^+ = \int d\xi \varphi_f(\xi)\psi^+(\xi). \quad (1.49)$$

Из (1.47) видно, что вектор состояния  $\psi^+(\xi)|0\rangle$  нормирован:

$$\langle 0|\psi(\xi)\psi^+(\xi')|0\rangle = \delta(\xi - \xi'). \quad (1.50)$$

После введения полевых операторов можно определить оператор плотности числа частиц в точке  $\mathbf{r}$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma} \psi^+(\xi)\psi(\xi). \quad (1.51)$$

Убедимся, что этот оператор есть действительно оператор плотности числа частиц, а именно, что  $\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \hat{N}$ :

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int d\xi \psi^+(\xi)\psi(\xi) = \sum_{f,f'} a_f^+ a_{f'} \int d\xi \varphi_f^*(\xi)\varphi_{f'}(\xi) = \sum_f a_f^+ a_f = \hat{N}.$$

В дальнейшем понадобится фурье-компонента этого оператора. Поэтому рассмотрим случай, когда состояние частицы полностью определяется ее импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  и проекцией спина  $\sigma$ . Тогда полевые операторы можно разложить по собственным функциям оператора импульса:

$$\psi(\xi) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (1.52)$$

$$\psi^+(\xi) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ \varphi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (1.53)$$

Фурье-компонента оператора плотности числа частиц в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbf{q}} &= \int d\xi \psi^+(\xi) \psi(\xi) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}'\sigma} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma},\end{aligned}\quad (1.54)$$

где последнее равенство возникает после выделения интеграла:

$$\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{q}}. \quad (1.55)$$

Определения (1.51) и (1.54) относятся как к фермионам, так и к бозонам.

## 1.4 Линейные операторы в представлении вторичного квантования

Рассмотрим вначале одночастичный линейный оператор  $\widehat{A}(\xi)$  в шредингеровском представлении. В результате действия этого оператора на одну из функций  $\varphi_g(\xi)$  базиса  $\{\varphi_f(\xi)\}$  получается новая функция, которую, согласно (1.6) - (1.7), можно разложить по функциям того же базиса:

$$\widehat{A}(\xi) \varphi_g(\xi) = \sum_f \langle f | \widehat{A} | g \rangle \varphi_f(\xi), \quad (1.56)$$

где матричный элемент  $\langle f | \widehat{A} | g \rangle$  определяется интегралом:

$$\langle f | \widehat{A} | g \rangle = \int d\xi \varphi_f^*(\xi) \widehat{A} \varphi_g(\xi). \quad (1.57)$$

Уравнения (1.56) - (1.57) определяют переход от координатного представления произвольного оператора  $\widehat{A}(\xi)$  к “ $f$ -представлению”. Аналогичное уравнение имеет место и для векторов состояний:

$$\widehat{A} a_g^+ | 0 \rangle = \sum_f \langle f | \widehat{A} | g \rangle a_f^+ | 0 \rangle = \sum_{f, f'} \langle f | \widehat{A} | f' \rangle \delta_{f', g} a_f^+ | 0 \rangle. \quad (1.58)$$

Произведение символа Кронекера на вакуумный вектор состояния, согласно (1.26), можно записать в виде

$$\delta_{f', g} | 0 \rangle = a_{f'} a_g^+ | 0 \rangle. \quad (1.59)$$

Это позволяет переписать (1.58) как

$$\widehat{A} a_g^+ | 0 \rangle = \sum_{f, f'} \langle f | \widehat{A} | f' \rangle a_f^+ a_{f'} a_g^+ | 0 \rangle. \quad (1.60)$$

Отсюда видно, что оператор  $\widehat{A}$  в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\widehat{A} = \sum_{f, f'} \langle f | \widehat{A} | f' \rangle a_f^+ a_{f'}. \quad (1.61)$$

Подставляя в (1.61) обратное преобразование (1.48) - (1.49) для  $a_f$  и  $a_f^+$ , получаем запись одночастичного оператора через полевые операторы:

$$\widehat{A} = \int d\xi \psi^+(\xi) \widehat{A}(\xi) \psi(\xi). \quad (1.62)$$

Например, вторично квантованный оператор кинетической энергии через операторы рождения  $a_{\mathbf{k}\sigma}^+$  и уничтожения  $a_{\mathbf{k}\sigma}$  имеет вид

$$H_{\text{кин}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (1.63)$$

где  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , а через полевые операторы имеем

$$H_{\text{кин}} = \int d\xi \psi^+(\xi) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi(\xi). \quad (1.64)$$

Перейдем к рассмотрению двухчастичного оператора в представлении вторичного квантования на примере парного взаимодействия частиц, симметричного относительно перестановки частиц:  $\widehat{V}(\xi_1 \xi_2) = \widehat{V}(\xi_2 \xi_1)$ . Определим матричный элемент этого взаимодействия на произведениях ортонормированных волновых функций шредингеровского представления:

$$\langle f_1 f_2 | \widehat{V} | g_2 g_1 \rangle = \int d\xi_1 d\xi_2 \varphi_{f_1}^*(\xi_1) \varphi_{f_2}^*(\xi_2) \widehat{V}(\xi_1 \xi_2) \varphi_{g_2}(\xi_2) \varphi_{g_1}(\xi_1). \quad (1.65)$$

Однако, согласно разделу 1.1, двухчастичные волновые функции тождественных частиц должны быть антисимметричными для фермионов и симметричными для бозонов:

$$\psi_{f_1 f_2}(\xi_1 \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{f_1}(\xi_1) \varphi_{f_2}(\xi_2) \mp \varphi_{f_1}(\xi_2) \varphi_{f_2}(\xi_1)] = \mp \psi_{f_1 f_2}(\xi_2 \xi_1). \quad (1.66)$$

Матричный элемент взаимодействия  $\widehat{V}(\xi_1 \xi_2)$  на этих функциях имеет вид

$$\langle \psi_{f_1 f_2} | \widehat{V} | \psi_{g_1 g_2} \rangle = \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | g_2 g_1 \rangle \mp \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | g_1 g_2 \rangle. \quad (1.67)$$

Здесь первое слагаемое соответствует прямому взаимодействию, второе - обменному. На основе (1.67) можно записать разложение, подобное (1.56) - (1.57), по базису функций (1.66), используя соотношение ортогональности

$$\langle \psi_{f_1 f_2} | \psi_{g_1 g_2} \rangle = \delta_{f_1 g_1} \delta_{f_2 g_2} \mp \delta_{f_1 g_2} \delta_{f_2 g_1}. \quad (1.68)$$

Используя (1.67) и (1.67), имеем

$$\widehat{V}(\xi_1 \xi_2) \psi_{g_1 g_2}(\xi_1 \xi_2) = \frac{1}{2} \sum_{f_1 f_2} \left[ \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | g_2 g_1 \rangle \mp \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | g_1 g_2 \rangle \right] \psi_{f_1 f_2}(\xi_1 \xi_2), \quad (1.69)$$

где множитель  $\frac{1}{2}$  появляется вследствие того, что в двойной сумме пара конкретных значений  $f_1$  и  $f_2$  появляется дважды. Аналогичное разложение имеет место для векторов состояний:

$$\widehat{V} a_{g_1}^+ a_{g_2}^+ |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{f_1 f_2 f_3 f_4} \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | f_3 f_4 \rangle (\delta_{f_3 g_2} \delta_{f_4 g_1} \mp \delta_{f_3 g_1} \delta_{f_4 g_2}) a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ |0\rangle. \quad (1.70)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} a_{f_3} a_{f_4} a_{g_1}^+ a_{g_2}^+ |0\rangle &= a_{f_3} (\delta_{f_4 g_1} \mp a_{g_1}^+ a_{f_4}) a_{g_2}^+ |0\rangle = \\ \delta_{f_4 g_1} a_{f_3} a_{g_2}^+ |0\rangle \mp \delta_{f_4 g_2} a_{f_3} a_{g_1}^+ |0\rangle &= (\delta_{f_4 g_1} \delta_{f_3 g_2} \mp \delta_{f_4 g_2} \delta_{f_3 g_1}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Подставляя (1.71) в (1.70), имеем

$$\widehat{V} a_{g_1}^+ a_{g_2}^+ |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{f_1 f_2 f_3 f_4} \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | f_3 f_4 \rangle a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_3} a_{f_4} a_{g_1}^+ a_{g_2}^+ |0\rangle. \quad (1.72)$$

Отсюда следует, что оператор парного взаимодействия частиц в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\widehat{V} = \frac{1}{2} \sum_{f_1 f_2 f_3 f_4} \langle f_1 f_2 | \widehat{V} | f_3 f_4 \rangle a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_3} a_{f_4}. \quad (1.73)$$

Подставляя в это выражение обратное преобразование (1.48) - (1.49) для  $a_f$  и  $a_f^+$ , получаем запись двухчастичного оператора через полевые операторы:

$$\widehat{V} = \frac{1}{2} \int d\xi_1 d\xi_2 \psi^+(\xi_1) \psi^+(\xi_2) \widehat{V}(\xi_1 \xi_2) \psi(\xi_2) \psi(\xi_1). \quad (1.74)$$





## Глава 2

# Коллективные возбуждения в жидком гелии

### 2.1 Квантовая жидкость. Спектр бозевского типа. Критерий сверхтекучести Ландау

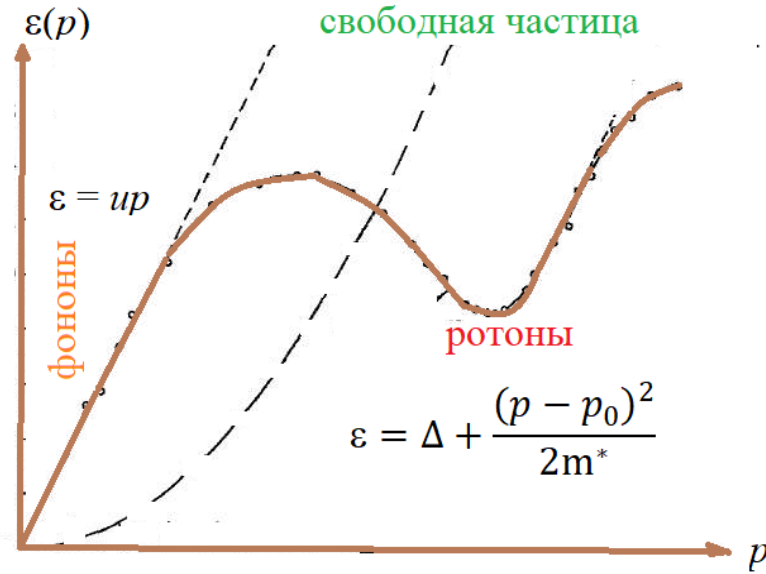
Сильное взаимодействие между молекулами жидкости, отсутствие дальнего порядка и малости колебаний не допускают вычисления для жидкости термодинамических величин. Общее рассмотрение для жидкостей возможно вблизи абсолютного нуля температуры. В природе существует лишь одно вещество - гелий (He), которое может оставаться жидким вплоть до абсолютного нуля (*квантовая жидкость*). Это связано с особой слабостью взаимодействия атомов гелия и наличием квантовых эффектов.

Один из возможных видов энергетического спектра слабо возбужденных состояний квантовой жидкости соответствует ситуации, в которой элементарные возбуждения появляются и исчезают поодиночке. Момент импульса всякой квантовомеханической системы может изменяться лишь на целое число (в единицах постоянной Планка  $\hbar$ ). Поэтому появляющиеся поодиночке элементарные возбуждения должны обладать целочисленным моментом импульса и, соответственно, быть бозонами. Всякая жидкость, состоящая из атомов с целочисленным спином, должна обладать спектром такого (бозевского) типа.

Таким спектром обладает жидкий гелий He<sup>4</sup>. Предложенная Ландау и подтвержденная экспериментами по рассеянию нейтронов кривая  $\varepsilon(p)$  для спектра возбуждений имеет вид, показанный на рис. 2.1.

В тепловом равновесии большинство элементарных возбуждений (квазичастиц) в жидкости имеет энергии вблизи минимумов функции  $\varepsilon(p)$ , т.е. в области малых  $\varepsilon = up$  (фононы) и в области вблизи значения  $\varepsilon(p_0) = \Delta$ , где функция  $\varepsilon(p)$  может быть разложена в ряд по степеням  $(p - p_0)$ , причем линейный член в разложении отсутствует:

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*} \text{ (ротон)},$$

Рис. 2.1: Спектр возбуждений в жидком  $\text{He}^4$ 

где  $m^*$  - эффективная масса. Наличие энергетической щели  $\Delta$  для ротонов играет решающую роль для существования сверхтекучести в жидком гелии. Кривая для спектра возбуждений обрывается при больших импульсах, поскольку элементарные возбуждения со слишком большими импульсами неустойчивы и распадаются на несколько возбуждений с меньшими импульсами.

Итак, квантовая жидкость с энергетическим спектром описанного типа должна обладать свойством сверхтекучести - свойством протекать по узким капиллярам или щелям, не обнаруживая вязкости.

Жидкость при  $T = 0$  находится в невозбужденном состоянии. Пусть такая жидкость течет по капилляру с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ . При наличии вязкости, благодаря трению о стенки капилляра и трению внутри самой жидкости, происходило бы уменьшение кинетической энергии жидкости и, следовательно, постепенное замедление её течения. Перейдем в систему координат, в которой жидкость неподвижна, а капилляр движется со скоростью  $-\mathbf{v}$ . Тогда, при наличии вязкости, должно происходить увлечение жидкого гелия стенками капилляра. Но это увлечение должно начаться с постепенного возбуждения внутренних движений - элементарных возбуждений. Энергию кванта возбуждения обозначим  $\varepsilon(\mathbf{p})$ , где  $\mathbf{p}$  - импульс. Поскольку первоначально гелий покоился, то  $\varepsilon(\mathbf{p})$  и  $\mathbf{p}$  - энергия и импульс гелия соответственно. Возвращаясь в систему отчета, где гелий движется, а капилляр неподвижен, получаем по правилам преобразования при относительном движении, что энергия кванта возбуждения станет равной  $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}$ . Тогда энергия движущегося гелия равна

$$E = \varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2},$$

где  $M$  - масса жидкости. Поскольку энергия движущейся жидкости должна уменьшаться, то  $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}$  должно быть отрицательно:

$$\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v} < 0.$$

Минимальное значение  $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}$  достигается при рождении кванта с импульсом  $\mathbf{p} \parallel (-\mathbf{v})$ , т.е. должно выполняться неравенство  $\varepsilon - pv < 0$  или

$$v > \frac{\varepsilon}{p}.$$

Это неравенство должно выполняться хотя бы для некоторых значений импульса  $p$ . Вводя обозначение  $v_0 = (\varepsilon/p)_{\min}$ , можно записать *критерий сверхтекучести Ландау* в виде

$$v < v_0 \quad . \quad (2.1)$$

Для фононов  $v_0 = u = 2.39 \cdot 10^4$  см/с, а для ротонов  $v_0 \approx \frac{\Delta}{p_0} = 5.8 \cdot 10^3$  см/с.

При  $T \neq 0$  в гелии не могут возникать новые возбуждения при  $v < v_0$ , но уже имеющиеся тепловые возбуждения могут взаимодействовать со стенками капилляра. Оказывается, что в жидком гелии при  $T \neq 0$  возможны два вида движения, происходящие в каждой порции жидкости - сверхтекучее и нормальное.

## 2.2 Квантовая теория неидеального бозе-газа

### 2.2.1 Гамильтониан неидеального бозе-газа

Учитывая выражения для оператора кинетической энергии (1.63) и для оператора парного взаимодействия частиц в представлении вторичного квантования (1.73), гамильтониан неидеального бозе-газа можно записать в виде:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \widehat{V} | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \rangle b_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} \quad , \quad (2.2)$$

где необходимо учитывать закон сохранения импульса  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$  (импульс в жидкости истинный в отличие от твердого тела!). Матричный элемент  $\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \widehat{V} | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \rangle$  на собственных функциях оператора импульса имеет вид:

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \widehat{V} | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \rangle = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_{\mathbf{k}_1}^*(\mathbf{r}_1) \varphi_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r}_2) V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \varphi_{\mathbf{k}_3}(\mathbf{r}_2) \varphi_{\mathbf{k}_4}(\mathbf{r}_1), \quad (2.3)$$

где  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  (здесь и далее  $\Omega$  - объем жидкости). Тогда

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \widehat{V} | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}_1} V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}_2}. \quad (2.4)$$

Введем вектор  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . В этом случае в переменных  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{r}_1$  выражение (2.4) принимает следующую форму:

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \widehat{V} | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \int d\mathbf{r}_1 d\boldsymbol{\rho} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}_1} V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho})}. \quad (2.5)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r}_1 e^{i(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2))\mathbf{r}_1} = 1$$

и

$$\int d\boldsymbol{\rho} V(\boldsymbol{\rho}) e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)\boldsymbol{\rho}} = V_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2} = V_{\mathbf{q}} \quad (2.6)$$

- фурье-образ потенциальной энергии, получаем следующее выражение:

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \widehat{V} | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 \rangle = \frac{V_{\mathbf{q}}}{\Omega}. \quad (2.7)$$

Предположим, что парное взаимодействие короткодействующее (отталкивание) и описывается потенциалом Юкавы:

$$V(\rho) = \frac{a}{\rho} e^{-q_0 \rho}. \quad (2.8)$$

Легко получить, что

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi a}{q^2 + q_0^2}, \quad (2.9)$$

и если  $q \ll q_0$ , то  $V_{\mathbf{q}}$  практически константа. При низких температурах импульс возбуждений мал, условие  $q \ll q_0$  выполняется. Более того, можем заменить фурье-образ потенциала его значением при  $q = 0$ , а отношение  $\frac{V_0}{\Omega}$  вновь обозначим через  $V_0$  ( $V_0$  - это энергия!). В итоге гамильтониан системы принимает вид:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} V_0 b_{\mathbf{k}_1}^+ b_{\mathbf{k}_2}^+ b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4}. \quad (2.10)$$

## 2.2.2 Гамильтониан неидеального бозе-газа. Приближение Боголюбова

Исходным пунктом теории Боголюбова является то обстоятельство, что при  $T \rightarrow 0$  основная часть частиц находится в состоянии с импульсом  $\mathbf{k} = 0$ . Для идеального газа при  $T = 0$  они все находятся в состоянии с импульсом  $\mathbf{k} = 0$ , т.е.  $N_{\mathbf{k}=0} = N_0 = N$ , где  $N$  - полное число частиц. Поскольку

$$\langle 0 | b_0^+ b_0 | 0 \rangle = N_0, \quad b_0 b_0^+ - b_0^+ b_0 = 1, \quad N_0 \gg 1,$$

то операторы  $b_0$  и  $b_0^+$  можно считать  $c$ -числами:

$$b_0 = b_0^+ = \sqrt{N_0}. \quad (2.11)$$

Поэтому  $H_{\text{int}}$  можно разложить в ряд по малым  $b_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}^+$  с  $\mathbf{k} \neq 0$  и ограничиться только квадратичными слагаемыми по бозонным операторам с  $\mathbf{k} \neq 0$ :

$$\sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} b_{\mathbf{k}_1}^+ b_{\mathbf{k}_2}^+ b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} = N_0^2 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} N_0 (b_{\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+ + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) + 4N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}. \quad (2.12)$$

Тогда гамильтониан системы (2.10) с учетом (2.12) принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} V_0 N_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} V_0 N_0 (4b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+ + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}). \quad (2.13)$$

Выразим  $N_0$  через полное число частиц в системе  $N$ :

$$N_0 = N - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}},$$

тогда с точностью до квадратичных слагаемых по бозонным операторам имеем

$$N_0^2 = N^2 - 2N \sum_{\mathbf{k} \neq 0} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.13) и ограничиваясь только квадратичными по бозонным операторам слагаемыми, получаем

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} V_0 N^2 - V_0 N \sum_{\mathbf{k} \neq 0} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} V_0 N (4b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+ + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) \\ &= \frac{1}{2} V_0 N^2 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ (\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} V_0 N (b_{\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+ + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Гамильтониан неидеального бозе-газа. Каноническое преобразование Боголюбова

Для нахождения спектра элементарных возбуждений надо диагонализировать гамильтониан (2.15). Квадратичная форма приводится к диагональному виду с помощью преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^+, \\ \beta_{\mathbf{k}}^+ &= u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Новые операторы  $\beta_{\mathbf{k}}$  и  $\beta_{\mathbf{k}}^+$  должны быть бозонными и, следовательно, должны удовлетворять бозонным коммутационным соотношениям

$$[\beta_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}^+] = u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1, \quad (2.17)$$

$$[\beta_{\mathbf{k}}, \beta_{-\mathbf{k}}] = u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}} = 0. \quad (2.18)$$

Для выполнения (2.18) положим  $u_{\mathbf{k}} = u_{-\mathbf{k}}$  и  $v_{-\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}$ , т.е. считаем  $u$  и  $v$  четными функциями  $\mathbf{k}$ . Тогда обратное преобразование Боголюбова имеет вид:

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{k}}^+, \\ b_{\mathbf{k}}^+ &= u_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^+ - v_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теперь потребуем, чтобы в новых операторах гамильтониан (2.15) был диагонален

$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} E_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^+ \beta_{\mathbf{k}}, \quad (2.20)$$

следовательно,

$$[\beta_{\mathbf{k}}, H] = E_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}. \quad (2.21)$$

Коммутатор  $[\beta_{\mathbf{k}}, H]$  представим через старые операторы

$$\left[ u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^+, \frac{1}{2} V_0 N^2 + \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \left\{ (\varepsilon_{\mathbf{k}'} + V_0 N) b_{\mathbf{k}'}^+ b_{\mathbf{k}'} + \frac{1}{2} V_0 N (b_{\mathbf{k}'}^+ b_{-\mathbf{k}'}^+ + b_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}'}) \right\} \right].$$

Возникающие при этом коммутаторы равны:

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^+, b_{\mathbf{k}'}] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}^+, & [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^+, b_{-\mathbf{k}'}^+] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}'}^+ + \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}^+, \\ [b_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{k}'}^+, b_{\mathbf{k}'}] &= -\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}^+, & [b_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{k}'}^+, b_{-\mathbf{k}'}^+] &= -\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}'}^+ - \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}^+. \end{aligned}$$

Тогда (2.21) принимает вид

$$\begin{aligned} &u_{\mathbf{k}} \{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) b_{\mathbf{k}} + V_0 N b_{-\mathbf{k}}^+\} + v_{\mathbf{k}} \{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) b_{-\mathbf{k}}^+ - V_0 N b_{\mathbf{k}}\} \\ &= E_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^+. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Приравнивая коэффициенты при операторах  $b_{\mathbf{k}}$  и  $b_{-\mathbf{k}}^+$  в левой и правой частях выражения (2.22), получаем:

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) u_{\mathbf{k}} - V_0 N v_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}, \quad (2.23)$$

$$V_0 N u_{\mathbf{k}} - (\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) v_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}. \quad (2.24)$$

Перепишем эту систему линейных однородных уравнений относительно  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$  в стандартном виде:

$$\{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) - E_{\mathbf{k}}\} u_{\mathbf{k}} - V_0 N v_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.25)$$

$$V_0 N u_{\mathbf{k}} - \{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) + E_{\mathbf{k}}\} v_{\mathbf{k}} = 0.$$

Поскольку нас интересуют нетривиальные решения системы (2.25), то её определитель полагаем равным нулю:

$$\det = E_{\mathbf{k}}^2 - (\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N)^2 + (V_0 N)^2 = 0,$$

откуда находим спектр элементарных возбуждений

$$E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2V_0 N \varepsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (2.26)$$

Поскольку ищем энергию возбуждений над основным состоянием, то физический смысл имеет только знак "плюс".

Теперь найдем  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$ . Умножая (2.23) на  $v_{\mathbf{k}}$ , а (2.24) на  $u_{\mathbf{k}}$ , затем складывая по отдельности левые и правые части получающихся выражений, получаем в итоге:

$$(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) V_0 N = 2E_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}. \quad (2.27)$$

Учтем, что согласно (2.17)

$$u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1,$$

тогда (2.27) можно привести к виду

$$2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = \frac{V_0 N}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (2.28)$$

Исходя из последних двух соотношений (2.17) и (2.28), удобно искать выражения для  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$  через гиперболические функции:

$$u_{\mathbf{k}} = \cosh \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2}, \quad v_{\mathbf{k}} = \sinh \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (2.29)$$

Тогда соотношение (2.17) выполняется автоматически, а (2.28) преобразуется к виду

$$2 \cosh \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \sinh \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} = \sinh \theta_{\mathbf{k}} = \sqrt{\cosh^2 \theta_{\mathbf{k}} - 1} = \frac{V_0 N}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (2.30)$$

Отсюда

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \cosh^2 \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} = \frac{1}{2} [\cosh \theta_{\mathbf{k}} + 1] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2V_0 N \varepsilon_{\mathbf{k}}}} \right], \quad (2.31)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \sinh^2 \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} = \frac{1}{2} [\cosh \theta_{\mathbf{k}} - 1] = \frac{1}{2} \left[ -1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2V_0 N \varepsilon_{\mathbf{k}}}} \right]. \quad (2.32)$$

Энергия основного состояния  $E_0$  при  $T = 0$  (см. (2.20)) может быть найдена путем подстановки обратного преобразования Боголюбова (2.19) в гамильтониан (2.15):

$$E_0 = \frac{1}{2} V_0 N^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N) - E_{\mathbf{k}}]. \quad (2.33)$$

Спектр элементарных возбуждений  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2V_0 N \varepsilon_{\mathbf{k}}}$  при малых  $k$  и больших  $k$  имеет вид:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2V_0 N \varepsilon_{\mathbf{k}}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{V_0 N}{m}} \hbar k & (\text{малые } k), \\ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} & (\text{большие } k). \end{cases} \quad (2.34)$$

Таким образом, элементарные возбуждения в слабо взаимодействующей конденсированной бозе-системе имеют характер звука при малых импульсах  $\hbar k$  (звук Боголюбова), и они непрерывно переходят к свободным частицам со спектром  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  при больших  $\hbar k$ , см. рис. 2.2. Отметим, что скорость звука  $u = \sqrt{\frac{V_0 N}{m}}$  совпадает со стандартной скоростью звука в газе с плотностью  $\frac{N}{\Omega}$  и потенциалом взаимодействия  $V_0 = V_{\mathbf{q}=0}$ .

## 2.2.4 Неидеальный бозе-газ. Число частиц в конденсате

Число частиц в системе можно записать как

$$N = N_0 + \left\langle \sum_{\mathbf{k} \neq 0} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \right\rangle, \quad (2.35)$$

где статистическое среднее  $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$ , статистический оператор  $\rho = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H)$ ,  $\beta = T^{-1}$ ,  $H$  - гамильтониан системы (2.20). Используя (2.19), представим (2.35) в виде:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \langle (u_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^+ - v_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{k}}) (u_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{k}}^+) \rangle \\ &= N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [(u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) \langle \beta_{\mathbf{k}}^+ \beta_{\mathbf{k}} \rangle + v_{\mathbf{k}}^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $T = 0$  (см. (2.32))

$$N_0 = N - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_{\mathbf{k}}^2 = N - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{2} \left[ -1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2V_0 N \varepsilon_{\mathbf{k}}}} \right] = N - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} N_{\mathbf{k}}.$$

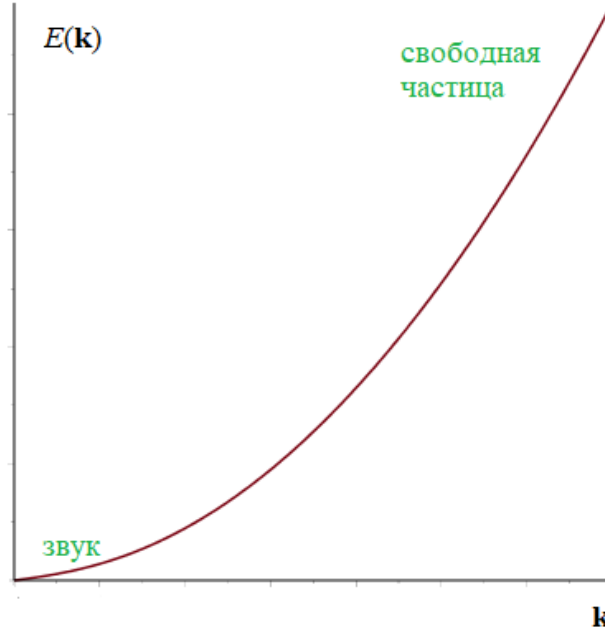


Рис. 2.2: Спектр элементарных возбуждений в слабо взаимодействующей конденсированной бозе-системе

Отсюда распределение частиц по импульсам при  $T = 0$  равно (с учетом (2.26)):

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left[ \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N)^2} - E_{\mathbf{k}} \right] = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{(V_0 N)^2}{E_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} + V_0 N}.$$

Следовательно, при учете взаимодействия (отталкивания) частицы продолжают двигаться даже при  $T = 0$  в отличие от идеального бозе-газа.

### 2.2.5 Реальный гелий

В реальном гелии существует одно важное отличие по отношению к предыдущему подходу, а именно: атомы  $\text{He}^4$  взаимодействуют сильно! В результате не существует микроскопической теории сверхтекучести жидкого  $\text{He}^4$  (нет малого параметра - слабого взаимодействия, что было использовано в приведенном выше подходе). Тем не менее основные концепции, описанные ранее, применяются с некоторыми модификациями также и к этому случаю сильного взаимодействия.

Действительное число атомов в конденсате  $N_0$  конечно, даже при  $T = 0$  оно довольно мало:  $\frac{N_0}{N} \sim 0.08 \div 0.1$ . Действительный спектр элементарных возбуждений представлен на рис. 2.1. При малых  $k$  (при малых импульсах  $\hbar k$ ) возбуждения являются фононами (как и в случае слабого взаимодействия, см. выражение (2.34) и рис. 2.2) с линейным законом дисперсии  $E_{\mathbf{k}} = u p_{\mathbf{k}} = u \hbar k$ , где  $u$  - скорость звука. В действительном спектре элементарных возбуждений при больших  $k$  существует дополнительный минимум - так называемые ротоны, а в приближении слабого взаимодействия этому участку спектра соответствуют свободные частицы. Физически ротонный минимум есть следствие сильного взаимодействия в жидкости, он отражает тенденцию к кристаллизации. Под давлением ротонный минимум становится



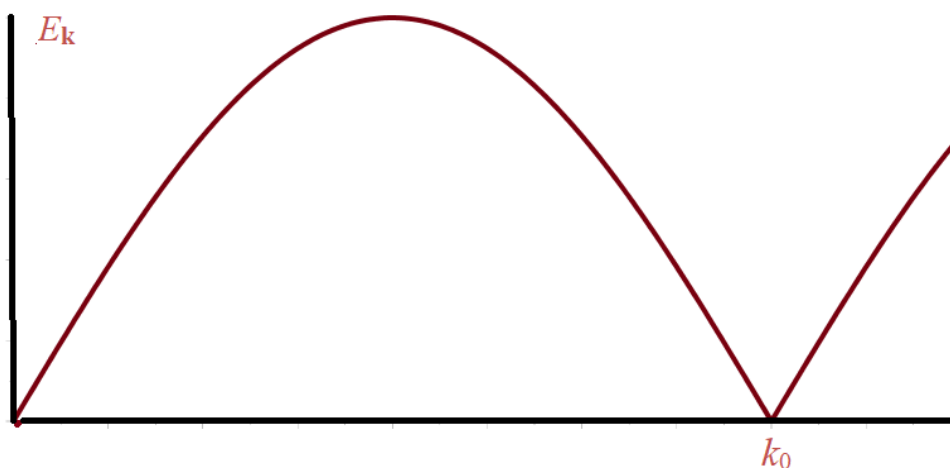
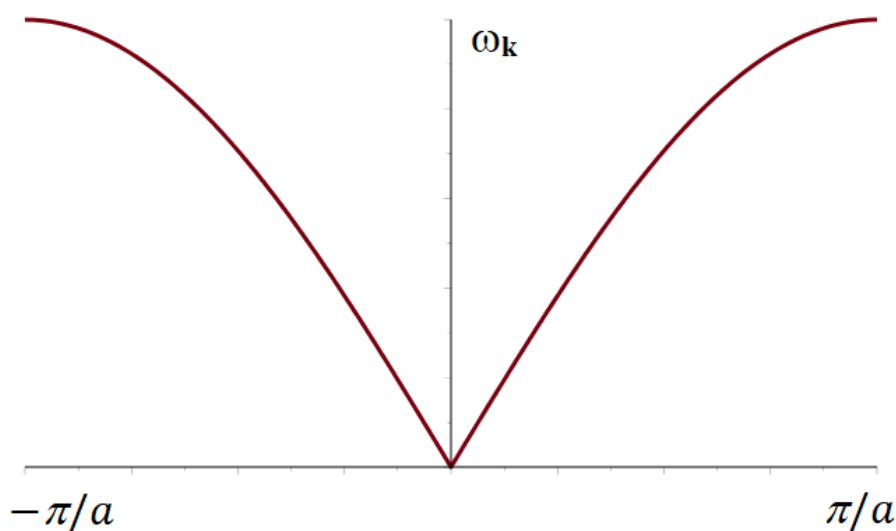
Рис. 2.3: Спектр возбуждений при  $E_{\mathbf{k}_0} = 0$ 

Рис. 2.4: Фононный спектр в первой зоне Бриллюэна для одномерного простого кристалла

все глубже, и когда  $E_{\mathbf{k}_0}$  достигает нуля (см. рис. 2.3) соответствующая мода становится нестабильной с положительным инкрементом, т.е. будет развиваться большая стоячая волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  (периодом  $a = \frac{2\pi}{k_0}$ ), что сигнализирует об образовании кристалла.

Сравним эту ситуацию с фононами в одномерном простом кристалле. Фононный (акустические фононы) спектр в первой зоне Бриллюэна имеет вид, схематически представленный на рис. 2.4. В схеме расширенной (протяженной) зоны он может быть представлен в виде рис.2.5 для больших  $k$ .

Если нет дальнего кристаллического порядка, но есть только ближний порядок, характерный для жидкостей, то спектр не должен обращаться в нуль при  $k = \frac{2\pi}{a}$ , но должен удерживать минимум при этом волновом числе (которое, конечно, должно иметь мнимую часть, что говорит о сильном затухании). Таким образом, имеется близкая аналогия между этой ситуацией и ротонами в жидком гелии (см. рис. 2.1 и

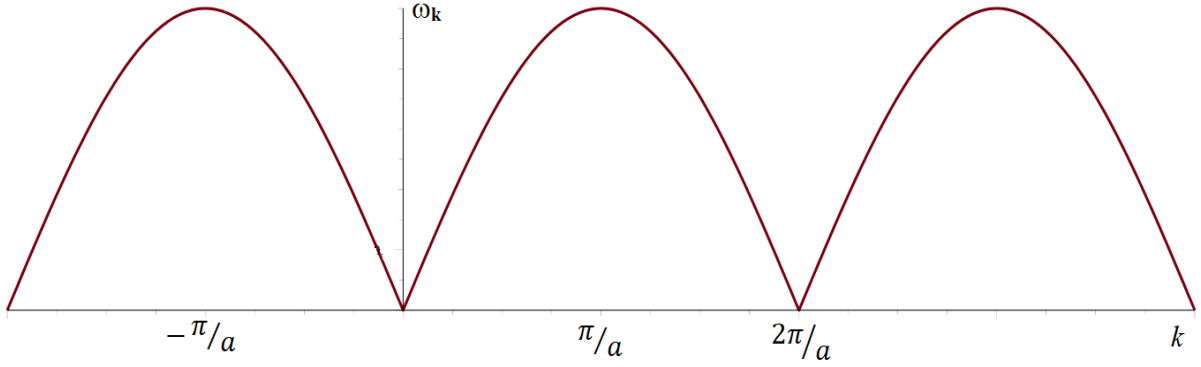


Рис. 2.5: Фононный спектр в схеме расширенной зоны

рис. 2.3). Отметим, что ротонный минимум не есть что-то специфическое для жидкого  $\text{He}^4$ . В принципе такой минимум должен существовать в любой жидкости, близкой к точке плавления. Важное различие заключается в том, что в обычных жидкостях эти возбуждения с короткими длинами волн чрезвычайно сильно подавлены, так что нет какого-либо значительного отклика от них, в то время как они являются хорошо определяемыми возбуждениями в сверхтекучей фазе  $\text{He}^4$ . Эти аргументы являются, конечно, только качественными. Однако их можно подтвердить более аккуратно. Р. Фейнман получил (1954 г.), что спектр элементарных возбуждений в  $\text{He}^4$  может быть записан как

$$E_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2mS(p)}, \quad (2.36)$$

где  $S(p)$  есть статический структурный фактор, описывающий пространственную корреляцию атомов в жидкости (статический структурный фактор непосредственно связан с функцией парного распределения).

При малых импульсах  $p$  статический структурный фактор  $S(p) = \frac{p}{2mu}$ , где  $u$  - скорость звука Боголюбова ( $u = \sqrt{\frac{V_0 N}{m}}$ ), так что спектр (2.36) переходит в  $E_{\mathbf{p}} = up$ , т.е. в спектр фононов.

Однако для больших  $p$   $S(p)$  имеет максимум при величине  $p_0 \sim \frac{\hbar}{d_0}$ , где  $d_0$  - типичное расстояние между атомами гелия (порядка постоянной решетки твердого  $\text{He}^4$  при высоких давлениях). Это говорит о том, что вероятность нахождения атома на расстоянии  $d$  от данного атома является максимальной при  $d \sim d_0$ . Соответственно, спектр (2.36) будет иметь минимум при  $p \sim p_0$ , который есть не что иное, как ротонный минимум на рис. 2.1 ( $\Delta = \frac{p_0^2}{2mS(p_0)}$ ).

## 2.2.6 Бозе-конденсация как фазовый переход

В бозе-конденсации и сверхтекучести параметр порядка  $\eta \sim \langle \hat{b}_0 \rangle$  (он равен нулю выше  $T_c$  и не ноль в фазе бозе-конденсации). Он - комплексный скаляр

$$\langle \hat{b}_0 \rangle = b_0 = \sqrt{N_0} \exp(i\varphi). \quad (2.37)$$

При фазовом переходе (при  $T < T_c$ ) его фаза становится фиксированной, т.е. сверхтекучее состояние является когерентным состоянием (фазовая когерентность). Но

число частиц в конденсате  $N_0$  флуктуирует. Операторы  $\hat{N}_0$  и  $\hat{\varphi}$  являются операторами канонически сопряженных величин, которые удовлетворяют соотношению неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta N_0 \cdot \Delta \varphi \geq 1.$$

Бозе-конденсация есть, таким образом, фазовый переход с нарушением непрерывной симметрии - калибровочной симметрии (фиксирование фазы  $\varphi$ , которая является непрерывной переменной). Соответственно, звук Боголюбова есть так называемая мода Голдстоуна для этой нарушенной симметрии. Голдстоун показал, что нарушение непрерывной симметрии обязательно влечет за собой появление частицы с нулевым спином - голдстоуновского бозона. Это дает основание объяснить отсутствие бозе-конденсации при любых  $T \neq 0$  в 1D и 2D системах: флуктуации фазы, вызванные возбуждением этой бесщелевой моды, настолько сильны, что в 1D и 2D случаях они разрушают дальний порядок при любой конечной температуре.

Тот факт, что параметр порядка в бозе-конденсированной и сверхтекучей системе является комплексным скаляром, позволяет установить соответствие с другой системой с той же симметрией, а именно с анизотропной спиновой системой - так называемой  $xy$ -моделью, в которой спины ограничены  $xy$ -плоскостью. В этом случае параметр порядка имеет вид  $s = |s| \exp(i\varphi)$ , где угол  $\varphi$  определяет ориентацию спина в  $xy$ -плоскости. Можно использовать эту аналогию путем "заимствования" концепций и результатов из одной области и применением их к другой. Отметим, что концепция вихрей, впервые введенная при исследовании сверхтекучего  $\text{He}^4$ , была "транслирована" к магнитным вихрям.

Обобщая описание бозе-конденсированного состояния на случай с пространственными неоднородностями, мы должны рассматривать параметр порядка  $\eta$  как функцию радиуса-вектора. Наиболее важным является изменение в пространстве фазы  $\varphi(\mathbf{r})$ . Можно показать, что градиент фазы определяет локальную сверхтекучую скорость в системе:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi. \quad (2.38)$$

Описанная выше коллективная мода - звук Боголюбова есть преимущественно осцилляции фазы  $\varphi$  и скорости  $\mathbf{v}_s$  (или локальных токов).

Когда мы говорили о критерии сверхтекучести Ландау (2.1), то привели для реального  $\text{He}^4$  значение скорости звука  $u = 2.4 \cdot 10^4$  см/с =  $v_0$  для фононов - эта скорость очень велика. Экспериментально диссипация начинается при значительно меньших скоростях. Одно из возможных объяснений есть реальный спектр (см. рис. 2.1) и  $v_0 = \frac{\Delta}{\rho_0} = 5.8 \cdot 10^3$  см/с - критическая скорость определяется ротонами. Но в действительности даже эта скорость очень велика, а возбуждения, определяющие критическую скорость в объемном гелии в большинстве экспериментов, являются особыми топологическими возбуждениями - вихрями. Только в случаях, когда образование вихрей подавлено вследствие ограниченной геометрии, например в тонких пленках  $\text{He}^4$  или в очень узких капиллярах, критическая скорость определяется ротонами. Мы говорили о двухкомпонентном описании жидкого  $\text{He}^4$ , т.е. о нормальной и сверхтекучей компонентах с общей плотностью  $\rho = \rho_{\text{norm}} + \rho_s$ . Такая двухпоточковая картина (Л. Тисса) дает очень полезное феноменологическое описание многих свойств сверхтекучего гелия. Оно также широко используется для описания многих свойств сверхпроводников. Надо понимать, что это только способ интерпретации

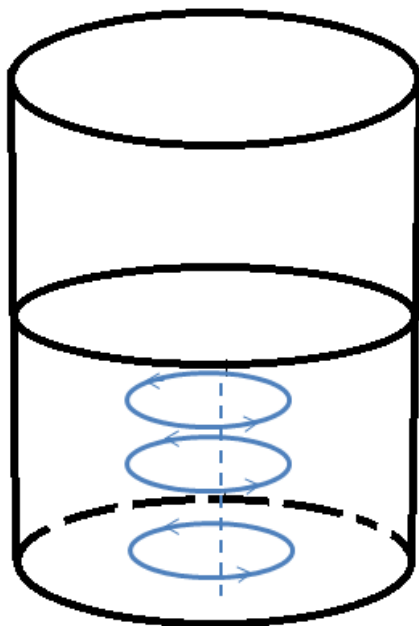


Рис. 2.6: Вихри в сверхтекучем гелии в цилиндрическом сосуде

свойств этих систем. Нельзя считать, что некоторые атомы двигаются без диссипации, в то время как другие испытывают трение. В действительности одни и те же атомы показывают оба типа поведения, а реальное значение этих двух “потоков” заключается в том, что нормальная компонента состоит из элементарных возбуждений - коллективных мод жидкости как целой.

### 2.2.7 Вихри в сверхтекучем $\text{He}^4$

Как мы уже отмечали, есть другой, очень важный тип возбуждения в сверхтекучей жидкости - топологические возбуждения, или вихри. Если начать вращать сосуд, содержащий сверхтекучую жидкость, то вначале жидкость остается в покое. Однако, начиная с определенной критической угловой скорости, в жидкости будет образовываться вихрь - круговое движение сверхтекучего потока вокруг определенной линии, называемой сердцевинкой (кором) вихря. В результате некоторое вращение передается жидкости, т.е. жидкость начинает принимать участие во вращении. В цилиндрическом сосуде вихри возникают у дна и поднимаются до верхней поверхности жидкости (рис. 2.6). Вихри не могут быть прерваны и не могут быть разрушены внутри жидкости.

Используя (2.38), покажем, что циркуляция скорости вокруг вихря должна быть квантована:

$$\oint_c \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint_c \nabla \varphi d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint_c d\varphi = \frac{\hbar}{m} \Delta\varphi.$$

Общая волновая функция сверхтекучей жидкости должна быть однозначной функ-

цией, что означает  $\Delta\varphi = 2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Итак,

$$\oint_c \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad (2.39)$$

т.е. действительно квантуется. Такое квантование есть проявление квантовой природы сверхтекучести и подтверждает её интерпретацию как “макроскопического квантового явления”, когда вся система описывается одной квантовой волновой функцией

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N_0} \exp [i\varphi(\mathbf{r})].$$

Упомянутый выше факт, что вихрь не может заканчиваться внутри жидкости, действительно связан с этим свойством. Если бы это было не так, то путем непрерывного деформирования контура  $c$  в (2.39) таким способом, что он был бы “над” концом вихря, мы могли бы сжать контур  $c$  до нуля, с нулевой циркуляцией в противоположность конечной (квантованной) величине (2.39), с которой мы начали. Вот почему вихри действительно являются топологическими возбуждениями.

Более сложная ситуация в сверхтекучих системах с более сложным параметром порядка, как в жидком  $\text{He}^3$ . В этих случаях пространство параметра порядка отлично от такового для  $\text{He}^4$ , в котором параметр порядка “живет” на кольце (окружности)  $\eta = |\eta| \exp(i\varphi)$  с  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Поэтому типы и свойства топологических возбуждений в таких системах (включая вихри) могут существенно отличаться от таковых для  $\text{He}^4$ .

Как ранее было сказано, в большинстве экспериментов критическая скорость в жидком гелии определяется не скоростью звука и даже не ротонами, а возбуждениями вихрей в движущемся жидком гелии. Вихри порождаются до достижения критической скорости для возбуждения звуковых квантов (фононов) или ротонов, и именно их (вихрей) рождение и движение приводит к диссипации. Во вращающемся цилиндре вихри параллельны оси вращения (рис. 2.7).

В жидкости, текущей через капилляр, вихри образуют кольца вихрей (рис. 2.8). Как было отмечено, вихри не могут быть разрушены внутри жидкости, они разрушаются на поверхности жидкости или образуют замкнутые линии, как в этих кольцах.

Многие явления, описанные выше, встречаются также в сверхпроводниках (они даже значительно лучше известны!). Так, общее описание сверхпроводимости как макроскопического квантового явления в значительной степени похоже на данное выше. Критерий Ландау существования супертоков без затухания работает здесь также хорошо, а представление о квантованных вихрях, приводящих к диссипации, играет очень важную роль в физике сверхпроводимости. Речь идет о так называемых сверхпроводниках второго рода, к которым принадлежат все практически важные сверхпроводящие материалы, включающие высокотемпературные сверхпроводники. Теоретическая работа А.А. Абрикосова и В.Л. Гинзбурга принесла им нобелевскую премию по физике в 2003 году.

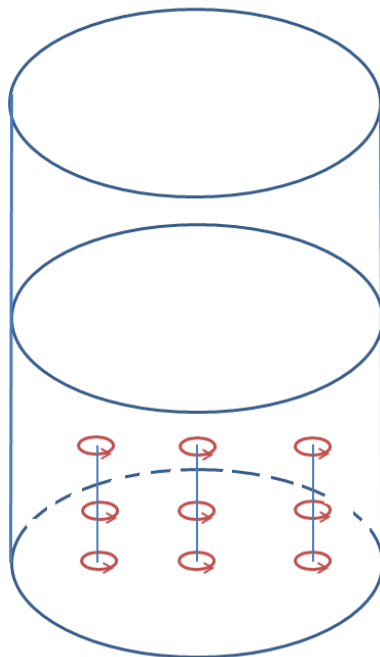


Рис. 2.7: Система вихрей во вращающемся цилиндре

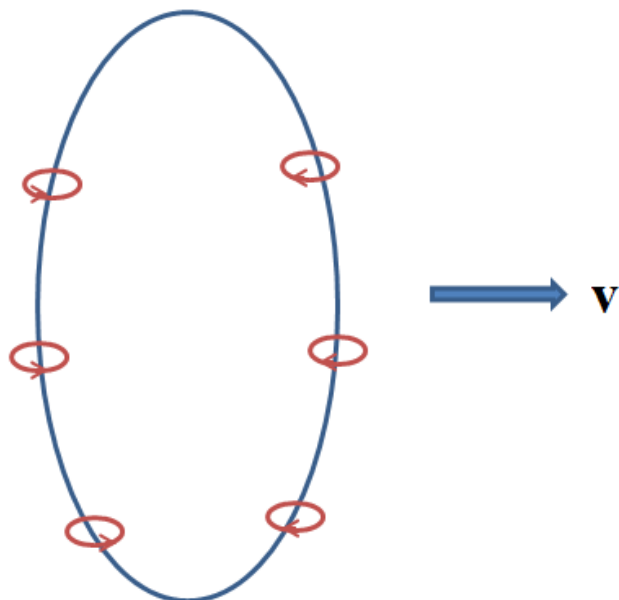


Рис. 2.8: Кольцо вихрей в жидкости, текущей через капилляр

# Литература

1. Брандт Н.Б., Кульбачинский В.А. Квазичастицы в физике конденсированного состояния. — М.: Физматлит, 2005. — 632 с.
2. Каганов М.И., Лифшиц И.М. Квазичастицы. Идеи и принципы квантовой физики твёрдого тела. — М.: Наука, 1989. — 96 с.
3. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах. — М. : Мир, 1965. — 383 с.
4. Khomskii D.I. Basic Aspects of the Quantum Theory of Solids. Order and Elementary Excitations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 302 p.

Деминов Рафаэль Гарунович  
Кочелаев Борис Иванович

КОЛЛЕКТИВНЫЕ  
ВОЗБУЖДЕНИЯ  
В КОНДЕНСИРОВАННЫХ  
СРЕДАХ

ЧАСТЬ 1  
ФОРМАЛИЗМ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ  
КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ  
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

2022