КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра прикладной математики

Д.Х. Гиниятова, М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Казань — 2022

УДК 512.6+514.12(076.1)

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМиИТ
Протокол № 7 от 28 января 2022 года

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент КФУ **Д.Н. Тумаков**
кандидат физ.-мат. наук, доцент КФУ **И.Е. Филиппов**

Гиниятова Д.Х., Павлова М.Ф., Рунг Е.В.

Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие / Д.Х. Гиниятова, М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг. — Казань, 2022. — 167 с.

Предназначено для студентов института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлению "Информационные системы и технологии". По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения и приводятся задачи для самостоятельного решения.

Оглавление

Введение

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по курсу линейной алгебры и предназначено для студентов Института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлениям "Информационные системы и технологии".

Следует отметить, что дисциплина линейная алгебра читается студентам в первых двух семестрах первого курса и состоит из лекций и практических занятий. Данное пособие содержит материал для проведения практических занятий в первом и втором семестрах. В разделе "Основные понятия и теоремы" приводятся без доказательства основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. В разделе "Задачи для самостоятельного решения" приведен определенный минимум упражнений, достаточный для усвоения основных приемов решения задач по каждой теме.

Комплексные числа и многочлены

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 1. Число $i = \sqrt{-1}$ называют *мнимой единицей* и для его обозначения используют букву i, т.е. $i^2 = -1$.

Определение 2. Запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексных чисел. Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a+bi$ и обозначается $a = \mathrm{Re}\ z$, действительное число b называют *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$ (обозначается $b = \mathrm{Im}\ z$).

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме выполняются следующие операции:

1) Два комплексных числа $z_1 = a_1+b_1i$ и $z_2 = a_2+b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, то есть когда равны соответственно действительные и мнимые части комплексных чисел.

Замечание 1. Операции сравнения для комплексных чисел не определены. Поэтому понятий "больше" и "меньше" для комплексных чисел не существует. Записи $i < 1$, $2 + i > 0$ лишены всякого смысла.

2) Операции сложения и вычитания выполняются по формулам:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \tag{1}$$

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i. \tag{2}$$

3) Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производится следующим образом:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i. \tag{3}$$

4) Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$, то есть числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Число, сопряженное к z обозначается $\bar{z}$. Сумма $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$ — всегда действительное число, а произведение $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ — неотрицательное число.

5) Деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме выполняется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \quad (4)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $z_1 + z_2$, z_1z_2, $z_1 - z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\bar{z}_1 \cdot z_2$, если

a) $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 5 - 2i$,

b) $z_1 = 2 + 5i,\ z_2 = 1 - 7i$,

c) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i,\quad z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

2. Вычислить i^n, где n – натуральное число.

3. Представить z в алгебраической форме:

a) $z = \dfrac{41i^{18} + 63i^{37}}{50i^{16}} - \dfrac{6i + i^{20}}{i^8 - 7i}$, *b*) $z = \dfrac{13i^{16} + 12i}{6i + 8i^{10}} + \dfrac{(2i+1)^2}{i+2}$,

c) $z = \dfrac{5 + 12i}{8 - 6i} + \dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$, *d*) $z = \dfrac{2i^6 + i^{13}}{1 + i^5} + \dfrac{6i^9 - 6i^{44}}{5i^{100} - 2i^4}$.

4. Найти действительные значения x и y, при которых комплексные числа

a) $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$ и $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ являются сопряженными.

b) $z_1 = x^2 - 7x + 9yi$ и $z_2 = y^2i + 20i - 12$ равны.

5. Найти действительные x и y из уравнений:

a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$,

b) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$,

c) $x + y - ixy = i$.

6. Пусть $z = x + iy \neq 0$. Найти $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{\bar{z}^2}$.

7. Решить системы уравнений:

$a)$ $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$

8. Вычислить:

$a)$ $i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{100}$,

$b)$ $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$.

9. Выяснить при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

10. Найти комплексные числа, сопряженные своему квадрату.

11. Доказать, что:

1) комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$;

2) комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\bar{z} = -z$;

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Основные понятия, формулы и теоремы

Каждому комплексному числу $a + bi$ может быть поставлена в соответствие точка $M(a, b)$ плоскости и, наоборот, каждой точке $M(a, b)$ — комплексное число $(a, b) = a + bi$ (см. рис.1). Установленное таким образом соответствие является взаимно-однозначным.

Это соответствие дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Эта плоскость называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс – *действительной осью* (на ней расположены точки, соответствующие точкам $(a, 0) = a$), а ось ординат — *мнимой осью* (на ней лежат точки, соответствующие мнимым числам $(0, b) = bi$).

Комплексному числу $(a, b) = a + bi$ соответствует вектор $\overline{OM}$.

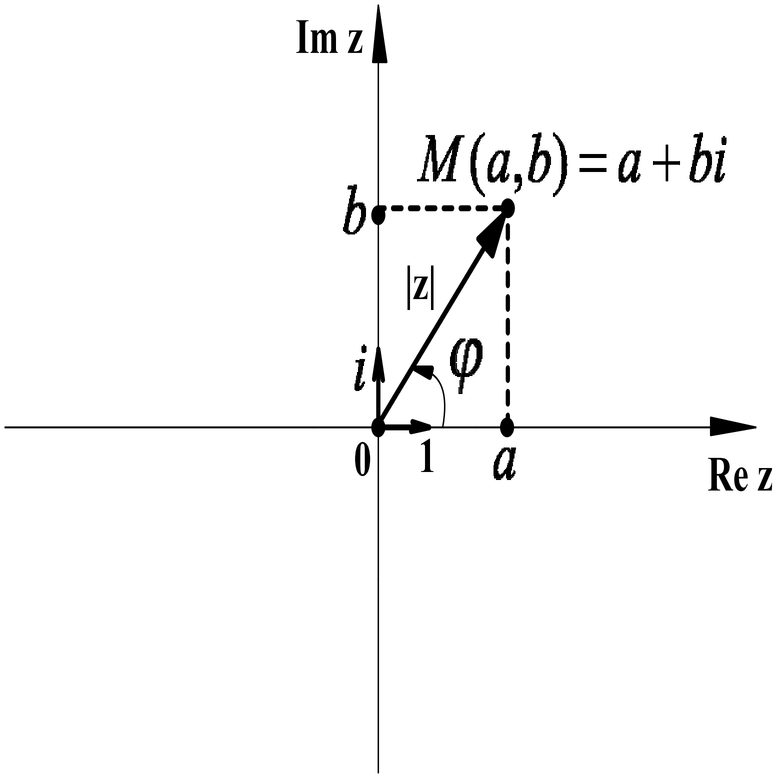

Рис. 1

Определение 3. *Модулем* комплексного числа $(a, b) = a + bi$ называется длина вектора, соответствующего этому числу.

Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. Легко можно доказать, что

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (5)$$

Определение 4. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем величина угла считается положительной, если отчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отчет производится по часовой стрелке.

Аргумент комплексного угла определяется неоднозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга на число, кратное 2π. Для обозначения всех аргументов комплексного числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg z$. Через φ обычно обозначают *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$, то есть $\varphi \in (-\pi, \pi]$ [1]. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + 0i$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно найти по формулам:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{6}$$

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно так же найти из следующего уравнения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

Уравнение (7) не равносильно системе (6), оно имеет больше решений, поэтому если учесть, что $-\pi < \varphi \leq \pi$, то из формулы (7) находим

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & \text{при } a \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi & \text{при } a < 0,\ b \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(b/a) - \pi & \text{при } a < 0,\ b < 0; \end{cases} \tag{8}$$

Определение 5. Каждое комплексное число $z = a + bi$, отличное от нуля, может быть записано в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{9}$$

где r – модуль числа, а φ – один (любой) из его аргументов. Форма записи комплексного числа в виде (9) называется *тригонометрической формой записи комплексных чисел.*

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + ib$ к тригонометрической необходимо:

1. Найти модуль $r = |z|$ комплексного числа, используя формулу (5).

2. Найти один из аргументов φ комплексного числа z, воспользовавшись формулой (8). Значения $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ основных табличных углов приведены на рисунке 13.

[1] В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0, 2\pi)$.

3. Записать число z в тригонометрической форме, используя равенство (9).

$\frac{b}{a}$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$a=0,\ b>0$	$a=0,\ b<0$
$arctg\left(\frac{b}{a}\right)$	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Рис. 2

Тригонометрическая форма записи комплексного числа оказывается очень удобной при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня.

Над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, можно выполнять следующие операции:

1) Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ равны тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

то есть когда модули чисел равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число.

2) Умножение двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ выполняется по следующей формуле:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big), \tag{10}$$

3) Деление двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ выполняется по следующей формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big), \tag{11}$$

4) Возведение комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень n следует из формулы:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \tag{12}$$

5) Число w называется *корнем степени* n из $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (обозначается $\sqrt[n]{z}$), если $w^n = z$.

Если $z \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа z. Все они получаются из формулы [2]

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Задачи для самостоятельного решения

12. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

$a)\ z = -1 + i,$	$b)\ z = \sqrt{3} - i,$	$c)\ z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot i,$	$d)\ z = 1 + \sqrt{3}\cdot i,$
$e)\ z = 16,$	$f)\ z = -1,$	$g)\ z = 4i,$	$h)\ z = -\sqrt{5}\cdot i,$
$i)\ z = \sqrt{3} + i,$	$j)\ z = -1 - i,$	$k)\ z = \sqrt{2} - \sqrt{6}\cdot i,$	$l)\ z = 8,$
$m)\ z = -16i,$	$n)\ z = -\sqrt{48} + 4i,$	$o)\ z = -32,$	$p)\ z = i.$

13. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$a)$ $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1,$

$b)$ $|z - 1| \geq |z - i|,$

$c)$ $\begin{cases} 1 \leq z\cdot\bar{z} \leq 4, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases}$

$d)$ $|z| < 2,\ \operatorname{Re} z \geq 1,\ 0 \leq \arg z < \dfrac{\pi}{4},$

$e)$ $\sin|z| > 0,$

$f)$ $(1 - i)\bar{z} = (1 + i)z,$

$g)$ $|z + 1 + 2i| \leq 0,$

$h)$ $\dfrac{\pi}{4}(8n + 1) < \arg(z + i) < \dfrac{\pi}{2}(4n + 1),\ n \in \mathbb{Z},$

$i)$ $\arg z = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$

[2] Формулы (12), (13) возведения в степень и извлечения корня часто называют формулами Муавра, так как именно в работах английского математика Абрахама де Муавра (1667–1754) была впервые решена задача о выражении корней степени n из данного числа.

$j)\quad \lg|z+i|<1,$

$k)\quad |z-2|^2+|z+2|^2=25,$

$l)\quad |z+i|<1,\ |z+1|\geq 1,$

$m)\quad |z-2-i|\geq 1,\ 1\leq \operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z\leq 3,$

$n)\quad |z+1|=|z-i|,$

$o)\quad |z|^2+3z+3\bar{z}=0,$

$p)\quad |z|=\operatorname{Re} z+1.$

14. Найти все значения корней из комплексного числа:

$a)\ \sqrt[3]{-4+i\sqrt{48}},\quad b)\ \sqrt[4]{-64},\quad c)\ \sqrt[3]{1},\quad d)\ \sqrt[8]{1+i}.$

15. Упростить число z и, если возможно, записать число z в алгебраической форме:

$$a)\quad z=\frac{(i-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i},$$

$$b)\quad z=(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$c)\quad z=\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)},$$

$$d)\quad z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13},$$

$$e)\quad z=(1+i)^{20},$$

$$f)\quad z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20},$$

$$g)\quad z=\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}},$$

$$h)\quad z=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+\sqrt{3}i)^7}{i^5}.$$

16. Возвести в натуральную степень n

$$a)\quad \left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n,$$

$$b)\quad \left(1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^n.$$

17. Пусть n – натуральное число. Доказать, что

$$a)\quad (1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$b)\quad (\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right),$$

$c)\quad \left(\dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}.$

3. Корни многочленов. Разложение многочлена на множители. Теорема Виета

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение корня многочлена

Определение 6. *Многочленом степени* n *с комплексными коэффициентами* называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \tag{14}$$

где a_i – комплексные числа. Числа a_i называются *коэффициентами многочлена*, а a_0 называется *старшим коэффициентом моногочлена.*

Определение 7. Пусть задан многочлен n-ой степени с комплексными коэффициентами a_i:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Комплексное число α называется *корнем многочлена*, если

$$f(\alpha) = 0.$$

Определение 8. Пусть задан многочлен n-ой степени с комплексными коэффициентами a_i:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Корень $x = \alpha$ многочлена $f(x)$ называется *корнем многочлена* $f(x)$ *кратности* k, если $(x-\alpha)^k$ – делитель $f(x)$, а $(x-\alpha)^{k+1}$ не является делителем $f(x)$. Таким образом, если $x = \alpha$ – корень многочлена $f(x)$ кратности k, то

$$f(x) = (x-\alpha)^k \cdot g(x),$$

где $g(x)$ – многочлен степени m, $(m \leq n-k)$.

Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители

Теорема 1 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз какова его кратность. Таким образом, любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами представим в виде*

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n), \tag{15}$$

где α_1, α_2, $\dots$, α_n – корни многочлена $f(x)$ с учетом их кратности, a_0 – старший коэффициент многочлена.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на действительные множители

Теорема 2. *Если комплексное число w является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\bar{w}$ также является корнем этого многочлена.*

Следствие 1. *Если комплексное число $w = a + bi$ $(b \neq 0)$ является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то этот многочлен делится нацело на квадратный трехчлен*

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

также имеющий действительные коэффициенты.

Теорема 3. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.*

Теорема Виета

Теорема 4 (Виета). *Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$. Пусть также x_1, x_2, $\dots$, x_n – корни многочлена $f(x)$. Тогда коэффициенты a_1, a_2, $\dots$, a_n многочлена $f(x)$ и его корни x_1, x_2, $\dots$, x_n связаны* *следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots x_n), \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ a_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n), \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(x_1x_2\dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3\dots x_n), \\ a_n &= (-1)^n x_1x_2x_3\dots x_n. \end{cases}$$

Частный случай теоремы Виета при $n = 2$.

Пусть $f(x) = x^2 + a_1x + a_2$, x_1, x_2 – корни многочлена $f(x)$. Тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2), \\ a_2 &= x_1x_2. \end{cases}$$

Частный случай теоремы Виета при $n = 3$.

Пусть $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x)$. Тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ a_3 &= -x_1x_2x_3. \end{cases}$$

Частный случай теоремы Виета при $n = 4$.

Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $f(x)$. Тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ a_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4), \\ a_4 &= x_1x_2x_3x_4. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

18. Решить квадратные уравнения:

$a)$ $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$, $b)$ $z^2 - 4z + 8 = 0$,

$c)$ $z^2 = -i$, $d)$ $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$,

$e)$ $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + (2 - 2i) = 0$, $f)$ $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.

19. Решить уравнения:

$a)$ $z^3 - 1 = i$, $\quad$ $b)$ $z^4 - i = 1$,

$c)$ $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$, $\quad$ $d)$ $z^6 + 64 = 0$.

20. Построить многочлены наименьшей степени с комплексными коэфициентами по данным корням:

$a)$ двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;

$b)$ тройной корень -1, простые 3 и 4;

21. Построить многочлены наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:

$a)$ двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;

$b)$ тройной корень $2 - 3i$.

22. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 13x^2 + 36$ на множители

$a)$ с вещественными коэффициентами;

$b)$ с комплексными коэффициентами.

23. Разложить многочлен $f(x)$ на множители с комплексными коэффициентами:

$a)$ $f(x) = x^3 + 8$; $\quad$ $b)$ $f(x) = x^2 + 4$;

$c)$ $f(x) = x^2 - 6x + 10$; $\quad$ $d)$ $f(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$.

24. Разложить многочлен $f(x)$ на множители с вещественными коэффициентами:

$a)$ $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2$;

$b)$ $f(x) = x^4 + 8x^2 + 12$;

$c)$ $f(x) = x^6 + 27$;

$d)$ $f(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$.

25. Найти соотношение между коэффициентами кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, при котором один корень равен сумме двух других.

26. Проверить, что один из корней уравнения

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

равен сумме двух других, и решить уравнение.

27. Определить λ так, чтобы один из корней уравнения

$$x^3 - 7x + \lambda = 0$$

равнялся удвоенному другому.

28. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями уравнения

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

29. Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Определить λ.

4. Схема Горнера. Корни многочленов с целыми коэффициентами

Основные понятия, формулы и теоремы

Схема Горнера и ее применение

1. *Схема Горнера* используется при делении многочлена $f(x)$ на линейную функцию $x - x_0$.

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - x_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + r,$$

тогда коэфициенты b_0, b_1, b_2, …, b_{n-1} и остаток от деления r можно найти из следующей таблицы:

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = x_0b_0 + a_1$	...	$b_{n-1} = x_0b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = x_0b_{n-1} + a_n = f(x_0)$

2. При делениии многочлена на линейную функцию остаток от деления r равен $f(x_0)$, поэтому *схема Горнера позволяет найти значение многочлена $f(x)$ в точке x_0.*

3. Способ Горнера позволяет определить *показатель кратности корня.* Пусть заданы многочлен $f(x)$ n-ой степени и его корень $x = \alpha$, тогда для того, чтобы определить показатель k кратности корня $x = \alpha$

необходимо: разделить $f(x)$ на $(x-\alpha)$, если остаток от деления r равен 0, то частное опять разделить на $(x-\alpha)$ и т.д., деление продолжать до тех пор, пока остаток от деления r равен 0. Таким образом, алгоритм заканчивается только тогда, когда $r \neq 0$. Показатель k кратности корня $x=\alpha$ равен числу полученных нулевых остатков.

4. Способ Горнера позволяет найти коэффициенты в разложении ряда Тейлора.

Определение 9. Пусть задан многочлен степени n $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$. *Ряд Тейлора* в точке x_0 для многочлена $f(x)$ имеет следующий вид

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (16)$$

Способ Горнера разложения многочлена $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ состоит в следующем: делим $f(x)$ на $(x-x_0)$; частное снова делим на $(x-x_0)$; частное опять делим на $(x-x_0)$ и т.д., пока не получим в частном одно число. Остатки от этих делений и последнее частное являются коэффициентами в (16), то есть

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ \frac{f''(x_0)}{2!},\ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = x_0b_0 + a_1$	...	$b_{n-1} = x_0b_{n-2} + a_{n-1}$	$r_0 = f(x_0)$
x_0	$c_0 = b_0$	$c_1 = x_0c_0 + b_1$	...	$r_1 = f^{(1)}(x_0)$	
x_0	$d_0 = c_0$	$d_1 = x_0d_0 + c_1$	...		
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		
x_0	a_0	$r_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$			
x_0	$r_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$				

Корни многочленов с целыми коэффициентами

Теорема 5. *Если целое число α является корнем многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i, то α является делителем младшего коэффициента a_n.*

Следствие 2. *Пусть дан многочлен $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i и пусть α – целое число и корень многочлена $f(x)$, тогда выражения $\dfrac{f(1)}{1-\alpha}$ и $\dfrac{f(-1)}{1+\alpha}$ являются целыми числами.*

Теорема 6. *Если рациональное число $\dfrac{P}{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i, то P – делитель младшего коэффициента a_n, а Q – делитель старшего коэффициента a_0.*

Задачи для самостоятельного решения

30. Выполнить деление с остатком, найти частное от деления $q(x)$ и остаток $r(x)$:

$a)$ $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;

$b)$ $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$;

31. При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен вида $x^2 + mx - 1$.

32. При каком условии многочлен $x^4 + px^2 + q$ делится на многочлен вида $x^2 + mx + 1$.

33. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$ и выполнить деление с остатком на $(x - x_0)$:

$a)$ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$;

$b)$ $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $x_0 = 1$;

$c)$ $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x_0 = -3$.

34. Чему равен показатель кратности корня:

$a)$ 2 для многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

$b)$ -2 для многочлена $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

35. Найти рациональные корни многочленов:

$a)$ $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

$b)$ $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

$c)$ $x^5 - 7x^2 - 12x^2 + 6x + 36$;

$d)$ $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

$e)$ $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$;

$f)$ $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$;

$g)$ $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$;

$h)$ $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

36. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$a)$ $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \qquad x_0 = -1;$

$b)$ $f(x) = x^5, \qquad x_0 = 1;$

$c)$ $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2.$

37. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

$a)$ $\dfrac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}$; $\qquad b)$ $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}$.

38. Найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при $x = x_0$:

$a)$ $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2;$

$b)$ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 1, \quad x_0 = 1.$

Вычисление определителей порядка n

5. Перестановки. Определение определителя n-го порядка

Основные понятия, формулы и теоремы

Перестановки

Пусть дано некоторое конечное множество Ω, состоящее из n натуральных чисел, то есть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Эти числа можно упорядочить различными способами. Так, числа $1, 2, 3, 4$ можно расположить также следующими способами: $3, 1, 2, 4$ или $2, 4, 1, 3$ и т.д.

Определение 10. Любое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется *перестановкой* из n чисел.

Определение 11. *Транспозицией* называется такое преобразование перестановки, при котором меняются местами какие-либо два символа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные символы остаются на своих местах.

Определение 12. Если в перестановке символ с высшим номером стоит раньше символа с низшим номером, то такое явление называется *инверсией*. Перестановка называется *четной*, если ее символы составляют четное число инверсий, и *нечетной* — в противоположном случае.

Число всех различных перестановок из n символов равно $n!$ При $n \geq 2$ число четных перестановок из n символов равно числу нечетных перестановок, то есть равно $\dfrac{n!}{2}$.

Определение определителя n-го порядка

Пусть дана квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Рассмотрим всевозможные произведения n элементов матрицы A, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, то есть произведения вида

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

где индексы $j_1, j_2, \dots, j_n$ составляют некоторую подстановку из чисел $1, 2, \dots, n$. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, то есть равно $n!$ Будем считать все эти произведения членами будущего определителя n-го порядка, соответствующего матрице (17).

Определение 13. *Определителем n-го порядка*, соответствующим матрице (17), называется следующая сумма

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}, \tag{18}$$

распространенная на всевозможные различные перестановки $j = (j_1, \dots, j_n)$. Число $t(j)$ равно числу инверсий в перестановке $j = (j_1, \dots, j_n)$. Произведение $(-1)^{t(j)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ называется *членом определителя.*

Задачи для самостоятельного решения

39. Определить число инверсий в перестановках:

$a)$ $1, 9, 6, 3,\ 2, 5, 4, 7, 8,$

$b)$ $2, 3, 5, 4, 1,$

$c)$ $6, 3, 1, 2, 5, 4,$

$d)$ $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2,$

$e)$ $1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5,$

$f)$ $2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4.$

40. Считая, что $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ — исходное расположение, подобрать i и k так, чтобы

$a)$ перестановка $1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9$ была четной,

$b)$ перестановка $1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7$ была нечетной.

41. Определить число инверсий в перестановке и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка является четной, и тех, для которых она нечетна:

$a)$ $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1,\ 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n,$

$b)$ $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1,$

$c)$ $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n,$

$d)$ $1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n,$

$e)$ $1, 5, \ldots, 4n-3, 3, 7, \ldots, 4n-1, 2, 6, \ldots, 4n-2, 4, 8, \ldots, 4n,$

$f)$ $4n, 4n-4, \ldots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \ldots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \ldots, 6, 2,$
$4n-3, 4n-7, \ldots, 5, 1.$

42. В какой перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?

43. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-ом месте в перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?

44. Сколько инверсий образует число n, стоящее на k-ом месте в перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?

45. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

$a)$ $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64},$ $b)$ $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62},$

$c)$ $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54},$ $d)$ $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54},$

$e)$ $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62},$ $f)$ $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1},$

$g)$ $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1},$ $h)$ $a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n}a_{kk},\ 1 \le k \le n.$

46. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

$$a)\ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

47. Выбрать i и k так, чтобы произведение

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

48. Выбрать i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

49. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

50. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \quad \text{содержащие } x^4 \text{ и } x^3.$$

6. Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 14. Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется *определителем матрицы второго порядка (или определителем второго порядка)* и обозначается: $|A|$, $\det A$, ΔA, Δ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{19}$$

Определение 15. *Определителем третьего порядка* называется выражение вида:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \end{array} \qquad (20)$$

Отметим несколько правил для построения выражения (20).

1. *Правило треугольников.* Выделим в этом определителе *главную диагональ*, образованную числами a_{11}, a_{22}, a_{33} и диагональ, образованную числами a_{31}, a_{22}, a_{13}, которую будем называть *побочной.* Вычисляем произведение элементов, стоящих на главной диагонали и два произведения чисел, расположенных в вершинах двух равносторонних треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Складываем эти три прозведения. Из полученной суммы вычитаем сумму произведений элементов, стоящих на побочной диагонали и двух произведений чисел, расположенных в вершинах двух равносторонних треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. На рисунке 1 это правило изображено схематически.

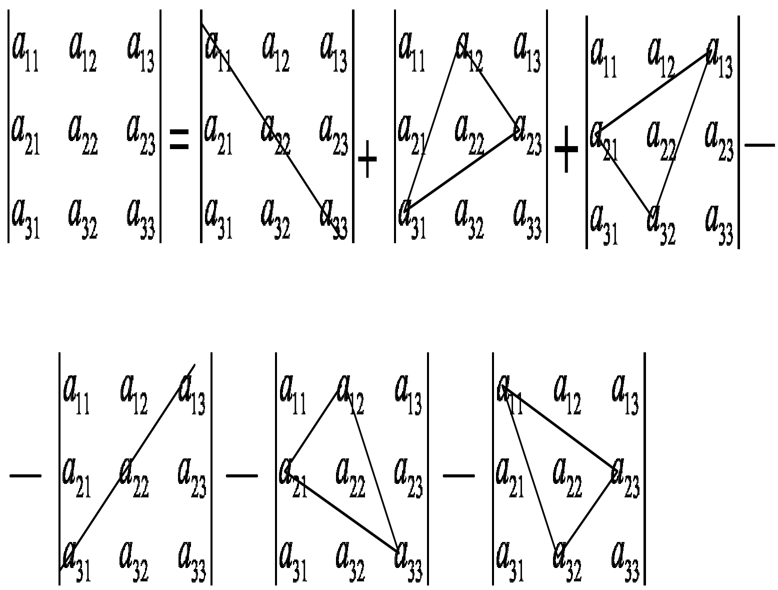

Рис. 3

2. *Правило Саррюса.* Припишем к матрице справа первый и вто-

рой столбцы и вычислим произведения элементов, стоящих на каждой из указанных шести прямых (смотри рисунок 2). Затем найдем сумму этих произведений, при этом произведения элементов на прямых, параллельных главной диагонали, возьмем со знаком плюс, а произведения элементов на прямых, параллельных побочной диагонали, – со знаком минус (согласно обозначениям на рисунке 2).

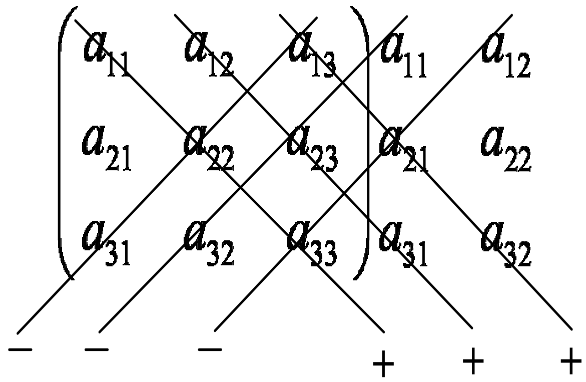

Рис. 4

Рассмотрим свойства определителей.

Свойство 1. При перемене местами двух соседних строк (или столбцов) определителя его знак меняется на противоположный, а абсолютная величина не изменяется.

Свойство 2. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Свойство 3. Умножение всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя на число λ, равносильно умножению определителя на это число, то есть постоянный множитель можно выносить за знак определителя из любой строки или из любого столбца.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Свойство 5. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Если к элементам некоторой строки (или столбца) определителя прибавить соответственно элементы другой строки (или столбца), умноженные на действительное число λ, то величина определителя не изменится.

Свойство 7. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

Свойство 8. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых, например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

51. Вычислить определители второго порядка:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$, $b)$ $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, $c)$ $\begin{vmatrix} z & -y^2 \\ 1 & \bar{z} \end{vmatrix}$, где $z = x + iy$,

$d)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$, $e)$ $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$, $f)$ $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$, $g)$ $\begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ \sin x & \sin 2x \end{vmatrix}$.

52. Решить уравнения:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, $b)$ $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 25$,

$c)$ $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$, $d)$ $\begin{vmatrix} \sin 5x & \sin x \\ \cos x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$,

$e)$ $\begin{vmatrix} z & |z| \\ -1 & z \end{vmatrix} = 0$, где $z = x + iy$.

53. Вычислить определители третьего порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix},$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix},\quad f)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix},\quad g)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},\quad h)\ \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$$

54. Решить уравнения и неравенства:

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,\qquad b)\ \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$c)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\qquad d)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 5.$$

55. Не вычисляя определителей проверить, что они делятся на $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$$

56. Вычислить, используя свойства определителей:

$$a)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix},\quad e)\ \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}.$$

57. Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

$$a)\ \begin{vmatrix} a_1-xb_1 & a_1+xb_1 & c_1 \\ a_2-xb_2 & a_2+xb_2 & c_2 \\ a_3-xb_3 & a_3+xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} a_1+xb_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+xb_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+xb_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$d)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Теорема о разложении. Метод эффективного понижения порядка

Основные понятия, формулы и теоремы

Теорема о разложении

Определение 16. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение 17. *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определители n-го порядка удовлетворяют свойствам 1)–8), перечисленным в предыдущем параграфе. Кроме того, определители n–го порядка удовлетворяют следующим свойствам:

Теорема 7 (О разложении по строке или столбцу). *Сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических* *дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю:*

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}. \tag{21}$$

Равенства (21) можно принять за правила вычисления определителей. Первое из них называется разложением Δ_n по элементам i-ой строки, а второе — разложением Δ_n по элементам j-го столбца.

В соответствии со свойством 9, вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю.

Задачи для самостоятельного решения

58. Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

59. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

60. Вычислить определители четвертого порядка, пользуясь теоремой о разложении:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \ b) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ c) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

61. Вычислить определители 4-го порядка методом эффективного понижения порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}, \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad e)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad f)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$g)\ \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}, \qquad h)\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix},$$

$$i)\ \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \qquad j)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

62. Вычислить определители 5-го порядка методом эффективного понижения порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad d)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$e)\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad f)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

8. Действия с матрицами

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 18. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$.

Матрицу A размера $m \times n$, на пересечении i-ой строки и j-го столбца которой находится число a_{ij}, обозначают так

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$ (число строк и число столбцов матрицы совпадают), то такая матрица называется *квадратной матрицей порядка* n.

Определение 19. *Суммой матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера элементы которой

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.

Для любых матриц A, B, C одинакового размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + C$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

Определение 20. *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A с элементами $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);

2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

Определение 21. *Линейной комбинацией матриц A и B* одинакового размера называется выражение виды $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α, β — произвольные числа.

Определение 22. *Произведением $A \cdot B$ матриц A и B* (размеров $m \times n$ и $n \times p$ соответственно) называется матрица C размера $m \times p$, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, каждый элемент c_{ij}, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы C, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Произведение существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);

4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ — отсутствует коммутативность.

Определение 23. Матрицы A и B, для которых $A \cdot B = B \cdot A$ называются *перестановочными матрицами.*

Определение 24. *Единичной матрицей* размера $n \times n$ называется матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица в произведении с квадратной матрицей такой же размерности ее не изменяет, то есть для любой матрицы D размерности $n \times n$ справедливо равенство $D \cdot E = E \cdot D = D$.

Задачи для самостоятельного решения

63. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$,

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,

$d)$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

64. Найти линейные комбинации матриц:

$a)$ $4A - 5B - \lambda E,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

$b)$ $A - \lambda E,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$,

$c)$ $4A-7B,\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&5&3\\2&0&-3&1\\5&-1&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&7&-5\\-8&1&3&0\\4&2&-2&5\end{pmatrix}.$

65. Найти матрицу A^n:

$a)$ $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix},\quad b)\ A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$

66. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A:

$a)$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad \text{b)}\ A=\begin{pmatrix}7&-3\\5&-2\end{pmatrix}.$

67. Вычислить $\begin{pmatrix}17&-6\\35&12\end{pmatrix}^5$, используя равенство

$$\begin{pmatrix}17&-6\\35&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}.$$

68. Вычислить $\begin{pmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{pmatrix}^6$, используя равенство

$$\begin{pmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{pmatrix}.$$

9. Обратная матрица. Матричные уравнения

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 25. *Обратной матрицей* к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Определение 26. *Присоединенной матрицей* к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 8. *Если квадратная матрица A — невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$), то*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}. \tag{22}$$

Определение 27. *Элементарными преобразованиями* матрицы называются следующие операции:

1) перемена местами двух строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной матрице* A (обозначается $B \sim A$).

Обратную матрицу можно искать двумя способами.

1. *Метод присоединенной матрицы* вычисления обратной матрицы состоит в применении формулы (22).

2. *Метод элементарных преобразований* вычисления обратной матрицы состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу такого же размера, получим прямоугольную матрицу $B = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы B приводим ее к виду $B_1 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$A \cdot X = B \tag{23}$$

$$X \cdot A = B \tag{24}$$

$$A \cdot X \cdot C = B \tag{25}$$

В этих уравнениях A, B, C, X – матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения корректны (с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров).

Если в уравнениях (23), (24) матрица невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{26}$$

$$X = B \cdot A^{-1}. \tag{27}$$

Если в уравнении (25) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

69. Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

70. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

$$a)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

$$d)\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix},\quad e)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\3&10&8\end{pmatrix},\quad f)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\-4&-14&-6\end{pmatrix},$$

$$g)\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\5&6&7&-2\\-1&0&1&2\\3&4&5&6\end{pmatrix},\quad h)\begin{pmatrix}1&2&3&-2&4\\2&6&2&1&0\\3&0&-1&1&2\\-1&4&0&5&-4\\5&-4&-1&-1&8\end{pmatrix}.$$

71. Решить матричные уравнения:

$$a)\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix},$$

$$b)\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1&0.5\\0&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix},$$

$$c)\,X\cdot\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&2&-1\\-1&-2&4\end{pmatrix},$$

$$d)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1\\2\\10\end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}.$$

10. Ранг матрицы

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 28. *Рангом матрицы* A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Ранг матрицы обозначается $rang(A)$ или через $r(A)$.

Определение 29. *Базисным минором* называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Определение 30. Элементы строки матрицы назовем *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

В матрицах A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{не ступенчатая}} \qquad B = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ступенчатая}}$$

Теорема 9. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.*

Теорема 10. *Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.*

Методы нахождения ранга матрицы:

1. *Метод окаймляющих миноров* нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т.е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислить миноры второго порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$. И т.д.

. . . .

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k-го порядка, причем искать его нужно только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

2. *Метод элементарных преобразований* нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

Задачи для самостоятельного решения

72. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix},$

$e)$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$,

$g)$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $h)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

73. Найти ранг методом элементарных преобразований:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$,

$e)$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

74. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть задана система из n уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (28)$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называется *коэффициэнтами системы*, числа b_1, b_2, ..., b_n – *свободными членами*.

Определение 31. *Решением системы* (28) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, ..., c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Систему (28) можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \qquad (29)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица системы, вектор-столбец неизвестных, столбец свободных членов соответственно. Будем обозначать $\Delta = |A|$ – определитель матрицы системы.

Определение 32. Матрица $\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы*.

Теорема 11 (Крамера). *Система линейных уравнений (28), определитель которой отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), обладает решением и притом только одним.*

Методы решения систем линейных уравнений с определителем, отличным от нуля.

1. Правило Крамера.

Если $\Delta \neq 0$, то система (28) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей

$$A \cdot X = B, \tag{30}$$

где $|A| \neq 0$. Система (30) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

3. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса). Рассмотрим метод решения систем линейных уравнений с произвольной матрицей, который называется *методом последовательного исключения неизвестных.*

Определение 33. Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называется *равносильными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема 12. *При элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы, система переходит в равносильную систему.*

Пусть дана система (28). На основании этой теоремы запишем расширенную матрицу системы $\bar{A}$. Элементарными преобразованиями над строками матрицы, приведем ее к ступенчатому виду (все элементы ниже главной диагонали равны нулю). Эти действия называются *прямым ходом метода Гаусса.* После чего из системы, составленной на основе полученной матрицы, находим переменные с помощью последовательных подстановок (*обратный ход метода Гаусса*).

Задачи для самостоятельного решения

75. Найти значения параметров a, b при которых системы линейных уравнений нельзя решить по правилу Крамера:

$$a)\ \begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} ax - by = f_1, \\ bx + ay = f_2. \end{cases}$$

76. Решить систему линейных уравнений с помощью правила Крамера:

$$a)\ \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18, \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -16, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

77. Решить систему уравнений матричным методом:

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_2 + x_3 = 7, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \end{cases} \quad d)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

78. Решить систему методом Гаусса:

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7, \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7. \end{cases}$$

12. Однородные системы линейных уравнений

Основные понятия, формулы и теоремы

Однородной системой линейных уравнений называют систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{cases} \tag{31}$$

у которой все свободные члены уравнений равны нулю. Такая система в матричной форме имеет вид:

$$A \cdot X = 0.$$

Пусть $r = r(A)$ – ранг матрицы системы A.

Однородная система всегда совместна, так как существует *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема 13. *Если столбцы X_1, X_2, ..., X_s – решения однородной СЛАУ $AX = 0$, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.*

Следствие. Если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

Определение 34. Любой набор из $n - r$ линейно-независимых столбцов, являющихся решениями однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* (краткое обозначение: ФСР).

Теорема 14. *Пусть дана однородная СЛАУ $AX = 0$ с n неизвестными и $r = r(A) < n$. Тогда существует набор из $n - r$ решений X_1, X_2, ..., X_{n-r} этой СЛАУ, образующих фундаментальную систему решений.*

Теорема 15. *Общее решение однородной системы уравнений*

(31) описывается формулой

$$X_{одн} = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_{n-r}X_{n-r} = \sum_{k=1}^{n-r} c_kX_k, \qquad (32)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ – произвольные числа, а $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ – ФСР системы (31).

Иными словами: при любых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ формула (32) дает решение системы уравнений (31), и обратно, для любого решения X однородной системы уравнений (31) существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ такие, что решение X представимо в виде (32).

Алгоритм построения фундаментальной системы решения:

1) Привести матрицу системы A с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду. Найти ранг матрицы системы $r = r(A)$.

2) Исследовать систему уравнений на количество решений. Если $r = n$, то по теореме Крамера система будет иметь только единственное решение. Если $r < n$, то система имеет множество решений и поэтому существует ФСР. Число векторов в ФСР равно $n - r$.

3) Разделить неизвестные на базисные и свободные. Число свободных неизвестных равно $n - r$.

4) Записать определитель единичной матрицы порядка, равного количеству $n-r$ свободных неизвестных. По каждой строке определителя найти соответствующие решения системы. Для этого в качестве значений свободных неизвестных взять элементы строки определителя и, решая эквивалентную подсистему, найти значения базисных неизвестных.

5) Из полученных $n - r$ решений системы, составить фундаментальную систему решений.

Задачи для самостоятельного решения

79. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений и найти общее решение системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 13x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 16x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

80. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы уравнений в зависимости от параметра λ

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

81. Образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

13. Системы линейных уравнений общего вида

Основные понятия, формулы и теоремы

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{33}$$

Определение 35. Если система (33) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Если система имеет более одного решения, то любое решение этой системы называется *частным решением*.

Пусть A – матрица системы. Тогда расширенная матрица системы имеет вид $\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Теорема 16 (Кронекера-Капелли). *Система линейных уравнений (33) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы системы $\overline{A}$:*

$$r(A) = r(\overline{A}).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы – выяснить, определена она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(\overline{A})$ (то есть ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы), то система несовместна.
2) Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (где n – число неизвестных), то система совместна и имеет единственное решение, то есть определена.
3) Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система совместна и имеет более одного решения, то есть неопределена.

Определение 36. Однородную систему линейных уравнений $AX = 0$, получающуюся из неоднородной системы заменой в ней свободных членов нулями, называют *приведенной однородной системой* для системы $AX = b$.

Между решениями неоднородной и приведенной однородной систем существует тесная связь, которая описывается следующей теоремой:

Теорема 17. *Общее решение неоднородной системы $AX = b$ можно представить формулой*

$$X = X_{одн} + X_{част}, \tag{34}$$

где $X_{одн}$ – общее решение приведенной однородной системы $AX = 0$, а $X_{част}$ – какое-либо частное решение неоднородной системы $AX = b$.

Формула (34) позволяет находить общее решение неоднородной системы при известном ее частном решении, решая приведенную однородную систему.

Алгоритм метода исследования совместности систем линейных уравнений.

1) Привести к ступенчатому виду расширенную матрицу системы $\overline{A}$ с помощью метода элементарных преобразований. Если в процессе решения получаются нулевые строки, то вычеркнуть их. Найти $r(A)$ и $r(\overline{A})$.

2) Исследовать систему на совместность, используя теорему Кронекера-Капелли. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то по теореме Кронекера-Капелли

система несовместна. Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти, применяя обратный ход метода Гаусса. Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система имеет более одного решения.

3) Если система имеет более одного решения, то определить базисный минор. Неизвестные, соответствующие столбцам базисного минора называются *базисными неизвестными*, а остальные неизвестные – *свободными*. Число свободных неизвестных равно $n - r$.

4) Записать равносильную систему уравнений, перенося свободные неизвестные в правую часть системы.

5) Решить полученную равносильную систему относительно базисных неизвестных, применяя обратный ход метода Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

82. Исследовать совместность методом Гаусса и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$h)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

$$k)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$
l)\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}
$$

83. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$
a)\ \begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 6, \\ \lambda x_1 + 8x_2 = 12, \end{cases}
$$

$$
b)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}
$$

$$
c)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9. \end{cases}
$$

$$
d)\ \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}
$$

84. Зная частное решение системы $X_{\text{част}}$, найти общее решение неоднородной системы уравнений:

$$
a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

$$
b)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &+& 2x_4 &=& 2, \\ 2x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &+& 5x_4 &=& 3, \\ 9x_1 &+& x_2 &+& 4x_3 &-& 5x_4 &=& 1, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$d)\ \begin{cases} 2x_1 &-& 4x_2 &+& 3x_3 &-& 2x_4 &=& 3, \\ x_1 &-& 2x_2 &-& 2x_3 &-& x_4 &=& -2, \\ 3x_1 &-& 6x_2 &+& 5x_3 &-& 3x_4 &=& 5, \\ 4x_1 &-& 8x_2 &-& 3x_3 &-& 4x_4 &=& -3, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор в линейном пространстве

14. Линейное пространство. Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение линейного пространства

Определение 37. Множество $\boldsymbol{V}$ называется *вещественным линейным пространством*, если выполнены три условия:

1) определена операция сложения элементов $\boldsymbol{V}$, то есть для любых $x, y \in \boldsymbol{V}$ ставится в соответствие элемент $z \in \boldsymbol{V}$, называемый *суммой элементов* x, y и обозначаемый $z = x + y$;

2) определена операция умножения на число, то есть для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$ и любого вещественного числа λ ставится в соответствие элемент $z \in \boldsymbol{V}$, называемый *произведением элемента x на вещественное число* и обозначаемый $z = \lambda x$;

3) заданные линейные операции подчиняются следующим *аксиомам линейного пространства*:

1^0 $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2^0 $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3^0 существует элемент $0 \in \boldsymbol{V}$ такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\boldsymbol{V}$;

4^0 для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$ существует элемент x' такой, что $x + x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x;

5^0 $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6^0 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7^0 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8^0 $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Элементы линейного пространства называются *векторами.*

Если в определении линейного пространства взять комплексные числа α, β, то множество $\boldsymbol{V}$ называется *комплексным линейным пространством.*

Основные линейные пространства

1. Вещественное пространство $\boldsymbol{R}^n$ – множество всех вектор-столбцов с вещественными координатами вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции на пространстве $\boldsymbol{R}^n$ вводятся следующим образом. По определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \boldsymbol{R}^n$ положим

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Для любых $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ по определению

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

2. Множество всех вещественных матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц $\boldsymbol{M}^{mn}$ является вещественным линейным пространством.

3. Множество $\mathbf{P}_n$ всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n, где $n \geqslant 0$, есть фиксированное целое число, является вещественным линейным пространством.

Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов

Определение 38. Система векторов $\{a_i\}_{i=1}^m = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m\}$, $m \geq 1$ линейного пространства $\mathbf{V}$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0. \tag{35}$$

Система векторов $\{a_i\}_{i=1}^m = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m\}$, $m \geq 1$ называется *линейно независимой*, если равенство (35) имеет место только тогда, когда $x_i = 0$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Определение 39. Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{V}$ *линейно выражается* через векторы $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_p$, $p > 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что

$$a = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_p b_p. \tag{36}$$

Задачи для самостоятельного решения

85. Пусть $\boldsymbol{G}$ — множество всех вектор-столбцов линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ с положительными элементами, то есть

$$\boldsymbol{G} = \{x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Проверить, является ли линейным пространством множество $\boldsymbol{G}$, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \dots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

86. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

87. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} |\alpha| x_1 \\ |\alpha| x_2 \\ \dots \\ |\alpha| x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

88. Система векторов $\{a_1, a_2\}$ является линейно независимой, используя определение, выяснить вопрос о линейной независимости следующей системы векторов:

a) $\{a_1+3a_2, -2a_1-6a_2\}$,

b) $\{a_1+2a_2, -a_1+3a_2\}$,

c) $\{2a_1+6a_2, -3a_1+9a_2\}$,

d) $\{a_1+a_2, a_1-a_2\}$.

89. Используя определение, доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, γ векторы $\alpha x-\beta y$, $\gamma y-\alpha z$, $\beta z-\gamma x$ линейно зависимы.

90. Используя определение, исследовать на линейную зависимость в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ следующие системы векторов

a) $a^1=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}, a^2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, a^3=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$,

b) $a^1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ a^2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ a^3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,

c) $a^1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ a^2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ a^3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$,

d) $a^1=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\ a^2=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix},\ a^3=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$,

e) $a^1=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix},\ a^2=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix},\ a^3=\begin{pmatrix}8\\1\\3\end{pmatrix}$.

91. Используя определение, проверить, будут ли следующие системы многочленов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbf{P_2}$:

a) $p^1(x)=1$, $p^2(x)=x-1$, $p^3(x)=(x+3)^2$,

b) $p^1(x)=x^2+4x$, $p^2(x)=2x^2-x+4$, $p^3(x)=4x^2-4x+1$,

c) $p^1(x)=4x^2-3x-1$, $p^2(x)=4x-3$, $p^3(x)=4x^2+9x-10$,

d) $p^1(x)=4x^2-3x+2$, $p^2(x)=-3x^2+2x+3$, $p^3(x)=7x^2-5x-1$,

e) $p^1(x)=3x-4$, $p^2(x)=3x^2-2x-3$, $p^3(x)=x^2+3x+3$.

15. Базисы. Размерность пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 40. Система векторов $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется *базисом линейного пространства* $\boldsymbol{V}$, если выпоняются два условия:

1) система векторов e является линейно независимой;

2) любой вектор $x \in \boldsymbol{V}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n. \tag{37}$$

Вектор-столбец $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется *координатами вектора* x в базисе e.

Определение 41. Число векторов в базисе $\boldsymbol{V}$ называется *размерностью линейного пространства* $\boldsymbol{V}$ и обозначается через $\dim \boldsymbol{V}$.

Определение 42. Линейное пространство $\boldsymbol{V}$ называется *конечномерным*, если число векторов в базисе конечное число, иначе $\boldsymbol{V}$ – *бесконечномерное пространство.*

Естественные базисы основных линейных пространств

1. Система вектор-столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства $\boldsymbol{R}^n$. Размерность пространства $\boldsymbol{R}^n$ равна n.

2. Система прямоугольных матриц размерности $m \times n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$. Таким образом, размерность пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$ равна mn.

3. Система многочленов

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3, \dots, e_{n+1} = x^n$$

называется естественным базисом пространства $\mathbf{P}_n$. Размерность пространства $\mathbf{P}_n$ равна $n+1$.

Задачи для самостоятельного решения

92. Используя определение, проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$.

$a)$ $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$

$b)$ $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$

$c)$ $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$

$d)$ $e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

93. Используя определение, проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{P}_2$.

$a)\quad p_1=1-3x-2x^2, p_2=2-4x+x^2, p_3=2+3x+2x^2,$

$b)\quad p_1=-2+2x+3x^2, p_2=x-2x^2, p_3=-2+x+5x^2,$

$c)\quad p_1=-4+2x-x^2, p_2=4+x+4x^2, p_3=-3-3x-2x^2,$

$d)\quad p_1=-1+2x+x^2, p_2=-2-x+x^2, p_3=-7+4x+5x^2.$

94. Используя определение, проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $\mathbf{M}^{22}$.

$a)\quad A_1=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&1\\-1&-1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix},$

$b)\quad A_1=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}3&4\\1&-3\end{pmatrix},$

$c)\quad A_1=\begin{pmatrix}3&-2\\-3&3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix},$

$d)\quad A_1=\begin{pmatrix}3&2\\3&3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}-2&5\\3&-4\end{pmatrix}.$

95. Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$, и найти координаты вектора x в этом базисе. По известному координатному вектору y_e найти вектор y:

$a) e_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}-4\\3\\-7\end{pmatrix}, y_e=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix},$

$b) e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-3\end{pmatrix}, y_e=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix},$

$c) e_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}6\\5\\-7\end{pmatrix}, y_e=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$

96. Проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{P}_2$ и найти координаты многочлена $h(x)$ в этом базисе. По известному координатному вектору g_p найти многочлен g.

$a)\quad p_1 = 4 + 4x + 2x^2, p_2 = -3 - 2x^2, p_3 = -1 - x + x^2, g_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$h(x) = 5 - 4x + 4x^2;$

$b)\quad p_1 = -3 + 2x^2, p_2 = 2 + x + 2x^2, p_3 = 4 + 4x - 2x^2, g_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

$h(x) = 5 + x;$

$c)\quad p_1 = 2 + 4x - 2x^2, p_2 = -1 + 2x + x^2, p_3 = -2 - 2x - x^2,$

$g_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, h(x) = 2 + 4x^2.$

97. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства $\mathbf{V}$, заданного следующим образом:

$a)$ пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_4$ таких, что $p(1) + p(-1) = 0$,

$b)$ пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_2$ таких, что $p(1) = 0$,

$c)$ пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_4$ таких, что $p(2) = 0$.

98. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства $\mathbf{V}$, заданного следующим образом:

$a)$ пространство симметричных матриц размерности 3×3,

$b)$ пространство матриц (a_{ij}) размерности 2×3, элементы которых удовлетворяю условиям $a_{11} = 0$, $a_{22} = a_{33}$,

$c)$ пространство симметричных матриц размерности 3×3, диагональные элементы которых равны нулю.

16. Преобразование базиса и координат. Линейное подпространство

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{V}$ – линейное пространство размерности n.

Определение 43. *Матрицей перехода* от базиса $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ называется квадратная матрица $T_{e\to u} = (t_{ij})$ размера $n \times n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Таким образом, базисы e и u связаны матричным равенством

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) \cdot T_{e\to u}. \tag{38}$$

Равенство (38) можно переписать в следующем виде:

$$(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot T_{u\to e}. \tag{39}$$

Сравнивая равенства (38) и (39) получаем, что две матрицы перехода $T_{e\to u}$ и $T_{u\to e}$ являются обратными к друг другу, то есть

$$T_{u\to e} = T^{-1}_{e\to u}, \qquad T_{e\to u} = T^{-1}_{u\to e}. \tag{40}$$

При таких обозначениях координаты x_e вектора x в базисе e связаны с координатами x_u того же вектора в базисе u равенствами

$$x_e = T_{e\to u} \cdot x_u \tag{41}$$

или

$$x_u = T^{-1}_{e\to u} \cdot x_e \tag{42}$$

либо

$$x_u = T_{u\to e} \cdot x_e. \tag{43}$$

Определение 44. *Линейным подпространством* линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется непустое множество $\boldsymbol{L}$ векторов из $\boldsymbol{V}$, обладающее следующими свойствами:

1) сумма $x + y$ двух любых векторов из $\boldsymbol{L}$ снова принадлежит $\boldsymbol{L}$;

2) произведение $\alpha \cdot x$ любого вектора x из $\boldsymbol{L}$ на любое число α снова принадлежит $\boldsymbol{L}$.

Любое линейное подпространство является линейным пространством.

Определение 45. *Размерностью* линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ называется число векторов в базисе. Размерность линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ обозначается через $\dim L$.

Определение 46. Рассмотрим систему векторов a_1, a_2, $\ldots$, a_k из векторного пространства $\boldsymbol{V}$. Множество всевозможных линейных комбинаций векторов a_1, a_2, $\ldots$, a_k называется *линейным подпространством, натянутым на систему векторов* a_1*,* a_2*,* $\ldots$*,* a_k или *линейной оболочкой* и обозначается $\mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Таким образом

$$\mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{x \in \boldsymbol{V} \mid x = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_k a_k\}$$

Линейная оболочка является линейным подпространством.

Определение 47. *Базисом системы векторов* в линейном пространстве называется базис линейной оболочки этой системы векторов. *Рангом системы векторов* называется число векторов в базисе линейной оболочки.

Теорема 1. *Ранг системы векторов* a_1*,* a_2*,* $\ldots$*,* a_k *линейного пространства* $\boldsymbol{V}$ *равен рангу матрицы* A*, составленной по столбцам из координат векторов* a_1*,* a_2*,* $\ldots$*,* a_k *в каком-либо базисе линейного пространства* $\boldsymbol{V}$*.*

Задачи для самостоятельного решения

99. Найти матрицу перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$. По известным координатам векторов x, y в одном базисе найти их координаты в другом базисе:

$$a)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

100. Найти координаты вектора x в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если он задан в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$a)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ u_2 = 2e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ u_2 = (3/2)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ u_2 = (4/3)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

101. Является ли линейным подпространством линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ каждая из следующих совокупностей векторов:

$a)$ Множество всех векторов, у которых первая координата $x_1 = a$, где a – некоторое фиксированное вещественное число,

$b)$ Множество всех векторов, у которых сумма первой и второй координаты неотрицательна, то есть $x_1 + x_2 \geq 0$,

$c)$ Множество всех векторов, у которых все координаты являются рациональными числами,

$d)$ Множество всех векторов с нулевыми первыми двумя координатами: $x_1 = x_2 = 0$.

102. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbf{P}_n, n \geq 1$, следующие множества многочленов степени не выше n:

$a)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых $f(b) = c$, где b, c – фиксированные, вещественные числа,

$b)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых $\int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0$,

$c)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых числа 2 и 3 являются корнями,

$d)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых $f'(0) = 1$.

103. Найти ранг и базис системы векторов a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6

$$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$a^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$a^5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^6 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

17. Линейный оператор в линейном пространстве

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 48. *Оператором*, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется правило φ, по которому каждому элементу x из $\boldsymbol{V}$ ставится в соответствие некоторый элемент y из $\boldsymbol{V}$. Элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x – *прообразом* элемента y. Тот факт, что элемент y соответствует элементу x при действии оператора φ, записывается так:

$$y = \varphi(x). \tag{44}$$

Определение 49. Оператор φ, действующий в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется *линейным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из $\boldsymbol{V}$ и любого числа α выполняются равенства:

$$1)\ \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2); \qquad 2)\ \varphi(\alpha x_1) = \alpha\varphi(x_1). \tag{45}$$

Определение 50. Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда векторы

$$\varphi(e_1) = v_1, \varphi(e_2) = v_2, \ldots, \varphi(e_n) = v_n$$

принадлежат пространству $\boldsymbol{V}$ и могут быть разложены по базису:

$$\begin{array}{lcccccccc} \varphi(e_1) & = & a_{11}e_1 & + & a_{21}e_2 & + & \ldots & + & a_{n1}e_n, \\ \varphi(e_2) & = & a_{12}e_1 & + & a_{22}e_2 & + & \ldots & + & a_{n2}e_n, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \varphi(e_n) & = & a_{1n}e_1 & + & a_{2n}e_2 & + & \ldots & + & a_{nn}e_n, \end{array} \tag{46}$$

Квадратная матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядка n называется *матрицей линейного оператора* φ *в базисе* e. Равенство (46) можно переписать в следующем матричном виде

$$\varphi(e) = e \cdot A_e. \tag{47}$$

Определение 51. *Определителем оператора* φ называется определитель его матрицы в каком-нибудь базисе e. Определитель оператора φ обозначается через $|\varphi|$. Таким образом, по определению

$$|\varphi| = |A_e|.$$

Будем предполагать, что линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Пусть в базисе $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ заданы элемент x_e и его образ y_e линейного оператора φ, тогда

$$\varphi(x) = e \cdot y_e = e \cdot A_e \cdot x_e, \tag{48}$$

где A_e – матрица линейного оператора φ. Формула (48) позволяет определить координаты образа y_e через координаты прообраза x_e в данном базисе e, если известна матрица A_e оператора φ в этом базисе.

Матрица A_e оператора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и матрица A_u того же оператора в базисе $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ связаны соотношением

$$A_u = T_{e\to u}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to u} = T_{u\to e} \cdot A_e \cdot T_{u\to e}^{-1}, \tag{49}$$

где $T_{e\to u}$ – матрица перехода от базиса e к базису u: $u = e \cdot T_{e\to u}$.

Равенство (49) может быть переписано в следующем виде:

$$A_e = T_{e\to u} \cdot A_u \cdot T_{e\to u}^{-1} = T_{u\to e}^{-1} \cdot A_u \cdot T_{u\to e}. \tag{50}$$

Задачи для самостоятельного решения

104. Выяснить, какие из следующих операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для любого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$:

$a)$ $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 6 - 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}$,

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} x_3^4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$,

$b)$ $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 0 \\ x_2^4 + 2x_3 \end{pmatrix}$,

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3) \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}.$

105. Для следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_2$, найти матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$. Вычислить определитель оператора.

Для любого многочлена $f \in \boldsymbol{P}_2$:

$a)$ $\varphi(f) = -3f''(x) + 3f'(x)$, $b)$ $\varphi(f) = f(x+2) + f(0)x + f'(x)$,

$c)$ $\varphi(f) = f(-2) + f(2)x + f(3)x^2$, $d)$ $\varphi(f) = f(x) + f(2)x + f'(x)$.

106. Линейный оператор φ в базисе $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора φ в базисе $g = \{g_1, g_2, g_3\}$:

$a)$ $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1(x) = 1 + 2x, \\ g_2(x) = -1 + 2x + x^2, \\ g_3(x) = -1 + x + x^2, \end{array}$

$b)$ $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1(x) = -3 + x + 2x^2, \\ g_2(x) = -2 + x + x^2, \\ g_3(x) = -2 + x^2, \end{array}$

$c)$ $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1(x) = -1 + 2x - 2x^2, \\ g_2(x) = -1 + x, \\ g_3(x) = 2 - 2x + x^2. \end{array}$

107. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса u в линейные комбинации по базису e:

$$a)\ A_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ u_2 &= 3e_1 + 4e_2 + e_3, \\ u_3 &= e_1 + 2e_2 + 2e_3, \end{aligned}$$

$$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u_1 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ u_2 &= -e_1 + e_2 - 2e_3, \\ u_3 &= -e_1 + 2e_2 + e_3, \end{aligned}$$

$$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u_1 &= e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ u_2 &= e_2 - e_3, \\ u_3 &= -e_1 - e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

108. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u:

$$a)\ A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_2 - u_3, \\ e_2 &= -u_1 + 3u_2 + 2u_3, \\ e_3 &= -2u_2 - u_3, \end{aligned}$$

$$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_2 + u_3, \\ e_2 &= 2u_1 - 3u_2 + u_3, \\ e_3 &= -u_1 + 2u_2, \end{aligned}$$

$$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_2 + 2u_3, \\ e_2 &= -u_1 + 3u_2 - 3u_3, \\ e_3 &= -u_2 + 2u_3. \end{aligned}$$

18. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{V}$ – комплексное линейное пространство. Пусть $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ – линейный оператор.

Определение 52. Ненулевой элемент x из $\boldsymbol{V}$ называется *собственным вектором* линейного оператора φ, если существует число λ

такое, что $\varphi(x) = \lambda x$. Число λ при этом называется *собственным значением* оператора φ. Говорят также, что собственный вектор x отвечает (или соответствует) собственному значению λ.

Определение 53. Пусть A – матрица оператора φ в некотором базисе e. Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* оператора φ. Корни многочлена $f(\lambda)$ называются *характеристическими корнями матрицы* A.

Определение 54. *Алгебраической кратностью* собственного числа λ называется кратность корня λ характеристического многочлена $f(\lambda)$.

Определение 55. Пусть λ – собственное значение линейного оператора φ. Тогда, по определению, ненулевой вектор U будет собственным, если $\varphi(U) = \lambda U$ или, что равносильно, $(\varphi - \lambda I)U = 0$. Отсюда получаем, что подпространство $\ker(\varphi - \lambda I)$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого вектора. Это подпространство называется *собственным.* Его размерность называется *геометрической кратностью* собственного значения λ.

Алгоритм отыскания собственных векторов и собственных значений линейного оператора φ.

Пусть A – матрица линейного оператора φ, E – единичная матрица. Тогда для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы, нужно выполнить следующие действия:

1. Найти собственные значения оператора, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{51}$$

Обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $k \leq n$.

2. Для каждого собственного значения λ_p найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0. \tag{52}$$

Правило для решения характеристических уравнений в одном частном случае.

Пусть дана матрица A размера 3×3, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение (51) имеет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{53}$$

где I_1, I_2, I_3 – числа, которые вычисляются по следующим формулам:

$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$;

$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Теорема 1. *Линейный оператор φ, действующий в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, тогда и только тогда задается в базе e_1, e_2, …, e_n диагональной матрицей, если все векторы этой базы являются собственными векторами линейного оператора φ.*

На основании теоремы 1 можно составить *алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.* Для того, чтобы привести данную квадратную матрицу A размерности n к диагональному виду необходимо:

1. Найти λ_1, λ_2, …, λ_n собственные числа матрицы A.

2. Для каждого собственного значения λ_i найти соответствующий ему собственный вектор. Если в результате вычисления мы получим систему из n линейно независимых собственных векторов U_1, U_2, …, U_n, то

матрицу A можно привести к следующему диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{54}$$

3. Записать собственные векторы как столбцы новой матрицы T. Полученная матрица T является базисом, в котором матрица A имеет диагональный вид (54).

Задачи для самостоятельного решения

109. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, действующих в вещественном линейном пространстве, и заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

110. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, действующих в комплексном линейном пространстве, и заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$.

111. Найти собственные значения, их алгебраическую и геометрическую кратности и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $e)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

112. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c)\ \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad e)\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Евклидово пространство. Квадратичные формы

19. Определение скалярного произведения. Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{E}_n$ – линейное пространство размерности n.

Определение 56. *Скалярным произведением* элементов x и y из $\boldsymbol{E}_n$ называется правило, ставящее в соответствие вещественное число (будем обозначать это число (x, y)), причем указанное правило удовлетворяет для любых x, y, z из $\boldsymbol{E}_n$ и любого вещественного числа α следующим требованиям (они называются *аксиомами скалярного произведения*).

1^0. $(x, y) = (y, x)$ (перестановочность или коммутативность сомножителей).

2^0. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (распределительное свойство).

3^0. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

4^0. $(x, x) > 0,$ если $x \neq 0$ и $(x, x) = 0,$ если $x = 0$.

Определение 57. Вещественное линейное пространство $\boldsymbol{E}_n$ называется *евклидовым пространством*, если в нем введено скалярное произведение векторов.

Определение 58. *Нормой* элемента $x \in \boldsymbol{E}_n$ (обозначение $\|x\|$) называется вещественное число, определяемое по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{55}$$

Определение 59. Вектор x называется *нормированным*, если его норма $\|x\| = 1$.

Определение 60. Углом между ненулевыми векторами $x, y \in \boldsymbol{E}_n$ называется число φ, удовлетворяющее условиям

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{56}$$

Определение 61. Элементы x и y из $\boldsymbol{E}_n$ называются *ортогональными* (обозначение: $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x \perp y, \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) = 0. \tag{57}$$

Определение 62. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \boldsymbol{E}_n$ называется *ортогональным*, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{58}$$

Определение 63. Ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \boldsymbol{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{59}$$

Пусть координаты элементов x, y из евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ заданы в ортонормированном базисе, тогда скалярное произведение и норму можно вычислить по формулам

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{60}$$

Процедура ортогонализации Грама-Шмидта

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_n$ можно построить на основе произвольного базиса с помощью процедуры ортогонализации. Опишем эту процедуру.

Пусть даны k линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$. Построим попарно ортогональные элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k$, представляющие собой линейные комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ следующим образом.

Положим

$$e_1 = x_1, \quad e_2 = x_2 - a_{12} e_1, \qquad \text{где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}. \tag{61}$$

Такой выбор коэффициента a_{12} обеспечивает ортогональность e_1 и e_2: $(e_1, e_2) = 0$. Далее, положим

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2 = x_3 - \sum_{i=1}^{2} a_{i3}e_i, \tag{62}$$

где $a_{13} = \dfrac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $a_{23} = \dfrac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$. Такой выбор коэффициентов a_{13} и a_{23} обеспечивает ортогональность e_3 к элементам e_1 и e_2. И так далее.

На m-м шаге $m \le k$ полагаем

$$e_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i, \qquad \text{где} \;\; a_{im} = \frac{(x_m, e_i)}{(e_i, e_i)}. \tag{63}$$

Такой выбор коэффициентов a_{im} обеспечивает ортогональность e_m к элементам e_1, e_2, ..., e_{m-1}. В результате k шагов описанная процедура дает ортогональную систему векторов e_1, e_2, ..., e_k.

Нормирование системы векторов

Чтобы сделать ортогональную систему векторов e_1, e_2, ..., e_k ортонормированной, нужно каждый элемент e_i умножить на число $\dfrac{1}{\|e_i\|}$. Полученные в результате элементы $g_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, ..., $g_k = \dfrac{e_k}{\|e_k\|}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Задачи для самостоятельного решения

113. Может ли скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{R}^2$ задаваться формулой:

a) $x_1y_1 + 2x_2y_2$,

b) $3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,

c) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

114. Может ли функция $F(X, Y)$ быть принята за скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$:

a) $F(X, Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y)$,

b) $F(X, Y) = \mathrm{tr}(X) \cdot \mathrm{tr}(Y)$,

c) $F(X, Y) = \det(X \cdot Y)$,

где $\operatorname{tr}(X) = \sum\limits_{k=1}^{2} x_{kk}$ – сумма элементов матрицы X, стоящих на главной диагонали, $\det(X)$ – определитель матрицы X.

115. Может ли скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{P}_2$ задаваться формулой:

$a)\quad (f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \quad$ для $\quad \forall f,g \in \boldsymbol{P}_2,$

$b)\quad (f,g) = f(1)g(1) + f'(1)g'(1) + f''(1)g''(1) \quad$ для $\quad \forall f,g \in \boldsymbol{P}_2,$

$c)\quad (f,g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) \quad$ для $\quad \forall f,g \in \boldsymbol{P}_2.$

116. Используя (60), вычислить скалярное произведение векторов a и b, их нормы и угол φ между ними в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^4$:

$$a)\quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

117. Используя (60), найти скалярное произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$, их нормы и угол между ними в евклидовом пространстве $\boldsymbol{P}_3$:

$a)\quad f(x) = -1 + x + 2x^2 - x^3, \quad g(x) = -2 - 3x - x^2 - 3x^3,$

$b)\quad f(x) = 2x - x^2 + 2x^3, \quad g(x) = -1 + x + x^2 + x^3,$

$c)\quad f(x) = 1 - x + 3x^3, \quad g(x) = 1 + 2x - x^2 + 4x^3.$

118. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

$$a)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

119. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов пространства $\boldsymbol{R}^4$:

$$a)\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

120. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов пространства $\boldsymbol{R}^n$:

$$a)\ x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad n = 3,$$

$$b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad n = 4.$$

20. Метод Лагранжа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 64. *Квадратичной формой* называется функция числовых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующего вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{64}$$

где a_{ij} – вещественные числа (*коэффициенты квадратичной формы*), удовлетворяющие условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{65}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ с размером $n \times n$ называется *матрицей квадратичной формы.* Из равенства (65) следует, что матрица квадратичной формы A является симметрической.

Квадратичную форму (64) можно записать в матричном виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X,$$

где X – столбец переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, X^T – строка, полученная транспонированием столбца X, A – матрица квадратичная формы.

Любую квадратичную форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

невырожденным линейным преобразованием $X = Q \cdot Y$ можно привести к виду

$$\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \big(y_i\big)^2. \tag{66}$$

Определение 65. Выражение (66) называется *каноническим видом квадратичной формы*, а числа c_i $(i = 1, \ldots, n)$ – ее *каноническими коэффициентами.* Матрица квадратичной формы $\widetilde{f}$, имеющей канонический вид, является диагональной матрицей с элементами c_i на главной диагонали. Если в квадратичной форме (66) все канонические коэффициенты $c_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то ее также называют *нормальным видом квадратичной формы.*

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа):

Для приведения квадратичной формы n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

к каноническому виду нужно выполнить следующие действия:

1. Выбрать такую переменную (*ведущую*), которая входит в квадратичную форму во второй и первой степенях одновременно, и перейти к пункту 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к пункту 4.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет каноничческий вид.

2. Выделить полный квадрат по ведущей переменной.

3. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять на одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования, переходя к пункту 1.

4. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. Продолжить преобразования, переходя к пункту 1.

Задачи для самостоятельного решения

121. Найти канонический вид и матрицу линейного преобразования, которое приведет квадратичную форму к этому виду:

$a)$ $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-6x_1x_3-x_2x_3,$

$b)$ $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3,$

$c)$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,$

$d)$ $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3,$

$e)$ $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$

$f)$ $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3,$

$g)$ $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3,$

$h)$ $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3,$

$i)$ $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3.$

21. Приведение квадратичной формы к главным осям. Критерий Сильвестра

Основные понятия, формулы и теоремы

Приведение квадратичной формы к главным осям

Определение 66. Квадратная матрица Q называется *ортогональной*, если выполняется равенство

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Определение 67. Линейное преобразование переменных $X = QY$, называется *ортогональным*, если его матрица Q ортогональная.

Теорема 1. *Для любой квадратичной формы f*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{67}$$

существует ортогональное преобразование $X = QY$, приводящее ее к каноническому виду:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{68}$$

При этом λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ – собственные значения матрицы квадратичной формы A, а столбцы матрицы Q – ортонормированная система собственных векторов матрицы A (норма каждого из них равна 1).

Пусть дана квадратичная форма (67) с матрицей $A = (a_{ij})$. Тогда *алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям* состоит в следующем:

1. Найти собственные значения матрицы A, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Обозначим их λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n.

2. Для каждого собственного значения λ_p, $1 \le p \le n$ найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0.$$

Найденные решения будут собственными векторами, соответствующие собственному значению λ_p.

3. Используя процеду ортогонализации, ортогонализировать и нормировать систему из собственных векторов матрицы A (если это необходимо).

4. Составить ортогональную матрицу Q, столбцами которой являются ортонормированные векторы матрицы A.

5. Записать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

6. Записать ортогональное преобразование переменных $X = QY$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Критерий Сильвестра

Определение 68. Квадратичная форма f называется *положительно определенной,* если ее нормальный вид следующий

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Определение 69. Определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$.

Теорема 2. *(критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, то* *есть*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

122. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

b) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

c) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

123. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,

b) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$,

c) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$,

d) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$,

e) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

f) $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

124. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

b) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

c) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$,

d) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

e) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$,

f) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Векторная алгебра

22. Скалярное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Основные операции над векторами

Определение 70. Величины, которые полностью определяются заданием своих числовых значений, называются *скалярными величинами* (например, масса, длина, площадь, объем). Величины, для задания которых необходимо знать еще и направление, называются *векторными величинами* (например, сила, скорость, ускорение). *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок: A – начальная точка, B – конечная точка (смотри рисунок 5).

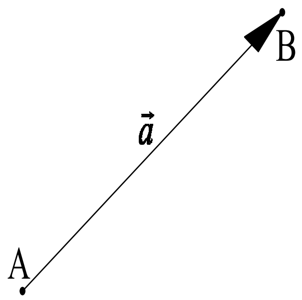

Рис. 5

Также будем обозначать векторы маленькими латинскими буквами со стрелкой: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Определение 71. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ называются *противоположными*.

Определение 72. Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Определение 73. Два вектора называются *равными*, если они имеют общее направление и одинаковые длины.

Существует два правила геометрического сложения векторов.

1. При нахождении суммы векторов $\vec{a}+\vec{b}$ по *правилу треугольника* от конечной точки вектора $\vec{a}$ откладывают вектор $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{a}+\vec{b}$ направлен от начальной точки вектора $\vec{a}$ к конечной точке вектора $\vec{b}$ (смотри рисунок 6).

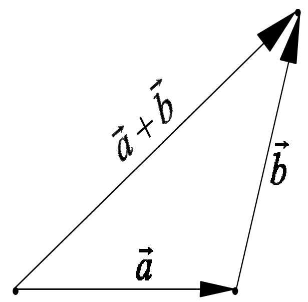

Рис. 6. Сложение векторов по правилу треугольников

2. При нахождении суммы векторов $\vec{a}+\vec{b}$ по *правилу параллелограмма* нужно отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки и построить на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм. Тогда вектор-диагональ параллелограмма, выходящий из общей начальной точки векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор суммы $\vec{a}+\vec{b}$ (смотри рисунок 7).

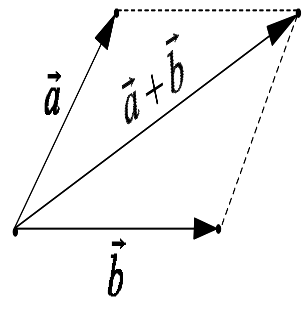

Рис. 7. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Определение 74. *Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется новый вектор $\lambda\vec{a}$*, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно ему при $\lambda<0$. На рисунке 8 изображены векторы $\vec{a}$, $-2\cdot\vec{a}$, $3\cdot\vec{a}$, $\dfrac{1}{2}\cdot\vec{a}$.

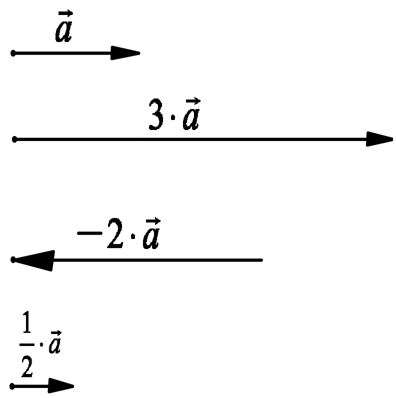

Рис. 8

Проекция точки и вектора на ось

Определение 75. *Осью* называется прямая, на которой выделено одно из ее направлений (на рисунке 9 оно обозначается стрелкой). Каждую ось можно задать *направляющим вектором*, то есть любым вектором, лежащим на ней и имеющим то же направление.

Определение 76. Пусть задана ось l и некоторая точка M (рисунок 9). Плоскость, проходящая через точку M перепендикулярно оси l, пересечет ее в некоторой точке M_1, которая называется *проекцией точки M на ось l*. Если $M \in l$, то $M_1 = M$. Если $M \notin l$, то M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось l.

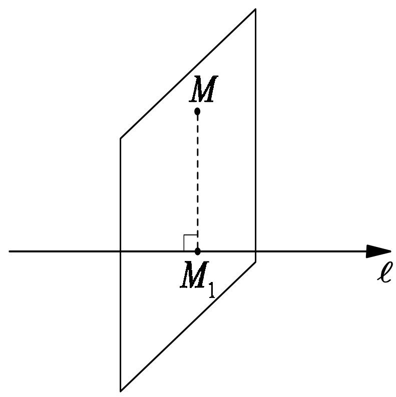

Рис. 9. Проекция точки на ось

Определение 77. *Проекцией $pr_{\overrightarrow{l}}\,\overrightarrow{AB}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось вектора $\overrightarrow{l}$* называется длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком плюс, если векто-

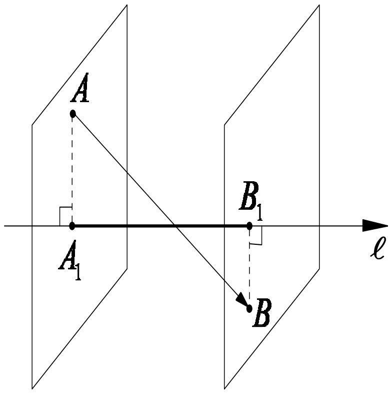

Рис. 10. Проекция вектора на ось другого вектора

ры $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{l}$ одинаково направлены, и со знаком минус, если направления векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{l}$ противоположны. Здесь A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось вектора $\overrightarrow{l}$ (смотри рисунок 10).

Свойства проекций

1) Если два вектора равны, то равны и их проекции (см. рис. 11):

$$\vec{a} = \vec{b} \;\Rightarrow\; pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a} = pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{b}. \tag{69}$$

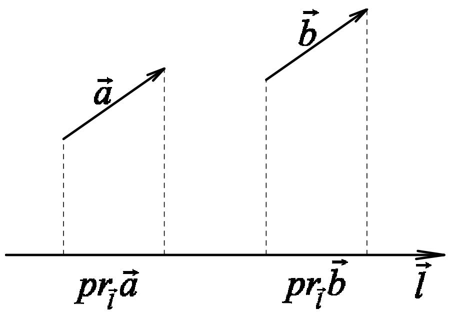

Рис. 11. Проекции двух равных векторов

2) Пусть φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью $\overrightarrow{l}$ (см. рис. 12). Тогда

$$pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{70}$$

3) Пусть α – произвольное действительное число. Тогда

$$pr_{\overrightarrow{l}}\,(\alpha\vec{a}) = \alpha pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a}. \tag{71}$$

4) Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов, то есть

$$pr_{\overrightarrow{l}}\,(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a} + pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{b}. \tag{72}$$

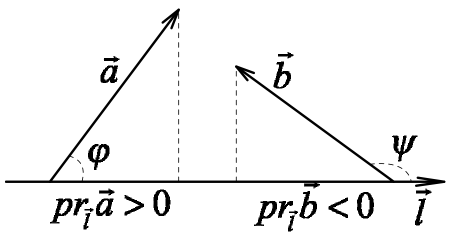

Рис. 12. Угол между вектором и осью

Прямоугольная система координат

Определение 78. Три взаимно перпендикулярные прямые Ox, Oy, Oz образуют *прямоугольную систему координат в пространстве* (смотри рисунок 13). Точка O называется *началом координат*. Первая прямая Ox называется *осью абцисс*, вторая прямая Oy – *осью ординат*, третья прямая Oz – *осью аппликат*. Плоскости XOY, YOZ, ZOY называются *координатными плоскостями*.

Определение 79. Отложим на осях Ox, Oy, Oz в положительном направлении векторы единичной длины $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно. Эти векторы называются *основными векторами или ортами системы координат*.

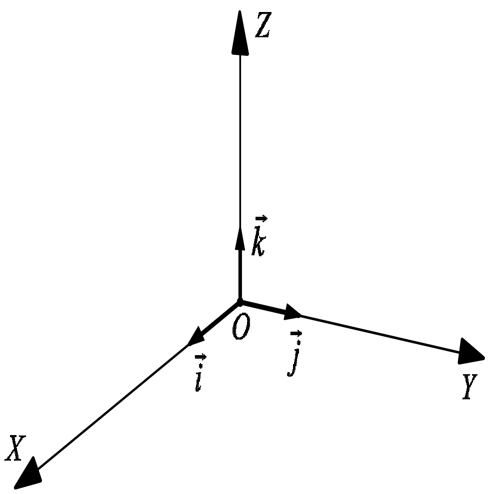

Рис. 13. Прямоугольная система координат

Прямоугольные координаты точки

Определение 80. Опустим перепендикуляр из точки M на координатную плоскость XOY, получим точку M_{xy}. Затем из точки M_{xy} проведем прямые, параллельные осям, получим точки M_x и M_y. Точка M_z – это точка пересечения прямой Oz и плоскости, проходящей через точку M параллельно координатной плоскости XOY (смотри рисунок 14). Упорядоченная тройка чисел (x, y, z) задает *прямоугольные координаты точки* M. Координата x называется *абциссой точки* M, y – *ординатой*, z – *апликатой.*

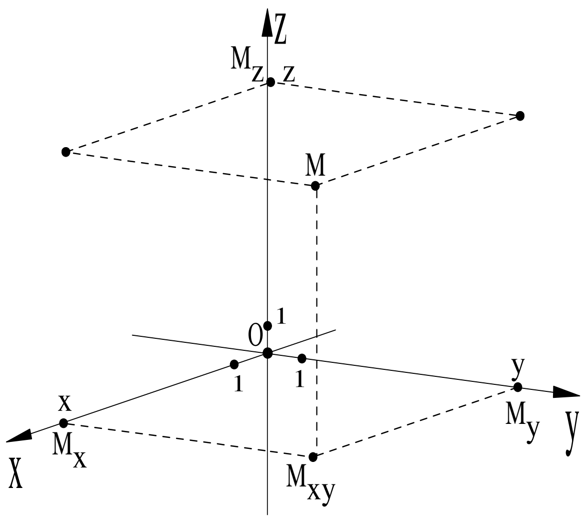

Рис. 14. Координаты точки

Прямоугольные координаты вектора

Определение 81. Прямоугольными координатами вектора $\vec{m}$ называются проекции вектора $\vec{m}$ на оси координат.

Например, найдем координаты вектора $\vec{m}$, изображенного на рисунке 15. Для этого через точку O' проводим оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ соответственно равнонаправленные с осями координат OX, OY, OZ. Через точку M проводим плоскости MP, MQ, MR, параллельные координатным плоскостям. Плоскости MP, MQ, MR пересекут оси $O'X'$, $O'Y'$,

$O'Z'$ соответственно в точках P, Q, R. Первая координата вектора $\vec{m}$ есть длина отрезка $O'P$, взятая со знаком минус; вторая координата вектора $\vec{m}$ есть длина вектора $O'Q$, взятая со знаком минус; третья координата вектора $\vec{m}$ есть длина вектора $O'R$, взятая со знаком плюс. При масштабе рисунка 15, получаем $\vec{m} = (x; y; z) = (-4; -3; 2)$.

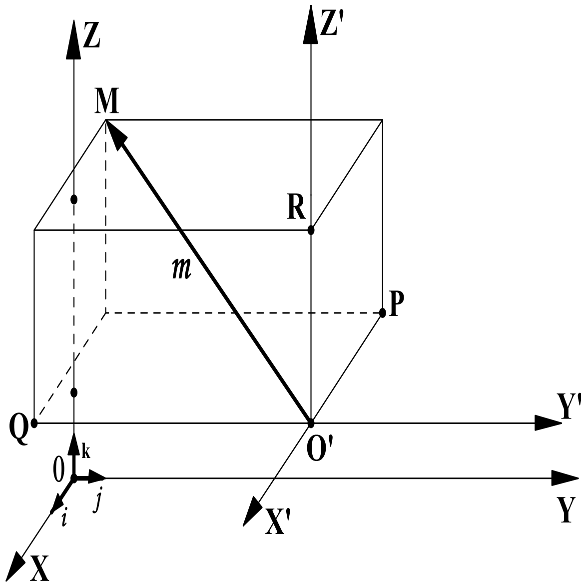

Рис. 15. Проекции вектора на оси координат

Отметим, что основные векторы имеют следующие координаты: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Выражения вектора через координаты

Каждый вектор $\vec{m}$ равен сумме произведений трех основных векторов на соответствующие координаты вектора $\vec{m}$:

$$\vec{m} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{73}$$

Например, при обозначениях рисунка 15 имеем $\vec{m} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Выражения вектора через координаты его начала и конца

Определение 82. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда *координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по следующей формуле

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{74}$$

Модуль вектора и расстояние между двумя точками

Определение 83. *Модулем или длиной вектора* $|\vec{a}|$ называется длина отрезка, изображающего вектор. Если вектор $\vec{a}$ задан прямоугольными координатами $\vec{a} = (x, y, z)$, тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{75}$$

Расстояние ρ между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{76}$$

Направляющие косинусы вектора

Определение 84. Направление вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ определяется углами α, β, γ, образованными вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz соответственно (смотри рисунок 16). Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$ и определяются по следующим формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \tag{77}$$

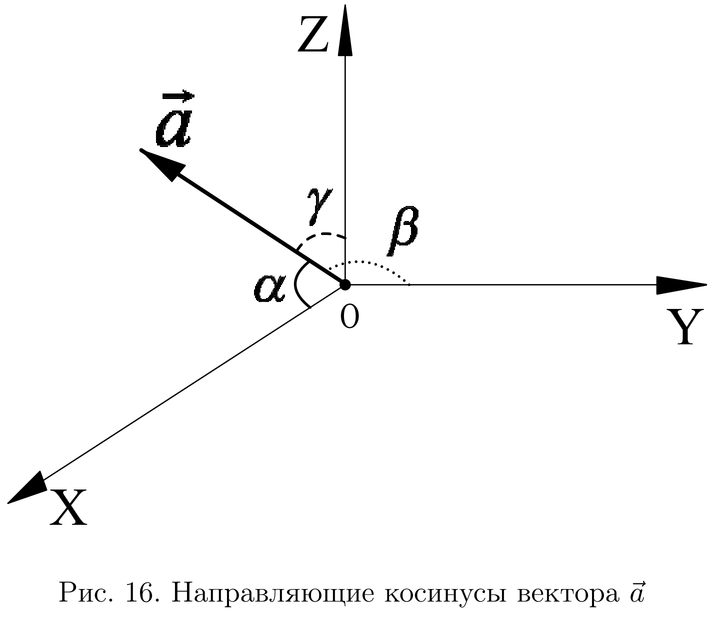

Рис. 16. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$

Направляющие косинусы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{78}$$

Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ можно задать следующим образом

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot (\cos\alpha\,,\ \cos\beta\,,\ \cos\gamma). \tag{79}$$

Признак коллинеарности векторов

Определение 85. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{80}$$

Таким образом, если вектор $\vec{a}$ – не нулевой, то любой вектор $\vec{b}$, *коллинеарный* с ним, можно представить в виде

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}. \tag{81}$$

где число $\lambda = \pm\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, причем λ положительно, если вектор $\vec{b}$ одинаково направлен с вектором $\vec{a}$ и отрицательно – в противоположном случае.

Координаты середины отрезка

Даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — середина отрезка M_1M_2, тогда координаты точки M_0 можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{82}$$

Определение и свойства скалярного произведения

Определение 86. *Скалярным произведением вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$. Согласно определению

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a,\ b}). \tag{83}$$

Основные свойства скалярного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}); \tag{84}$$

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}); \tag{85}$$

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}); \tag{86}$$

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Зная координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной системе координат, для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно воспользоваться следующей формулой:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{87}$$

Равенство (87) называется *формулой, выражающей скалярное произведение через координаты сомножителей.*

Признак перпендикулярности векторов

Определение 87. Два ненулевых вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *перпендикулярны*, тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{88}$$

Геометрические свойства скалярного произведения

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{89}$$

2. При вычислении проекции вектора $\vec{m}$ на ось, задаваемую вектором $\vec{n}$ можно воспользоваться формулой:

$$pr_{\vec{n}}\, \vec{m} = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{|\vec{n}|} = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{\sqrt{(\vec{n}, \vec{n})}}. \tag{90}$$

3. Длину вектора $\vec{a}$ можно вычислить также по следующей формуле

$$(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \quad \text{или} \quad |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}. \tag{91}$$

Задачи для самостоятельного решения

125. a) Единичный вектор $\vec{a}$ образует равные тупые углы с основными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{a}$.

b) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с вектором $\vec{i}$ угол 30^0, а с ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные острые углы. Вычислить сумму координат вектора $\vec{a}$.

126. Составить таблицу скалярного умножения орт системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

127. a) Найти координаты вектора $\vec{x}$, параллельного вектору $(6;-8;-7,5)$, если известно, что $|\vec{x}| = 50$ и вектор $\vec{x}$ образует с осью Oz острый угол.

b) Даны два вектора $\vec{a} = (1,-2,4)$ и $\vec{b} = (3,1,-5)$. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен оси Oy и удовлетворяет условиям: $(\vec{x},\vec{a}) = -3$, $(\vec{x},\vec{b}) = 8$.

c) Даны три вектора $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (4,3,-5)$, $\vec{c} = (7,-2,-6)$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $(\vec{x},\vec{a}) = 8$, $(\vec{x},\vec{b}) = 0$, $(\vec{x},\vec{c}) = 10$.

d) Найти координаты вектора $\vec{x}$, параллельного вектору $\vec{a} = (1,2,-3)$, если известно, что $(\vec{x},\vec{a}) = 28$.

128. a) Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$ на ось вектора $\vec{c}$.

b) Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на ось вектора $\vec{a} - \vec{c}$.

129. a) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы и $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Найти скалярное произведение векторов $(3\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

$b)$ Пусть $|\vec{a}| = 2$, $\vec{b} = \sqrt{3}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$. Найти скалярное произведение векторов $(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

130. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами, и углы между ними:
$a)$ $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (5, 12, 0)$, $\quad b)$ $\vec{a} = (2, -3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, -1)$.

131. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

132. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{(p, q)} = \dfrac{\pi}{4}$.

133. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{a} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

134. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

135. Зная векторы, образующие треугольник: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.

136. Зная разложение вектора $\overrightarrow{Q} = 6\vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}$ по трем перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\overrightarrow{Q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

137. Обозначив через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ стороны ромба, выходящие из общей вершины, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

138. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\widehat{(a\,,\,b)} = \dfrac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся перпендикулярными.

139. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны.

140. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$,

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислить длину медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC.

23. Векторное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Правые и левые системы векторов

Определение 88. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой системой*, если наблюдателю, находящемуся в конечной точке вектора $\vec{c}$, поворот вектора $\vec{a}$, совмещающий его с вектором $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки (рисунок 17). Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке, то система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *левой тройкой* (рисунок 18).

Например, основные векторы прямоугольной системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образую правую тройку. Система же $\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$ (векторы те же, но порядок их другой) – левая.

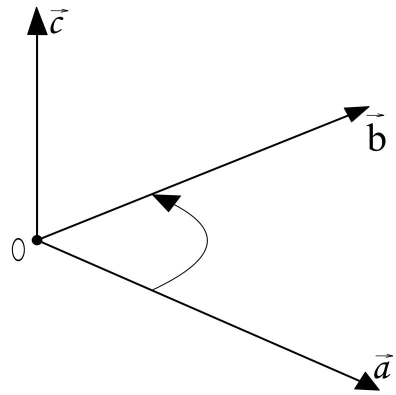

Рис. 17. Правая система векторов

Определение 89. Если имеем две системы трех векторов и каждая из них правая или левая, то говорят, что эти системы имеют *одинаковую ориентацию*. Если же одна система правая, а другая левая, то говорят, что системы имеют *противоположную ориентацию*.

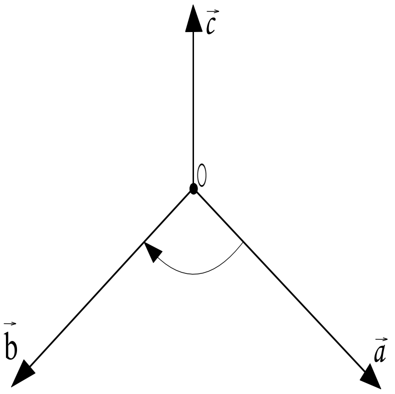

Рис. 18. Левая система векторов

При однократной перестановке двух векторов система меняет ориентацию. Система сохраняет ориентацию при круговой перестановке векторов, показанной на рисунке 19 для правой системы векторов и на рисунке 20 для левой.

Рис. 19. Круговая ориентация правой системы векторов

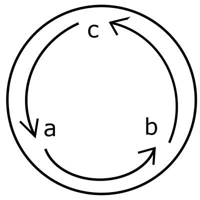

Рис. 20. Круговая ориентация левой системы векторов

Например, из правой системы векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ круговой перестановкой получаем правую систему $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{i}$, а из последней – правую систему $\vec{k}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$. Правую систему векторов нельзя совместить ни с какой левой.

Определение и основные свойства векторного произведения векторов

Определение 90. *Векторным произведением* $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который строится следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма

(рисунок 21), построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{a,b}). \tag{92}$$

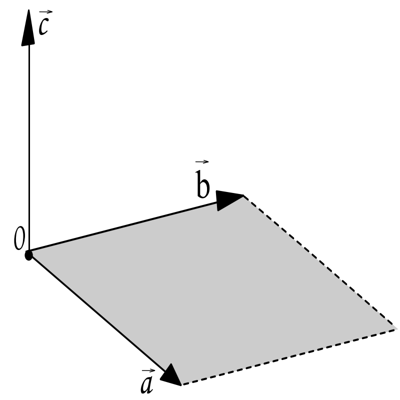

Рис. 21. Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

2) направление вектора $\vec{c}$ перпендикулярно к плоскости упомянутого параллелограмма.

3) направление вектора $\vec{c}$ выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ составляли правую систему.

Основные свойства векторного произведения векторов:

$$[\vec{a}, \vec{a}] = 0; \tag{93}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]; \tag{94}$$

$$[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}], \quad \text{где } \lambda - \text{это число}; \tag{95}$$

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]; \tag{96}$$

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{97}$$

Нужно разложить этот определитель по первой строке. Тогда коэффициенты при $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Геометрические свойства векторного произведения

1. Для вычисления *площади параллелограмма*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (смотри рисунок 21) применяется формула

$$S_{\square} = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|. \tag{98}$$

2. Для вычисления *площади треугольника*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (смотри рисунок 22) применяется формула

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|. \tag{99}$$

3. *Высота $H_{\square}$ параллелограмма и высота $H_{\triangle}$ треугольника, проведенная к вектору $\vec{a}$*, определяются по формуле

$$H_{\square} = H_{\triangle} = \frac{\left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|}{\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}}. \tag{100}$$

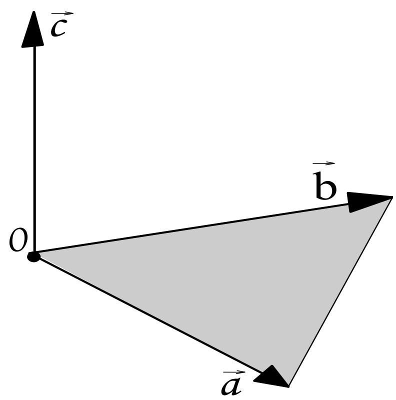

Рис. 22. Треугольник, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на векторное произведение

141. Составить таблицу векторного умножения орт системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

142. Найти векторное произведение векторов $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$:

$a)$ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$, $b)$ $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$.

143. Упростить выражение:

$a)$ $\left[3\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}+5\vec{b}\right]$, $b)$ $\left[2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}+4\vec{b}\right]$, $c)$ $\left[4\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c},\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}\right]$.

144. $a)$ Дан треугольник с вершинами $A(4,-14,8)$, $B(2,-18,12)$, $C(12,-8,12)$. Найти площадь треугольника и длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

$b)$ Даны векторы $\vec{a}=(-4,-8,8)$, $\vec{b}=(4,3,2)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

145. $a)$ Пусть $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{a\,,\,b})=60^0$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$.

$b)$ Пусть $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\widehat{a\,,\,b})=150^0$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$.

146. $a)$ Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку.

$b)$ Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=5$, $|\vec{n}|=3$ и $\widehat{m\,,\,n}=\dfrac{\pi}{6}$

$c)$ Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, вычислить длину его высоты $\overrightarrow{CD}$ при условии, что $\vec{p}$, $\vec{q}$ – перпендикулярные друг другу орты.

147. Дан вектор $\vec{Q}=[\,3\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p},\vec{m}+6\vec{n}+4\vec{p}]$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты, образующие левую тройку. Вычислить его длину.

148. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}+\vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты.

24. Смешанное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение смешанного произведения

Определение 91. *Смешанным произведением векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, то есть

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}). \tag{101}$$

Основные свойства смешанного произведения векторов

1. Имеют место равенства:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]). \tag{102}$$

2. При круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется, при перестановке двух сомножителей – меняет знак на обратный:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}). \tag{103}$$

3. Свойство распределительности:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}). \tag{104}$$

4. Свойство сочетательности:

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \tag{105}$$

5. Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно нулю, например

$$(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0. \tag{106}$$

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Если заданы координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в прямоугольной системе координат, то смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{107}$$

Определение и условие компланарности векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ лежат в одной плоскости, то есть *компланарны*, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то есть

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{108}$$

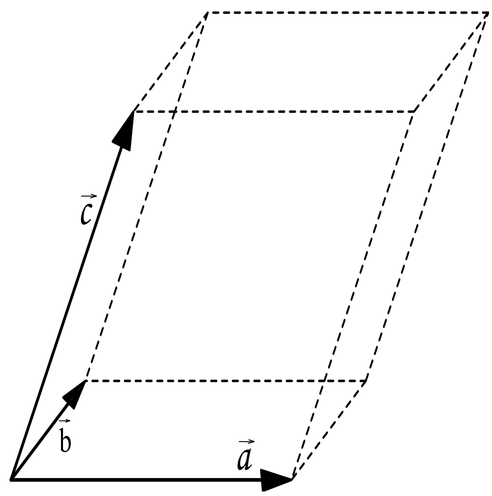

Рис. 23. Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Геометрические свойства смешанного произведения

1. *Объем параллелепипеда*, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 23), определяется по формуле:

$$V_{\text{парал}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{109}$$

где знак плюс выбирается, если определитель третьего порядка равен положительному значению, и знак минус – в противоположном случае.

2. *Объем пирамиды*, построенной на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 24), определяется по формуле:

$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{110}$$

где знак плюс выбирается, если определитель третьего порядка равен положительному значению, и знак минус – в противоположном случае.

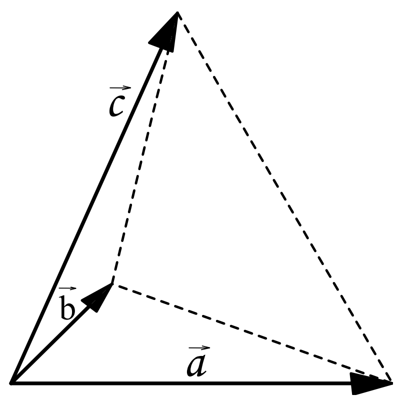

Рис. 24. Пирамида, построенная на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

3. Пусть дан параллелипипед, построенный на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 23). Высоту параллелипипеда, которая проведена к нижнему основанию, образованному векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле:

$$H_{\text{парал}} = \frac{V_{\text{парал}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}. \tag{111}$$

4. Пусть дана пирамида, построенная на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 24). Высоту пирамиды, которая

проведена к основанию, образованному векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле:

$$H_{\text{пирам}} = \frac{3 \cdot V_{\text{пирам}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}. \qquad (112)$$

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на смешанное произведение

149. *a*) Найти объем тетраэдра с вершинами $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-4,-3,7)$.

b) Вычислить объем параллелепипеда с вершинами $A(4,3,0)$, $B(-1,2,1)$, $C(3,4,1)$, $D(5,6,2)$ и длину высоты, опущенной из вершины D.

150. Проверить, компланарны ли следующие вектора:
a) $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{r} = 7\vec{a} + 14\vec{b} - 13\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные орты.
b) $\vec{a} = (2,3,-1)$, $\vec{b} = (1,-1,3)$, $\vec{c} = (1,9,-11)$,
c) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{r} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные орты.
d) $\vec{a} = (3,-2,1)$, $\vec{b} = (2,1,2)$, $\vec{c} = (3,-1,-2)$.

151. Проверить, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости:
a) $A(5,-1,-1)$, $B(4,2,2)$, $C(5,3,1)$, $D(8,0,-5)$,
b) $A(3,-4,1)$, $B(2,-3,7)$, $C(1,-4,3)$, $D(4,-3,5)$.

152. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

153. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах:
a) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, где $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты,
b) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, где $|\vec{m}| = \dfrac{1}{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $\widehat{m\,,\,n} = 135$.

154. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 5\vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Кроме того, известно, что $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.

Ответы

1. **a)** $3+i$; $-4+19i$; $-7+5i$; $-\frac{16}{29}+\frac{11}{29}i$; $-16-11i$, **b)** $3-2i$; $37-9i$; $1+12i$; $-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i$; $-33-19i$, **c)** $2\sqrt{2}$; 5; $-2\sqrt{3}i$; $-\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}i$; $-1+2\sqrt{6}i$.

2. *Решение.* Имеем $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$. Очевидно, что все возможные значения i^n были вычислены и дальше они будут циклично повторяться. Поэтому i^n следует вычислять по формуле:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 4k, \\ -i, & \text{если } n = 4k-1, \\ -1, & \text{если } n = 4k-2, \\ i, & \text{если } n = 4k-3, \end{cases} \qquad (113)$$

где k – произвольное натуральное число.

3. **a)** i, **b)** $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$, **c)** $-\frac{18}{25}+\frac{173}{50}i$, **d)** $-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i$,

4. **a)** $x=-2$, $y=-2$ или $x=-2$, $y=2$, **b)** $(3;4)$, $(3;5)$, $(4;4)$, $(4;5)$.

5. **a)** $x=-\frac{4}{11}$, $y=\frac{5}{11}$, **b)** $x=1$, $y=2$, **c)** $x=1$, $y=-1$ или $x=-1$, $y=1$.

6. $\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

7. **a)** $x=i+1$, $y=i$, **b)** $x=2+i$, $y=2-i$.

8. **a)** -1, **b)** 1.

9. *Решение.* Пусть $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Вычислим произведение этих чисел, получим:

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2)i. \qquad (114)$$

Комплексное число (114) является мнимым, если его действительная часть равна нулю, то есть если

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0$$

или

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{y_2}{x_1}.$$

Пусть теперь $\dfrac{x_2}{y_1} = \dfrac{y_2}{x_1} = \lambda$, где λ – вещественное число. Тогда

$$\begin{cases} x_2 &= \lambda y_1, \\ y_2 &= \lambda x_1. \end{cases}$$

Поэтому $z_2 = \lambda(y_1 + ix_1)$. Таким образом, произведение двух комплексных чисел является мнимым, если сомножители имеют вид: $x_1 + iy_1$ и $\lambda(y_1 + ix_1)$, где λ – произвольное вещественное число.

10. а) *Решение.* Пусть $z = a + bi$, тогда $\bar{z} = a - bi$. По условию задачи должно быть выполнено следующее равенство: $\bar{z} = z^2$ или

$$a - bi = (a + bi)^2. \tag{115}$$

Упростим правую часть уравнения (115), получим

$$a - bi = a^2 - b^2 + 2abi. \tag{116}$$

Из (116) и равенства двух комплексных чисел, следует система уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= a, \\ b(2a+1) &= 0. \end{cases} \tag{117}$$

Система (117) равносильна совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} b &= 0; \\ a^2 - a &= 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0; \\ a(a-1) &= 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0; \\ a &= 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} b &= 0; \\ a &= 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a &= -1/2; \\ b^2 &= 3/4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= -1/2; \\ b &= \sqrt{3}/2, \end{cases}$ или $\begin{cases} a &= -1/2; \\ b &= -\sqrt{3}/2. \end{cases}$

Таким образом, комплексные числа 0; 1; $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ сопряжены своим квадратам.

12. a) $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$, **b)** $2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$, **c)** $2(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$, **d)** $2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$, **e)** $16(\cos(0) + i\sin(0)$, **f)** $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$, **g)** $4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$, **h)** $\sqrt{5}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$,

i) $2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$, **j)** $\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$, **k)** $2\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3}))$, **l)** $8(\cos(0)+i\sin(0)$, **m)** $16(\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2}))$, **n)** $8(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$, **o)** $32(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$, **p)** $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$.

13. a) полуплоскость, лежащая ниже прямой $x+y=1$ (см. рисунок 26), **b)** полуплоскость, лежащая выше прямой $y=x$ (см. рисунок 27), **c)** множество показано на рисунке 28, **d)** множество показано на рисунке 29, **e)** данное неравенство равносильно неравентсвам $2\pi k < |z| < \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Искомое множество представляет собой бесконечную систему концентрированных колец с центром в точке $z=0$. Сама точка $z=0$ не принадлежит этому множеству (см. рисунок 30), **f)** прямая, которая задается уравнением $y=-x$, **g)** точка $z=-1-2i$, **h)** угол (без границы) с вершиной в точке $z=-i$, стороны которого проходят через точки $z=1$ и $z=0$, **i)** действительная отрицательная полуось $y=0$, $x<0$, **j)** круг радиуса $R=10$ с центром в точке $z=-i$ без границы и без центра, **k)** окружность радиуса $R=3$ с центром в точке $z=0$, **l)** множество показано на рисунке 31, **m)** множество показано на рисунке 32, **n)** прямая, которая задается уравнением $y=-x$, **o)** уравнение окружности с центром в точке $(-3;0)$, радиус которой равен $R=3$, **p)** парабола, симметричная относительно оси OX, с вершиной в точке $-\frac{1}{2}$, которая задается уравнением $y^2 = 2x+1$ (см. рисунок 25).

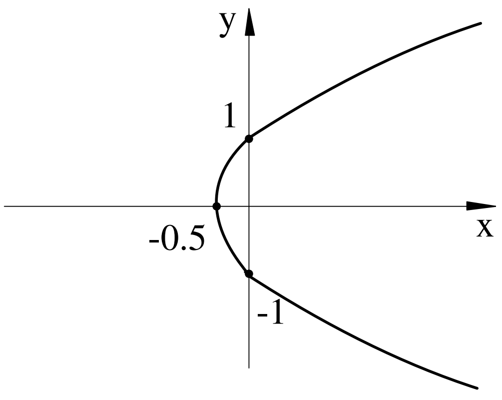

Рис. 25

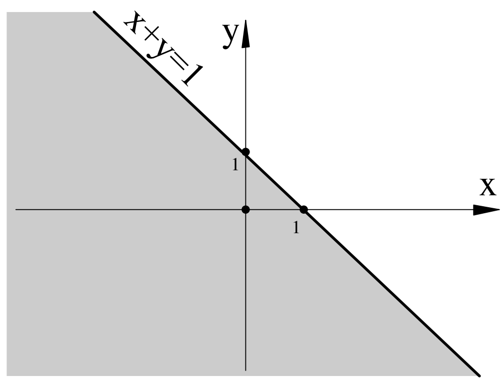

Рис. 26

14. a) $2(\cos(\frac{2\pi}{9}) + i\sin(\frac{2\pi}{9}))$; $2(\cos(\frac{8\pi}{9}) + i\sin(\frac{8\pi}{9}))$; $2(\cos(\frac{14\pi}{9}) +$

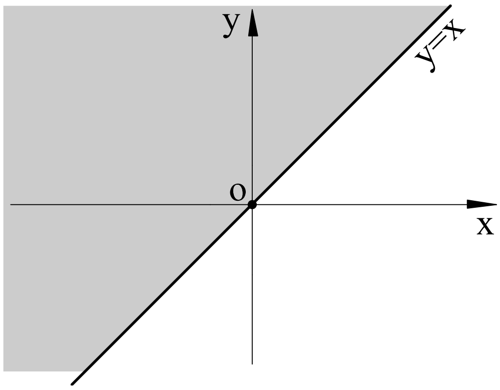

Рис. 27

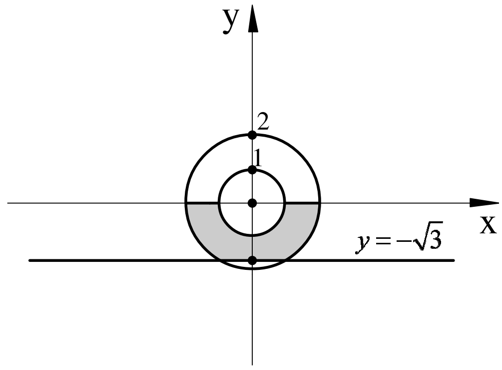

Рис. 28

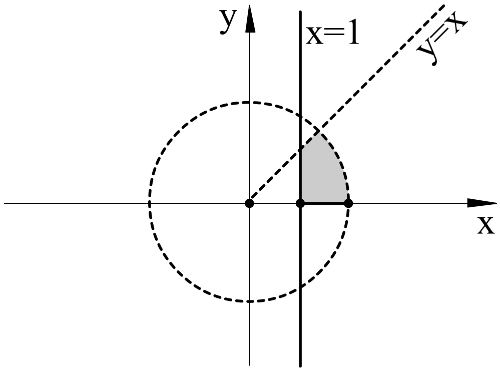

Рис. 29

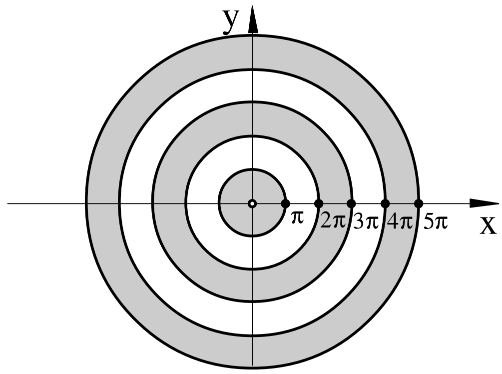

Рис. 30

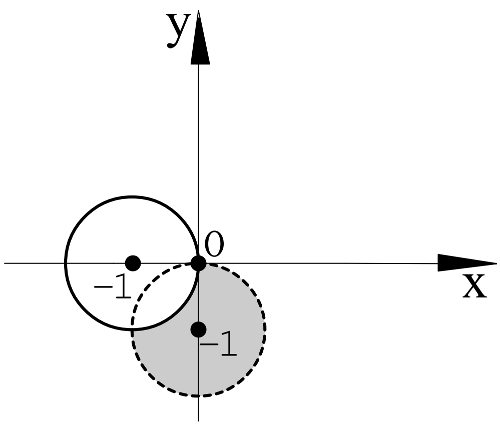

Рис. 31

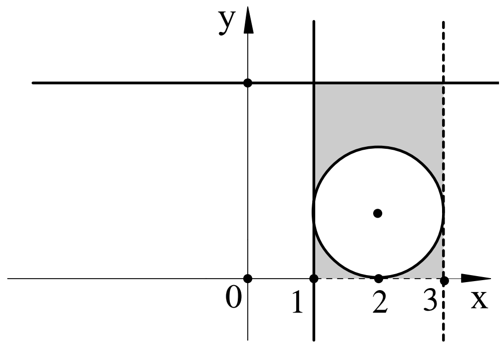

Рис. 32

$i\sin(\frac{14\pi}{9}))$, **b)** $\pm 2 \pm 2i$, **c)** 1; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, **d)** $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{\pi}{32}) + i\sin(\frac{\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{9\pi}{32})+i\sin(\frac{9\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{17\pi}{32})+i\sin(\frac{17\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(25\frac{\pi}{32})+i\sin(\frac{25\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{33\pi}{32})+i\sin(\frac{33\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{41\pi}{32})+i\sin(\frac{41\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{49\pi}{32})+i\sin(\frac{49\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{57\pi}{32}) + i\sin(\frac{57\pi}{32}))$.

15. a) *Решение.* Представим комплексные числа $z_1 = i - \sqrt{3}$, $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $z_3 = 1 - i$ в тригонометрической форме, получим:
$z_1 = 2\Big(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\Big)$,
$z_2 = \cos\Big(-\dfrac{\pi}{12}\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{12}\Big)$,
$z_3 = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big)$.

Используем равенства (10)–(11) и имеем

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \sqrt{2}\Bigg(\cos\Big(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\Big)\Bigg) = \sqrt{2}\Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big).$$

Итак, число z в алгебраической форме имеет вид: $z = -\sqrt{2}$.
b) $2\sqrt{2}(\cos(\varphi + \frac{7\pi}{12}) + i\sin(\varphi + \frac{7\pi}{12}))$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(2\varphi - \frac{\pi}{12}) + i\sin(2\varphi - \frac{\pi}{12}))$,
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, **e)** -2^{10}, **f)** $2^9(1 - i\sqrt{3})$, **g)** -64, **h)** $-128i$.

16. a) $\cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}$, **b)** $2^n\cos^n\dfrac{\pi}{5}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{5} + i\sin\dfrac{n\pi}{5}\Big)$.

18. a) $2+i$, $1-3i$, **b)** $2 \pm 2i$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, **d)** $1-2i$, $3i$, **e)** $1-i$; $\frac{4-2i}{5}$, **f)** $5-2i$, $2i$.

19.
a) $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})\right)$;
b) $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16}) + i\sin(\frac{\pi}{16})\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{9\pi}{16}) + i\sin(\frac{9\pi}{16})\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{17\pi}{16}) + i\sin(\frac{17\pi}{16})\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{25\pi}{16}) + i\sin(\frac{25\pi}{16})\right)$;
c) $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{15}) + i\sin(\frac{\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{15}) + i\sin(\frac{7\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{13\pi}{15}) + i\sin(\frac{13\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{19\pi}{15}) + i\sin(\frac{19\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right)$;
d) $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; $\sqrt{3} - i$.

20. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)$; **b)** $(x+1)^3(x-3)(x-4)$.

21. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)$; **b)** $(x^2-4x+13)^3$.

22. a) $(x^2+4)(x^2+9)$; **b)** $(x-2i)(x+2i)(x-3i)(x+3i)$.

23. a) $(x+2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$; **b)** $(x-2i)(x+2i)$;
c) $(x-3-i)(x-3+i)$; **d)** $(x-1)(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$.

24. a) $x^2(4x^2-12x+13)$; **b)** $(x^2+2)(x^2+6)$;
c) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$; **d** $(x-1)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

25. $8r = 4pq - p^3$.

26. $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = -1/3$.

27. $\lambda = \pm 6$.

28. 1) $b = c = 0, \forall a$; 2) $a = -1$; $b = -1$; $c = 1$.

29. $\lambda = -3$.

30. **a)** $q(x) = 2x^2 + 3x + 11$, $r(x) = 25x - 5$;
b) $q(x) = (3x - 7)/9$, $r(x) = (-26x - 2)/9$.

31. $p = -q^2 - 1 (m = q)$.

32. $1) q = p - 1 (m = 0); 2) q = 1 (m = \pm\sqrt{2 - p})$.

33. **a)** $f(x) = (x - 4)(x^3 + x^2 + 10x + 30) + 136$; $f(x_0) = 136$;
b) $f(x) = (x - 1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5$; $f(x_0) = 5$;
c) $f(x) = (x + 3)(2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109) - 327$; $f(x_0) = -327$.

34. **a)** $k = 3$; **b)** $k = 4$.

35. **a)** 2; **b)** -3; **c)** -2; 3; **d)** 1; -2; 3; **e)** 1/2; -2/3; 3/4; **f)** -1; -2; -3; 4;
g) 1/2; **h)** $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = -1$.

36. **a)** $f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1$;
b) $f(x) = (x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$;
c) $f(x) = (x - 2)^4 - 18(x - 2) + 38$.

37. **a)** $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{6}{(x-2)^3} + \frac{11}{(x-2)^4} + \frac{7}{(x-2)^5}$;
b) $\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^5}$.

38. **a)** $f(2) = 18$, $f'(2) = 48$, $f''(2) = 124$, $f^{(3)}(2) = 216$, $f^{(4)}(2) = 240$, $f^{(5)}(2) = 120$; **b)** $f(1) = 6$, $f'(1) = 8$, $f''(1) = 2$, $f^{(3)}(1) = 6$, $f^{(4)}(1) = 24$.

39. **a)** *Решение.* Для того, чтобы определить общее число инверсий, сосчитаем количество инверсий, которое образует каждый символ перестановки:

символ 2 образует 0 инверсий;

символ 3 стоит раньше символа 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;

символ 4 образует 0 инверсий;

символ 5 стоит раньше символа 4 и образует 1 инверсию;

символ 6 — 4 инверсии (так как стоит раньше символов 3,2,5,4);

символ 7 имеет 0 инверсий;

символ 8 образует 0 инверсий;

символ 9 имеет 7 инверсий, так как стоит раньше символов 6,3,2,5,4,7,8.

По результатам вычислений составляем следующую таблицу:

Символ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Общее кол-во инверсий
Кол-во инверсий	0	0	1	0	1	4	0	0	7	13

Итак, исходная перестановка имеет 13 инверсий. **b)** 5, **c)** 8, **d)** 18, **e)** 10, **f)** 18.

40. **a)** $i = 8$, $k = 3$, **b)** $i = 3$, $k = 6$.

41. **a)** *Решение.* Чтобы определить общее количество инверсий, составим таблицу

Символ	1	3	5	7	...	2n-3	2n-1
Кол-во инверсий	0	1	2	3	...	n-2	n-1

Таким образом, исходная перестановка имеет $I = 1+2+\ldots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ инверсий. **b)** $\frac{n(n+1)}{2}$, **c)** $\frac{3n(n-1)}{2}$, **d)** $3n(n-1)$, **e)** $n(3n-2)$, **f)** $n(5n+1)$.

42. В перестановке n, $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 3, 2, 1. Число инверсий в ней $\frac{n(n-1)}{2}$.

43. $k-1$.

44. $n-k$.

45. **a)** *Решение.* Из вторых индексов данного произведения составляем перестановку $\sigma = \{3, 2, 1, 6, 5, 4\}$. Перестановка σ является четной, так как имеет 6 инверсий. Из формулы (18) следует что, произведение $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$ входит в определитель шестого порядка со знаком плюс. **b)** *Решение.* Множество, составленное из вторых индексов исходного произведения $\{7, 1, 4, 6, 4, 2, 3\}$, не является перестановкой из семи символов, поэтому произведение $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$ не является членом определителя. **c)** входит со знаком минус, **d)** входит со знаком плюс, **e)** не является членом определителя, **f)** входит со знаком $(-1)^{n-1}$, **g)** входит со знаком $(-1)^n$, **h)** не является членом определителя.

46. **a)** *Решение.* В первой строке данного определителя лишь один элемент ненулевой — это элемент a_{11}, следуя определению определителя из второй строки мы можем выбрать только элемент a_{22}, из третьей строки — a_{33} и так далее. Таким образом, определитель равен произведению

$$\Delta = (-1)^{t(j)}a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{118}$$

Перестановка $\{1, 2, \ldots, n\}$ является четной, поэтому окончательно получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{119}$$

b) *Решение.* Рассуждаем так же, как и в предыдущем примере. Из первой строки мы берем элемент a_{1n}, так как все остальные равны нулю, из второй строки Δ мы можем взять только элемент $a_{2,n-1}$, из третьей строки — элемент $a_{3,n-2}$ и так далее. Таким образом,

$$\Delta = (-1)^{t(j)}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\ldots a_{n1}.$$

Сосчитаем число инверсий $t(j)$ в перестановке $n, n-1, n-2, \ldots, 1$. Символ n имеет $n-1$ инверсию, символ $n-1$ имеет $n-2$ инверсии и так далее, и, наконец, символ 2 имеет 1 инверсию. Итак,

$$t(j) = 1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следуя определению определителя, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\dots a_{n1} \qquad (120)$$

47. $i = 5$, $k = 1$.

48. $i = 6$, $k = 2$.

49. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

50. $10x^4 - 5x^3$.

51. **a)** -8, **b)** 1, **c)** $x^2 + 2y^2$, **d)** 2, **e)** 0, **f)** $1/\cos^2\varphi$, **g)** $\sin x$

52. **a)** 10/7, **b)** окружность с центром в точке (-2;3) и радиусом $R = 5$, **c)** $x_1 = 1$; $x_2 = 5$, **d)** $x_1 = \pi k/4$, $k \in Z$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$, **e)** $z_1 = 0$; $z_2 = \pm i$.

53. **a)** 0, **b)** 6, **c)** -210, **d)** $abc + abx + acx + bcx$, **e)** -12, **f)** 40, **g)** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, **h)** $abc - ax^2 - bx^2 - cx^2 + 2x^3$.

54. **a)** $x = 5$, **b)** $x \in [-41/21; +\infty)$, **c)** $x_1 = -3$, $x_2 = -2,5$, **d)** $x \in [-\infty; -7]$.

56. **a)** 0, **b)** 0, **c)** 0, **d)** 0, **e)** 0.

58. $8a + 15b + 12c - 19d$.

59. $2a - 8b + c + 5d$.

60. **a)** -42, **b)** -15, **c)** 119.

61. **a)** -3, **b)** 48, **c)** 20, **d)** 16, **e)** 54, **f)** 160, **g)** 18, **h)** 18, **i)** 4, **j)** 17.

62. **a)** -24, **b)** -60, **c)** 192, **d)** 220, **e)** -98, **f)** -34.

63. **a)** *Решение.*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot3 + 2\cdot6 + 3\cdot7 & 1\cdot4 + 2\cdot0 + 3\cdot1 & 1\cdot5 + 2(-2) + 3\cdot8 \\ 1\cdot3 + 0\cdot6 + 7(-1) & 1\cdot4 + 0\cdot0 + 1(-1) & 1\cdot5 + 0(-2) + 8(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение $B \cdot A$ не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3 \neq 2$). **b)** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, произведения $B \cdot A$ не существует, **c)** $A \cdot B = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$,

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}$.

64. a) *Решение.*

$$4A - 5B - \lambda E = 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7-\lambda & -9 & -10 \\ 22 & 11-\lambda & -23 \\ -12 & -6 & 40-\lambda \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & -\lambda & 5 \\ 6 & -7 & -8-\lambda \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}$.

65. a) *Решение.* Пусть $n = 2$, тогда

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ -2\cos^2\alpha \sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

При $n = 3$ имеем

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha & \cos 2\alpha\sin\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha \\ -\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha & \cos 2\alpha\sin\alpha + \cos 2\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}.$$

С помощью метода математической индукции докажем, что

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. **b)** $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

66. a) *Решение.* Пусть $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ — матрица, перестановочная с матрицей A, т.е. выполнено равенство

$$AB = BA. \tag{121}$$

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}, \tag{122}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}. \qquad (123)$$

Равенство (121) с учетом (122), (123) перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \qquad (124)$$

Пусть $x_3 = 3a$, $x_4 = b$, тогда $x_1 = b - 3a$, $x_2 = 2a$ и в результате получим

$$B = \begin{pmatrix} b - 3a & 2a \\ 3a & b \end{pmatrix},$$

где a, b — произвольные числа. **b)** $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-5b}{3} & a + 3b \end{pmatrix}$, где a, b – произвольные действительные числа.

67. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}$.

68. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$.

69. **a)** *Решение.* 1) Найдем $|A|$ – определитель матрицы A:

$$|A| = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 0 - 8 \cdot 6 \cdot 1 =$$

$$= 84 + 96 - 105 - 48 = 27.$$

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad A_{12} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\frac{1}{41} \begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{pmatrix}$,

c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, **d)** $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, **e)** обратной матрицы не существует, **f)** $\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$.

70. a) *Решение.* Запишем матрицу $(A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных пребразований над строками приведем ее к виду $(E|A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ 1&2&-1&0&1&0\\ 2&2&4&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\mathrm{II}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ 0&1&-2&-1&1&0\\ 0&0&2&-2&0&1\end{array}\right)\mathrm{III}:(-2)\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ 0&1&-2&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&0&\frac12\end{array}\right)\mathrm{I}-\mathrm{II}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&3&2&-1&0\\ 0&1&-2&-1&1&0\\ 0&0&1&-1&0&\frac12\end{array}\right)\begin{array}{c}\mathrm{I}-3\mathrm{III}\\ \mathrm{II}+2\mathrm{III}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&5&-1&-\frac32\\ 0&1&0&-3&1&1\\ 0&0&1&-1&0&\frac12\end{array}\right).$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&-\frac32\\ -3&1&1\\ -1&0&\frac12\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&2&-1\\ 2&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-1&-\frac32\\ -3&1&1\\ -1&0&\frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}5&-1&-\frac32\\ -3&1&1\\ -1&0&\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&2&-1\\ 2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix}-4&3&-2\\ -8&6&-5\\ -7&5&-4\end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix}3&-1&-1\\ -1&1&0\\ -1&0&1\end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix}3&0&-1\\ 2&1&0\\ -4&-1&1\end{pmatrix}$,

e) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, **f)** обратной матрицы не существует,

g) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, **h)** $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

71. a) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $X = A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, **d)** решений нет,

e) $X = A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

72. a) *Решение.* Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geq 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит $r(A) \geq 2$. Вычислим миноры третьего порядка, окаймляющие минор M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. 1 и 2 столбцы пропорциональны;}$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. пропорциональны 2 и 3 столбцы.}$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $r(A) = 2$. Любой ненулевой минор второго порядка матрицы A является базисным. Например, базисным минором является минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

b) 3, **c)** 2, **d)** 3, **e)** 2, **f)** 2, **g)** 3, **h)** 2.

73. **a)** *Решенеие.* С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \ \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II} \ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица содержит две ненулевых строки, поэтому ее ранг равен двум. Следовательно, $r(A) = 2$. **b)** 3, **c)** 3, **d)** 2, **e)** 4, **f)** 2.

74. **a)** $r = 3$ при $\lambda = \frac{2}{3}$, $r = 4$ при $\lambda \neq \frac{2}{3}$, **b)** $r = 2$ при $\lambda = 3$, $r = 3$ при $\lambda \neq 3$, **c)** $r = 3$ при $\lambda = 3$, $r = 4$ при $\lambda \neq 3$, **d)** $r = 2$ при $\lambda = 0$, $r = 3$ при $\lambda \neq 0$.

75. **a)** $x = -b$, $y = -\frac{2}{3}a$, если $ab \neq 0$; нет решений, если $ab = 0$, **b)** $x = \frac{f_1 d - f_2 b}{ad - bc}$, $y = \frac{af_1 - cf_2}{ad - bc}$, если $ad - bc \neq 0$; нет решений, если $ad - bc = 0$.

76. **a)** *Решение.* Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 30 + 1 = -29$$

следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью правила Крамера. Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 0 - 0 + 16 - 75 = -29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32+0+0-0-60+5 = -87,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0+0+25-0-10-160 = -145.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 3 = 5, \\ 1 + 3\cdot 5 = 16, \\ 5\cdot 3 - 5 = 10. \end{cases}$$

Итак, $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. **b)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$, **c)** $x_1 = 0$; $x_2 = -4$; $x_3 = -6$, **d)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$, **e)** $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$, $x_4 = -1$, **f)** $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

77. a) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, **b)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$, **c)** $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, **d)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

78. a) *Решение.* Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} - 2\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & -5 & 9 \end{array}\right) -\mathrm{II} + \mathrm{III} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{III} + 2\mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 7\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{array}\right) \mathrm{IV} - 2\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right).$$

Прямой ход метода Гаусса завершен. Выполним обратный ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{III}-\mathrm{IV} \\ 18\mathrm{II}-7\mathrm{IV} \\ 9\mathrm{I}+\mathrm{IV} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 18 & 27 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & -36 & 0 & -95 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{II}-4\mathrm{III} \\ \mathrm{I}+3\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 18 & 0 & 0 & -37 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right) \mathrm{I}-\mathrm{II} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса завершен. В результате получаем систему

$$\begin{cases} 9x_1 = 6, \\ 18x_2 = -43, \\ -9x_3 = -13, \\ 18x_4 = -7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}, \\ x_2 = -\dfrac{43}{18}, \\ x_3 = \dfrac{13}{9}, \\ x_4 = -\dfrac{7}{18}. \end{cases}$$

Итак, $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = -\dfrac{43}{18}$, $x_3 = \dfrac{13}{9}$, $x_4 = -\dfrac{7}{18}$. **b)** $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, **c)** $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -3$, $x_4 = 1$, **d)** $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$, $x_4 = 3$, **e)** $x_1 = 3$; $x_2 = -5$; $x_3 = 4$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$.

79. a) *Решение.* 1) Запишем матрицу системы A и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -13 & -4 \\ 2 & 5 & -16 & -7 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \mathrm{II}-5\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \end{pmatrix} \mathrm{II}:9 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь базисный минор расположен в первых двух столбцах, главные неизвестные x_1, x_2, свободные неизвестные x_3, x_4. Систему, эквивалентную исходной, можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 - x_4, \\ \qquad\ \ x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

2) В качестве ненулевого определителя второго порядка проще всего взять единичный определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Выбор первой строки определителя означает, что свободные неизвестные принимают значения $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. В этом случае $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Для второй строки определителя $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ и $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

4) Итак, имеем два решения, которые образуют фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Общее решение системы однородных уравнений будет иметь вид:

$$X_{\text{общ}} = c_1X_1 + c_2X_2 = \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

b) общее решение $x_1 = 8c_1 - 7c_2$, $x_2 = -6c_1 + 5c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

c) общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2$, $x_4 = \frac{7}{2}c_1 - 7c_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	-5/2	7/2
0	1	5	-7

d) система имеет только нулевое решение. Фундаментальная система решений не существует.

e) общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{c_1 - 2c_2}{3}$, $x_4 = 0$, $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1/3	1	0	0
0	-2/3	0	0	1

f) общее решение $x_1 = -3c_1 - 5c_2$, $x_2 = 2c_1 + 3c_2$, $x_4 = 0$, $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

g) общее решение $x_1 = c_1 - c_2$, $x_2 = c_1 - c_3$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

80. a) при $\lambda = -1$ общее решение $x_1 = -5c$, $x_2 = c$, $x_3 = 3c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(-5; 1; 3)$; при $\lambda \neq -1$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

b) при $\lambda = 6$ общее решение $x_1 = 7c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(7; 2; 3)$; при $\lambda \neq 6$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

c) при $\lambda = 2$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(1;0;-2)$; при $\lambda=-4$ общее решение $x_1=5c$, $x_2=-24c$, $x_3=-4c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(5;-24;-4)$; при $\lambda\neq-4$, $\lambda\neq2$ общее решение $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, фундаментальной системы решений нет.

d) при $\lambda=3$ общее решение $x_1=2c_1+5c_2$, $x_2=3c_1-3c_2$, $x_3=7c_1$, $x_4=7c_2$, фундаментальная система решений состоит из двух векторов: $(2;3;7;0)$, $(5;-3;0;7)$; при $\lambda\neq3$ общее решение $x_1=5c$, $x_2=-3c$, $x_3=0$, $x_4=7c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(5;-3;0;7)$.

81. Строки матрицы A не образуют, строки матрицы B образуют.

82. а) *Решение.* 1) Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A}$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\1&1&-2&3&2\\1&1&1&-9&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{II}-\mathrm{I}\\\mathrm{III}-\mathrm{I}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&0&-1&4&1\\0&0&2&-8&-2\end{array}\right)\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&0&-1&4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&0&-1&4&1\end{array}\right).$$

Последняя матрица соответствует системе, эквивалентной исходной и содержит две ненулевые строки, поэтому $r(A)=r(\bar{A})=2$.

2) Исследуем систему на совместность. Поскольку $r(A)=r(\bar{A})=2<n=4$, то система совместна и имеет более одного решения.

3) Выберем базисный минор в первом и третьем столбце, имеющий вид

$$\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}.$$

При таком выборе базисного минора главными неизвестными являются x_1 и x_3 (так как базисный минор состоит из первого и третьего столбца матрицы). Тогда остальные неизвестные, то есть x_2 и x_4 будут свободными.

4) Основываясь на ступенчатой матрице, запишем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - x_2 + x_4, \\ - x_3 = 1 - 4x_4. \end{cases}$$

5) Решим полученную систему относительно главных неизвестных x_1 и x_3. В результате найдем

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 5x_4, \\ x_3 = -1 + 4x_4. \end{cases}$$

Итак, запишем общее решение системы в виде вектора-столбца

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -x_2 + 5x_4 \\ x_2 \\ -1 + 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_2 и x_4 принимают любые произвольные значения. Для того, чтобы найти частное решение системы, положим, например, $x_2 = 1$ и $x_4 = 1$, тогда частное решение $X_{\text{частн}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) *Решение.* 1) Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A}$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ -1 & 17 & -8 & -14 & -1 \end{array}\right) \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 17 & -8 & -14 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{II} - 3\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Итак, имеем $r(A) = 2$ и $r(\bar{A}) = 3$.

2) Исследуем систему на совместность. Поскольку $r(A) \neq r(\bar{A})$, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна, то есть данная система не имеет решений.

c) система совместна, общее решение $x_1 = (c_1 - 9c_2 - 2)/11$, $x_2 = (-5c_1 + c_2 + 10)/11$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

d) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 6 - 15c_1 + 10c_2$, $x_4 = -7 + 18c_1 - 12c_2$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

e) система совместна и имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

f) система совместна, общее решение $x_1 = (-6 + 8c)/7$, $x_2 = (1 - 13c)/7$, $x_3 = (15 - 6c)/7$, $x_4 = c$, частное решение $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

g) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = -1 - 8c_1 + 4c_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2c_1 - c_2$ частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

h) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = 1 + c_1 - c_2$, $x_3 = 1$, $x_4 = c_2$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

i) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 22c_1 - 33c_2 - 11$, $x_4 = -16c_1 + 24c_2 + 8$, частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

j) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 1 - 3c_1 - 4c_2$, $x_4 = 1$, частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

k) система несовместна.

l) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 13$,

$x_4 = 19 - 3c_1 - 2c_2$, $x_5 = -34$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 13$, $x_4 = 0$, $x_5 = -34$.

83. **a)** при $\lambda = -4$ система несовместна; при $\lambda = 4$ система совместна, общее решение $x_1 = 3 - 2c$, $x_2 = c$; при $\lambda \neq -4$ и $\lambda \neq 4$ система имеет единственное решение $x_1 = \frac{12}{\lambda+4}$, $x_1 = \frac{6}{\lambda+4}$.

b) при $\lambda = 2$ система совместна, общее решение $x_1 = 5 + c_1 - 2c_2$, $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$; при $\lambda \neq 2$ система совместна, общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 2c - 5$, $x_3 = c$.

c) при $\lambda \neq 8$ система совместна и имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$; при $\lambda = 8$ система совместна, общее решение $x_1 = 3 + 2c$, $x_2 = -1 - c$, $x_3 = c$.

d) при $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ система совместна $x_1 = (-5c_1 - 13c_2 - 3)/2$, $x_1 = (-7c_1 - 19c_2 - 7)/2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

84. **a)** *Решение.* Поскольку известно частное решение системы, можно ограничиться определением общего решения приведенной однородной системы. Решим эту систему и получим общее решение в виде

$$X_{\text{одн}} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ -c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Теперь, используя формулу (34), можем записать общее решение неоднородной системы

$$X = X_{\text{одн}} + X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 + 2 \\ -c_1 \\ -1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

85. *Решение.* Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены корректно, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь условия 1)–8) определения линейного пространства.

1) Сложение векторов коммутативно потому, что умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность сложения векторов следует из цепочки равенств:

$$x + y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) =$$

$$= (y_1 \cdot x_1, y_2 \cdot x_2, \ldots, y_n \cdot x_n) = y + x$$

для любых $x, y \in \boldsymbol{G}$.

2) Аналогично проверяется ассоциативность сложения векторов. Для любых x, y, $z \in \boldsymbol{G}$ имеем

$$(x + y) + z = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) + z =$$

$$= (x_1 \cdot y_1 \cdot z_1, x_2 \cdot y_2 \cdot z_2, \ldots, x_n \cdot y_n \cdot z_n) =$$

$$= x + (y_1 \cdot z_1, y_2 \cdot z_2, \ldots, y_n \cdot z_n) = x + (y + z).$$

3) В качестве ноль-вектора нужно взять вектор $0 = (1, 1, \ldots, 1)$. Действительно,

$$x + 0 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \ldots, x_n \cdot 1) = x$$

для любого вектора $x \in \boldsymbol{G}$.

4) Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ противоположным элементом будет вектор

$$x' = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}),$$

так как

$$x + y = (x_1 \cdot x_1^{-1}, x_2 \cdot x_2^{-1}, \ldots, x_n \cdot x_n^{-1}) = (1, 1, \ldots, 1) = 0.$$

5) Для любых $x, y \in \boldsymbol{G}$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) =$$

$$= ((x_1 y_1)^\alpha, (x_2 y_2)^\alpha, \ldots, (x_n y_n)^\alpha) = (x_1^\alpha y_1^\alpha, x_2^\alpha y_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha y_n^\alpha) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \alpha x + \alpha y.$$

6) Для любого $x \in \boldsymbol{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$(\alpha + \beta)x = (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta}) = (x_1^\alpha x_1^\beta, x_2^\alpha x_2^\beta, \ldots, x_n^\alpha x_n^\beta) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha x + \beta x.$$

7) Для любого $x \in \boldsymbol{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$(\alpha\beta)x = (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \ldots, x_n^{\alpha\beta}) =$$

$$= ((x_1^\beta)^\alpha, (x_2^\beta)^\alpha, \ldots, (x_n^\beta)^\alpha) = \alpha(x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha(\beta x).$$

8) Наконец, для любого $x \in \boldsymbol{G}$

$$1 \cdot x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) = x.$$

Следовательно, данное множество $\boldsymbol{G}$ с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является вещественным линейным пространством.

86. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 3) и 6).

87. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

88. **a)** Линейно зависима. **b)** Линейно независима. **c)** Линейно зависима. **d)** Линейно независима.

89. *Указание.* Воспользоваться определением и подобрать числа c_1, c_2, c_3 так, чтобы для любых x, y, z выполнялось равенство $c_1(\alpha x - \beta y) + c_2(\gamma y - \alpha z) + c_3(\beta z - \gamma z) = 0$.

90. **a)** *Решение.* Составим линейную комбинацию (35) данных векторов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = 0$$

или

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $r(A)$ равен 2 и меньше числа неизвестных $n = 3$, поэтому однородная система имеет бесконечно много решений и, следовательно, существуют ненулевые числа x_1, x_2, x_3 в системе (35). Следовательно, система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима; **b)** линейно зависимая система; **c)** линейно независимая система; **d)** линейно независимая система; **e)** линейно зависимая система.

91. a) *Решение.* Нулевым элементом в пространстве $\mathbf{Q_2}$ является полином, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных полиномов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 \cdot p^1(x) + x_2 \cdot p^2(x) + x_3 \cdot p^3(x) = 0.$$

Преобразуя данное соотношение, получаем

$$(x_1 - x_2 + 9x_3) + (x_2 + 6x_3)x + x_3x^2 = 0.$$

Это равенство справедливо для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ только в том случае, когда коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x равны нулю. Таким образом, приходим к следующей системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 9x_3 = 0, \\ \qquad\ x_2 + 6x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\ \ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен числу неизвестных поэтому получаем, что данная система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Следовательно, система полиномов $p^1(x)$, $p^2(x)$, $p^3(x)$ является линейно независимой; **b)** линейно независимая система; **c)** линейно зависимая система; **d)** линейно зависимая система; **e)** линейно независимая система.

92. **a)** *Решение.* Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$(-8) \cdot (-11) = 88 \neq 0.$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$. **b)** Нет. **c)** Нет. **d)** Да.

93. **a)** *Решение.* Да. Так как любая линейно независимая система, число векторов в которой совпадает с размерностью пространства ($\dim \mathbf{P}_2 = 3$) является базисом в нем, то достаточно проверить линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3. Следуя определению, запишем линейную комбинацию многочленов и приравняем ее нулевому многочлену. $\alpha_1(1 - 3x - 2x^2) + \alpha_2(2 - 4x + x^2) + \alpha_3(2 + 3x + 2x^2) = 0 + 0x + 0x^2$. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и приравняем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x. Получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & -16.5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rank = 3$ и, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3. **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

94. **a)** *Решение.* Да. Размерность линейного пространства $\mathbf{M}^{22}$ всех матриц второго порядка равна четырем. Матриц в системе тоже четыре. Достаточно проверить линейную независимость. Запишем линейную комбинацию матриц системы и приравняем ее нулевому элементу (нулевой матрице):

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Складывая и приравнивая нулю соответствующие элементы матриц, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α_i:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -39 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{17} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rank = 4$, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы матриц A_1, A_2, A_3, A_4. **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

95. a) *Решение.* Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$. Для нахождения координат вектора x в базисе $\mathbf{e}$ нужно из векторного уравнения $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x$ найти неизвестные координаты x_1, x_2, x_3. После подстановки векторов получим

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 = -7, \end{cases}$$

решая которую, например, методом Гаусса, найдем неизвестные координаты вектора x в базисе $\mathbf{e}$. $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Наконец, найдем вектор y. По определению $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. **b)** Да. $x_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. **c)** Да. $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

96. a) *Решение.* Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = 1 - 2x + 4x^2$; **b)** Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = 3 - 2x + 4x^2$; **c)** Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $g(x) = 5 + 2x + x^2$.

97. a) *Решение.* Поскольку $p(x) \in \mathbf{P}_4$, то данный многочлен представим в виде

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4,$$

где a, b, c, d, f – произвольные вещественные числа. Имеем

$$p(1) = a + b + c + d + f, \qquad p(-1) = a - b + c - d + f.$$

По условию задачи $p(1) + p(-1) = 0$, следовательно, получаем равенство $a + c + f = 0$. Из полученного соотношения можно выразить один из коэффициентов через остальные, например, $a = -c - f$. Поэтому

$$p(x) = (-c - f) + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4 = bx + (x^2 - 1)c + dx^3 + (x^4 - 1)f,$$

то есть любой многочлен $p(x) \in \mathbf{V}$ представим в виде линейной комбинации четырех многочленов

$$p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2 - 1,\ p_3(x) = x^3,\ p_4 = x^4 - 1.$$

Система многочленов p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathbf{V}$ является линейно независимой (докажите это). Итак, система многочленов p_1, p_2, p_3, p_4 образуют базис пространства $\mathbf{V}$. Следовательно, $dim\,\mathbf{V} = \mathbf{4}$. **b)** $dim\,V = 2$, базис состоит, например, из следующих многочленов $1 - x^2, x - x^2$. **c)** $dim\,V = 4$, базис состоит, например, из следующих многочленов $x-2, x^2-4, x^3-8, x^4-16$.

98. **a)** $dim\,V = 6$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **b)** $dim\,V = 4$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $dim\,V = 3$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

99. **a)** *Решение.* Пусть e, u – матрицы, у которых по столбцам стоят координаты базисных векторов. Тогда для вычисления матрицы перехода и координат векторов в базисах можно применить следующий алгоритм:

1) Найти $e^{-1} = \dfrac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

2) Найти $T_{e\to u} = e^{-1} * u = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) Найти $T_{u\to e} = T_{e\to u}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) Найти $x_u = T_{u\to e} * x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

5) Найти $y_e = T_{e\to u} * y_u = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

100. **a)** *Решение.*

1) Составить матрицу перехода $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) Найти $T_{e\to u}^{-1} = (-1) * \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

3) Найти $x_u = T_{e\to u}^{-1} * x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **b)** $x_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. **c)** $x_u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

101. a) *Решение.* Для фиксированное числа a обозначим

$$\boldsymbol{V}_1 = \{x \in \boldsymbol{R}^n | x = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, x_2, x_3, \dots, x_n \in \boldsymbol{R}^n\}.$$

Для любых $x = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ из $\boldsymbol{V}_1$ их сумма $x + y = \begin{pmatrix} 2a \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Вектор $x + y$ принадлежит $\boldsymbol{V}_1$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $2a = a$. Это возможно лишь при $a = 0$. Таким образом, при $a \neq 0$ множество $\boldsymbol{V}_1$ не является линейным подпространством. Если $a = 0$, то для любых $x, y \in \boldsymbol{V}_1$ и любых $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ принадлежит множеству $\boldsymbol{V}_1$, следовательно, рассматриваемое множество $\boldsymbol{V}_1$ является линейным подпространством только тогда, когда верно равенство $a = 0$. **b)** Нет; **c)** Нет; **d)** Да.

102. a) *Решение.* Пусть b, c фиксированные вещественные числа. Обозначим через $\boldsymbol{V}_1$ – множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n таких, что $f(b) = c$. Если $f, g \in \boldsymbol{V}_1$, то $f(b) = g(b) = c$, поэтому $(f+g)(b) = f(b)+g(b) = 2c$. Многочлен $f+g$ будет принадлежать $\boldsymbol{V}_1$ тогда и только тогда, когда $2c = c$, что эквивалентно $c = 0$. Таким образом, если $c \neq 0$ множество $\boldsymbol{V}_1$ не является линейным подпространством. Если $c = 0$, то для любых $f, g \in \boldsymbol{V}_1$ и любых $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ принадлежит множеству $\boldsymbol{V}_1$, действительно, имеем

$$(\lambda f + \mu g)(b) = \lambda f(b) + \mu g(b) = \lambda c + \mu c = 0.$$

Следовательно, множество $\boldsymbol{V}_1$ является линейным подпространством тогда и только тогда, когда $c = 0$. **b)** Да; **c)** Да; **d)** Нет.

103. a) *Решение.* 1) Записать матрицу A, расположив координаты всех векторов по строкам, получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Любым способом найти ранг матрицы A, имеем $r(A) = 2$. Следовательно, любая линейно независимая подсистема, содержащая два вектора будет являться базисом системы векторов.

3) Найти любой базисный минор матрицы A. Вектора, координаты которых вошли в базисный минор будут являться базисом. Таким образом, базис будет определяться неоднозначно. Например, минор $M_{2,5}^{1,2} \neq 0$ – базисный, это означает, что векторы a^2, a^5 являются базисом данной системы векторов. **b)** a^1, a^3, a^5.

104. a) *Решение:* Для того, чтобы доказать, что оператор φ_1 является линейным необходимо проверить два условия линейности (45).

1) Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – произвольный вектор-столбец из пространства $\boldsymbol{R}^3$. По условию задачи имеем

$$\varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 6y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}$$

поэтому

$$\varphi_1(x) + \varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi_1(x+y) = \begin{pmatrix} 6(x_1+y_1)-5(x_2+y_2)-4(x_3+y_3) \\ -3(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)-(x_3+y_3) \\ (x_2+y_2)+2(x_3+y_3) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, можно сделать вывод, что $\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y)$.

2) Проверим второе условие линейности, имеем

$$\varphi_1(\alpha \cdot x) = \begin{pmatrix} 6(\alpha x_1)-5(\alpha x_2)-4(\alpha x_3) \\ -3(\alpha x_1)-2(\alpha x_2)-(\alpha x_3) \\ (\alpha x_2)+2(\alpha x_3) \end{pmatrix} = \alpha \cdot \varphi_1(x).$$

Это означает, что второе условие выполнено. Следовательно, оператор φ_1 является линейным.

Для того, чтобы найти матрицу опеартора φ_1 в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi_1(e_1) = \begin{pmatrix} 6\cdot 1 - 5\cdot 0 - 4\cdot 0 \\ -3\cdot 1 - 2\cdot 0 - 0 \\ 0 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_2) = \begin{pmatrix} 6\cdot 0 - 5\cdot 1 - 4\cdot 0 \\ -3\cdot 0 - 2\cdot 1 - 0 \\ 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_3) = \begin{pmatrix} 6\cdot 0 - 5\cdot 0 - 4\cdot 1 \\ -3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 1 \\ 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Разложим найденные векторы $\varphi_1(e_1)$, $\varphi_1(e_2)$, $\varphi_1(e_3)$ по базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$\varphi_1(e_1) = 6e_1 - 3e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_2) = -5e_1 - 2e_2 + 1e_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_3) = -4e_1 - 1e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e, расставляя их по столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Операторы φ_2 и φ_3 не являются линейными. **b)** φ_3 – линейный оператор, $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Операторы φ_1 и φ_2 не являются линейными. **c)** φ_2 – линейный оператор, $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Операторы φ_1 и φ_3 не являются линейными.

105. a) *Решение:* Для того, чтобы найти матрицу опеартора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi(e_1) = -3 \cdot (1)'' + 3 \cdot (1)' = 0,$$

$$\varphi(e_2) = -3 \cdot (x)'' + 3 \cdot (x)' = 3,$$

$$\varphi(e_3) = -3 \cdot (x^2)'' + 3 \cdot (x^2)' = -6 + 6x.$$

Разложим найденные векторы $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ по базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$\varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = 3e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_3) = -6e_1 + 6e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e, расставляя их по столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |\varphi| = |A_e| = 0.$

b) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\varphi| = -2.$ **c)** $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, |\varphi| = 20.$

d) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\varphi| = 2.$

106. a) *Решение:* 1) Найдем координаты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ в базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$, имеем

$$g_1^f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2^f = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, g_3^f = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{f \to g}$ перехода от от базиса f к базису g. Для этого запишем координаты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ в матрицу по столбцам, получим

$$T_{f \to g} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к

$T_{f\to g}$, имеем

$$T_{f\to g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (49), найдем матрицу A_g линейного оператора φ в базисе g по формуле

$$A_g = (T_{f\to g}^{-1} \cdot A_f) \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

107. a) *Решение:* 1) Найдем координаты векторов u_1, u_2, u_3 в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$u_1^e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2^e = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{e\to u}$ перехода от от базиса e к базису u. Для этого запишем координаты векторов $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ в матрицу по столбцам, получим

$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{e\to u}$, имеем

$$T_{e\to u}^{-1} = -\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (49), найдем матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u по формуле

$$A_u = (T_{e\to u}^{-1} \cdot A_e) \cdot T_{e\to u} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 29 & -41 & -9 \\ 19 & -27 & -6 \\ 7 & -9 & -4 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -11 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

108. a) *Решение:* 1) Найдем координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, имеем

$$e_1^u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2^u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3^u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{u\to e}$ перехода от от базиса e к базису u. Для этого запишем координаты векторов e_1, e_2, e_3 в матрицу по столбцам, получим

$$T_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{u\to e}$, имеем

$$T_{u\to e}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (49), найдем матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u по формуле

$$A_u = (T_{u\to e} \cdot A_e) \cdot T_{u\to e}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot T_{u\to e}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

109. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(1,-1)$, где $c \neq 0$; **b)** Собственных значений и собственных векторов у данного оператора нет; **c)** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 0$ имеют вид $c(1,-1)$, а для $\lambda_2 = 2$ – вид $c(1,1)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Собственные векторы имеют вид $c(1,-1)$, где $c \neq 0$.

110. **a)** $\lambda_1 = -2+i$, $\lambda_2 = -2-i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = -2+i$ имеют вид $c(1,i)$, а для $\lambda_2 = -2-i$ – вид $c(1,-i)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = i$ имеют вид $c(1,1+i)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1,1-i)$, где $c \neq 0$; **c)** $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2i$ имеют вид $c(1,i)$, а для $\lambda_2 = -2i$ – вид $c(i,1)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = 2-2i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2-2i$ имеют вид $c(-1,1)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1,1-i)$, где $c \neq 0$;

111. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1;1;-1)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1;2;0) + c_2(0;0;1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно; **c)** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1;1;1)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – вид $c(1;2;3)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3;1;1)$, где $c \neq 0$; **e)** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1;2;2)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – вид $c(1;2;1)$, где $c \neq 0$; **f)** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 5$ имеют вид $c(1;-1;1)$, для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1;1;-1)$, для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1;1;1)$, где $c \neq 0$.

112. **a)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (3;1;3)$,

$a_2 = (0;1;3)$, $a_3 = (1;2;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** матрица к диагональному виду не приводится; **c)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;-1;1)$, $a_2 = (1;1;-1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **d)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (1;-1;1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **e)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (1;-1;1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

113. **a)** Да. **b)** Нет. **c)** Да.

114. **a)** Нет. **b)** Нет. **c)** Нет.

115. **a)** Да. **b)** Да. **c)** Да.

116. **a)** $(a,b) = -18, |a| = \sqrt{18}, |b| = \sqrt{24}, \varphi = 5\pi/6$; **b)** $(a,b) = -7, |a| = \sqrt{14}, |b| = \sqrt{7}, \varphi = 3\pi/4$; **c)** $(a,b) = -6, |a| = \sqrt{12}, |b| = \sqrt{12}, \varphi = 2\pi/3$;

117. **a)** $(a,b) = 0, |a| = \sqrt{7}, |b| = \sqrt{23}, \varphi = \pi/2$; **b)** $(a,b) = 3, |a| = 3, |b| = 2, \varphi = \pi/3$; **c)** $(a,b) = 11, |a| = \sqrt{11}, |b| = \sqrt{22}, \varphi = \pi/4$.

118. **a)** *Решение:* Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим

$$e_1 = x_1; e_2 = x_2 - a_{12}e_1, \text{ где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{1+2-10-3}{1+4+4+1} = -1,$$

следовательно, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для вычисления e_3 имеем равенство

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2,$$

где

$$a_{13} = \frac{x_3, e_1)}{(e_1, e_1} = \frac{3+4+16+7}{1+4+4+1} = 3,$$

$$a_{23} = \frac{x_3, e_2)}{(e_2, e_2} = \frac{6+6-24-14}{4+9+9+4} = -1.$$

Таким образом, получаем

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Система векторов $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ является ортогональной. **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

119. a) *Решение:* Так как $(x_1, x_2) = 0$, то по определению векторы x_1 и x_2 ортогональны.

Размерность пространства $\boldsymbol{R}^4$ равна 4, то базис этого пространства содержит также четыре вектора. Таким образом, нам необходимо добавить два вектора. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор из пространства $\boldsymbol{R}^4$ такой что y ортогонален как вектору x_1, так и вектору x_2, то есть имеем следующую систему равенств

$$\begin{cases} (y, x_1) = 0, \\ (y, x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 = 0, \\ 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 4y_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ эквивалентна следующей ступенчатой матрице $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ранг $r = 2$. Пусть свободные неизвестные $y_3 = 1, y_4 = 0$, тогда базисные неизвестные равны $y_1 = y_2 = 2$, то есть первый вектор в фундаментальной системе решений имеет вид $Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогичным образом, полагая $y_3 = 0, y_4 = 1$, находим $y_1 = -17$, $y_2 = -10$, следовательно, $Y_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – второй вектор в ФСР. Итак, получаем, что система векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образует ортогональный базис пространства $\boldsymbol{R}^4$. Следует отметить, что координаты векторов Y_1 и Y_2 находятся неоднозначно. **b)** Можно добавить, например, следующие векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix}$.

120. a) *Решение:* Так как $(x_1, x_2) = 0$, то по определению векторы x_1 и x_2 ортогональны. Более того, $||x_1|| = ||x_2|| = 1$, поэтому эти векторы нормированные.

Размерность пространства $\boldsymbol{R}^3$ равна 3, то базис этого пространства содержит также три вектора. Таким образом, нам необходимо добавить только один вектор. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор из пространства $\boldsymbol{R}^3$ такой что y ортогонален как вектору x_1, так и вектору x_2, то есть имеем следующую систему равенств

$$\begin{cases} (y, x_1) = 0, \\ (y, x_2) = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0, \\ y_1 + 2y_2 - 2y_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ эквивалентна следующей ступенчатой матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ранг $r = 2$. Пусть свободное неизвестное $y_3 = 1$, тогда базисные неизвестные равны $y_1 = -2, y_2 = 2$, то есть фундаментальная система решений состоит из одного вектора $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пронормируем вектор Y. Имеем

$$Y = \frac{1}{||Y||} \cdot Y = \frac{1}{\sqrt{(Y, Y)}} \cdot Y = \frac{1}{3} \cdot Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Итак, получаем, что система векторов

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

образует ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{R}^3$. Следует отметить, что координаты вектора Y находятся неоднозначно. **b)** Например, $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

121. a) *Решение:* 1) В данную квадратичную форму переменная x_1 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей.

2) Сгруппируем все слагаемые квадратичной формы, содержащие ведущую переменную x_1, и вынесем общие множители за скобку

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3[x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3] + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3 =$$

$$= 3[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3)] + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3.$$

Выделим полный квадрат, для этого в квадратичную форму добавим и вычтем слагаемое $(x_2 - x_3)^2$, получим

$f(x_1, x_2, x_3) = 3[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 3(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3 =$ $= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 5x_2x_3$. Введем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Получаем квадратичную форму $f_1(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 5y_2y_3$. Продолжим преобразования, так как в квадратичной форме присутствует произведение y_2y_3.

3) В квадратичной форме $f_1(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 5y_2y_3$ нет ведущих переменных, так как каждая переменная переменная входит в форму либо

во второй степени, либо в первой, но не в первой и второй степенях одновременно. Однако имеется произведение $y_2 y_3$ разных переменных. Следуя четвертому пункту алгоритма, сделаем замену переменных

$$\begin{cases} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= z_2 - z_3, \\ y_3 &= z_2 + z_3. \end{cases}$$

Тогда получим квадратичную форму $f_2(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + 5z_2^2 - 5z_3^2$. Квадратичная форма f_2 имеет канонический вид.

Найдем теперь невырожденную линейную замену переменных, приводящую данную форму к каноническому виду. Во втором и третьем пунктах решения выполнялись замены $x = S_1 \cdot y$ и $y = S_2 \cdot z$ с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицу S искомой замены $x = S \cdot z$ находим как произведение

$$S = S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, итоговое преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 &= z_1 + 2z_3, \\ x_2 &= z_2 - z_3, \\ x_3 &= z_2 + z_3. \end{cases}$$

b) $z_1^2 - 3z_2^2 - \frac{8}{3}z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - \frac{5}{3}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{1}{3}z_3$, $x_3 = z_3$.

c) $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - z_3$, $x_2 = z_1 + z_2 - z_3$, $x_3 = z_3$.

d) $z_1^2 - z_2^2$, $x_1 = z_1 + z_2 - 5z_3$, $x_2 = z_2 - 4z_3$, $x_3 = z_3$.

e) $z_1^2 + 4z_2^2 - 9z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 + \frac{5}{2}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3$, $x_3 = z_3$.

f) $4z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_3$, $x_2 = z_2 - z_3$, $x_3 = z_2 + z_3$.

g) $z_1^2 - \frac{7}{2}z_2^2 + 2z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{5}{2}z_2 - z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = \frac{1}{2}z_2 + z_3$.

h) $3z_1^2 - \frac{8}{3}z_2^2 + \frac{23}{32}z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{5}{8}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{3}{16}z_3$, $x_3 = z_3$.

i) $2z_1^2 + \frac{5}{2}z_2^2 + \frac{19}{10}z_3^2$, $x_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - \frac{9}{10}z_3$, $x_2 = z_2 + \frac{1}{5}z_3$, $x_3 = z_3$.

122. a) *Решение:* Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 32 = -(\lambda-4)^2(\lambda+2).$$

Оно имеет корни $\lambda_{1,2} = 4$, $\lambda_3 = -2$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы $f_1(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$;
b) $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; **c)** $y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$.

123. *Решение:* Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda+1)^2.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 5$, $\lambda_{2,3} = -1$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы $f_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью, найдем собственные векторы матрицы A. Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X, соответствующего собственному значению $\lambda = 5$, являются решением системы уравнений $(A - 5E)X = 0$, то есть системы

$$\begin{cases} -4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 2, а $n - r = 1$. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, такого

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя X_1, получаем собственный вектор

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X, соответствующего собственному значению $\lambda = -1$, являются решением системы уравнений $(A + E)X = 0$, то есть системы

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 1, а $n - r = 2$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из двух векторов. Чтобы их найти, оставим только первое уравнение системы (второе и третье являются следствием первого). Положим вначале $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, тогда $x_1 = -1$; затем положим $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, тогда $x_1 = -1$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из следующих векторов

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть два линейно независимых собственных вектора матрицы A, соответствующих сообственному значению $\lambda = -1$.

Заметим, что собственные векторы X_2 и X_3 матрицы A ортогональны к собственному вектору U_1, но не ортогональны между собой. Применим к ним процедуру ортогонализации. С этой целью положим

$$Y_2 = X_2,\ Y_3 = X_3 - \alpha Y_2.$$

Коэффициент α определяется из условия ортогональности Y_2 и Y_3, то есть из условия

$$\alpha = \frac{(X_2, X_3)}{(X_2, X_2)} = 1/2.$$

Итак, мы построили два ортогональных собственных вектора матрицы A, соответствующих собственному значению $\lambda = -1$:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя их, получаем собственные векторы

$$U_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Матрица искомого ортогонального преобразования состоит из столбцов U_1, U_2, U_3, то есть искомое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3. \end{cases}$$

Это преобразование приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$f_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Следует отметить, что канонический вид и ортогональное преобразование определяются неоднозначно. **b)** $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **c)** $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **d)** $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$; **e)** $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; **f)** $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

124. a) *Решение:* Найдем главные миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = 3 > 0,\ \Delta_3 = \det(A) = 3(\lambda - 1).$$

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_3 > 0$, то есть при $\lambda > 1$. **b)** $\lambda > 2$; **c)** $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; **d)** $-0.8 < \lambda < 0$; **e)** требуемых значений λ не существует; **f)** требуемых значений λ не существует.

125. a) $\bar{a} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. *Указание:* так как направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ равны, то мы можем найти эти направляющие косинусы из формулы (78). С учетом, что $|\bar{a}| = 1$, воспользовавшись формулой (79), получим ответ. **b)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/2$.

126.

$(*,*)$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

.

127. a) $\bar{x} = (-24; 32; 30)$. *Указание:* так как $\bar{x}$ параллелен вектору $(6; -8; -7,5)$, то координаты векторов пропорциональны, то есть $\bar{x} = \lambda \cdot (6; -8; -7,5)$, где λ – произвольное ненулевое вещественное число. Поскольку вектор $\bar{x}$ образует с осью OZ острый угол, то $\lambda < 0$. Вычислив длину вектора $\bar{x}$, найдем λ, а затем и координаты вектора $\bar{x}$.

b) $\bar{x} = (1; 0; -1)$. *Указание:* так как $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ перепендикулярен оси OY, то $x_2 = 0$. Из условий $(\vec{x}, \vec{a}) = -3$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 8$, найти остальные координаты вектора.

c) $\bar{x} = (2, -1, 1)$. *Указание:* пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Воспользоваться формулой (88) и найти координаты вектора, решив систему линейных уравнений с тремя неизвестными, например, методом Гаусса.

d) $\bar{x} = (2, 4, -6)$. *Указание:* аналогично примеру 3а).

128. a) -2. *Указание:* воспользоваться формулой (90) при условии $\bar{n} = \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - 2\bar{b}$. **b)** $\frac{14}{11}$.

129. a) -0,5. *Указание:* воспользоваться соотношением $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = (\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}) = 3$, откуда найти $(\bar{a}, \bar{b}) = -\frac{1}{2}$. Затем упростить искомое скалярное произведение $(3\bar{a} - 4\bar{b}, \bar{a} + \bar{b})$ и получить ответ. **b)** 11.

130. a) $(\bar{a}, \bar{b}) = -33$, $\cos(\widehat{a, b}) = -\frac{33}{65}$; **b)** $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}$.

131. 5. *Указание:* воспользоваться формулой (91) и вычислить $|\bar{a}| = \sqrt{(3\bar{m} - 4\bar{n}, 3\bar{m} - 4\bar{n})}$, с учетом, что $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$ и векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны, следовательно, $(\bar{m}, \bar{n}) = 0$.

132. 15; $\sqrt{593}$. *Указание:* выразить диагонали параллелограмма через его стороны. Например, имеем одна из диагоналей параллелограмма равна $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, а вторая $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Для нахождения длин диагоналей воспользоваться формулой (91): $|\bar{d}_1| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b})}$, $|\bar{d}_2| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b})}$.

133. $\frac{\pi}{3}$. *Указание:* воспользоваться формулами (89), с учетом, что $|\bar{p}| = |\bar{q}| = 1$ и векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ перпендикулярны, следовательно, $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$.

134. $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. *Указание:* пусть $\bar{C}A = \bar{a}$, $\bar{C}B = \bar{b}$ – катеты треугольника ABC. Выразить медианы треугольника через его катеты. Например, одна из медиан равна $\bar{m}_1 = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$, а вторая $\bar{m}_2 = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$. Вычислить скалярное произведение $(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$ и длины медиан, учитывая, что $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ (так как треугольник равнобедренный) и $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ (т.к. $\triangle ABC$ – прямоугольный). Затем найти $\cos\varphi$, используя формулу (89).

135. $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\angle C = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. *Указание:* воспользоваться формулой (89).

136. $\cos(\widehat{Q, m}) = \frac{6}{7}$, $\cos(\widehat{Q, n}) = -\frac{2}{7}$, $\cos(\widehat{Q, p}) = \frac{3}{7}$. *Указание:* воспользоваться формулой (89).

137. *Указание:* выразить диагонали ромба через стороны (см. указание к примеру 8) и затем вычислить скалярное произведение диагоналей. Оно должно получиться равны нулю.

138. $\alpha = 40$. *Указание:* вычислить произведение векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ и воспользоваться признаком перпендикулярности векторов: $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$.

139. $(\widehat{s, t}) = \frac{\pi}{3}$. *Указание:* так как векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ перпендикулярны, то $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$, откуда найти $(\bar{s}, \bar{t})$. Затем воспользоваться формулой (89), учитывая, что векторы $\bar{s}$ и $\bar{t}$ единичные, поэтому $|\bar{s}| = |\bar{t}| = 1$.

140. $\overrightarrow{AM} = 6$, $\overrightarrow{AD} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. *Указание:* выразить медиану и высоту через стороны треугольника. Например, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$, где вещественное число λ найти из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$. Затем найти длины векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AD}$, воспользовавшись формулой (91).

141. $[\bar{i}, \bar{i}] = 0$; $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$; $[\bar{i}, \bar{k}] = -\bar{j}$; $[\bar{j}, \bar{i}] = -\bar{k}$; $[\bar{j}, \bar{j}] = 0$; $[\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}$; $[\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j}$; $[\bar{k}, \bar{j}] = -\bar{i}$; $[\bar{k}, \bar{k}] = 0$.

142. **a)** $8\bar{i} + 32\bar{j} + 16\bar{k}$; **b)** $2\bar{i} + 16\bar{j} + 23\bar{k}$.

143. **a)** $19[\bar{a}, \bar{b}]$; **b)** $11[\bar{a}, \bar{b}]$; **c)** $13[\bar{a}, \bar{b}] - 10[\bar{a}, \bar{c}] - 4[\bar{b}, \bar{c}]$.

144. **a)** $S = 30$, $H = 10$. *Указание:* вычислить координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, затем вычислить их векторное произведение, воспользовавшись формулой (97) и наконец вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ по формуле (99). Затем вычислить высоту $H_\triangle$ по формуле (100).
b) $[\bar{a}, \bar{b}] = -40\bar{i} + 40\bar{j} + 20\bar{k}$, $S = 60$, $\sin(\widehat{a, b}) = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

145. **a)** 4,5; **b)** 1,5.

146. **a)** 11. *Указание:* используя свойства векторного произведение вычислить векторное произведение векторов $[\bar{p}, \bar{q}]$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вычислить длину векторного произведения $|[\bar{p}, \bar{q}]|$, воспользовавшись, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – орты, то есть $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $\widehat{\bar{a}, \bar{b}} = \frac{\pi}{2}$; **b)** 37,5; **c)** 3,8.

147. 21. *Указание:* воспользоваться формулой $|\bar{Q}| = \sqrt{(\bar{Q}, \bar{Q})}$.

148. $\frac{\sqrt{248}}{\sqrt{273}}$. *Указание:* Выразить диагонали через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, например, $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Затем найти векторное произведение диагоналей и найти модуль векторного произведение. Из формулы (92) найти синус угла между диагоналями.

149. **a)** 44. *Указание:* найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, затем вычислить смешанное произведение этих векторов, используя формулу (107). Применяя формулу (110) вычислить объем тетраэдра. **b)** 2.

150. **a)** Векторы компланарны. *Указание:* воспользоваться условием компланарности векторов (108). **b)** Векторы компланарны. **c)** Векторы некомпланарны. **d)** Векторы некомпланарны.

151. **a)** Точки лежат в одной плоскости. *Указание:* вычислить координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, а затем вычислить их смешанное произведение. Если смешанное произведение равно нулю, то точки лежат в одной плоскости. **b)** Точки лежат в одной плоскости.

152. 4 $\bar{c}\bar{b}\bar{a}$. *Указание:* вычислить смешанное произведение веторов. Из формулы (109) найти объем параллелепипеда.

153. **a)** 25; **b)** 0. *Указание:* ответ очевиден, так как из разложения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ видно, что они компланарны.

154. $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$. *Указание:* вычислить смешанное произведение векторов и вычислить модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Воспользоваться формулой $h = \frac{V}{S}$, где $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$ – площадь основания параллелепипеда, $V = \pm(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – объем параллелепипеда.

Литература

[1] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2007. – 431 с.

[2] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006. – 382 с.

[3] Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2004. – 287 с.