КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра прикладной математики

Д.Х. Гиниятова, Е.В. Рунг, К.Н. Стехина

ПРАКТИКУМ
ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Часть 2

Учебное пособие

Казань — 2022

УДК 512.6+514.12(076.1)

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМиИТ
Протокол № 7 от 28 января 2022 года

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент КФУ **Д.Н. Тумаков**
кандидат физ.-мат. наук, доцент КФУ **И.Е. Филиппов**

Гиниятова Д.Х., Рунг Е.В., Стехина К.Н.

Практикум по алгебре и геометрии. Часть 2: учебное пособие / Д.Х. Гиниятова, Е.В. Рунг, К.Н. Стехина. — Казань, 2022. — 147 с.

Предназначено для студентов института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлению "Прикладная математика и информатика". По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения и приводятся задачи для самостоятельного решения.

Оглавление

Введение

Дисциплина "Алгебра и геометрия" изучается в течении двух семестров на первом курсе бакалавриата по направлению 01.03.02 — "Прикладная математика и информатика" Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета. Пособие [1], написанное авторами ранее, посвящено материалу первого семестра. Настоящее пособие ориентировано на темы, которые будут предметом изучения во втором семестре и содержит стандартные задачи разделов "Линейные пространства", "Линейный оператор", "Евклидово пространство", "Квадратичные формы" и "Кривые и поверхности второго порядка". Эти темы были разбиты авторами на более мелкие подразделы и каждый из них может использоваться для проведения одного практического занятия.

Линейные пространства

1. Линейные пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение линейного пространства

Определение 1. Множество $\boldsymbol{V}$ называется *вещественным линейным пространством*, если выполнены три условия:

1) определена операция сложения элементов $\boldsymbol{V}$, то есть для любых $x, y \in \boldsymbol{V}$ ставится в соответствие элемент $z \in \boldsymbol{V}$, называемый *суммой элементов* x, y и обозначаемый $z = x + y$;

2) определена операция умножения на число, то есть для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$ и любого вещественного числа λ ставится в соответствие элемент $z \in \boldsymbol{V}$, называемый *произведением элемента* x *на вещественное число* и обозначаемый $z = \lambda x$;

3) заданные линейные операции подчиняются следующим *аксиомам линейного пространства*:

1^0 $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2^0 $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3^0 существует элемент $0 \in \boldsymbol{V}$ такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\boldsymbol{V}$;

4^0 для любого элемента $x \in \boldsymbol{V}$ существует элемент x' такой, что $x + x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x;

5^0 $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6^0 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7^0 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8^0 $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Элементы линейного пространства называются *векторами.*

Если в определении линейного пространства взять комплексные числа α, β, то множество $\boldsymbol{V}$ называется *комплексным линейным пространством.*

Основные линейные пространства

1. Вещественное пространство $\boldsymbol{R}^n$ – множество всех вектор-столбцов с вещественными координатами вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции на пространстве $\boldsymbol{R}^n$ вводятся следующим образом. По определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \boldsymbol{R}^n$ положим

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Для любых $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ по определению

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

2. Множество всех вещественных матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц $\boldsymbol{M}^{mn}$ является вещественным линейным пространством.

3. Множество $\mathbf{P}_n$ всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n, где $n \geqslant 0$, есть фиксированное целое число, является вещественным линейным пространством.

Множества из пространства $\boldsymbol{R}^n$

1. Пусть $\boldsymbol{G}$ — множество всех вектор-столбцов линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ с положительными элементами, то есть

$$\boldsymbol{G} = \{x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Проверить, является ли линейным пространством множество $\boldsymbol{G}$, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \dots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

2. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

3. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} |\alpha| x_1 \\ |\alpha| x_2 \\ \dots \\ |\alpha| x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

4. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ x_2 + 2y_2 \\ \dots \\ x_n + 2y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

5. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \dots \\ x_n y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

6. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = x \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

7. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} e^{\alpha-1}x_1 \\ \dots \\ e^{\alpha-1}x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

8. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ x_{n-1} + y_{n-1} \\ \dots \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} \qquad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

9. Образует ли множество векторов из $\boldsymbol{R}^n$ линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \dots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

Множества из пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$

10. Пусть задано множество $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{M}^{mn}$, а операция сложения матриц вводится следующим образом: для любых матриц $A, B \in \boldsymbol{G}$ с элементами a_{ij} и b_{ij} соответственно их сумма $C = A + B$ есть матрица того же размера с элементами $c_{ij} = -a_{ij} - b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Операция произведения матрицы на вещественное число определяется так же, как и в пространстве $\boldsymbol{M}^{mn}$. Выяснить, является ли множество $\boldsymbol{G}$ линейным пространством.

11. Выяснить, является ли множество всех невырожденных квадратных матриц $\boldsymbol{M}^{nn}$ линейным пространством, если операция сложения матриц определяется следующим образом:

$$A + B = A \cdot B \qquad \forall A, B \in \boldsymbol{M}^{nn},$$

а операция умножения на число вводится также, как в пространстве $\boldsymbol{M}^{nn}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

12. Выяснить, является ли множество всех квадратных диагональных матриц $\boldsymbol{M}^{nn}$ линейным пространством, если операция сложения матриц введена следующим образом:

$$A + B = A \cdot B \qquad \forall A, B \in \boldsymbol{M}^{nn},$$

а операция умножения на число определена также, как в пространстве $\boldsymbol{M}^{nn}$.

Множества из пространства $\boldsymbol{P_n}$

13. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многочленов задается так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$ и для $\forall\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $\forall f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in \boldsymbol{P}_n$ операция умножения на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha f(x) = \alpha a_1x^{n-1} + \alpha a_2x^{n-2} + \ldots + \alpha a_n.$$

14. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многчленов определяется так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, а операция умножения на вещественное число вводится иначе:

$$\alpha f(x) = (\alpha + a_n)x^n + (\alpha + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha + a_0),$$

здесь $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

15. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многочленов определена так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, а операция умножения на вещественное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_nx^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1x.$$

здесь $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

16. Выяснить, является ли множество всех многочленов с вещественными коэффициентами из пространства $\boldsymbol{P}_n$ линейным пространством, если операция суммы многочленов определена так же как и в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, а операция умножения на вещественное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_0 x^n + \alpha a_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha a_{n-1} x + \alpha a_n,$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

2. Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 2. Система векторов $\{a_i\}_{i=1}^m = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m\}$, $m \geq 1$ линейного пространства $\mathbf{V}$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0. \tag{1}$$

Система векторов $\{a_i\}_{i=1}^m = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m\}$, $m \geq 1$ называется *линейно независимой*, если равенство (1) имеет место только тогда, когда $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 3. Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{V}$ *линейно выражается* через векторы $b_1, b_2, \ldots, b_p$, $p > 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что

$$a = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_p b_p. \tag{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

17. Система векторов $\{a_1, a_2\}$ является линейно независимой, используя определение, выяснить вопрос о линейной независимости следующей системы векторов:

a) $\{a_1 + 3a_2, -2a_1 - 6a_2\}$,

b) $\{a_1 + 2a_2, -a_1 + 3a_2\}$,

c) $\{2a_1 + 6a_2, 3a_1 + 9a_2\}$,

d) $\{a_1 + a_2, a_1 - a_2\}$.

18. Используя определение, доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, γ векторы $\alpha x - \beta y$, $\gamma y - \alpha z$, $\beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

19. Являются ли линейно зависимыми:

a) два коллинеарных вектора,

b) два неколлинеарных вектора,

c) три компланарных вектора,

d) три некомпланарных вектора,

e) функции $\sin x$ и $\cos x$ на сегменте $[0, \pi/2]$,

f) функции $f_1 = 2\sin^2 x$, $f_2 = 1$, $f_3 = 3\cos^2 x$ на сегменте $[a, b]$.

20. Используя определение, выяснить, являются ли системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми

a) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

b) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$,

$c)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$d)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

21. Используя определение, проверить, будут ли следующие матрицы линейно независимыми в соответствующем линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{mn}$.

$a)\ A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A^6 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$

$b)\ A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$

$c)\ A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$

$d)\ A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$

22. Используя определение, проверить, будут ли следующие системы многочленов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbf{P_2}$:

$a)\quad p^1(x) = 1,\ p^2(x) = x - 1,\ p^3(x) = (x+3)^2,$

$b)\quad p^1(x) = 4x^2 - 3x - 1,\ p^2(x) = 4x - 3,\ p^3(x) = 4x^2 + 9x - 10,$

$c)\quad p^1(x) = x^2 + 4x,\ p^2(x) = 2x^2 - x + 4,\ p^3(x) = 4x^2 - 4x + 1,$

$d)\quad p^1(x) = 4x^2 - 3x + 2,\ p^2(x) = -3x^2 + 2x + 3,\ p^3(x) = 7x^2 - 5x - 1.$

23. Известно, что вектор a^4 линейно выражается через векторы a^1, a^2, a^3. Найти линейное выражение a^4 через a^1, a^2, a^3, если

$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix},$

$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

3. Базисы. Размерность пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 4. Система векторов $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется *базисом линейного пространства* $\boldsymbol{V}$, если выпоняются два условия:

1) система векторов e является линейно независимой;

2) любой вектор $x \in \boldsymbol{V}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n. \tag{3}$$

Вектор-столбец $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется *координатами вектора* x в базисе e.

Определение 5. Число векторов в базисе $\boldsymbol{V}$ называется *размерностью линейного пространства* $\boldsymbol{V}$ и обозначается через $\dim \boldsymbol{V}$.

Определение 6. Линейное пространство $\boldsymbol{V}$ называется *конечномерным*, если число векторов в базисе конечное число, иначе $\boldsymbol{V}$ – *бесконечномерное пространство.*

Естественные базисы основных линейных пространств

1. Система вектор-столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства $\boldsymbol{R}^n$. Размерность пространства $\boldsymbol{R}^n$ равна n.

2. Система прямоугольных матриц размерности $m \times n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$. Таким образом, размерность пространства $\boldsymbol{M}^{mn}$ равна mn.

3. Система многочленов

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3, \dots, e_{n+1} = x^n$$

называется естественным базисом пространства $\mathbf{P}_n$. Размерность пространства $\mathbf{P}_n$ равна $n+1$.

Задачи для самостоятельного решения

24. Используя определение, проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$.

$a)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$

$b)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$

$c)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$

$d)\quad e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

25. Используя определение, проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{P}_2$.

$a)\quad p_1 = 1 - 3x - 2x^2, p_2 = 2 - 4x + x^2, p_3 = 2 + 3x + 2x^2,$

$b)\quad p_1 = -2 + 2x + 3x^2, p_2 = x - 2x^2, p_3 = -2 + x + 5x^2,$

$c)\quad p_1 = -4 + 2x - x^2, p_2 = 4 + x + 4x^2, p_3 = -3 - 3x - 2x^2,$

$d)\quad p_1 = -1 + 2x + x^2, p_2 = -2 - x + x^2, p_3 = -7 + 4x + 5x^2.$

26. Используя определение, проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $\mathbf{M}^{22}$.

$a)\quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$

$b)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$

$c)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$

$d)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$

27. Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$, и найти координаты вектора x в этом базисе. По известному координатному вектору y_e найти вектор y:

$a) e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$

$$b) e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$c) e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

28. Проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве $\mathbf{P}_2$ и найти координаты многочлена $h(x)$ в этом базисе. По известному координатному вектору g_p найти многочлен g.

$a)$ $p_1 = 4 + 4x + 2x^2, p_2 = -3 - 2x^2, p_3 = -1 - x + x^2, g_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$h(x) = 5 - 4x + 4x^2;$

$b)$ $p_1 = -3 + 2x^2, p_2 = 2 + x + 2x^2, p_3 = 4 + 4x - 2x^2, g_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

$h(x) = 5 + x;$

$c)$ $p_1 = 2 + 4x - 2x^2, p_2 = -1 + 2x + x^2, p_3 = -2 - 2x - x^2,$

$g_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, h(x) = 2 + 4x^2.$

29. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства $\mathbf{V}$, заданного следующим образом:

$a)$ пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_4$ таких, что $p(1) + p(-1) = 0$,

$b)$ пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_2$ таких, что $p(1) = 0$,

$c)$ пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_4$ таких, что $p(2) = 0$.

30. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства $\mathbf{V}$, заданного следующим образом:

$a)$ пространство симметричных матриц размерности 3×3,

$b)$ пространство матриц (a_{ij}) размерности 2×3, элементы которых удовлетворяю условиям $a_{11} = 0$, $a_{22} = a_{33}$,

$c)$ пространство симметричных матриц размерности 3×3, диагональные элементы которых равны нулю.

4. Преобразование базиса и координат

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{V}$ – линейное пространство размерности n.

Определение 7. *Матрицей перехода* от базиса $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ называется квадратная матрица $T_{e\to u} = (t_{ij})$ размера $n \times n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Таким образом, базисы e и u связаны матричным равенством

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) \cdot T_{e\to u}. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в следующем виде:

$$(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot T_{u\to e}. \tag{5}$$

Сравнивая равенства (4) и (5) получаем, что две матрицы перехода $T_{e\to u}$ и $T_{u\to e}$ являются обратными к друг другу, то есть

$$T_{u\to e} = T^{-1}_{e\to u}, \qquad T_{e\to u} = T^{-1}_{u\to e}. \tag{6}$$

При таких обозначениях координаты x_e вектора x в базисе e связаны с координатами x_u того же вектора в базисе u равенствами

$$x_e = T_{e\to u} \cdot x_u \tag{7}$$

или

$$x_u = T^{-1}_{e\to u} \cdot x_e \tag{8}$$

либо

$$x_u = T_{u\to e} \cdot x_e. \tag{9}$$

Задачи для самостоятельного решения

31. Найти матрицу перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$. По известным координатам векторов x, y в одном базисе найти их координаты в другом базисе:

$a)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$b)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$

$c)\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$

$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

32. Найти матрицу перехода от базиса $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ к базису $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ линейного пространства $\boldsymbol{P}_2$:

$a)$ $f_1(x) = 1 + x - 2x^2, f_2(x) = x - x^2, f_3(x) = -2 - 2x + 2x^2,$

$g_1(x) = -3 - 2x + 3x^2, g_2(x) = 2 + x - x^2, g_3(x) = 1 - x - 2x^2,$

$b)$ $f_1(x) = -1 - x^2, f_2(x) = 2 + x - x^2, f_3(x) = -2 - x + 3x^2,$

$g_1(x) = 1 + 2x - 3x^2, g_2(x) = 3 + 2x - x^2, g_3(x) = 3 + 2x - 3x^2,$

$c)$ $f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, f_2(x) = 1 + x + 2x^2, f_3(x) = 1 - x^2,$

$g_1(x) = -2 - x + x^2, g_2(x) = 2 - x - x^2, g_3(x) = -2 - x - x^2.$

33. Найти координаты вектора x в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если он задан в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$a)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ u_2 = 2e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$

$b)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ u_2 = (3/2)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$

$c)\ \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ u_2 = (4/3)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

34. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

$a)$ поменять местами два элемента первого базиса,

$b)$ поменять местами два элемента второго базиса,

$c)$ записать элементы обоих базисов в обратном порядке?

35. Даны базисы $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и матрица A. Найти базисы $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ и $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ такие, что матрицы перехода $T_{e\to u} = A$ и $T_{f\to g} = A$:

$a)\ e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$

$b)\ e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$

$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$

$c)\ e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$

$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

5. Линейное подпространство

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 8. *Линейным подпространством* линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется непустое множество $\boldsymbol{L}$ векторов из $\boldsymbol{V}$, обладающее следующими свойствами:

1) сумма $x + y$ двух любых векторов из $\boldsymbol{L}$ снова принадлежит $\boldsymbol{L}$;

2) произведение $\alpha \cdot x$ любого вектора x из $\boldsymbol{L}$ на любое число α снова принадлежит $\boldsymbol{L}$.

Любое линейное подпространство является линейным пространством.

Определение 9. *Размерностью* линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ называется число векторов в базисе. Размерность линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ обозначается через $\dim L$.

Определение 10. Рассмотрим систему векторов a_1, a_2, …, a_k из векторного пространства $\boldsymbol{V}$. Множество всевозможных линейных комбинаций векторов a_1, a_2, …, a_k называется *линейным подпространством, натянутым на систему векторов* a_1, a_2, …, a_k или *линейной оболочкой* и обозначается $\mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Таким образом

$$\mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{x \in \boldsymbol{V} \mid x = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k\}$$

Линейная оболочка является линейным подпространством.

Определение 11. *Базисом системы векторов* в линейном пространстве называется базис линейной оболочки этой системы векторов. *Рангом системы векторов* называется число векторов в базисе линейной оболочки.

Теорема 1. *Ранг системы векторов a_1, a_2, $\ldots$, a_k линейного пространства $\boldsymbol{V}$ равен рангу матрицы A, составленной по столбцам из координат векторов a_1, a_2, $\ldots$, a_k в каком-либо базисе линейного пространства $\boldsymbol{V}$.*

Задачи для самостоятельного решения

36. Является ли линейным подпространством линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ каждая из следующих совокупностей векторов:

$a)$ Множество всех векторов, у которых первая координата $x_1 = a$, где a – некоторое фиксированное вещественное число,

$b)$ Множество всех векторов, у которых сумма первой и второй координаты неотрицательна, то есть $x_1 + x_2 \geq 0$,

$c)$ Множество всех векторов, у которых все координаты являются рациональными числами,

$d)$ Множество всех векторов с нулевыми первыми двумя координатами: $x_1 = x_2 = 0$.

37. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbf{M}^{nn}, n \geq 2$, следующие множества матриц n-го порядка:

$a)$ Множество всех верхних треугольных матриц,

$b)$ Множество всех вырожденных матриц: $|A| = 0$,

$c)$ Множество всех матриц, квадрат которых равен нулю: $A^2 = 0$,

$d)$ Множество всех трехдиагональных матриц, то есть матриц, у которых $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.

38. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbf{P}_n, n \geq 1$, следующие множества многочленов степени не выше n:

$a)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых

$f(b) = c$, где b, c – фиксированные, вещественные числа,

$b)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых $\int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0$,

$c)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых числа 2 и 3 являются корнями,

$d)$ Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n, для которых $f'(0) = 1$.

39. Найти ранг и базис системы векторов a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6

$a)$ $a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$a^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$,

$b)$ $a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$a^5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^6 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

40. Найти ранг и базис системы векторов p^1, p^2, p^3, p^4, p^5

$a)$ $p^1(x) = -x^2 - x - 1$, $p^2(x) = 2x^2 + 2x + 2$, $p^3(x) = x^2 + x + 1$, $p^4(x) = -x^2 + 3x + 1$, $p^5(x) = -2x^2 + 2x$,

$b)$ $p^1(x) = x^2 + x + 2$, $p^2(x) = -2x^2 - 2x - 4$, $p^3(x) = -x^2 + x - 1$, $p^4(x) = 2x^2 + 4x + 5$, $p^5(x) = 3x^2 - x - 1$.

41. Найти ранг и базис системы векторов

$a)\ A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$

$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

$b)\ A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$

$A^5 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$

42. Найти базис в подпространстве $\operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ и коэффициенты разложения остальных векторов системы по этому базису.

$$a)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

6. Сумма, пересечение линейных подпространств

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 12. *Суммой* двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется совокупность $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ всех векторов из $\boldsymbol{V}$, каждый из которых представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \boldsymbol{L}_1$ и $x_2 \in \boldsymbol{L}_2$.

Определение 13. *Пересечением* двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется совокупность $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$ всех векторов из $\boldsymbol{V}$, каждый из которых принадлежит как $\boldsymbol{L}_1$, так и $\boldsymbol{L}_2$.

Теорема 1 (Грассмана). *Пусть $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ – линейные подпространства пространства $\boldsymbol{V}$, тогда*

$$\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2) = -\dim(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2) + \dim(\boldsymbol{L}_1) + \dim(\boldsymbol{L}_2), \tag{10}$$

здесь $\dim(\boldsymbol{L}_1)$, $\dim(\boldsymbol{L}_2)$ – размерности линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, а $\dim(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)$, $\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2)$ – размерности суммы и пересечения этих линейных подпространств соответственно.

Определение 14. Сумму $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ данного линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется *прямой суммой*, если для каждого x из $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ его представление

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in \boldsymbol{L}_1, \quad x_2 \in \boldsymbol{L}_2,$$

единственно. Прямую сумму двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ обозначают $\boldsymbol{L}_1 \oplus \boldsymbol{L}_2$.

Теорема 2. *Для того чтобы сумма* $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ *двух линейных подпространств* $\boldsymbol{L}_1$ *и* $\boldsymbol{L}_2$ *была прямой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение этих линейных подпространств было нулевым пространством, то есть* $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 = \{0\}$.

Задачи для самостоятельного решения

43. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$:

$$a) \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$d)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

44. Найти размерности суммы и пересечения (базисы находить не нужно) линейных подпространств, натянутых на системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$:

$$a)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

45. Даны два линейных подпространства $\boldsymbol{L}_1 = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ и $\boldsymbol{L}_2 = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$. Является ли сумма $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ прямой?

$$a)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$d)\quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор

7. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 15. *Оператором*, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется правило φ, по которому каждому элементу x из $\boldsymbol{V}$ ставится в соответствие некоторый элемент y из $\boldsymbol{V}$. Элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x – *прообразом* элемента y. Тот факт, что элемент y соответствует элементу x при действии оператора φ, записывается так:

$$y = \varphi(x). \tag{11}$$

Определение 16. Оператор φ, действующий в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется *линейным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из $\boldsymbol{V}$ и любого числа α выполняются равенства:

$$1)\ \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2); \qquad 2)\ \varphi(\alpha x_1) = \alpha\varphi(x_1). \tag{12}$$

Определение 17. Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда векторы

$$\varphi(e_1) = v_1, \varphi(e_2) = v_2, \ldots, \varphi(e_n) = v_n$$

принадлежат пространству $\boldsymbol{V}$ и могут быть разложены по базису:

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi(e_1) & = & a_{11}e_1 & + & a_{21}e_2 & + & \ldots & + & a_{n1}e_n, \\ \varphi(e_2) & = & a_{12}e_1 & + & a_{22}e_2 & + & \ldots & + & a_{n2}e_n, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \varphi(e_n) & = & a_{1n}e_1 & + & a_{2n}e_2 & + & \ldots & + & a_{nn}e_n, \end{array} \tag{13}$$

Квадратная матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядка n называется *матрицей линейного оператора* φ *в базисе* e. Равенство (13) можно переписать в следующем матричном виде

$$\varphi(e) = e \cdot A_e. \tag{14}$$

Определение 18. *Определителем оператора* φ называется определитель его матрицы в каком-нибудь базисе e. Определитель оператора φ обозначается через $|\varphi|$. Таким образом, по определению

$$|\varphi| = |A_e|.$$

Задачи для самостоятельного решения

46. Будет ли линейным оператором, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$ всех матриц второго порядка с вещественными элементами, каждое из следующих отображений.

Для любой матрицы $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}^{22}$:

$a)$ $\varphi(M) = |M| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $|M|$ – определитель матрицы M,

$b)$ $\varphi(M) = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot M + M \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\varphi(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & 1 \end{pmatrix}$.

47. Будет ли линейным оператором, действующим в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_2$ всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n, каждое из следующих отображений.

Для любого многочлена $f(x) \in \boldsymbol{P}_2$:

$a)$ $\varphi(f) = f'(x) + 3f''(x)$, $\qquad b)$ $\varphi(f) = (f(1) + f(2))f'(x)$,

$c)$ $\varphi(f) = (x+1)f''(x)$, $\qquad d)$ $\varphi(f) = f'' - f' + 5$.

48. Выяснить, какие из следующих операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для любого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$:

$$a)\ \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 6 - 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} x_3^4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$b)\ \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 0 \\ x_2^4 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3) \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

49. Для следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_2$, найти матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$. Вычислить определитель оператора.

Для любого многочлена $f \in \boldsymbol{P}_2$:

a) $\varphi(f) = -3f''(x) + 3f'(x)$, *b)* $\varphi(f) = f(x+2) + f(0)x + f'(x)$,

c) $\varphi(f) = f(-2) + f(2)x + f(3)x^2$, *d)* $\varphi(f) = f(x) + f(2)x + f'(x)$.

50. Для следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$, найти матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить определитель оператора.

Для любой матрицы $M \in \boldsymbol{M}^{22}$:

a) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M + M \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$,

b) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 2M$,

c) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M + M \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2M$.

51. Докажите, что оператор дифференцирования $\widehat{D}$, действующий в пространстве P_n многочленов степени не выше n $(n \geq 1)$, является линейным оператором. Найдите матрицу линейного оператора в базисе:

a) $1, x, \ldots, x^n$,

b) $1, \dfrac{x}{1!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}$,

c) $1, 1+x, \ldots, 1+x+x^2+\ldots+x^n$,

$d)$ 1, $x-1$, x^2-x, …, x^n-x^{n-1}.

8. Преобразование матрицы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Будем предполагать, что линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Пусть в базисе $e=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ заданы элемент x_e и его образ y_e линейного оператора φ, тогда

$$\varphi(x)=e\cdot y_e=e\cdot A_e\cdot x_e, \tag{15}$$

где A_e – матрица линейного оператора φ. Формула (15) позволяет определить координаты образа y_e через координаты прообраза x_e в данном базисе e, если известна матрица A_e оператора φ в этом базисе.

Матрица A_e оператора φ в базисе $e=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ и матрица A_u того же оператора в базисе $u=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ связаны соотношением

$$A_u=T^{-1}_{e\to u}\cdot A_e\cdot T_{e\to u}=T_{u\to e}\cdot A_e\cdot T^{-1}_{u\to e}, \tag{16}$$

где $T_{e\to u}$ – матрица перехода от базиса e к базису u: $u=e\cdot T_{e\to u}$.

Равенство (16) может быть переписано в следующем виде:

$$A_e=T_{e\to u}\cdot A_u\cdot T^{-1}_{e\to u}=T^{-1}_{u\to e}\cdot A_u\cdot T_{u\to e}. \tag{17}$$

Задачи для самостоятельного решения

52. Линейный оператор φ в базисе $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора φ в базисе $g=\{g_1,g_2,g_3\}$:

$a)$ $A_f=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\quad g_1(x)=1+2x$, $g_2(x)=-1+2x+x^2$, $g_3(x)=-1+x+x^2$,

$$b)\ A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1(x) &= -3 + x + 2x^2, \\ g_2(x) &= -2 + x + x^2, \\ g_3(x) &= -2 + x^2, \end{aligned}$$

$$c)\ A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1(x) &= -1 + 2x - 2x^2, \\ g_2(x) &= -1 + x, \\ g_3(x) &= 2 - 2x + x^2. \end{aligned}$$

53. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса u в линейные комбинации по базису e:

$$a)\ A_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ u_2 &= 3e_1 + 4e_2 + e_3, \\ u_3 &= e_1 + 2e_2 + 2e_3, \end{aligned}$$

$$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u_1 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ u_2 &= -e_1 + e_2 - 2e_3, \\ u_3 &= -e_1 + 2e_2 + e_3, \end{aligned}$$

$$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u_1 &= e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ u_2 &= e_2 - e_3, \\ u_3 &= -e_1 - e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

54. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u:

$$a)\ A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_2 - u_3, \\ e_2 &= -u_1 + 3u_2 + 2u_3, \\ e_3 &= -2u_2 - u_3, \end{aligned}$$

$$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_2 + u_3, \\ e_2 &= 2u_1 - 3u_2 + u_3, \\ e_3 &= -u_1 + 2u_2, \end{aligned}$$

$$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_2 + 2u_3, \\ e_2 &= -u_1 + 3u_2 - 3u_3, \\ e_3 &= -u_2 + 2u_3. \end{aligned}$$

55. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$:

$$a)\ A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b)\ A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

56. Доказать, что существует единственный линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ и переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3. Найти его матрицу в базисе, в котором даны координаты всех векторов:

$$a)\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b)\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{V}$ – комплексное линейное пространство. Пусть $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ – линейный оператор.

Определение 19. Ненулевой элемент x из $\boldsymbol{V}$ называется *собственным вектором* линейного оператора φ, если существует число λ такое, что $\varphi(x) = \lambda x$. Число λ при этом называется *собственным значением* оператора φ. Говорят также, что собственный вектор x отвечает (или соответствует) собственному значению λ.

Определение 20. Пусть A – матрица оператора φ в некотором базисе e. Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется *характеристическим* *многочленом* оператора φ. Корни многочлена $f(\lambda)$ называются *характеристическими корнями матрицы* A.

Определение 21. *Алгебраической кратностью* собственного числа λ называется кратность корня λ характеристического многочлена $f(\lambda)$.

Определение 22. Пусть λ – собственное значение линейного оператора φ. Тогда, по определению, ненулевой вектор U будет собственным, если $\varphi(U) = \lambda U$ или, что равносильно, $(\varphi - \lambda I)U = 0$. Отсюда получаем, что подпространство $\ker(\varphi - \lambda I)$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого вектора. Это подпространство называется *собственным*. Его размерность называется *геометрической кратностью* собственного значения λ.

Алгоритм отыскания собственных векторов и собственных значений линейного оператора φ.

Пусть A – матрица линейного оператора φ, E – единичная матрица. Тогда для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы, нужно выполнить следующие действия:

1. Найти собственные значения оператора, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{18}$$

Обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $k \leq n$.

2. Для каждого собственного значения λ_p найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0. \tag{19}$$

Правило для решения характеристических уравнений в одном частном случае.

Пусть дана матрица A размера 3×3, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение (18) имеет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{20}$$

где I_1, I_2, I_3 – числа, которые вычисляются по следующим формулам:

$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$;

$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Теорема 1. *Линейный оператор φ, действующий в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, тогда и только тогда задается в базе e_1, e_2, …, e_n диагональной матрицей, если все векторы этой базы являются собственными векторами линейного оператора φ.*

На основании теоремы 1 можно составить *алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.* Для того, чтобы привести данную квадратную матрицу A размерности n к диагональному виду необходимо:

1. Найти λ_1, λ_2, …, λ_n собственные числа матрицы A.

2. Для каждого собственного значения λ_i найти соответствующий ему собственный вектор. Если в результате вычисления мы получим систему из n линейно независимых собственных векторов U_1, U_2, …, U_n, то

матрицу A можно привести к следующему диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{21}$$

3. Записать собственные векторы как столбцы новой матрицы T. Полученная матрица T является базисом, в котором матрица A имеет диагональный вид (21).

Задачи для самостоятельного решения

57. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, действующих в вещественном линейном пространстве, и заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$

58. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, действующих в комплексном линейном пространстве, и заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ d)\ \begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}.$

59. Найти собственные значения, их алгебраическую и геометрическую кратности и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$

$d)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},\quad e)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},\quad f)\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

60. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$

$d)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad e)\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

10. Действия над линейными операторами. Обратный оператор

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Определение 23. *Суммой $\varphi + \psi$ линейных операторов φ и ψ*, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in \boldsymbol{V}$ задается равенством $\phi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Сумма двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица суммы линейных операторов (в любом базисе) равна сумме матриц этих операторов.

Определение 24. *Произведением $\alpha\varphi$ линейного оператора φ*, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, на число α называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in \boldsymbol{V}$ задается равенством $\phi(x) = \alpha(\varphi(x))$. Произведение линейного оператора φ на число α является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора на число α.

Определение 25. *Произведением $\varphi \cdot \psi$ линейных операторов φ и ψ*, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in \boldsymbol{V}$ задается равенством $\phi(x) = \varphi(\psi(x))$. Произведение двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица произведения линейных операторов (в любом базисе) равна произведению матриц этих операторов.

Определение 26. *Тождественным или единичным оператором* I называется оператор, который каждому элементу $x \in \boldsymbol{V}$ сопоставляет этот же элемент: $I(x) = x$.

Определение 27. Линейный оператор φ^{-1} называется *обратным* к линейному оператору φ, если выполняются равенства $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = I$, где I – тождественный оператор.

Если A – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то матрица обратного оператора φ^{-1} в том же базисе равна A^{-1}, то есть является обратной по отношению к матрице A.

Определение 28. Если определитель линейного оператора $|\varphi| \neq 0$, то оператор называется *невырожденным.* В противном случае – *вырожденным.*

Теорема 1 (Критерий обратимости оператора). *Для того чтобы существовал обратный оператор к линейному оператору φ, необходимо и достаточно, чтобы оператор был невырожденным.*

Задачи для самостоятельного решения

61. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$. Для двух линейных операторов $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \psi(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$, действующих в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, найти:

a) $(3\psi + 2\varphi^2)x$, *b)* $(\varphi^2 - \psi)x$, *c)* $\psi(2\varphi - \psi)x$, *d)* $\psi^3 x$.

62. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2\}$ имеет матрицу A_e. Линейный оператор ψ в базисе $u = \{u_1, u_2\}$ имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов $\varphi + \psi$ и $\varphi - 2\psi$ в базисе u:

$a)\ A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$

$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$b)\ A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$

$c)\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$

$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

63. Для следующих линейных операторов φ, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^3$, выяснить их обратимость. В случае их обратимости найти обратные операторы:

$a)\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix},$

$c)\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$

64. Выяснить обратимость линейных операторов φ, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{Q}_2$ всех многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами. В случае их обратимости найти обратные операторы. Для любого многочлена $f \in \boldsymbol{Q}_2$, линейные операторы φ задаются по следующим правилам:

$a)\ \varphi(f) = f'' - 3f' + f, \qquad b)\ \varphi(f) = 2f'' - 3f' + f, \qquad c)\ \varphi(f) = -2f' + f.$

65. Пусть φ и ψ – линейные операторы, действующие в линейном пространстве $\boldsymbol{R}_2$. В базисе e_1, e_2 оператор φ имеет матрицу

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. В базисе f_1, f_2 оператор ψ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, причем $f = eC$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

a) оператора $\varphi^2 + 6\varphi + 9I$ в базисе e_1, e_2 (I – тождественный оператор),

b) оператора $\psi^2 + 4\psi + 4I$ в базисе f_1, f_2,

c) оператора $\varphi^2 - \psi^2$ в базисе e_1, e_2,

d) оператора $\varphi \cdot \psi^{-1}$ в базисе f_1, f_2.

11. Ядро и область значений линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть линейный оператор φ действует в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n.

Определение 29. Множество $Im(\varphi)$ образов всех векторов из $\boldsymbol{V}$ при действии оператора φ называется *областью значений* или *образом* линейного оператора φ, то есть

$$Im(\varphi) = \Big\{ y \in \boldsymbol{V} \;\Big|\; y = \varphi(x) \Big\}.$$

Размерность подпространства $Im(\varphi)$ называется *рангом оператора* φ и обозначается через $rank(\varphi)$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда образ линейного оператора φ равен линейной оболочке, порожденной системой векторов $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$:

$$Im(\varphi) = \mathrm{span}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}.$$

Определение 30. Множество $Ker(\varphi)$ всех векторов линейного пространства $\boldsymbol{V}$, которые переводятся линейным оператором φ в нулевой вектор называется *ядром оператора*, то есть

$$Ker(\varphi) = \Big\{ x \in \boldsymbol{V} \;\Big|\; \varphi(x) = 0 \Big\}. \qquad (22)$$

Размерность подпространства $Ker(\varphi)$ называется *дефектом оператора* φ и обозначается через $def(\varphi)$.

Имеет место следующее равенство:

$$rank(\varphi) + def(\varphi) = n.$$

Задачи для самостоятельного решения

66. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{R}^4$ по правилу $\varphi(x) = M \cdot x$, где матрица M дана ниже:

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad d)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

67. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$ всех вещественных матриц M второго порядка по правилу:

$$a)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d)\ \varphi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

68. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_3$ всех многочленов степени не выше 3 с вещественными коэффициентами по правилу:

$a)$ $\varphi(f) = (2+x)f''' + (1+x-x^2)f'' + 3xf' - 3f$,

$b)$ $\varphi(f) = (-3+2x^3)f''' + (3+3x-x^2)f'' - (1+x)f' + f$,

$c)$ $\varphi(f) = (2x+2x^2)f''' - 2(1+x)f''$,

$d)$ $\varphi(f) = (1+x^2)f''' - (2+x-x^2)f'' - (1+3x)f' + 3f$.

Евклидово пространство

12. Определение скалярного произведения. Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{E}_n$ – линейное пространство размерности n.

Определение 31. *Скалярным произведением* элементов x и y из $\boldsymbol{E}_n$ называется правило, ставящее в соответствие вещественное число (будем обозначать это число (x,y)), причем указанное правило удовлетворяет для любых x, y, z из $\boldsymbol{E}_n$ и любого вещественного числа α следующим требованиям (они называются *аксиомами скалярного произведения*).

1^0. $(x,y)=(y,x)$ (перестановочность или коммутативность сомножителей).

2^0. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ (распределительное свойство).

3^0. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$.

4^0. $(x,x)>0,$ если $x\neq 0$ и $(x,x)=0,$ если $x=0$.

Определение 32. Вещественное линейное пространство $\boldsymbol{E}_n$ называется *евклидовым пространством*, если в нем введено скалярное произведение векторов.

Определение 33. *Нормой* элемента $x\in\boldsymbol{E}_n$ (обозначение $\|x\|$) называется вещественное число, определяемое по формуле

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}. \tag{23}$$

Определение 34. Вектор x называется *нормированным*, если его норма $\|x\|=1$.

Определение 35. Углом между ненулевыми векторами $x,y\in\boldsymbol{E}_n$ называется число φ, удовлетворяющее условиям

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|},\qquad 0\leq\varphi\leq\pi. \tag{24}$$

Определение 36. Элементы x и y из $\boldsymbol{E}_n$ называются *ортогональными* (обозначение: $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x \perp y, \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) = 0. \tag{25}$$

Определение 37. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \boldsymbol{E}_n$ называется *ортогональным*, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{26}$$

Определение 38. Ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \boldsymbol{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{27}$$

Пусть координаты элементов x, y из евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ заданы в ортонормированном базисе, тогда скалярное произведение и норму можно вычислить по формулам

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{28}$$

Процедура ортогонализации Грама-Шмидта

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_n$ можно построить на основе произвольного базиса с помощью процедуры ортогонализации. Опишем эту процедуру.

Пусть даны k линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$. Построим попарно ортогональные элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k$, представляющие собой линейные комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ следующим образом.

Положим

$$e_1 = x_1, \quad e_2 = x_2 - a_{12} e_1, \qquad \text{где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}. \tag{29}$$

Такой выбор коэффициента a_{12} обеспечивает ортогональность e_1 и e_2: $(e_1, e_2) = 0$. Далее, положим

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2 = x_3 - \sum_{i=1}^{2} a_{i3}e_i, \tag{30}$$

где $a_{13} = \dfrac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $a_{23} = \dfrac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$. Такой выбор коэффициентов a_{13} и a_{23} обеспечивает ортогональность e_3 к элементам e_1 и e_2. И так далее.

На m-м шаге $m \leq k$ полагаем

$$e_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i, \qquad \text{где } \ a_{im} = \frac{(x_m, e_i)}{(e_i, e_i)}. \tag{31}$$

Такой выбор коэффициентов a_{im} обеспечивает ортогональность e_m к элементам e_1, e_2, …, e_{m-1}. В результате k шагов описанная процедура дает ортогональную систему векторов e_1, e_2, …, e_k.

Нормирование системы векторов

Чтобы сделать ортогональную систему векторов e_1, e_2, …, e_k ортонормированной, нужно каждый элемент e_i умножить на число $\dfrac{1}{\|e_i\|}$. Полученные в результате элементы $g_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, …, $g_k = \dfrac{e_k}{\|e_k\|}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Задачи для самостоятельного решения

69. Может ли скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{R}^2$ задаваться формулой:

a) $x_1y_1 + 2x_2y_2$,

b) $3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,

c) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

70. Может ли функция $F(X, Y)$ быть принята за скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$:

a) $F(X, Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y)$,

b) $F(X, Y) = \mathrm{tr}(X) \cdot \mathrm{tr}(Y)$,

c) $F(X, Y) = \det(X \cdot Y)$,

где $\operatorname{tr}(X) = \sum\limits_{k=1}^{2} x_{kk}$ – сумма элементов матрицы X, стоящих на главной диагонали, $\det(X)$ – определитель матрицы X.

71. Может ли скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{P}_2$ задаваться формулой:

a) $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \quad \text{для} \quad \forall f,g \in \boldsymbol{P}_2,$

b) $(f,g) = f(1)g(1) + f'(1)g'(1) + f''(1)g''(1) \quad \text{для} \quad \forall f,g \in \boldsymbol{P}_2,$

c) $(f,g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) \quad \text{для} \quad \forall f,g \in \boldsymbol{P}_2.$

72. Используя (28), вычислить скалярное произведение векторов a и b, их нормы и угол φ между ними в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^4$:

a) $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$ b) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

c) $a = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

73. Используя (28), найти скалярное произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$, их нормы и угол между ними в евклидовом пространстве $\boldsymbol{P}_3$:

a) $f(x) = -1 + x + 2x^2 - x^3, \quad g(x) = -2 - 3x - x^2 - 3x^3,$

b) $f(x) = 2x - x^2 + 2x^3, \quad g(x) = -1 + x + x^2 + x^3,$

c) $f(x) = 1 - x + 3x^3, \quad g(x) = 1 + 2x - x^2 + 4x^3.$

74. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

a) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$

$$b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

75. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов пространства $\boldsymbol{R}^4$:

$$a)\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

76. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов пространства $\boldsymbol{R}^n$:

$$a)\ x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad n = 3,$$

$$b)\ x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad n = 4.$$

13. Ортогональное разложение евклидова пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть $\boldsymbol{L}$ – конечномерное подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$.

Ортогональное дополнение

Определение 39. *Вектор x ортогонален подпространству* $\boldsymbol{L}$ (обозначение $x \perp \boldsymbol{L}$), если вектор x ортогонален любому вектору y подпространства $\boldsymbol{L}$, то есть $(x, y) = 0\ \forall y \in \boldsymbol{L}$.

Определение 40. *Ортогональным дополнением* $\boldsymbol{L}^{\perp}$ линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ называется множество всех векторов из евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$, ортогональных к $\boldsymbol{L}$, то есть

$$\boldsymbol{L}^{\perp} = \left\{x \in \boldsymbol{E}_n \;\middle|\; x \perp \boldsymbol{L}\right\}. \tag{32}$$

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая

Теорема 1. *Евклидово пространство $\boldsymbol{E}_n$ равно прямой сумме подпространства $\boldsymbol{L}$ и его ортогонального дополнения $\boldsymbol{L}^{\perp}$, то есть выполняется равенство $\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{L}^{\perp}$, причем* $\dim \boldsymbol{E}_n = \dim \boldsymbol{L} + \dim \boldsymbol{L}^{\perp}$.

Определение 41. Из теоремы 1 следует, что любой вектор $x \in \boldsymbol{E}_n$ можно единственным образом представить в виде суммы $x = x_{pr} + x_{ort}$, где $x_{pr} \in \boldsymbol{L}$, $x_{ort} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$. Слагаемое $x_{pr} \in \boldsymbol{L}$ называется *проекцией вектора x на подпространство $\boldsymbol{L}$*, а вектор $x_{ort} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$ – *ортогональной составляющей.*

Алгоритм построения ортогональной проекции x_{pr} и ортогональной составляющей x_{ort}

1. Построить базис подпространства L: $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

2. Вычислить скалярные произведения векторов базиса a:

$$\begin{array}{llllll}
(a_1, a_1), & (a_1, a_2), & (a_1, a_3), & \ldots, & (a_1, a_k), & (a_1, x), \\
(a_2, a_1), & (a_2, a_2), & (a_2, a_3), & \ldots, & (a_2, a_k), & (a_2, x), \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
(a_k, a_1), & (a_k, a_2), & (a_k, a_3), & \ldots, & (a_k, a_k), & (a_k, x).
\end{array} \tag{33}$$

3. Вычислить неизвестные x_1, x_2, x_3, ..., x_k, решая систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1(a_1, a_1) \;+\; x_2(a_1, a_2) \;+\ldots+\; x_k(a_1, a_k) = (x, a_1), \\
x_1(a_2, a_1) \;+\; x_2(a_2, a_2) \;+\ldots+\; x_k(a_2, a_k) = (x, a_2), \\
\dotfill \\
x_1(a_k, a_1) \;+\; x_2(a_k, a_2) \;+\ldots+\; x_k(a_k, a_k) = (x, a_k).
\end{array}\right. \tag{34}$$

4. Построить ортогональную проекцию вектора x на подпространство $\boldsymbol{L}$, применяя формулу

$$x_{pr} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_k a_k. \tag{35}$$

5. Построить ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства L, применяя формулу $x_{ort} = x - x_{pr}$.

Определение 42. *Угол между вектором x и подпространством L* есть угол между вектором x и его проекцией x_{pr} на это подпространство. По формуле для косинуса угла между векторами получаем, что

$$\cos\varphi = \frac{(x, x_{pr})}{||x|| \cdot ||x_{pr}||}. \tag{36}$$

Определение 43. *Расстоянием от вектора x до подпространства L* называется норма $||x_{ort}||$ ортогональной составляющей вектора x.

Задачи для самостоятельного решения

77. Найти базис ортогонального дополнения $\boldsymbol{L}^{\perp}$ подпространства $\boldsymbol{L}$, натянутого на векторы:

$a)$ $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$b)$ $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$

$c)$ $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

78. Найти ортогональную проекцию x_{pr} и ортогональную составляющую x_{ort} вектора x на линейное подпространство $\boldsymbol{L}$, которое натянуто на систему векторов a_1, a_2, a_3 :

$$a)\quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

79. Найти угол φ между вектором x и подпространством $\boldsymbol{L}$, натянутым на систему векторов a_1, a_2, a_3, и расстояние ρ от вектора x до подпространства $\boldsymbol{L}$

$$a)\quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичные формы

14. Метод Лагранжа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 44. *Квадратичной формой* называется функция числовых переменных x_1, x_2, ..., x_n следующего вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{37}$$

где a_{ij} – вещественные числа (*коэффициенты квадратичной формы*), удовлетворяющие условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{38}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ с размером $n \times n$ называется *матрицей квадратичной формы.* Из равенства (60) следует, что матрица квадратичной формы A является симметрической.

Квадратичную форму (37) можно записать в матричном виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X,$$

где X – столбец переменных x_1, x_2, ..., x_n, X^T – строка, полученная транспонированием столбца X, A – матрица квадратичная формы.

Любую квадратичную форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

невырожденным линейным преобразованием $X = Q \cdot Y$ можно привести к виду

$$\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \big(y_i\big)^2. \tag{39}$$

Определение 45. Выражение (39) называется *каноническим видом квадратичной формы*, а числа c_i $(i = 1, \ldots, n)$ – ее *каноническими* *коэффициентами.* Матрица квадратичной формы $\widetilde{f}$, имеющей канонический вид, является диагональной матрицей с элементами c_i на главной диагонали. Если в квадратичной форме (39) все канонические коэффициенты $c_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то ее также называют *нормальным видом квадратичной формы.*

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа):

Для приведения квадратичной формы n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

к каноническому виду нужно выполнить следующие действия:

1. Выбрать такую переменную (*ведущую*), которая входит в квадратичную форму во второй и первой степенях одновременно, и перейти к пункту 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к пункту 4.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет каноничнеский вид.

2. Выделить полный квадрат по ведущей переменной.

3. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять на одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования, переходя к пункту 1.

4. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. Продолжить преобразования, переходя к пункту 1.

Задачи для самостоятельного решения

80. Найти канонический вид и матрицу линейного преобразования, которое приведет квадратичную форму к этому виду:

$a)$ $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-6x_1x_3-x_2x_3,$

$b)$ $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3,$

$c)$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,$

$d)$ $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3,$

$e)$ $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$

$f)$ $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3,$

$g)$ $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3,$

$h)$ $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3,$

$i)$ $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3.$

15. Приведение квадратичной формы к главным осям. Критерий Сильвестра

Основные понятия, формулы и теоремы

Приведение квадратичной формы к главным осям

Определение 46. Квадратная матрица Q называется *ортогональной*, если выполняется равенство

$$Q^{-1}=Q^T.$$

Определение 47. Линейное преобразование переменных $X=QY$, называется *ортогональным*, если его матрица Q ортогональная.

Теорема 1. *Для любой квадратичной формы* f

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{40}$$

существует ортогональное преобразование $X = QY$, приводящее ее к каноническому виду:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{41}$$

При этом λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ – собственные значения матрицы квадратичной формы A, а столбцы матрицы Q – ортонормированная система собственных векторов матрицы A (норма каждого из них равна 1).

Пусть дана квадратичная форма (40) с матрицей $A = (a_{ij})$. Тогда *алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям* состоит в следующем:

1. Найти собственные значения матрицы A, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Обозначим их λ_1, λ_2, ..., λ_n.

2. Для каждого собственного значения λ_p, $1 \leq p \leq n$ найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0.$$

Найденные решения будут собственными векторами, соответствующие собственному значению λ_p.

3. Используя процеду ортогонализации, ортогонализировать и нормировать систему из собственных векторов матрицы A (если это необходимо).

4. Составить ортогональную матрицу Q, столбцами которой являются ортонормированные векторы матрицы A.

5. Записать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

6. Записать ортогональное преобразование переменных $X = QY$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Критерий Сильвестра

Определение 48. Квадратичная форма f называется *положительно определенной,* если ее нормальный вид следующий

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Определение 49. Определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$.

Теорема 2. *(критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, то есть*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

81. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

$a)$ $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3,$

$b)$ $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$

$c)$ $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

82. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид:

$a)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$

$b)$ $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3,$

$c)$ $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3,$

$d)\quad 17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3,$

$e)\quad x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3,$

$f)\quad 8x_1^2-7x_2^2+8x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3.$

83. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

$a)\quad x_1^2+4x_2^2+\lambda x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3,$

$b)\quad 5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3,$

$c)\quad 2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3,$

$d)\quad x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3,$

$e)\quad x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3,$

$f)\quad 2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3.$

Кривые и поверхности второго порядка

16. Кривые второго порядка

1. Окружность

Определение 50. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности. Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности.

Каноническое (простейшее) уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{42}$$

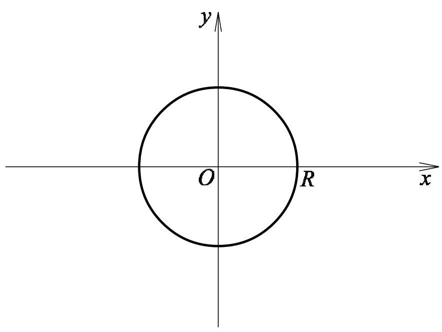

Рис. 1. Окружность с центром в начале координат и радиусом R

Окружность радиусом R с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{43}$$

2. Эллипс

Определение 51. *Эллипс* – это геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек

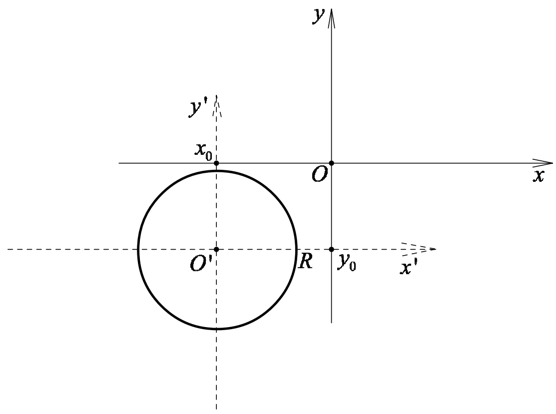

Рис. 2. Окружность с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и радиусом R

F_1 и F_2 (*фокусов*) есть постоянная величина $2a$, превышающая расстояние между фокусами $2c$:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a > 2c. \tag{44}$$

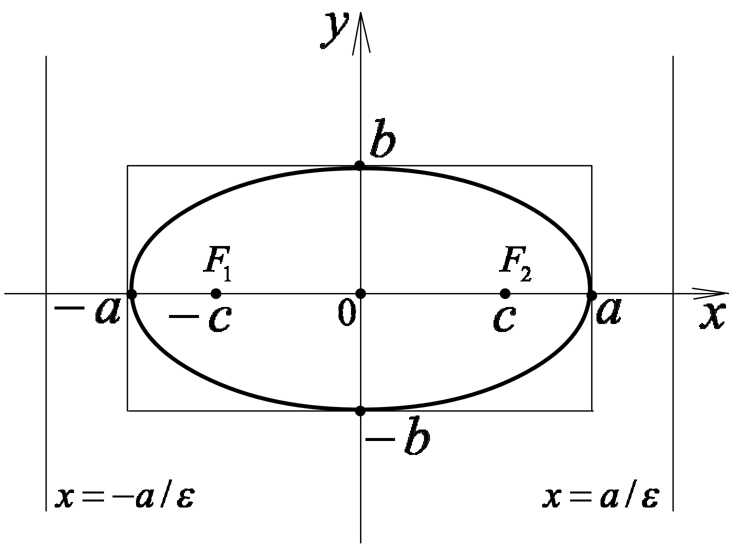

Рис. 3. Эллипс с центром в начале координат

Выберем систему координат Oxy так, чтобы координаты фокусов были $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть $b^2 = a^2 - c^2$. Тогда *каноническое (простейшее) уравнение эллипса* будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{45}$$

Начало координат совпадает с *центром эллипса.* Точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ называются *вершинами эллипса.* Числа a и b являются соответственно *большой и малой полуосями эллипса.* Тогда $2a$ и $2b$ – это соответственно *большая и малая оси* эллипса.

Определение 52. Величина $\varepsilon = c/a$, называемая *эксцентриситетом*, характеризует меру сжатия эллипса. Так как $a > c$, то для эллипса $0 < \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

Определение 53. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются *директрисами* эллипса.

Определение 54. Расстояния точки $M(x, y)$ эллипса до фокусов называются *фокальными расстояниями* и определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x; \qquad r_1 = a - \varepsilon x. \tag{46}$$

Замечание 1. Уранение вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{47}$$

определяет эллипс (см. рис. 4), который параллельно смещен относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса находится в точке $O'(x_0, y_0)$, при этом старые координаты (x, y) и новые (x', y') связаны следующим равенством

$$\begin{cases} x' &= x - x_0, \\ y' &= y - y_0. \end{cases} \tag{48}$$

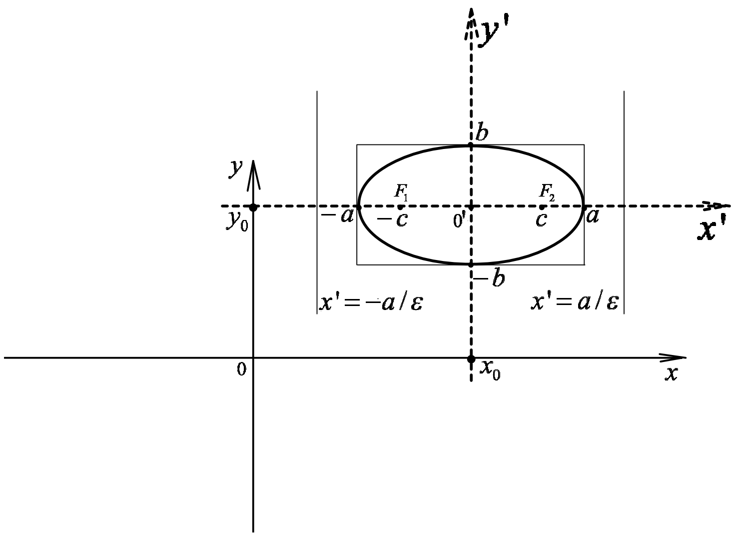

Рис. 4. Эллипс с центром в точке $O'(x_0, y_0)$

3. Гипербола

Определение 55. *Гипербола* – это геометрическое место точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (*фокусов*) есть постоянная величина $2a$, меньшая расстояния между фокусами $2c$:

$$\big| |MF_1| - |MF_2| \big| = 2a < 2c. \tag{49}$$

Выберем систему координат Oxy так, чтобы координаты фокусов были $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть $b^2 = c^2 - a^2$. Тогда *каноническое (простейшее) уравнение гиперболы* будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{50}$$

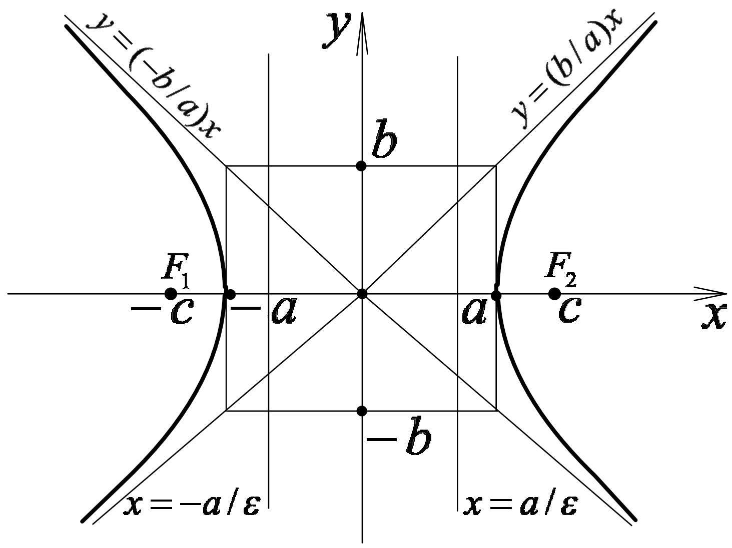

Рис. 5. Гипербола

Начало координат совпадает с *центром* гиперболы. Точки $(\pm a, 0)$ – это *вершинами* гиперболы. Числа a и b являются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы. Тогда $2a$ и $2b$ – это соответственно *действительная и мнимая оси* гиперболы.

Определение 56. Величина $\varepsilon = c/a$, называемая *эксцентриситетом*, характеризует меру сжатия эллипса. Так как $a < c$, то для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ – это *директрисы* гиперболы.

Определение 57. Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$. У гиперболы две аимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Расстояния точки $M(x, y)$ гиперболы до ее фокусов определяются формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x + a|; \qquad r_2 = |\varepsilon x - a|. \tag{51}$$

Определение 58. Гипербола, уравнение которой имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{52}$$

называется *сопряженной* с гиперболой (см. рис. 6).

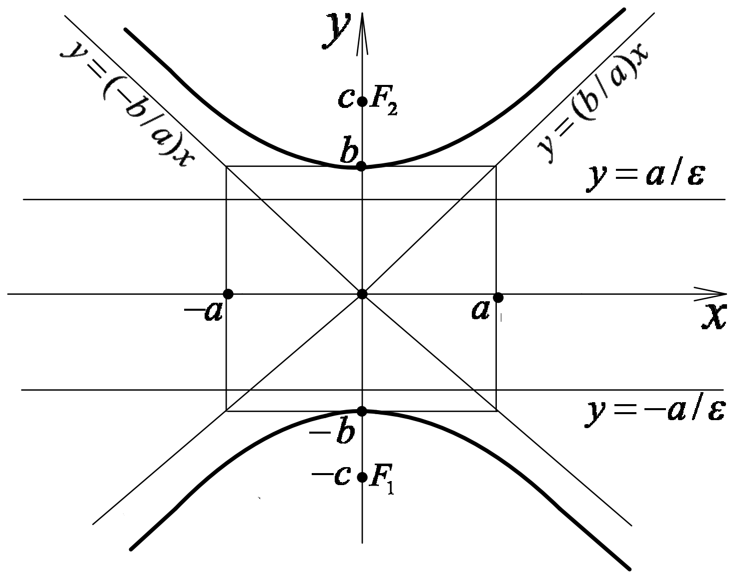

Рис. 6. Сопряженная гипербола

Замечание 2. Уранение вида

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{53}$$

определяет гиперболу, которая параллельно смещена относительно системы координат Oxy.

4. Парабола

Определение 59. *Парабола* – это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости (*фокуса*) и фиксированной прямой плоскости (*директрисы*).

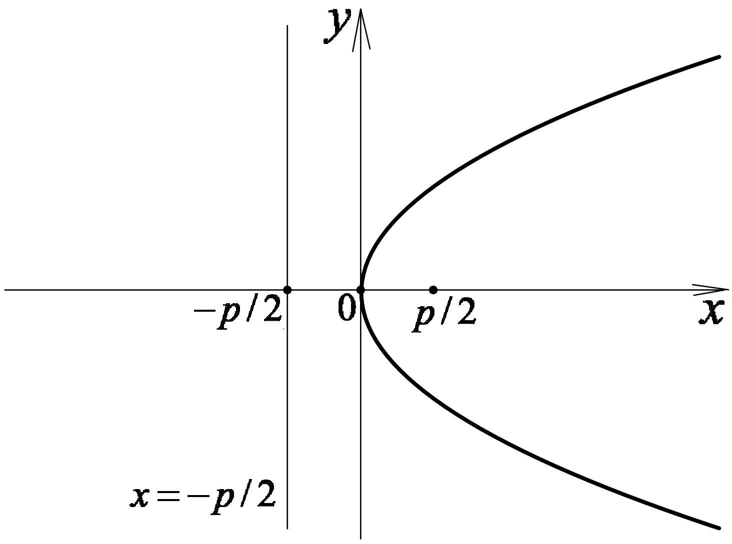

Рис. 7. Парабола

Начало координат – это *вершина* параболы. Ось Ox является *осью* параболы. Пусть $F(p/2, 0)$ – фокус, а $x = -p/2$ – уравнение директрисы. Тогда каноническое уравнение параболы в такой системе координат имеет вид

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x. \tag{54}$$

Число p называется *параметром* параболы.

Определение 60. *Фокальный радиус* точки $M(x, y)$ параболы выражается формулой

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{55}$$

Каноническими уравнениями параболы называют еще три вида уравнений параболы. Сопроводим их соответствующими рисунками.

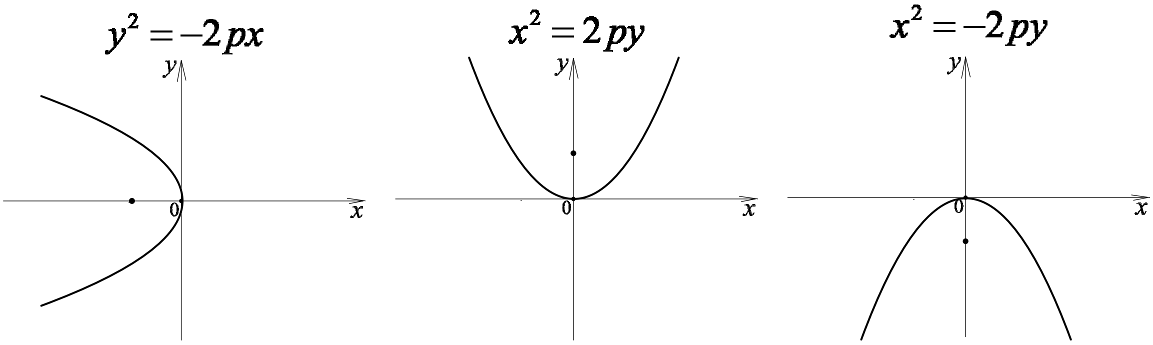

Рис. 8. Дополнительные канонические уравнения параболы

Замечание 3. Уравнение вида

$$(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0). \qquad (56)$$

определяет параболу, которая параллельно смещена относительно системы координат Oxy таким образом, что вершина параболы находится в точке $O'(x_0, y_0)$

Задачи для самостоятельного решения

84. Дано уравнение кривой второго порядка. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентристет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы). Построить данную кривую.

$a)$ $x^2 + 4y^2 = 16,$ $\qquad c)$ $4x^2 + 25y^2 = 100,$

$b)$ $4x^2 - y^2 = 16,$ $\qquad d)$ $4x^2 - 9y^2 = 36.$

85. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{6} = 1.$

86. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанной параболой $y^2 = 2x$.

87. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0.8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.

88. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{40}, 2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{3}x$.

89. В эллипс $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

90. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5, 0)$ и $B(1, 4)$, если центр ее лежит на прямой $x + y = 3$.

91. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.

92. Найти точки пересечения параболы $y^2 = x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси Ox и радиус равный 5.

93. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2 - y^2 = 8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с гиперболой $8x^2 - y^2 = 8$.

94. Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0.6.

95. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3, -1)$, и ее действительная ось лежит на оси Ox, а центр – в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2 + y^2 = 10$.

96. Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

97. Даны точка $A(1; 0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение кривой, каждая точка $M(x; y)$ которой удовлетворяет заданным условиям.

$a)$ в два раза ближе к точке A, чем к данной прямой,

$b)$ в два раза дальше от точки A, чем от данной прямой,

$c)$ равноудалена от точки A и прямой $x = 2$.

17. Применение теории квадратичных форм в задачах о приведении к каноническому виду уравнения кривой второго порядка

Определение 61. Уравнение

$$F(x, y) = f(x, y) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{57}$$

в котором

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{58}$$

квадратичная форма, а коэффициенты a_{ij} $(i, j = \overline{1, 3})$ вещественные числа, называется *общим уравнением второго порядка.*

Определение 62. Если на плоскости задана декартова прямоугольная система координат Oxy, то геометрическое место точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (57), будем называть *кривой второго порядка*, задаваемой общим уравнением второго порядка (57).

Нашей задачей будет определить все возможные типы (геометрические формы) кривых второго порядка, то есть классифицировать эти кривые. Поставленную задачу будем решать, преобразуя уравнение (57) к некоторому специальному (каноническому) виду, по которому будет нетрудно определить геометрическую форму кривой.

Канонические уравнения в координатной системе Oxy всех кривых второго порядка:

1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{59}$$

2. Мнимый эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{60}$$

3. Пара мнимых пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{61}$$

4. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{62}$$

5. Пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{63}$$

6. Парабола

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x. \tag{64}$$

7. Пара параллельных прямых

$$y^2 - b^2 = 0. \tag{65}$$

8. Пара мнимых параллельных прямых

$$y^2 + b^2 = 0. \tag{66}$$

9. Пара совпадающих прямых

$$y^2 = 0. \tag{67}$$

Алгоритм приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Пусть дано уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{68}$$

Первые три слагаемых уравнения (68) запишем в виде квадратичной формы $f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$.

1. Используя теорию квадратичных форм, приведем квадратичную форму $f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$ к главным осям и найдем ортогональное преобразование переменных. Для этого выполним следующие действия:

1.1 Выпишем матрицу A квадратичной формы $f(x, y)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

1.2. Найдем собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

1.3. Для каждого собственного числа λ_1, λ_2 найдем собственные векторы U_1, U_2.

1.4. Если необходимо, ортогонализируем и нормируем систему собственных векторов. Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$ – ортонормированная система собственных векторов. Выберем знаки собственных векторов таким образом, чтобы $\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = 1$.

1.5. Составим матрицу $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ ортогонального преобразования переменных, приводящего квадратичную форму $f(x, y)$ к каноническому виду. Матрица Q в силу свойств ортогонального преобразования на плоскости имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

то есть Q – матрица оператора поворота на угол α в пространстве $\boldsymbol{R}^2$ векторов на плоскости. При таком повороте прямоугольная система координат OXY переходит в прямоугольную систему координат OX_1Y_1 (смотри рисунок 9). Найдем угол поворота α.

1.6. В уравнении (68) от старых переменных (x, y) перейти к новым переменным (x_1, y_1), используя равенства

$$\begin{cases} x = q_{11}x_1 + q_{12}y_1, \\ y = q_{21}x_1 + q_{22}y_1. \end{cases} \tag{69}$$

В новых декартовых прямоугольных координатах x_1, y_1 уравнение кривой второго порядка примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2(a_{13}q_{11} + a_{23}q_{21})x_1 + 2(a_{13}q_{12} + a_{23}q_{22})y_1 + a_{33} = 0.$$

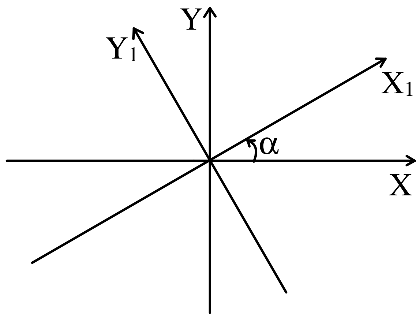

Рис. 9

2. Выделив полные квадраты по обеим переменным (или по одной переменной, если одно из значений λ_i равно нулю), с помощью параллельного переноса осей координат системы Ox_1y_1 переходим к системе Ox_2y_2, в которой уравнение кривой имеет канонический вид.

Задачи для самостоятельного решения

98. С помощью выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения кривых, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$a)$ $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0,$

$b)$ $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0,$

$c)$ $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0,$

$d)$ $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0,$

$e)$ $-9x^2 + 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0,$

$f)$ $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0,$

$g)$ $x^2 - 4x + 4y = 0,$

$h)$ $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0,$

$i)$ $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0.$

99. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы Oxy. Найти это преобразование и угол поворота φ, сделать рисунок:

$a)$ $\frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2 - 1 = 0,$

$b)$ $-\frac{1}{2}x^2 - 3xy - \frac{1}{2}y^2 - 4 = 0,$

$c)$ $\frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x = 0,$

$d)$ $\frac{1}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}y^2 - 1 = 0,$

$e)$ $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 4 = 0,$

$f)$ $\frac{7}{2}x^2 - xy + \frac{7}{2}y^2 = 0,$

$g)$ $x^2 - 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 0.$

100. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы Oxy и последующего параллельного переноса. Найти угол поворота и координаты нового начала координат (точки O_1) в системе Ox_1y_1, полученной в результате поворота осей системы Oxy. Указать тип кривой:

$a)$ $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0,$

$b)$ $5x^2 - 2xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{5}{4} = 0,$

$c)$ $4x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y + \frac{129}{20} = 0,$

$d)$ $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0,$

$e)$ $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 44 = 0,$

$f)$ $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0,$

$g)$ $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0,$

$h)$ $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 216 = 0,$

$i)$ $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$

18. Метод инвариантов

Исследование уравнения кривой второго порядка с помощью инвариантов

Как было показано в предыдущем разделе, существует два вида преобразований, которые приводят уравнение кривой второго порядка к каноническому виду: ортогональное и параллельный перенос осей. Поэтому мы можем ввести два понятия: инвариант и полуинвариант.

Определение 63. *Инвариантами* называются такие выражения, составленные из коэффициентов уравнения кривой, которые не изменяются при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой такой же системе, то есть при выполнении ортогональных преобразований и при параллельных переносах осей координат.

Определение 64. *Полуинвариантами* называются выражения, составленные из коэффициентов уравнения кривой, которые не изменяются только при выполнениии ортогональных преобразований.

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy кривая второго порядка описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{70}$$

Требуется определить название кривой (70) и составить ее каноническое уравнение. Для этого нужно выполнить следующие действия:

1. Вычислить три инварианта кривой второго порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad tr(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Если $|A| = |B| = 0$, то вычислить полуинвариант

$$\tau = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

3. Используя таблицу 1, найти уравнение кривой в новой системе координат Ox_1y_1. Сравнивая полученное уравнение с равенствами (59)–(67), определить название кривой и ее каноническое уравнение.

Классификация поверхностей второго порядка

Определение 65. *Поверхностью второго порядка* называется множество точек в пространстве, координаты x, y и z которых удовлетво-

Таблица 1. Классификация кривых второго порядка с помощью инвариантов

<table>
<tr><td>$|A| \neq 0$</td><td colspan="2">$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0,$
$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \dfrac{|B|}{|A|} = 0.$
Эллипс (59); эллипс мнимый (60); гипербола (62);
пара вещественных (63) или мнимых (61) пересекающихся прямых.</td></tr>
<tr><td>$|A| = 0$</td><td>$|B| \neq 0$</td><td>$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0,$
$\lambda_2 y_1^2 + 2\sqrt{-\dfrac{|B|}{tr(A)}} \cdot x_1 = 0.$
Парабола (64).</td></tr>
<tr><td>$|A| = 0$</td><td>$|B| = 0$</td><td>$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0,$
$\lambda_2 y_1^2 + \dfrac{\tau}{tr(A)} = 0.$
Пара вещественных (65) или мнимых (66) параллельных прямых;
пара совпадающих прямых (67).</td></tr>
</table>

ряют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+ 2a_1 x + 2a_2 y + 2a_3 z + a_0 = 0, \tag{71}$$

где a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a_0 – действительные числа, причем a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} одновременно не равны нулю.

Перечислим основные типы поверхностей второго порядка, указав их *канонические уравнения.*

1. Эллипсоид (смотри рисунок 10)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{72}$$

Замечание 4. Частным случаем эллипсоида (при $a = b = c = r$) является сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

с центром в начале координат и радиусом r.

2. Мнимый эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{73}$$

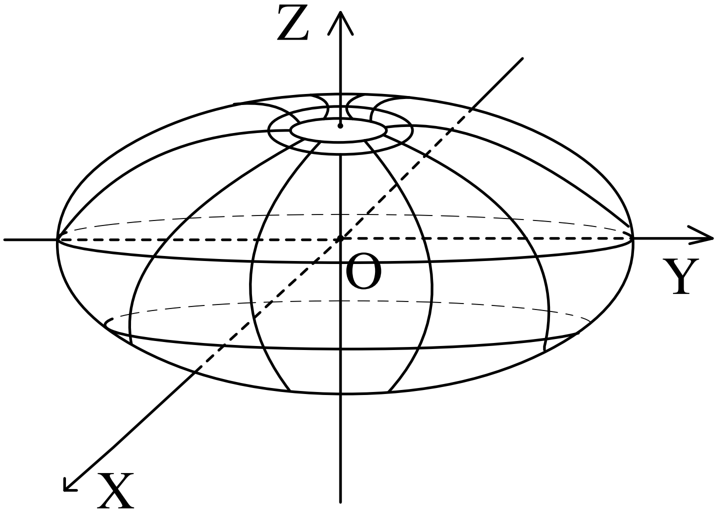

Рис. 10. Эллипсоид

3. Мнимый конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{74}$$

4. Однополостный гиперболоид (смотри рисунок 11)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{75}$$

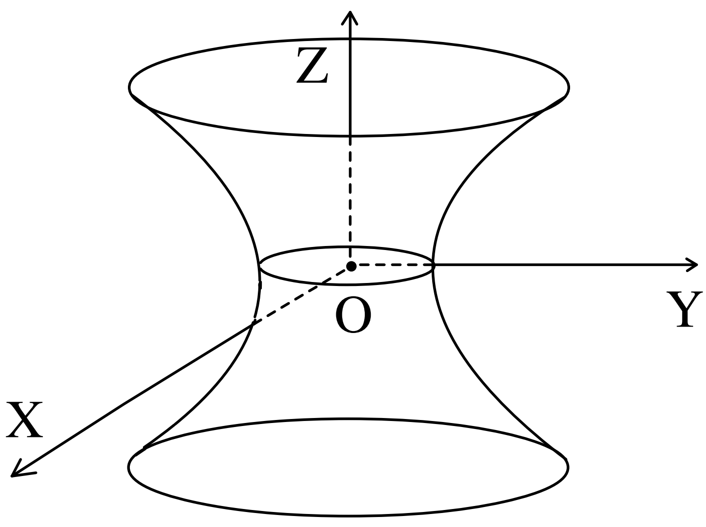

Рис. 11. Однополостный гиперболоид

5. Двуполостный гиперболоид (смотри рисунок 12)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{76}$$

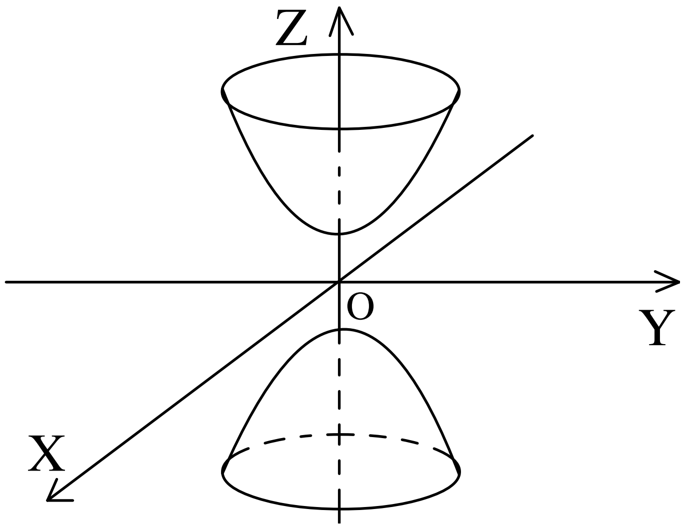

Рис. 12. Двуполостный гиперболоид

6. Эллиптический конус (смотри рисунок 13)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{77}$$

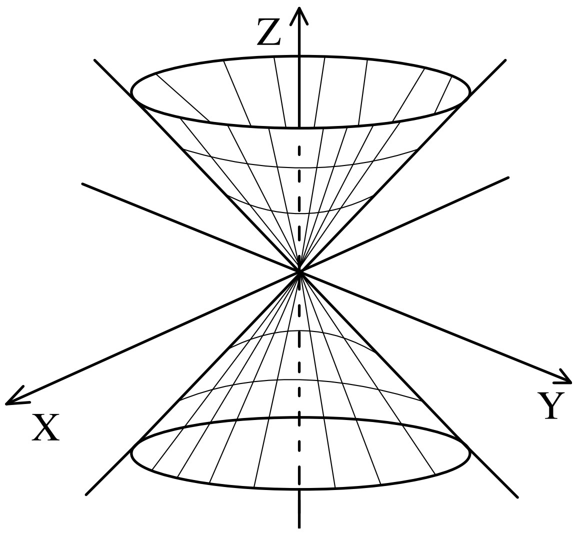

Рис. 13. Эллиптический конус

7. Эллиптический параболоид (смотри рисунок 14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{78}$$

8. Гиперболический параболоид (смотри рисунок 15)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{79}$$

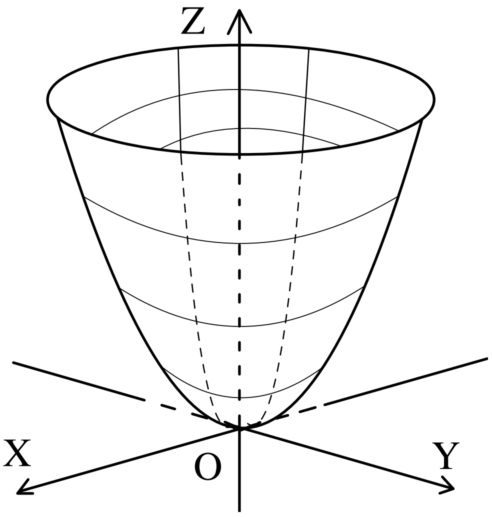

Рис. 14. Эллиптический параболоид

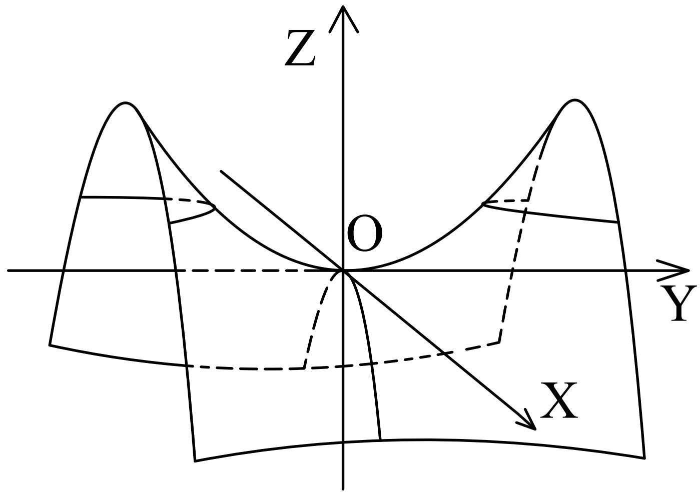

Рис. 15. Гиперболический параболоид

9. Эллиптический цилиндр (смотри рисунок 16)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{80}$$

10. Мнимый эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{81}$$

11. Пара мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{82}$$

12. Гиперболический цилиндр (смотри рисунок 17)

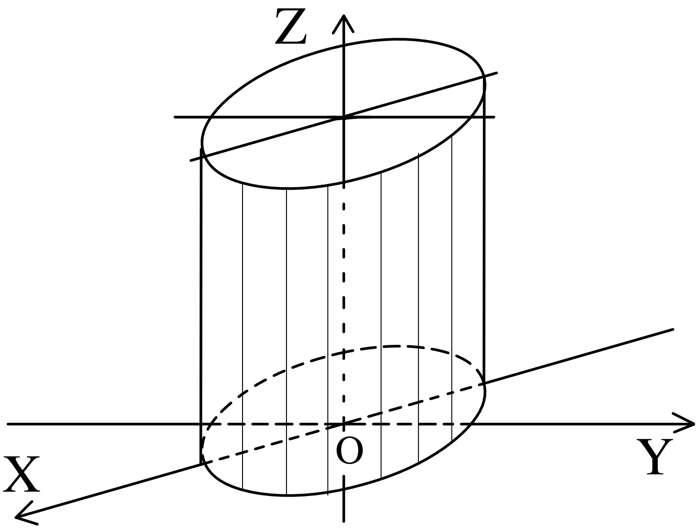

Рис. 16. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1. \tag{83}$$

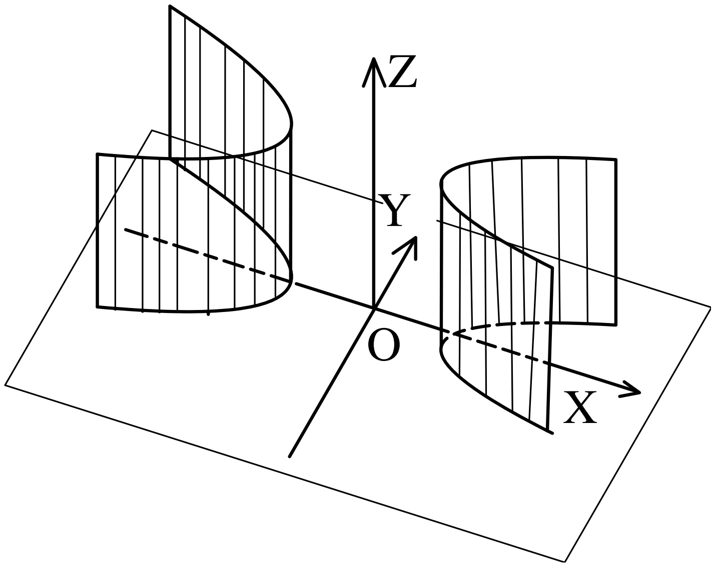

Рис. 17. Гиперболический цилиндр

13. Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{84}$$

14. Параболический цилиндр (смотри рисунок 18)

$$x^2 = 2py, \qquad y^2 = 2qx. \tag{85}$$

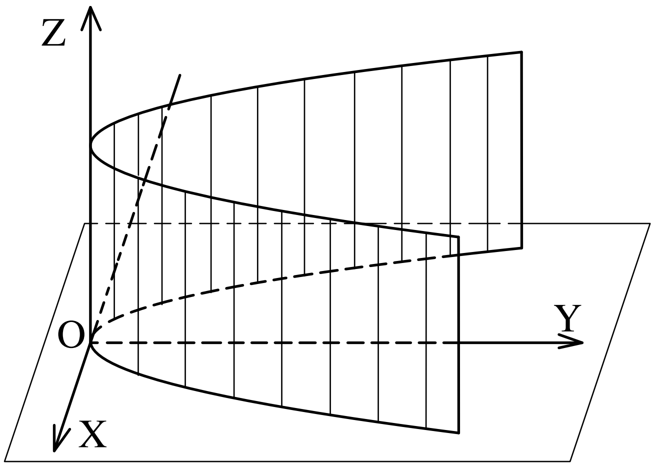

Рис. 18. Параболический цилиндр

15. Пара параллельных плоскостей

$$x^2 - a^2 = 0. \tag{86}$$

16. Пара мнимых параллельных плоскостей

$$x^2 - a^2 = 0. \tag{87}$$

17. Пара совпавших плоскостей

$$x^2 = 0. \tag{88}$$

Алгоритм составления канонического уравнения поверхности второго порядка

1. Вычислить четыре инварианта поверхности второго порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$I_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Если $|A| = |B| = 0$, то вычислить полуинвариант

$$I_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $|A| = |B| = 0$ и $I_2(A) = I_3(B) = 0$, то вычислить полуинвариант

$$I_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить λ_1, λ_2, λ_3 – собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Используя таблицу 2, найти уравнение поверхности в новой системе координат $Ox_1y_1z_1$. Сравнивая полученное уравнение с равенствами (72)–(88), определить название поверхности и ее каноническое уравнение.

Задачи для самостоятельного решения

101. Определить название и составить канонические уравнения кривых второго порядка, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями:

$a)$ $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 12x - 16y - 12 = 0$,

$b)$ $5x^2 + 26xy + 5y^2 - 20x - 52y - 52 = 0$,

$c)$ $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 62x - 16y + 46 = 0$,

$d)$ $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$,

$e)$ $x^2 + 2x - 3 = 0$,

$f)$ $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 4x + 4\sqrt{3}y + 4 = 0$.

102. Определить название и составить канонические уравнения поверхностей второго порядка, заданных в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнениями:

$a)$ $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$,

Таблица 2. Классификация поверхностей второго порядка с помощью инвариантов

<table>
<tr><td>$|A| \neq 0$</td><td colspan="5">$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0,$
$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \dfrac{|B|}{|A|} = 0.$
Поверхности (72)–(77).</td></tr>
<tr><td>$|A| = 0$</td><td>$|B| \neq 0$</td><td colspan="4">$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0,$
$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2\sqrt{-\dfrac{|B|}{I_2(A)}} \cdot z_1 = 0.$
Поверхности (78)–(79).</td></tr>
<tr><td>$|\text{A}| = 0$</td><td>$|B| = 0$</td><td>$I_2(A) \neq 0$</td><td colspan="3">$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0,$
$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \dfrac{I_3(B)}{I_2(A)} = 0.$
Поверхности (80)–(84).</td></tr>
<tr><td>$|\text{A}| = 0$</td><td>$|B| = 0$</td><td>$I_2(A) = 0$</td><td>$I_3(B) \neq 0$</td><td colspan="2">$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,$
$\lambda_1 x_1^2 + 2\sqrt{-\dfrac{I_3(B)}{tr(A)}} \cdot y_1 = 0.$
Поверхность (85).</td></tr>
<tr><td>$|\text{A}| = 0$</td><td>$|B| = 0$</td><td>$I_2(A) = 0$</td><td>$I_3(B) = 0$</td><td colspan="2">$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,$
$\lambda_1 x_1^2 + \dfrac{I_2(B)}{tr(A)} = 0.$
Поверхности (86)–(88).</td></tr>
</table>

$b)$ $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8xz - 8yz + 10x - 14y - 6z - 8 = 0,$

$c)$ $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0,$

$d)$ $-2x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 20xy - 8xz + 8yz - 26x - 22y - 4z - 12 = 0,$

$e)$ $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0,$

$f)$ $8y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 4x + 8y - 9 = 0,$

$g)$ $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 6x - 2y - 6z + 11 = 0,$

$h)$ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0,$

$i)$ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0.$

Ответы и указания к решению задач

1. *Решение.* Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены корректно, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь условия 1)–8) определения линейного пространства.

1) Сложение векторов коммутативно потому, что умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность сложения векторов следует из цепочки равенств:

$$x + y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) =$$

$$= (y_1 \cdot x_1, y_2 \cdot x_2, \ldots, y_n \cdot x_n) = y + x$$

для любых $x, y \in \boldsymbol{G}$.

2) Аналогично проверяется ассоциативность сложения векторов. Для любых x, y, $z \in \boldsymbol{G}$ имеем

$$(x + y) + z = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) + z =$$

$$= (x_1 \cdot y_1 \cdot z_1, x_2 \cdot y_2 \cdot z_2, \ldots, x_n \cdot y_n \cdot z_n) =$$

$$= x + (y_1 \cdot z_1, y_2 \cdot z_2, \ldots, y_n \cdot z_n) = x + (y + z).$$

3) В качестве ноль-вектора нужно взять вектор $0 = (1, 1, \ldots, 1)$. Действительно,

$$x + 0 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \ldots, x_n \cdot 1) = x$$

для любого вектора $x \in \boldsymbol{G}$.

4) Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ противоположным элементом будет вектор

$$x' = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}),$$

так как

$$x + y = (x_1 \cdot x_1^{-1}, x_2 \cdot x_2^{-1}, \ldots, x_n \cdot x_n^{-1}) = (1, 1, \ldots, 1) = 0.$$

5) Для любых $x, y \in \boldsymbol{G}$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) =$$

$$= ((x_1 y_1)^\alpha, (x_2 y_2)^\alpha, \ldots, (x_n y_n)^\alpha) = (x_1^\alpha y_1^\alpha, x_2^\alpha y_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha y_n^\alpha) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \alpha x + \alpha y.$$

6) Для любого $x \in \boldsymbol{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$(\alpha + \beta)x = (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta}) = (x_1^\alpha x_1^\beta, x_2^\alpha x_2^\beta, \ldots, x_n^\alpha x_n^\beta) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha x + \beta x.$$

7) Для любого $x \in \boldsymbol{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$(\alpha\beta)x = (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \ldots, x_n^{\alpha\beta}) =$$

$$= ((x_1^\beta)^\alpha, (x_2^\beta)^\alpha, \ldots, (x_n^\beta)^\alpha) = \alpha(x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha(\beta x).$$

8) Наконец, для любого $x \in \boldsymbol{G}$

$$1 \cdot x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) = x.$$

Следовательно, данное множество $\boldsymbol{G}$ с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является вещественным линейным пространством.

2. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 3) и 6).

3. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

4. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2) и 6).

5. Не является линейным пространством, так как противоположный элемент $x' = (1/x_1, ..., 1/x_n)$ не определен, например, для элемента $(0, 0, ..., 0)$.

6. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

7. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 6) и 7).

8. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 2), 3), 4), 6) при $n > 1$.

9. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2) и 6).

10. *Решение.* Легко видеть, что обе операции определены корректно. Проверим условия 1)–8) линейного пространства.

1) Операция сложения коммутативна. Действительно, так как

$$-a_{ij} - b_{ij} = -b_{ij} - a_{ij}, \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1, m}, \; \forall j = \overline{1, n}.$$

то

$$A + B = B + A, \quad \text{для любых} \quad A, B \in \boldsymbol{G}.$$

2) Проверим ассоциативность операции сложения.

Пусть A, B, C — три произвольные матрицы из множества $\boldsymbol{G}$ с элементами a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} соответственно. Тогда матрица $(A+B)+C$ состоит из элементов

$$-(-a_{ij} - b_{ij}) - c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c_{ij}, \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1, m}, \; \forall j = \overline{1, n},$$

а матрица $A + (B + C)$ — из элементов

$$-a_{ij} - (-b_{ij} - c_{ij}) = -a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}, \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1, m}, \; \forall j = \overline{1, n}.$$

Отсюда следует, что равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

не может выполняться для всех $A, B, C \in \boldsymbol{G}$. Так, если A и B — нулевые матрицы, а все элементы матрицы C равны единице, то любой элемент матрицы $(A+B)+C$ равен -1, а произвольный элемент матрицы $A+(B+C)$ равен 1. Таким образом, операция сложения не ассоциативна, множество $\boldsymbol{G}$ с данными операциями не является линейным пространством.

11. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиома 1).

12. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиома 4).

13. *Решение.* Для любых полиномов f и g степени не выше n и любого $\alpha \in C$ сумма $f+g$ и произведение αf являются многочленами с комплексными коэффициентами степени не выше n, поэтому обе операции определены корректно. Нетрудно проверить, что условия 1)–7) выполняются для данных операций. Однако, если у многочлена f старший коэффициент a_0 отличен от нуля, то многочлен $(1 \cdot f)(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ не равен многочлену $f(x)$ и, следовательно, условие 8) не выполняется. Таким образом, данное множество с введенными операциями сложения и умножения на число не является линейным пространством.

14. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 5), 6), 7) и 8).

15. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиома 8).

16. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7) и 8).

17. **a)** Линейно зависима. **b)** Линейно независима. **c)** Линейно зависима. **d)** Линейно независима.

18. *Указание.* Воспользоваться определением и подобрать числа c_1, c_2, c_3 так, чтобы для любых x, y, z выполнялось равенство $c_1(\alpha x -$

$\beta y) + c_2(\gamma y - \alpha z) + c_3(\beta z - \gamma z) = 0$.

19. **a)** Линейно зависима. **b)** Линейно независима. **c)** Линейно зависима. **d)** Линейно независима. **e)** Линейно независима. **f)** Линейно зависима.

20. **a)** *Решение.* Составим линейную комбинацию (1) данных векторов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = 0$$

или

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_2 = 0, \\ 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $r(A)$ равен 2 и меньше числа неизвестных $n = 3$, поэтому однородная система неопределена, то есть имеет бесконечно много решений и, следовательно, существуют ненулевые числа x_1, x_2, x_3 в системе (1). Следовательно, система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима; **b)** линейно независимая система; **c)** линейно независимая система; **d)** линейно зависимая система.

21. *Решение.* Нулевым элементом в пространстве $\mathbf{M^{23}}$ является нулевая матрица размера 2×3. Составим линейную комбинацию (1) данных матриц и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3 + x_4 A^4 + x_5 A^5 + x_6 A^6 = 0$$

или

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+x_4\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + x_6\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что после выполнения несложных преобразований, левая и правая части данного равенства будут матрицами размера 2×3. Две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны все соответствующие друг другу элементы матриц. Таким образом, имеем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0, \\ \quad - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ \qquad 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \\ \qquad\quad 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0, \\ \qquad\qquad 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ \qquad\qquad\quad x_6 = 0 \end{cases}$$

Пусть A – матрица данной системы. Найдем ранг матрицы системы $r(A) = 6$. Получаем, что ранг $r(A)$ равен числу неизвестных n. Следовательно, однородная система определена, то есть имеет только единственное нулевое решение, а это и означает, что векторы $A^1, \ldots, A^6$ в линейном пространстве $\mathbf{M^{23}}$ являются линейно независимыми; **b)** линейно зависимая система; **c)** линейно независимая система; **d)** линейно зависимая система.

22. a) *Решение.* Нулевым элементом в пространстве $\mathbf{Q_2}$ является полином, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных полиномов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 \cdot p^1(x) + x_2 \cdot p^2(x) + x_3 \cdot p^3(x) = 0.$$

Преобразуя данное соотношение, получаем

$$(x_1 - x_2 + 9x_3) + (x_2 + 6x_3)x + x_3x^2 = 0.$$

Это равенство справедливо для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ только в том случае, когда коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x равны нулю.

Таким образом, приходим к следующей системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 9x_3 = 0, \\ \qquad x_2 + 6x_3 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен числу неизвестных поэтому получаем, что данная система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Следовательно, система полиномов $p^1(x)$, $p^2(x)$, $p^3(x)$ является линейно независимой; **b)** линейно зависимая система; **c)** линейно независимая система; **d)** линейно зависимая система.

23. a) $a^4 = -a^1 + a^2 + 2a^3$; **b)** $a^4 = 2a^1 - a^2 + 3a^3$.

24. a) *Решение.* Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$(-8) \cdot (-11) = 88 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$. **b)** Нет. **c)** Нет. **d)** Да.

25. a) *Решение.* Да. Так как любая линейно независимая система, число векторов в которой совпадает с размерностью пространства ($\dim \mathbf{P}_2 = 3$) является базисом в нем, то достаточно проверить линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3. Следуя определению, запишем линейную комбинацию многочленов и приравняем ее нулевому многочлену. $\alpha_1(1 - 3x - 2x^2) + \alpha_2(2 - 4x + x^2) + \alpha_3(2 + 3x + 2x^2) = 0 + 0x + 0x^2$. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и приравняем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x. Получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & -16.5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $r(A) = 3$ и, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3. **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

26. **a)** *Решение.* Да. Размерность линейного пространства $\mathbf{M}^{22}$ всех матриц второго порядка равна четырем. Матриц в системе тоже четыре. Достаточно проверить линейную независимость. Запишем линейную комбинацию матриц системы и приравняем ее нулевому элементу (нулевой матрице):

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Складывая и приравнивая нулю соответствующие элементы матриц, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов α_i:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -39 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{17} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $r(A) = 4$, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы матриц A_1, A_2, A_3, A_4. **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

27. a) *Решение.* Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$. Для нахождения координат вектора x в базисе $\mathbf{e}$ нужно из векторного уравнения $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x$ найти неизвестные координаты x_1, x_2, x_3. После подстановки векторов получим

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 = -7, \end{cases}$$

решая которую, например, методом Гаусса, найдем неизвестные координаты вектора x в базисе $\mathbf{e}$ $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Наконец, найдем вектор y. По определению $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. **b)** Да. $x_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. **c)** Да. $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

28. **a)** *Решение.* Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = 1 - 2x + 4x^2$; **b)** Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(x) = 3 - 2x + 4x^2$; **c)** Да, является.

$h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, g(x) = 5 + 2x + x^2.$

29. a) *Решение.* Поскольку $p(x) \in \mathbf{P}_4$, то данный многочлен представим в виде

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4,$$

где a, b, c, d, f – произвольные вещественные числа. Имеем

$$p(1) = a + b + c + d + f, \qquad p(-1) = a - b + c - d + f.$$

По условию задачи $p(1) + p(-1) = 0$, следовательно, получаем равенство $a + c + f = 0$. Из полученного соотношения можно выразить один из коэффициентов через остальные, например, $a = -c - f$. Поэтому

$$p(x) = (-c - f) + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4 = bx + (x^2 - 1)c + dx^3 + (x^4 - 1)f,$$

то есть любой многочлен $p(x) \in \mathbf{V}$ представим в виде линейной комбинации четырех многочленов

$$p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2 - 1,\ p_3(x) = x^3,\ p_4 = x^4 - 1.$$

Система многочленов p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathbf{V}$ является линейно независимой (докажите это). Итак, система многочленов p_1, p_2, p_3, p_4 образуют базис пространства $\mathbf{V}$. Следовательно, $dim\,\mathbf{V} = \mathbf{4}$. **b)** $dim\,V = 2$, базис состоит, например, из следующих многочленов $1 - x^2, x - x^2$. **c)** $dim\,V = 4$, базис состоит, например, из следующих многочленов $x - 2, x^2 - 4, x^3 - 8, x^4 - 16$.

30. a) $dim\,V = 6$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **b)** $dim\,V = 4$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $dim\, V = 3$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

31. а) *Решение.* Пусть e, u – матрицы, у которых по столбцам стоят координаты базисных векторов. Тогда для вычисления матрицы перехода и координат векторов в базисах можно применить следующий алгоритм:

1) Найти $e^{-1} = \dfrac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

2) Найти $T_{e\to u} = e^{-1} * u = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) Найти $T_{u\to e} = T_{e\to u}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) Найти $x_u = T_{u\to e} * x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

5) Найти $y_e = T_{e\to u} * y_u = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

32. **a)** *Решение.*

1) Вычислить координаты многочленов в естественном базисе $1, x, x^2$: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2- \end{pmatrix}$;

2) Составить матрицы f и g, у которых по столбцам стоят координаты базисных векторов;

3) Найти $f^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) Найти $T_{f \to g} = f^{-1} * g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **b)** $T_{f \to g} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $T_{f \to g} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

33. **a)** *Решение.*

1) Составить матрицу перехода $T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) Найти $T^{-1}_{e \to u} = (-1) * \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

3) Найти $x_u = T_{e\to u}^{-1} * x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **b)** $x_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. **c)** $x_u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

34. **a)** поменяются местами две строки; **b)** поменяются местами два столбца; **c)** произойдет симметричное отражение матрицы относительно ее центра.

35. **a)** *Решение.*

1) Найти $u = e * T_{e\to u} = e * A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

2) Найти $A^{-1} = (-1) * \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) Найти $f = g * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

Таким образом, координаты базисных векторов равны: $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. **c)** $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

36. a) *Решение.* Для фиксированное числа a обозначим

$$\boldsymbol{V}_1 = \{x \in \boldsymbol{R}^n | x = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, x_2, x_3, \dots, x_n \in \boldsymbol{R}^n\}.$$

Для любых $x = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ из $\boldsymbol{V}_1$ их сумма $x + y =$ $\begin{pmatrix} 2a \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Вектор $x + y$ принадлежит $\boldsymbol{V}_1$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $2a = a$. Это возможно лишь при $a = 0$. Таким образом, при $a \neq 0$ множество $\boldsymbol{V}_1$ не является линейным подпространством. Если $a = 0$, то для любых $x, y \in \boldsymbol{V}_1$ и любых $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ принадлежит множеству $\boldsymbol{V}_1$, следовательно, рассматриваемое множество $\boldsymbol{V}_1$ является линейным подпространством только тогда, когда верно равенство $a = 0$. **b)** Нет; **c)** Нет; **d)** Да.

37. a) *Решение.* Пусть $\boldsymbol{V}_1$ – множество всех верхних треугольных матриц. Это множество не пусто, так как содержит, например, нулевую матрицу порядка n. Пусть также A, B – произвольные верхние треугольные матрицы порядка n. Это значит, что их элементы $a_{ij} = b_{ij} = 0$ для $i > j$. Тогда все элементы матрицы $\lambda A + \mu B$ для $i > j$ равны нулю для любых вещественных чисел λ, μ. Следовательно, $\lambda A + \mu B$ принадлежит множеству $\boldsymbol{V}_1$. Таким образом, мы доказали, что множество $\boldsymbol{V}_1$ является линейным подпространством.

b) Нет; **c)** Нет; **d)** Да.

38. a) *Решение.* Пусть b, c фиксированные вещественные числа. Обозначим через $\boldsymbol{V}_1$ – множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n таких, что $f(b) = c$. Если $f, g \in \boldsymbol{V}_1$, то $f(b) = g(b) = c$, поэтому $(f+g)(b) = f(b)+g(b) = 2c$. Многочлен $f+g$ будет принадлежать $\boldsymbol{V}_1$ тогда и только тогда, когда $2c = c$, что эквивалентно $c = 0$. Таким образом, если $c \neq 0$ множество $\boldsymbol{V}_1$ не является линейным подпространством. Если $c = 0$, то для любых $f, g \in \boldsymbol{V}_1$ и любых $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ принадлежит множеству $\boldsymbol{V}_1$, действительно, имеем

$$(\lambda f + \mu g)(b) = \lambda f(b) + \mu g(b) = \lambda c + \mu c = 0.$$

Следовательно, множество $\boldsymbol{V}_1$ является линейным подпространством тогда и только тогда, когда $c = 0$. **b)** Да; **c)** Да; **d)** Нет.

39. a) *Решение.* 1) Записать матрицу A, расположив координаты всех векторов по строкам, получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Любым способом найти ранг матрицы A, имеем $r(A) = 2$. Следовательно, любая линейно независимая подсистема, содержащая два вектора будет являться базисом системы векторов.

3) Найти любой базисный минор матрицы A. Вектора, координаты которых вошли в базисный минор будут являться базисом. Таким образом, базис будет определяться неоднозначно. Например, минор $M_{2,5}^{1,2} \neq 0$

– базисный, это означает, что векторы a^2, a^5 являются базисом данной системы векторов. **b)** a^1, a^3, a^5.

40. a) *Решение.* 1) Найти координаты многочленов $p^1(x)$, $p^2(x)$, $p^3(x)$, $p^4(x)$, $p^5(x)$ в естественном базисе $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$. Имеем

$$p^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, p^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, p^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, p^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2) Записать матрицу A, расположив координаты всех векторов по строкам, получим

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Любым способом найти ранг матрицы A, имеем $r(A) = 2$. Следовательно, любая линейно независимая подсистема, содержащая два вектора будет являться базисом системы векторов.

4) Найти любой базисный минор матрицы A. Вектора, координаты которых вошли в базисный минор будут являться базисом. Таким образом, базис будет определяться неоднозначно. Например, минор $M_{1,4}^{1,2} \neq 0$ – базисный, это означает, что многочлены p^1, p^4 являются базисом данной системы векторов. **b)** p^1, p^3, p^5. **b)** p^1, p^3, p^5.

41. a) *Решение.* 1) Найти координаты матриц A^1, A^2, A^3, A^4 в естественном базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Записать матрицу A, расположив координаты всех векторов по строкам, получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Любым способом найти ранг матрицы A, имеем $r(A) = 2$. Следовательно, любая линейно независимая подсистема, содержащая два вектора будет являться базисом системы векторов.

4) Найти любой базисный минор матрицы A. Вектора, координаты которых вошли в базисный минор будут являться базисом. Таким образом, базис будет определяться неоднозначно. Например, минор $M_{1,3}^{1,2} \neq 0$ – базисный, это означает, что матрицы A^1, A^3 являются базисом данной системы векторов. **b)** A^1, A^4.

42. a) В базис входят вектора a_1, a_4. Коэффициенты разложения векторов $a_2 = 2a_1, a_3 = -a_1, a_5 = -a_1 + a_4, a_6 = -2a_1 + a_4$; **b)** В базис входят вектора a_1, a_3. Коэффициенты разложения векторов $a_2 = -3a_1$, $a_4 = -a_1 - 2a_3, a_5 = 2a_1 + a_3, a_6 = 3a_1 + a_3$; **c)** В базис входят вектора a_1, a_3. Коэффициенты разложения векторов $a_2 = -2a_1, a_4 = 2a_1 - a_3$, $a_5 = -a_3, a_6 = -2a_1 + a_3$.

43. a) *Решение.* 1) Обозначим через $\boldsymbol{V}_1 = \mathrm{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{V}_2 = \mathrm{span}\{b_1, b_2, b_3\}$ линейные оболочки соответствующих систем векторов. Найдем размерность этих подпространств, имеем $\dim \boldsymbol{V}_1 = 2$, $\dim \boldsymbol{V}_2 = 2$.

2) Найдем базисы подпространств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. Например, системы векторов $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$ являются базисами подпространств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ соответственно.

3)Найдем размерность суммы $\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2$. Для этого составим матрицу A, расположив координаты базисных векторов a_1, a_2, b_1, b_2 по строкам.

Получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Любым способом вычислим ранг матрицы A, имеем $r(A) = 3$. Следовательно, размерность пространства суммы равна трем, то есть $\dim(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) = 3$.

4) Найдем базис пространства суммы. Для этого найдем любой базисный минор матрицы A. Например, минор $M_{1,2,3}^{1,2,3} \neq 0$ – базисный минор, следовательно, система векторов a_1, a_2, b_1 является базисом пространства суммы $\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2$.

5) Найдем размерность пространства пересечения $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$. По формуле Грассмана (10), имеем

$$\dim(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) = -\dim(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) + \dim(\boldsymbol{V}_1) + \dim(\boldsymbol{V}_2) = -3 + 2 + 2 = 1.$$

6) Найдем базис пространства пересечения $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$. Если вектор $x \in \boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$, то $x \in \boldsymbol{V}_1$ и $x \in \boldsymbol{V}_2$, следовательно, x будет раскладываться по базисам пространств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. Поэтому получаем систему однородных уравнений следующего вида:

$$x_1a_1 + x_2a_2 = x_3b_1 + x_4b_2 \text{ или } x_1a_1 + x_2a_2 - x_3b_1 - x_4b_2 = 0.$$

Ранг матрицы системы равен трем, поэтому фундаментальная система решений состоит из одного вектора. Выберем свободное неизвестное $x_4 = 1$, тогда главные неизвестные будут равны $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Таким образом, базис пересечения состоит из одного вектора, например, $c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. **b)** базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, a_3, b_2. Базис пересечения, например, $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$. **c)** базис суммы и пересечения совпадают и образуют, например, векторы a_1, a_2. **d)** базис суммы образуют, например, векторы b_1, b_2, b_3. Базис пересечения, например, a_1, a_2.

44. **a)** Размерность суммы равна 3, размерность пересечения равна 1. **b)** Размерность суммы равна 4, размерность пересечения равна 0. **c)** Размерность суммы равна 4, размерность пересечения равна 2.

45. *Указание:* Вычислить $\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2)$. Если $\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2) = 0$, то сумма $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ является прямой. **a)** Прямая сумма. **b)** Не является прямой суммой. **c)** Прямая сумма. **d)** Не является прямой суммой.

46. **a)** *Решение:* Для того, чтобы доказать, что оператор φ является линейным необходимо проверить два условия линейности (12).

1) Пусть $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}^{22}$ – произвольная квадратная матрица второго порядка. По условию задачи имеем

$$\varphi(N) = |N| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поэтому

$$\varphi(M) + \varphi(N) = |M| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + |N| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi(M+N) = |M+N| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, можно сделать вывод, что $\varphi(M+N) \neq \varphi(M) + \varphi(N)$, следовательно, оператор φ не является линейным оператором. **b)** *Решение:* Проверим два условия линейности (12) оператора φ.

1) Пусть $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}^{22}$ – произвольная квадратная матрица второго порядка. По условию задачи имеем

$$\varphi(N) = n_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

поэтому

$$\varphi(M)+\varphi(N)=m_{11}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+n_{11}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi(M+N)=(m_{11}+n_{11})\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Поскольку правые части двух последних равенств совпадают, то первое условие линейности выполнено.

2) Проверим второе условие линейности, имеем

$$\varphi(\alpha\cdot M)=\alpha\cdot m_{11}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\alpha\varphi(M).$$

Это означает, что второе условие выполнено. Следовательно, оператор φ является линейным. **c)** Да. **d)** Нет.

47. a) *Решение:* Для того, чтобы доказать, что оператор φ является линейным необходимо проверить два условия линейности (12).

1) Пусть $g(x)$ – произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_2$. По условию задачи имеем

$$\varphi(g)=g'(x)+3g''(x)$$

поэтому

$$\varphi(f)+\varphi(g)=f'(x)+3f''(x)+g'(x)+3g''(x).$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi(f+g)=(f+g)'(x)+3(f+g)''(x).$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, можно сделать вывод, что $\varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g)$.

2) Проверим второе условие линейности, имеем

$$\varphi(\alpha\cdot f)=(\alpha\cdot f)'(x)+3(\alpha\cdot f)''(x)=\alpha\cdot(f'(x)+3f''(x))=\alpha\cdot\varphi(f).$$

Это означает, что второе условие выполнено. Следовательно, оператор φ является линейным. **b)** *Решение:* Для того, чтобы доказать, что оператор φ является линейным необходимо проверить два условия линейности (12).

1) Пусть $g(x)$ – произвольный многочлен из пространства $\boldsymbol{P}_2$. По условию задачи имеем

$$\varphi(g) = (g(1) + g(2)) \cdot g'(x)$$

поэтому

$$\varphi(f) + \varphi(g) = (f(1) + f(2)) \cdot f'(x) + (g(1) + g(2)) \cdot g'(x).$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi(f + g) = ((f + g)(1) + (f + g)(2)) \cdot (f + g)'(x) =$$
$$= (f(1) + f(2)) \cdot f'(x) + (g(1) + g(2)) \cdot g'(x) +$$
$$+ (f(1) + f(2)) \cdot g'(x) + (f(1) + f(2)) \cdot g'(x).$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, можно сделать вывод, что $\varphi(f+g) \neq \varphi(f)+\varphi(g)$, следовательно, оператор φ не является линейным. **c)** Да. **d)** Нет.

48. a) *Решение:* Для того, чтобы доказать, что оператор φ_1 является линейным необходимо проверить два условия линейности (12).

1) Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – произвольный вектор-столбец из пространства $\boldsymbol{R}^3$. По условию задачи имеем

$$\varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 6y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}$$

поэтому

$$\varphi_1(x) + \varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi_1(x+y) = \begin{pmatrix} 6(x_1+y_1) - 5(x_2+y_2) - 4(x_3+y_3) \\ -3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3) \\ (x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, можно сделать вывод, что $\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y)$.

2) Проверим второе условие линейности, имеем

$$\varphi_1(\alpha \cdot x) = \begin{pmatrix} 6(\alpha x_1) - 5(\alpha x_2) - 4(\alpha x_3) \\ -3(\alpha x_1) - 2(\alpha x_2) - (\alpha x_3) \\ (\alpha x_2) + 2(\alpha x_3) \end{pmatrix} = \alpha \cdot \varphi_1(x).$$

Это означает, что второе условие выполнено. Следовательно, оператор φ_1 является линейным.

Для того, чтобы найти матрицу опеартора φ_1 в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi_1(e_1) = \begin{pmatrix} 6\cdot 1 - 5\cdot 0 - 4\cdot 0 \\ -3\cdot 1 - 2\cdot 0 - 0 \\ 0 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_2) = \begin{pmatrix} 6\cdot 0 - 5\cdot 1 - 4\cdot 0 \\ -3\cdot 0 - 2\cdot 1 - 0 \\ 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_3) = \begin{pmatrix} 6\cdot 0 - 5\cdot 0 - 4\cdot 1 \\ -3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 1 \\ 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Разложим найденные векторы $\varphi_1(e_1)$, $\varphi_1(e_2)$, $\varphi_1(e_3)$ по базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$\varphi_1(e_1) = 6e_1 - 3e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_2) = -5e_1 - 2e_2 + 1e_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_3) = -4e_1 - 1e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e, расставляя их по столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Операторы φ_2 и φ_3 не являются линейными. **b)** φ_3 – линейный оператор, $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Операторы φ_1 и φ_2 не являются линейными. **c)** φ_2 – линейный оператор, $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Операторы φ_1 и φ_3 не являются линейными.

49. a) *Решение:* Для того, чтобы найти матрицу опеартора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi(e_1) = -3 \cdot (1)'' + 3 \cdot (1)' = 0,$$

$$\varphi(e_2) = -3 \cdot (x)'' + 3 \cdot (x)' = 3,$$

$$\varphi(e_3) = -3 \cdot (x^2)'' + 3 \cdot (x^2)' = -6 + 6x.$$

Разложим найденные векторы $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ по базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$\varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = 3e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_3) = -6e_1 + 6e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e, расставляя их по столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |\varphi| = |A_e| = 0.$

b) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\varphi| = -2.$ **c)** $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, |\varphi| = 20.$

d) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\varphi| = 2.$

50. a) *Решение:* Для того, чтобы найти матрицу опеартора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разложим найденные векторы $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$, $\varphi(e_4)$ по естественному базису $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, имеем

$$\varphi(e_1) = 6e_1 + 3e_2 + 0e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = -2e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_3) = 1e_1 + 0e_2 + 4e_3 + 3e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_4) = 0e_1 + 1e_2 - 2e_3 - 2e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e, расставляя их по столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, определитель оператора $|\varphi| = |A_e| = -12$.

b) $A_e = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 3 & -2 \\ 9 & -7 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $|\varphi| = -23$.

c) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, |\varphi| = -39.$

d) $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, |\varphi| = -156.$

51. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & -1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

52. a) *Решение:* 1) Найдем координаты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ в базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$, имеем

$$g_1^f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2^f = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, g_3^f = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{f\to g}$ перехода от от базиса f к базису g. Для этого запишем координаты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ в матрицу по столбцам, получим

$$T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{f\to g}$, имеем

$$T_{f\to g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (16), найдем матрицу A_g линейного оператора φ в базисе g по формуле

$$A_g = (T_{f\to g}^{-1} \cdot A_f) \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

53. a) *Решение:* 1) Найдем координаты векторов u_1, u_2, u_3 в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$u_1^e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2^e = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{e\to u}$ перехода от от базиса e к базису u. Для этого запишем координаты векторов $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ в матрицу по столбцам, получим

$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{e\to u}$, имеем

$$T_{e\to u}^{-1} = -\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (16), найдем матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u по формуле

$$A_u = (T^{-1}_{e\to u} \cdot A_e) \cdot T_{e\to u} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 29 & -41 & -9 \\ 19 & -27 & -6 \\ 7 & -9 & -4 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -11 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

54. a) *Решение:* 1) Найдем координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, имеем

$$e_1^u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2^u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3^u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{u\to e}$ перехода от от базиса e к базису u. Для этого запишем координаты векторов e_1, e_2, e_3 в матрицу по столбцам, получим

$$T_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{u\to e}$, имеем

$$T^{-1}_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (16), найдем матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u по формуле

$$A_u = (T_{u\to e} \cdot A_e) \cdot T^{-1}_{u\to e} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}_{u\to e} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

55. **a)** *Решение:* 1) Составим матрицы e и u, расположив координаты векторов по столбцам, получим

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем методом присоединенной матрицы обратную к e матрицу, получим

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу $T_{e \to u}$ перехода от базиса e к базису u из равенства $u = e \cdot T_{e \to u}$, получим

$$T_{e \to u} = e^{-1} \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Методом присоединенной матрицы найдем обратную матрицу к $T_{e \to u}$, получим

$$T_{e \to u}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5) Найдем матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u по следующей формуле

$$A_u = (T_{e \to u}^{-1} \cdot A_e) \cdot T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

56. a) *Решение:* 1) Составим матрицы A и B, расположив координаты векторов по столбцам, получим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Методом присоединенной матрицы найдем обратную к A матрицу. Если A^{-1} не существует, то не сущестует линейного оператора, переводящего векторы a_1, a_2,a_3 в b_1, b_2, b_3. Имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу A_φ линейного оператора по следующей формуле:

$$A_\varphi = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

57. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(1,-1)$, где $c \neq 0$; **b)** Собственных значений и собственных векторов у данного оператора нет; **c)** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 0$ имеют вид $c(1,-1)$, а для $\lambda_2 = 2$ – вид $c(1,1)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Собственные векторы имеют вид $c(1,-1)$, где $c \neq 0$.

58. a) $\lambda_1 = -2+i$, $\lambda_2 = -2-i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = -2+i$ имеют вид $c(1,i)$, а для $\lambda_2 = -2-i$ – вид $c(1,-i)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = i$ имеют вид $c(1, 1+i)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1, 1-i)$, где $c \neq 0$; **c)** $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2i$ имеют вид $c(1, i)$, а для $\lambda_2 = -2i$ – вид $c(i, 1)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = 2 - 2i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2 - 2i$ имеют вид $c(-1, 1)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1, 1-i)$, где $c \neq 0$;

59. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1; 1; -1)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1; 2; 0) + c_2(0; 0; 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно; **c)** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1; 1; 1)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – вид $c(1; 2; 3)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3; 1; 1)$, где $c \neq 0$; **e)** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1; 2; 2)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – вид $c(1; 2; 1)$, где $c \neq 0$; **f)** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 5$ имеют вид $c(1; -1; 1)$, для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1; 1; -1)$, для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1; 1; 1)$, где $c \neq 0$.

60. **a)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (3; 1; 3)$, $a_2 = (0; 1; 3)$, $a_3 = (1; 2; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** матрица к диагональному виду не приводится; **c)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1; -1; 1)$, $a_2 = (1; 1; -1)$, $a_3 = (1; 1; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **d)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1; 1; -1)$, $a_2 = (1; -1; 1)$, $a_3 = (1; 1; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **e)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1; 1; -1)$, $a_2 = (1; -1; 1)$, $a_3 = (1; 1; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

61. a) *Решение:* Найдем матрицы A_e и B_e линейных операторов φ и ψ соответственно в базисе $e = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, получим

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислим матрицу C_e оператора φ^2 в базисе e по следующей формуле:

$$C_e = A_e \cdot A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим матрицу D_e оператора $3\psi + 2\varphi^2$ в базисе e из равенства

$$D_e = 3 \cdot B_e + 2 \cdot C_e = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

62. a) *Решение:* Составим матрицы e и u, расположив координаты векторов по столбцам, получим

$$e = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Пусть $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, тогда обратную матрицу к M можно вы-

числить по следующей явной формуле:

$$M^{-1} = \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \cdot \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Используя формулу (89), вычислим матрицу, обратную к e, получим

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу $T_{e \to u}$ перехода от базиса e к базису u, имеем

$$T_{e \to u} = e^{-1} \cdot u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Вычислим матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u, получим

$$A_u = (T_{e \to u}^{-1} \cdot A_e) \cdot T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) Определим матрицу C_u оператора $\varphi + \psi$ в базисе u

$$C_u = A_u + B_u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Матрица D_u линейного оператора $\varphi - 2\psi$ в базисе u имеет следующий вид:

$$D_u = A_u - 2 \cdot B_u = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

63. a) *Решение:* Найдем матрицу A_e линейного оператора φ в базисе $e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, получим

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Определитель матрицы A_e равен 1, следовательно, существует матрица, обратная к A_e. Это означает, что линейный оператор φ имеет обратный φ^{-1}. Вычислим A_e^{-1}, имеем

$$A_e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом матрица B_e линейного оператора φ^{-1} в базисе e равна матрице A_e^{-1}.

3) Осталось получить явный вид линейного оператора φ^{-1}, имеем

$$\varphi^{-1} = B_e \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

b) $\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$.

c) $\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$.

64. a) *Решение:* Вычислим матрицу A_f линейного оператора φ в базисе $f = \{f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2\}$. Для этого найдем координаты образов базиса f, имеем

$$\varphi(f_1) = (f_1)'' - 3(f_1)' + f_1 = (1)'' - 3(1)' + 1 = 1 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(f_2) = (f_2)'' - 3(f_2)' + f_2 = (x)'' - 3(x)' + x = -3 + x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(f_3) = (f_3)'' - 3(f_3)' + f_3 = (x^2)'' - 3(x^2)' + x^2 = 2 - 6x + x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица A_f в базисе f имеет следующий вид:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислим определитель матрицы A_f, получим $|A_f| = 1$. Поскольку $|A_f| \neq 0$, то существует оператор φ^{-1}, обратный к φ. Найдем матрицу A_f^{-1}, обратную к матрице A_f, получим

$$A_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем по матрице A_f явный вид оператора φ^{-1}. Будем искать оператор в виде $\varphi^{-1}(f) = a \cdot f'' + b \cdot f' + c \cdot f$ с неопределенными пока коэффициентами $a, b, c \in \boldsymbol{R}$. Для того, чтобы найти матрицу этого оператора, вычислим координаты образов базиса f, имеем

$$\varphi^{-1}(f_1) = c, \varphi^{-1}(f_2) = b + cx, \varphi^{-1}(f_3) = 2a + 2bx + cx^2.$$

Тогда матрица B_f линейного оператора φ^{-1} в базисе f имеет вид:

$$B_f = \begin{pmatrix} c & b & 2a \\ 0 & c & 2b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Так как $B_f = A_f^{-1}$, сравнивая соответствующие элементы этих матрицы, получаем, что $c = 1, b = 3, a = 8$. Значит, обратный оператор имеет вид $\varphi^{-1}(f) = 8f'' + 3f' + f$. **b)** $\varphi^{-1}(f) = 7f'' + 3f' + f$. **c)** $\varphi^{-1}(f) = 4f'' + 2f' + f$.

65. a) $\begin{pmatrix} 60 & -12 \\ 48 & 12 \end{pmatrix}$;**b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;**c)** $\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{pmatrix}$;**d)** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

66. a) *Решение:* 1) Для того, чтобы найти ядро оператора, нужно решить операторное уравнение $\varphi(x) = 0$. Если φ есть оператор умножения на матрицу M, то это уравнение принимает вид $M \cdot x = 0$ и по отношению к координатам вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ есть однородная система уравнений. Тогда ядро оператора φ совпадает с подпространством решений однородной системы уравнений $M \cdot x = 0$. Найдем базис этого подпространства – фундаментальную систему решений. Приведем матрицу M с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение системы уравнений можно записать в виде $x_1 = 2x_4$, $x_2 = -3x_4$, $x_3 = -2x_4$, $\forall x_4 \in \boldsymbol{R}_4$. Всего у данной системы три базисных неизвестных – это x_1, x_2, x_3 и, следовательно, одно свободное неизвестное x_4. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора u. Чтобы найти его, возьмем $x_4 = 1$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$ и $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ядро оператора φ теперь можно представить как линейную оболочку, порожденную найденным базисом:

$$\ker\varphi = \operatorname{span}\{u\}, \quad \operatorname{def}(\varphi) = 1.$$

2) Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – базис линейного пространства $\boldsymbol{R}_4$. Тогда образ оператора совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4. Вычисляя эти образы, получим, что вектор Ae_1 есть первый столбец матрицы M, Ae_2, Ae_3, Ae_4 – соответственно второй, третий и четвертый столбцы матрицы M. С помощью элементарных преобразований матрица системы $M \cdot x = 0$ уже преобразована к ступенчатому виду, число ненулевых строк равно трем, поэтому $\operatorname{rank}(\varphi) = 3$. Базис образа $\operatorname{Im}(\varphi)$ состоит из первого $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, второго $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ и третьего столбца $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ матрицы M. Образ оператора можно представить в виде

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

b) $rank(\varphi) = 1$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. **c)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра $Ker(\varphi)$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **d)** $rank(\varphi) = 3$;

базис ядра $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; базис образа $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

67. a) *Решение:* Выберем базис в линейном пространстве $\boldsymbol{M}^{22}$. Удобнее всего выбрать естественный базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе найдем матрицу линейного оператора φ. Для этого, подействуем оператором φ на базисные элементы и получившиеся матрицы разложим в линейные комбинации по этому базису

$\varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4, \quad \varphi(e_2) = e_1 + 4e_2 + 0e_3 + 0e_4,$

$\varphi(e_3) = -3e_1 + 0e_2 - 4e_3 + 0e_4, \quad \varphi(e_4) = 0e_1 - 3e_2 + e_3 + 0e_4,$

Таким образом, матрица оператора φ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A_e к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, получим

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы уравнений можно записать в виде $x_2 = 3x_3$, $x_4 = 4x_3$. Свободными неизвестными являются x_1 и x_3. Если взять $x_1 = 1$ и $x_3 = 0$, то получим вектор $(u_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. При $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ получаем вектор $(u_2)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Это координаты базиса ядра линейного оператора. По ним можно построить сами элементы (то есть матрицы), имеем

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы построить базис образа оператора φ, заметим, что второй и четвертый столбцы матрицы A_e образуют базис образа оператора. Таким образом, базис образа состоит из матриц

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$\ker(\varphi) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{def}(\varphi) = 2$,

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{rank}(\varphi) = 2$.

b) $rank(\varphi) = 3$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. **c)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$:

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **d)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра $Ker(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; базис образа $Im(\varphi)$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

68. a) *Решение:* Выберем в качестве базиса естественный базис пространства $\boldsymbol{P}_2$, а именно $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^2$ и найдем матрицу оператора A_e в этом базисе. Для этого подействуем оператором φ на базисные элементы:

$\varphi(e_1) = (2+x)(e_1)''' + (1+x-x^2)(e_1)'' + 3x(e_1)' - 3e_1 = -3,$

$\varphi(e_2) = (2+x)(e_2)''' + (1+x-x^2)(e_2)'' + 3x(e_2)' - 3e_2 = 0,$

$\varphi(e_3) = (2+x)(e_3)''' + (1+x-x^2)(e_3)'' + 3x(e_3)' - 3e_3 = 2 + 2x + x^2,$

$\varphi(e_4) = (2+x)(e_4)''' + (1+x-x^2)(e_4)'' + 3x(e_4)' - 3e_4 = -12 + 12x + 6x^2.$

Разложим полученные элементы по тому же базису, получим:

$\varphi(e_1) = -3 = -3e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4,$

$\varphi(e_2) = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4,$

$.\varphi(e_3) = 2 + 2x + x^2 = 2e_1 + 2e_2 + e_3 + 0e_4,$

$\varphi(e_4) = 12 + 12x + 6x^2 = 12e_1 + 12e_2 + 6e_3 + 0e_4.$

Тогда матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти базис ядра оператора нужнонайти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений. $A_e x = 0$. После приведения матрицы A_e к ступенчатому виду, получим

$$A_e \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = 0, x_3 = -6x_4$ для любых вещественных x_2, x_4. Пусть $x_2 = 1, x_4 = 0$, тогда $x_1 = x_3 = 0$. Если $x_2 = 0, x_4 = 1$, тогда $x_1 = 0, x_3 = -6$. Значит, мы получили координаты векторов базиса ядра оператора $(u_1)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (u_2)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда по координатам этих векторов получаем, что многочлены $u_1 = x, u_2 = -6x^2 + x^3$ образуют базис ядра оператора.

Максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов матрицы A_e составляют первый и третий (или четвертый) столбцы матрицы. Они являются координатными векторами базисных элементов образа оператора. Тогда базис образа оператора составляют многочлены $v_1 = -3, v_2 = 2 + 2x + x^2$. Так как размерность образа оператора равна двум, то ранг оператора равен двум. Таким образом,
$\mathrm{rank}(\varphi) = 2, \ker(\varphi) = \mathrm{span}\{x, -6x^2 + x^3\}$,
$\mathrm{def}(\varphi) = 2, \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{span}\{-3, 2 + 2x + x^2\}$.

b) $rank(\varphi) = 3$; базис ядра: $1+x$; базис образа: $1, 6+4x-3x^2, -18+18x+15x^2+4x^3$. **c)** $rank(\varphi) = 1$; базис ядра: $1, x, x^2$; базис образа: $1+x$. **d)** $rank(\varphi) = 2$; базис ядра: $1+3x, 6+3x^2-x^3$; базис образа: $1, 4x+x^2$.

69. **a)** Да. **b)** Нет. **c)** Да.

70. **a)** Нет. **b)** Нет. **c)** Нет.

71. **a)** Да. **b)** Да. **c)** Да.

72. **a)** $(a,b) = -18, |a| = \sqrt{18}, |b| = \sqrt{24}, \varphi = 5\pi/6$; **b)** $(a,b) = -7, |a| = \sqrt{14}, |b| = \sqrt{7}, \varphi = 3\pi/4$; **c)** $(a,b) = -6, |a| = \sqrt{12}, |b| = \sqrt{12}, \varphi = 2\pi/3$;

73. **a)** $(a,b) = 0, |a| = \sqrt{7}, |b| = \sqrt{23}, \varphi = \pi/2$; **b)** $(a,b) = 3, |a| = 3, |b| = 2, \varphi = \pi/3$; **c)** $(a,b) = 11, |a| = \sqrt{11}, |b| = \sqrt{22}, \varphi = \pi/4$.

74. **a)** *Решение:* Используем процесс ортогонализации Грама-

Шмидта, получим

$$e_1 = x_1; e_2 = x_2 - a_{12}e_1, \text{ где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{1+2-10-3}{1+4+4+1} = -1,$$

следовательно, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для вычисления e_3 имеем равенство

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2,$$

где

$$a_{13} = \frac{x_3, e_1)}{(e_1, e_1} = \frac{3+4+16+7}{1+4+4+1} = 3,$$

$$a_{23} = \frac{x_3, e_2)}{(e_2, e_2} = \frac{6+6-24-14}{4+9+9+4} = -1.$$

Таким образом, получаем

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Система векторов $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ является ортогональной. **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

75. a) *Решение:* Так как $(x_1, x_2) = 0$, то по определению векторы x_1 и x_2 ортогональны.

Размерность пространства $\boldsymbol{R}^4$ равна 4, то базис этого пространства содержит также четыре вектора. Таким образом, нам необходимо добавить два вектора. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор из пространства $\boldsymbol{R}^4$ такой что y ортогонален как вектору x_1, так и вектору x_2, то есть имеем следующую систему равенств

$$\begin{cases} (y, x_1) = 0, \\ (y, x_2) = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 = 0, \\ 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 4y_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ эквивалентна следующей ступенчатой матрице $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ранг $r = 2$. Пусть свободные неизвестные $y_3 = 1, y_4 = 0$, тогда базисные неизвестные равны $y_1 = y_2 = 2$, то есть первый вектор в фундаментальной системе решений имеет вид $Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогичным образом, полагая $y_3 = 0, y_4 = 1$, находим $y_1 = -17$, $y_2 = -10$, следовательно, $Y_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – второй вектор в ФСР. Итак, получаем, что система векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образует ортогональный базис пространства $\boldsymbol{R}^4$. Следует отметить, что координаты векторов Y_1 и Y_2 находятся неоднозначно. **b)** Можно добавить, например, следующие векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix}$.

76. a) *Решение:* Так как $(x_1, x_2) = 0$, то по определению векторы x_1 и x_2 ортогональны. Более того, $||x_1|| = ||x_2|| = 1$, поэтому эти векторы нормированные.

Размерность пространства $\boldsymbol{R}^3$ равна 3, то базис этого пространства содержит также три вектора. Таким образом, нам необходимо добавить только один вектор. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор из пространства $\boldsymbol{R}^3$ такой что y ортогонален как вектору x_1, так и вектору x_2, то есть имеем следующую систему равенств

$$\begin{cases} (y, x_1) = 0, \\ (y, x_2) = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0, \\ y_1 + 2y_2 - 2y_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ эквивалентна следующей ступенчатой матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ранг $r = 2$. Пусть свободное неизвестное $y_3 = 1$, тогда базисные неизвестные равны $y_1 = -2, y_2 = 2$, то есть фундаментальная система решений состоит из одного вектора $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пронормируем вектор Y. Имеем

$$Y = \frac{1}{||Y||} \cdot Y = \frac{1}{\sqrt{(Y, Y)}} \cdot Y = \frac{1}{3} \cdot Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Итак, получаем, что система векторов

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

образует ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{R}^3$. Следует отметить, что координаты вектора Y находятся неоднозначно. **b)** Например, $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

77. a) *Решение:* Пусть $\boldsymbol{L} = \mathrm{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ – линейная оболочка данных векторов. Ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}^\perp$ состоит их всех векторов, ортогональных каждому вектору системы a_1, a_2, a_3. Значит,

$$\boldsymbol{L}^\perp = \{x \in \boldsymbol{R}^4 \mid x \perp a_1, x \perp a_2, x \perp a_3\}.$$

Пусть вектор x имеет координаты $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, тогда из определения ортогональности двух векторов, получаем следующую систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Базисом подпространства ортогонального дополнения $\boldsymbol{L}^\perp$ есть фундаментальная система решений данной однородной системы. Приведем к ступенчатому виду матрицу системы, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть x_1, x_2 – базисные неизвестные, тогда x_3, x_4 – свободные неизвестные. Базисные неизвестные выражаются через свободные следующим образом: $x_1 = -x_3 + x_4, x_2 = -x_4$. Полагая свободные неизвестные равными строкам единичной матрицы получим два вектора фундаментальной системы решений:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\boldsymbol{L}^{\perp} = \mathrm{span}\{b_1, b_2\}$.

b) Например, $b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **c)**Например, $b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

78. a) *Решение:* 1) Найдем базис подпространства $\boldsymbol{L} = \mathrm{span}\{a_1, a_2, a_3\}$. Для этого составим матрицу A, расположив координаты векторов по строкам, и найдем ее ранг методом элементарных преобразований, получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен двум, отсюда следует, что система векторов линейно зависима. Базисом является, например, система векторов a_1, a_2.

2) Вычислим следующие скалярные произведения:
$(a_1, a_1) = 3, (a_1, a_2) = 8, (a_2, a_2) = 35, (x, a_1) = -2, (x, a_2) = -19.$

3) Составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 8x_2 & = & -2, \\ 8x_1 & + & 35x_2 & = & -19. \end{cases}$$

Решим систему, применяя метод Крамера, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 35 \end{vmatrix} = 41, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -19 & 35 \end{vmatrix} = 82, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -19 \end{vmatrix} = -41.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1.$$

4) Построим ортогональную проекцию

$$x_{pr} = x_1 a_1 + x_2 a_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Построим ортогональную составляющую

$$x_{ort} = x - x_{pr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)$x_{pr} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x_{ort} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

79. a) $\varphi = \pi/4$, $\rho = 3$. **b)** $\varphi = \arccos(\sqrt{23}/5)$, $\rho = \sqrt{2}$.

80. a) *Решение:* 1) В данную квадратичную форму переменная x_1 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей.

2) Сгруппируем все слагаемые квадратичной формы, содержащие ведущую переменную x_1, и вынесем общие множители за скобку

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3[x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3] + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3 =$$

$$= 3[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3)] + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3.$$

Выделим полный квадрат, для этого в квадратичную форму добавим и вычтем слагаемое $(x_2 - x_3)^2$, получим
$f(x_1, x_2, x_3) = 3[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 3(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3 =$
$= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 5x_2x_3$. Введем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Получаем квадратичную форму $f_1(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 5y_2y_3$. Продолжим преобразования, так как в квадратичной форме присутствует произведение y_2y_3.

3) В квадратичной форме $f_1(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 5y_2y_3$ нет ведущих переменных, так как каждая переменная переменная входит в форму либо во второй степени, либо в первой, но не в первой и второй степенях одновременно. Однако имеется произведение y_2y_3 разных переменных. Следуя четвертому пункту алгоритма, сделаем замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = z_2 + z_3. \end{cases}$$

Тогда получим квадратичную форму $f_2(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + 5z_2^2 - 5z_3^2$. Квадратичная форма f_2 имеет канонический вид.

Найдем теперь невырожденную линейную замену переменных, приводящую данную форму к каноническому виду. Во втором и третьем пунктах решения выполнялись замены $x = S_1 \cdot y$ и $y = S_2 \cdot z$ с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицу S искомой замены $x = S \cdot z$ находим как произведение

$$S = S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, итоговое преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 2z_3, \\ x_2 = z_2 - z_3, \\ x_3 = z_2 + z_3. \end{cases}$$

b) $z_1^2 - 3z_2^2 - \frac{8}{3}z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - \frac{5}{3}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{1}{3}z_3$, $x_3 = z_3$.

c) $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - z_3$, $x_2 = z_1 + z_2 - z_3$, $x_3 = z_3$.

d) $z_1^2 - z_2^2$, $x_1 = z_1 + z_2 - 5z_3$, $x_2 = z_2 - 4z_3$, $x_3 = z_3$.

e) $z_1^2 + 4z_2^2 - 9z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 + \frac{5}{2}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3$, $x_3 = z_3$.

f) $4z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_3$, $x_2 = z_2 - z_3$, $x_3 = z_2 + z_3$.

g) $z_1^2 - \frac{7}{2}z_2^2 + 2z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{5}{2}z_2 - z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = \frac{1}{2}z_2 + z_3$.

h) $3z_1^2 - \frac{8}{3}z_2^2 + \frac{23}{32}z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{5}{8}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{3}{16}z_3$, $x_3 = z_3$.

i) $2z_1^2 + \frac{5}{2}z_2^2 + \frac{19}{10}z_3^2$, $x_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - \frac{9}{10}z_3$, $x_2 = z_2 + \frac{1}{5}z_3$, $x_3 = z_3$.

81. a) *Решение:* Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 2).$$

Оно имеет корни $\lambda_{1,2} = 4$, $\lambda_3 = -2$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы $f_1(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$;
b) $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; **c)** $y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$.

82. *Решение:* Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 5$, $\lambda_{2,3} = -1$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы $f_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью, найдем собственные векторы матрицы A. Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X, соответствующего собственному значению $\lambda = 5$, являются решением системы уравнений $(A - 5E)X = 0$, то есть системы

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 2, а $n - r = 1$. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, такого

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя X_1, получаем собственный вектор

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X, соответствующего собственному значению $\lambda = -1$, являются решением системы уравнений $(A+E)X = 0$, то есть системы

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 1, а $n - r = 2$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из двух векторов. Чтобы их найти, оставим только первое уравнение системы (второе и третье являются следствием первого). Положим вначале $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, тогда $x_1 = -1$; затем положим $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, тогда $x_1 = -1$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из следующих векторов

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть два линейно независимых собственных вектора матрицы A, соответствующих сообственному значению $\lambda = -1$.

Заметим, что собственные векторы X_2 и X_3 матрицы A ортогональны к собственному вектору U_1, но не ортогональны между собой. Применим к ним процедуру ортогонализации. С этой целью положим

$$Y_2 = X_2,\ Y_3 = X_3 - \alpha Y_2.$$

Коэффициент α определяется из условия ортогональности Y_2 и Y_3, то есть из условия

$$\alpha = \frac{(X_2, X_3)}{(X_2, X_2)} = 1/2.$$

Итак, мы построили два ортогональных собственных вектора матрицы A, соответствующих собственному значению $\lambda = -1$:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя их, получаем собственные векторы

$$U_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; U_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Матрица искомого ортогонального преобразования состоит из столбцов U_1, U_2, U_3, то есть искомое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3. \end{cases}$$

Это преобразование приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$f_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Следует отметить, что канонический вид и ортогональное преобразование определяются неоднозначно. **b)** $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **c)** $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **d)** $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$; **e)** $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; **f)** $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

83. a) *Решение:* Найдем главные миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = 3 > 0,\ \Delta_3 = \det(A) = 3(\lambda - 1).$$

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_3 > 0$, то есть при $\lambda > 1$. **b)** $\lambda > 2$; **c)** $|\lambda| < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$; **d)** $-0.8 < \lambda < 0$; **e)** требуемых значений λ не существует; **f)** требуемых значений λ не существует.

84. **a)** $a = 4$, $b = 2$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$; **b)** $a = 2$, $b = 4$, $\varepsilon = \sqrt{5}$, $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$, $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = \pm 2x$; **c)** $a = 5$, $b = 2$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$, $x = \pm\frac{25}{\sqrt{21}}$; **d)** $a = 3$, $b = 2$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$, $x = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$, $y = \pm\frac{2}{3}x$.

85. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

86. $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 18$.

87. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

88. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4/9} = 1$.

89. $S = 480/7$.

90. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$.

91. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

92. $A(0;0)$, $B(5;25)$.

93. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{216/5} = 1$.

94. $\frac{x^2}{29/4} + \frac{y^2}{116/25} = 1$.

95. $(\pm 3; \pm 1)$. **96.** $3/2$.

97. **a)** $\frac{(x-2/3)^2}{4/9} + \frac{y^2}{1/3} = 1$; **b)** $\frac{(x-7/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} = 1$; **c)** $y^2 = -2\cdot(x - 3/2)$.

98. **a)** *Решение:* Объединим слагаемые, содержащие одинаковые переменные и вынесем общий множитель за скобки, получим

$$9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 4y) - 44 = 0.$$

Добавим и вычтем слагаемые, необходимые для выделения полных квадратов, имеем

$$9(x+2)^2 + 16(y-2)^2 = 144 \qquad \text{или} \qquad \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

В получившемся уравнении выполним следующую замену переменных

$$\begin{cases} x_1 &= x+2, \\ y_1 &= y-2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x &= x_1-2, \\ y &= y_1+2, \end{cases}$$

тогда в новой системе координат $O_1X_1Y_1$ заданное уравнение имеет канонический вид

$$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}=1$$

и определяет эллипс с большей полуосью $a=4$ и меньшей полуосью $b=3$. Точка O_1 в старой системе координат OXY имеет координаты $O_1(-2,2)$.
b) гипербола: $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$;
c) парабола: $(y-2)^2=2\cdot 2\cdot(x+3)$; **d)** эллипс: $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$;
e) гипербола: $-\frac{(x-3)^2}{144/9}+\frac{(y+1)^2}{144/16}=1$; **f)** парабола: $(y-1)^2=2\cdot(-1)\cdot(x+4)$;
g) парабола: $(x-2)^2=2\cdot(-2)\cdot(y+1)$; **h)** эллипс: $\frac{(x-2)^2}{225/9}+\frac{(y-1)^2}{225/25}=1$;
i) эллипс: $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{2}=1$; **j)** гипербола: $\frac{(x-1)^2}{144/9}-\frac{(y+2)^2}{144/16}=1$.

99. a) *Решение:* 1. Приведем квадратичную форму

$$f(x,y)=\frac{5}{2}x^2-3xy+\frac{5}{2}y^2$$

к главным осям. Для этого выполним следующие действия:

1.1. Выпишем матрицу A квадратичной формы, имеем

$$A=\begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Найдем собственные числа матрицы A, решая характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 5/2-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 5/2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(4-\lambda)=0.$$

Значит, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$.

1.3. Найдем собственный вектор $U_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ для собственного значения $\lambda_1=1$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2}u_1-\frac{3}{2}u_2 &= 0, \\ -\frac{3}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2 &= 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $r = 1$. Пусть свободное неизвестное $u_2 = 1$, тогда решая систему, находим $u_1 = 1$, следовательно, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Найдем собственный вектор $U_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ для собственного значения $\lambda_1 = 4$. Имеем систему

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 &= 0, \\ -\frac{3}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 &= 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $r = 1$. Пусть свободное неизвестное $u_2 = 1$, тогда решая систему, находим $u_1 = -1$, следовательно, $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 4$.

2.4. Векторы U_1 и U_2 ортогональны, поскольку их скалярное произведение равно нулю. Пронормируем каждый вектор, получим

$$e_1 = \frac{1}{||U_1||} \cdot U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{||U_2||} \cdot U_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель, составленный из собственных векторов

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1,$$

Важно, знаки собственных векторов выбрать таким образом, чтобы этот определитель был равен единице (это всегда можно сделать).

2.5. Составим матрицу Q, расположив координаты векторов по столбцам

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим угол поворота $\varphi = \arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

2.6. Выполним замену переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \end{cases}$$

получим, что в новых переменных (x_1, y_1) уравнение примет вид

$$x_1^2 + 4y_1^2 - 1 = 0$$

или

$$\frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{1/4} = 1.$$

Полученное уравнение в системе координат OX_1Y_1 является каноническим и определяет эллипс.

b) гипербола: $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$;

c) парабола: $y_1^2 = x_1$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1$;

d) пара параллельных прямых: $x_1^2 = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1$;

e) мнимый эллипс: $\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{2/3} = -1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$, $y = \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1$;

f) вырожденный эллипс — точка: $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$;

g) пара пересекающихся прямых: $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{1} = 0$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1$, $y = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1$.

100. a) *Решение:* Приведем квадратичную форму $f(x, y) = 11x^2 - 20xy - 4y^2$, связанную с уравнением, ортогональным преобразованием к каноническому виду. С этой целью составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix},$$

и запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & -10 \\ -10 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 144 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 16$. Далее находим взаимно ортогогальные нормированные собственные векторы (столбцы) U_1 и U_2 матрицы A: если $\lambda_1 = -9$, то $U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; если $\lambda_1 = 16$, то $U_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Следовательно, искомое ортогональное преобразование имеет матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

у которой $|Q| = 1$. Матрица Q является матрицей оператора поворота на угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Повернув оси координат системы Oxy на угол $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ (против часовой стрелки), получим прямоугольную системц координат Ox_1y_1. При этом координаты точек преобразуются по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1), \\ x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1). \end{cases}$$

При ортогональном преобразовании переменных квадратичная форма $f(x, y)$ переходит в форму

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = -9x_1^2 + 16y_1^2.$$

Запишем в новых координатах линейных члены уравнения:

$$-20x - 8y = -\frac{36}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{32}{\sqrt{5}}y_1.$$

В системе координат Ox_1y_1 уравнение кривой принимает вид

$$-9x_1^2 + 16y_1^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{32}{\sqrt{5}}y_1 + 1 = 0.$$

2. Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получаем

$$-9\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5 = 0.$$

Полагая

$$x_2 = x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

то есть, производя параллельный перенос осей координат так, что начало координат переходит в точку $O_1\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, приходим к каноническому уравнению кривой

$$\frac{x_2^2}{5/9} - \frac{y_2^2}{5/16} = 1.$$

Это каноническое уравнение гиперболы в системе координат $O_1x_2y_2$.
b) мнимый эллипс: $\frac{x_2^2}{1/4} + \frac{y_2^2}{1/6} = -1$, $\varphi = \pi/4$, $O_1(-1/4, 0)$;
c) парабола: $y_2^2 = -0,8x_2$, $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$, $O_1(-1; -0,7)$;
d) две совпадающие прямые: $y_2^2 = 0$, $\varphi = \arcsin(-3/\sqrt{13})$, $O_1(0, -1)$;
e) вырожденный эллипс — точка: $x_2^2 + \frac{y_2^2}{0{,}5} = 0$, $\varphi = \pi/4$, $O_1(-2, -3)$;
f) эллипс: $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{16} = 1$, $\varphi = \pi/4$, $O_1(\sqrt{2}, 0)$;
g) гипербола: $x_2^2 - \frac{y_2^2}{9} = 1$, $\varphi = \arcsin(3/\sqrt{10})$, $O_1(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2)$;
h) гипербола: $\frac{x_2^2}{25} - \frac{y_2^2}{9} = 1$, $\varphi = \arccos(4/\sqrt{17})$, $O_1(\frac{13}{3\sqrt{17}}, \frac{4}{5\sqrt{17}})$;
i) парабола: $y_1^2 = 2x_1$, $\varphi = \arcsin(4/5)$, $O_1(0, 0)$.

101. a) *Решение:* 1) Вычислим инварианты кривой второго порядка, имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 100, \quad |B| = \begin{vmatrix} 17 & 6 & -6 \\ 6 & 8 & -8 \\ -6 & -8 & -12 \end{vmatrix} = -2000.$$

2) Вычислим собственные числа матрицы A. Для этого составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda + 10 = 0$$

корнями этого уравнения являются числа $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$.
3) Используя таблицу (1), находим, что уравнение кривой в новой системе координат Ox_1y_1 имеет следующий вид:

$$5x_1^2 + 20y_1^2 - 20 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{1} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с (59), заключаем, что заданная кривая второго порядка является эллипсом. **b)** гипербола: $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{9} = 1$;

c) парабола: $y_1^2 = 2x_1$; **d)** пара пересекающихся прямых: $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{1} = 0$; **e)** пара параллельных прямых: $y_1^2 - 4 = 0$; **f)** две совпадающие прямые: $y_1^2 = 0$.

102. a) *Решение:* 1) Вычислим инварианты поверхности второго порядка, имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 32, \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -256.$$

2) Вычислим собственные числа матрицы A. Для этого составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(8-\lambda) = 0$$

корнями этого уравнения являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 8$.
3) Используя таблицу 2, находим, что уравнение поверхности в новой системе координат $Ox_1y_1z_1$ имеет следующий вид:

$$2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1 - 8 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{4} + \frac{z_1^2}{1} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с (72), заключаем, что заданная поверхность второго порядка является эллипсоидом.
b) $|A| = |B| = 81$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 9$, однополостный гиперболоид: $\frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{1/9} - \frac{z_1^2}{1/9} = 1$;
c) $|A| = 0, |B| = -1, I_2(A) = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, эллиптический параболоид: $\frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{1} = -2z_1$;
d) $|A| = 0, |B| = 864, I_2(A) = -144$, $\lambda_1 = -12$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 0$, гиперболический параболоид: $\frac{x_1^2}{\sqrt{6}/12} - \frac{y_1^2}{\sqrt{6}/12} = 2z_1$;
e) $|A| = 0, |B| = 0, I_2(A) = 18, I_3(B) = -108$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$, эллиптический цилиндр: $\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{1} = 1$;

f) $|A| = 0, |B| = 0, I_2(A) = -9, I_3(B) = 81$, $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, гиперболический цилиндр: $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{9} = 1$;

g) $|A| = 0, |B| = 0, I_2(A) = 0, I_3(B) = -70, tr(A) = 14$, $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, параболический цилиндр: $x_1^2 = -\frac{\sqrt{5}}{7}y_1$;

h) $|A| = 0, |B| = 0, I_2(A) = 0, I_3(B) = 0, tr(A) = 3, I_2(B) = -3$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, пара параллельных плоскостей: $x_1^2 - \frac{1}{3} = 0$;

i) $|A| = 0, |B| = 0, I_2(A) = 0, I_3(B) = 0, tr(A) = 3, I_2(B) = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, пара совпадающих плоскостей: $x_1^2 = 0$.

Литература

[1] Рунг Е.В. Сборник задач по алгебре и геометрии : учебное пособие / Е. В. Рунг, К. Н. Стехина. - Казань: Казан. ун-т. - 2018.- 208 с.

[2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2007. – 431 с.

[3] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006. – 382 с.

[4] Фадеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. – СПб.: Лань, 2004. – 287 с.

[5] Кряквин В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях / В.Д. Кряквин. – М.: Вузовская книга, 2007. – 588 с.

[6] Карчевский Е.М. Линейные операторы в конечномерных пространствах: учеб. пособие для практических занятий по алгебре и геометрии / Е.М. Карчевский, Е.Е. Лаврентьева, И.Л. Александрова. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. - 116 с.