УДК 530.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В НЕОДНОРОДНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕДАХ

В. Ю. Белашов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, vybelashov@yahoo.com

Аннотация. На основе аналитических и численных подходов изучается устойчивость и динамика взаимодействия неодномерных солитоноподобных решений обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (GNLS), описывающего волны в плазме, оптоволокне и плоских оптических волноводах с учетом неоднородности и нестационарности среды распространения. Получены достаточные условия устойчивости 2-мерных и 3-мерных решений и показано, что даже в наиболее простом 1-мерном случае уравнение GNLS может иметь устойчивые и квазиустойчивые решения типа солитонов и бризеров, а также неустойчивые, рассеивающиеся со временем, решения. Полученные результаты могут быть полезны в многочисленных приложениях в физике плазмы, нелинейной оптике и многих других областях физики.

Ключевые слова: обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, солитоны огибающей, бризеры, устойчивость, взаимодействие, неодномерные солитоны, неоднородная среда, нестационарная среда, плазма, оптоволокно, оптические волноводы

ON STABILITY OF SOLUTIONS OF THE GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION IN NONUNIFORM AND NONSTATIONARY MEDIA

V. Yu. Belashov

Abstract. On the basis of the analytical and numerical approaches the stability and dynamics of interaction of the multidimensional soliton-like solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation, which describes the waves in a plasma, fiber and planar optical waveguides, taking into account inhomogeneity and nonstationarity of propagation medium, is studied. The sufficient conditions of stability of the 2-dimensional and 3-dimensional solutions are obtained, and it is shown that even in the simplest 1-dimensional case the GNLS equation can have stable and quasi-stable solutions of the soliton and breather types and also unstable solutions which disperses with time. Obtained results can be useful in numerous applications in plasma physics, nonlinear optics and in many other fields of physics.

Keywords: generalized nonlinear Schrödinger equation; envelop solitons; breathers; interaction; multidimensional solitons; nonuniform medium; nonstationary medium; plasma; fiber; optical waveguides

Если в системе ВК[1] [1, 2]

$$\partial_t u + \hat{\mathrm{A}}(t,u)u = f, \quad f = \sigma\int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp u \mathrm{d}x + f', \quad \Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{1}$$

оператор имеет вид $\hat{\mathrm{A}}(t,u) = i[\gamma|u|^2 - \beta\partial_x^2] + \alpha/2$, она представляет собой 3-мерное обобщенное уравнение Шредингера (3-GNLS) [3]:

$$\partial_t u + i\gamma|u|^2 u - i\beta\partial_x^2 u + (\alpha/2)u = \sigma\int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp u \,\mathrm{d}x + f', \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(t,x,y,z)$, $f' = f'(t,x,y,z)$, и $(\alpha/2)u$ описывает диссипативные эффекты, а u есть огибающая волнового пакета (импульса). Уравнение 3-GNLS (2) описывает динамику огибающей модулированных нелинейных волн и импульсов (волновых пакетов) в средах с дисперсией и имеет многочисленные важные приложения в физике плазмы (например, описывает распространение ленгмюровских волн в горячей плазме), нелинейной оптике (распространение световых импульсов в кристаллах, оптоволокне и плоских оптических волноводах), оно описывает, в частности такие явления, как турбулентность, волновой коллапс и оптическая самофокусировка. Уравнение (2) используется и в других областях физики – таких, например, как теория сверхпроводимости и физика низких температур (в частности, обычное уравнение NLS есть

[1] Belashov-Karpman (BK) system

упрощенная 1D форма уравнения Гинзбурга-Ландау [4], впервые введенного ими в 1950 г. при описании сверхпроводимости), гравитационные волны малой амплитуды на поверхности глубокой невязкой жидкости и др. Отметим, что 3D уравнение (2) не является полностью интегрируемым, и его аналитические решения в общем случае не известны (за исключением, пожалуй, гладких решений типа уединенных волн). Однако, с использованием подходов, развитых в [5, 6] для других уравнений системы BK [уравнения GKP, когда оператор в (1) есть $\hat{A}(t,u)=\alpha u\partial_x-\partial_x^2(\nu-\beta\partial_x-\gamma\partial_x^3)$, и 3-DNLS, если $\hat{A}(t,u)=3s\,|\,p\,|^2\,u^2\partial_x-\partial_x^2(i\lambda+\nu)$], мы можем исследовать устойчивость возможных решений уравнения 3-GNLS, что и является целью настоящей работы.

Запишем (2) с $\alpha = 0$ (уравнение 3-NLS) в гамильтоновой форме:

$$\partial_t u=\partial_x(\delta \mathrm{H}/\delta u)\,, \tag{3}$$

где $\mathrm{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\,\frac{\gamma}{2}|\,u\,|^4+\beta u u^*\partial_x\varphi+\frac{1}{2}\sigma\left(\nabla_\perp\partial_x w\right)^2\right]\mathrm{d}\mathbf{r},\quad \partial_x^2 w=u,\quad \varphi=\arg(u)\,.$

Используя метод, подробно изложенный в [1, 5, 6], исследуем устойчивость 2D и 3D решений уравнения (2). При этом, задача для уравнения (3) формулируется в виде вариационного уравнения $\delta(\mathrm{H}+\upsilon P_x)=0,\ P_x=\frac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}$, смысл которого состоит в том, что все финитные решения уравнения (3) есть стационарные точки гамильтониана H при фиксированном значении проекции импульса P_x. В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости, в динамической системе точки, которые соответствуют минимуму или максимуму гамильтониана H являются абсолютно устойчивыми. Если же экстремум локальный, ему будут соответствовать локально устойчивые решения.

Рассмотрим деформации H, сохраняющие проекцию импульса P_x:

$$u\,(x,r_\perp)\rightarrow\zeta^{-1/2}\eta^{-1}u(x/\zeta,\ \mathbf{r}_\perp/\eta),\qquad \zeta,\eta\in\mathrm{C}\,.$$

Гамильтониан примет вид $\mathrm{H}(\zeta,\eta)=a\zeta^{-1}\eta^{-2}+b\zeta^{-1}-c\zeta^2\eta^{-2}$ с коэффициентами $a=(\gamma/2)\int|u|^4\mathrm{d}\mathbf{r}$, $b=\beta\int u u^*\partial_x\varphi\mathrm{d}\mathbf{r}$, $c=(\sigma/2)\int(\nabla_\perp\partial_x w)^2\mathrm{d}\mathbf{r}$. Из необходимых условий экстремума $\partial_\zeta\,\mathrm{H}=0,\ \partial_\eta\,\mathrm{H}=0$ сразу же найдем его координаты:

$$\zeta_0=-ac^{-1},\quad \eta_0=\left[-ab^{-1}\left(1+a^2c^{-2}\right)\right]^{1/2},$$

где $b < 0$, если $\eta \in \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$, поскольку $a > 0$, $c > 0$ по определению, и $b > 0$, если $\eta\in\mathrm{C}$. Достаточные условия минимума в точке (ζ_i, η_j):

$$\begin{vmatrix}\partial_\zeta^2\,\mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) & \partial_{\zeta\eta}^2\,\mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j)\\ \partial_{\eta\zeta}^2\,\mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) & \partial_\eta^2\,\mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j)\end{vmatrix}>0,\quad \partial_\zeta^2\,\mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j)>0\,.$$

Решая данную систему неравенств, получим, что для волн в случае $b < 0$ (положительная нелинейность) $a/c<d=(2\sqrt{2})^{-1}\sqrt{13+\sqrt{185}}$, откуда следует, что $\mathrm{H}>-3bd/(1+2d^2)$, то есть гамильтониан ограничен снизу. При $b > 0$ (отрицательная нелинейность): замена $b\rightarrow -b$ эквивалентна замене $y\rightarrow -iy$, $z\rightarrow -iz$ и $\mathrm{H}<-3bd/(1+2d^2)$, то есть гамильтониан снизу не ограничен (ограничен сверху).

Итак, мы доказали возможность существования устойчивых 3D решений в модели 3-NLS и получили условия их устойчивости, то есть определили области значений коэффициентов уравнения (переменных во времени и пространстве характеристик среды), когда 3D солитоны будут устойчивыми.

Результаты численного моделирования уравнения 3-GNLS для общего случая неоднородной и нестационарной среды подтверждают сделанные на основе аналитического рассмотрения проблемы заключения. В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 представлены результаты, полученные при $\sigma = 0$ (1D случай) и начальных условиях в виде солитоноподобного импульса огибающей: $u(x,0)=A\exp(-x^2/l)$ и $u(x,0)=A\exp[-(x-5)^2/l]+A\exp[-(x+5)^2/l]$, соответственно, в простейшем случае уравнения NLS с β, γ = const (стационарная среда); α, $f'=0$ при отрицательной нелинейности, β > 0. При этом $b>0$ и гамильтониан $H>-3bd/(1+2d^2)$, а значит условие устойчивости для отрицательной нелинейности, $H<-3bd/(1+2d^2)$, не выполняется, и, как видно из рисунков, мы наблюдаем рассеяние импульсов огибающей со временем.

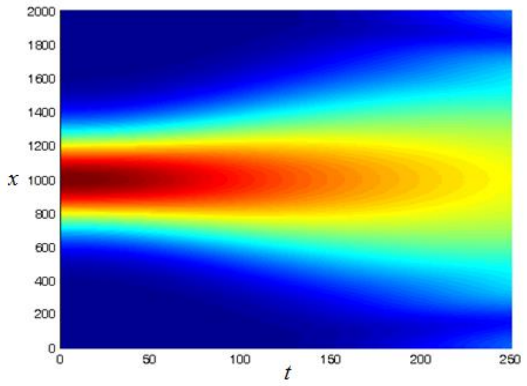

Рис. 1. Эволюция гауссова импульса огибающей при $A=2$, $l=2$; β=0.5, γ=0

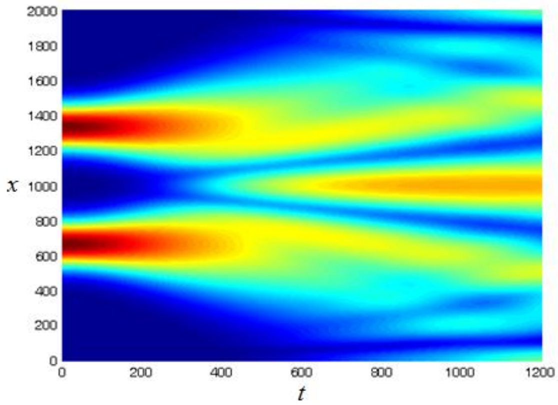

Рис. 2. Эволюция гауссова 2-импульсного возмущения огибающей при $A=1$, $l=4$; β=0.5, γ=0

На рис. 3 представлены два примера результатов эволюции гауссова импульса в нестационарной среде при отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости $H<-3bd/(1+2d^2)$ выполняется. В результате эволюции при этом наблюдается возникновение из начального уединенного импульса мощных устойчивых пульсаций типа бризеров.

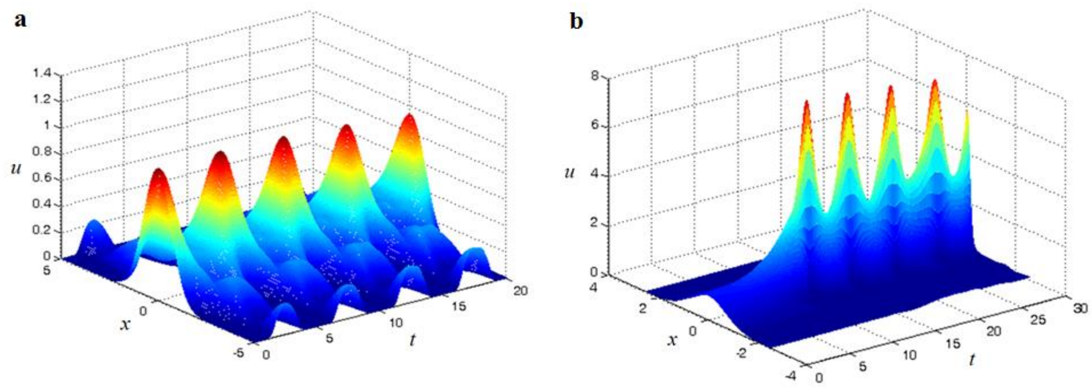

Рис. 3. Эволюция гауссова импульса огибающей в нестационарной среде при α, $f'=0$: a) β = 0.5, $\gamma=-1+0.01\sin 2\pi t$; b) γ = −1, β(t) = − 0.5 for $t\le 5$ and $\beta(t)=0.5(1+0.2\sin 2\pi t)$ for $t>5$; случаи отрицательной нелинейности

Примеры взаимодействия солитоноподобных начальных импульсов вида

$$u(x,0)=A[\mathrm{sch}(x)+\mathrm{sch}(x-s/2)+\mathrm{sch}(x+s/2)],$$
$$u(x,0)=A[\mathrm{sch}(x-s/2)+\mathrm{sch}(x+s/2)] \tag{4}$$

при отрицательной нелинейности в рамках модели GNLS для случая стационарной среды приведены на рис. 4, 5, соответственно. В первом случае, условие устойчивости не выполняется, и мы наблюдаем на первом этапе возникновение одного мощного импульса из 3-импульсного начального возмущения и далее, со временем, его распад на два импульса малой амплитуды. Во втором случае, условие устойчивости выполнено, и имеет место устойчивая эволюция 2-импульсного возмущения. В численных экспериментах было также установлено, что при слабой отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости выполняется, переход от устойчивой эволюции к режиму устойчивых пульсаций (бризеров) происходит при уменьшении начального расстояния s в (4) между импульсами.

Детальному численному исследованию задач эволюции и взаимодействия 2D и 3D импульсов в модели 3GNLS посвящены работы [3, 7-9].

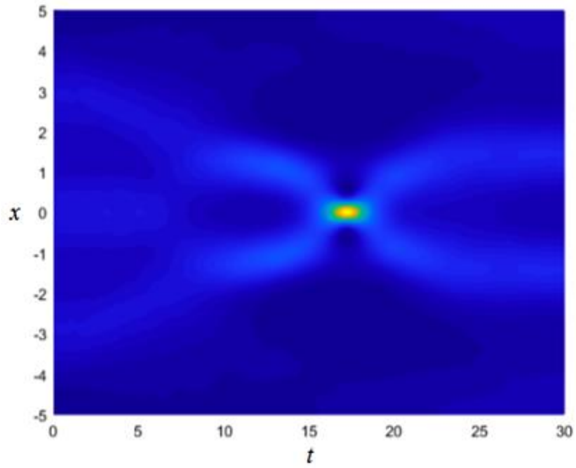

Рис. 4. Взаимодействие трех импульсов GNLS при $\gamma = -1$, $\beta = 0.25$; случай слабой отрицательной нелинейности

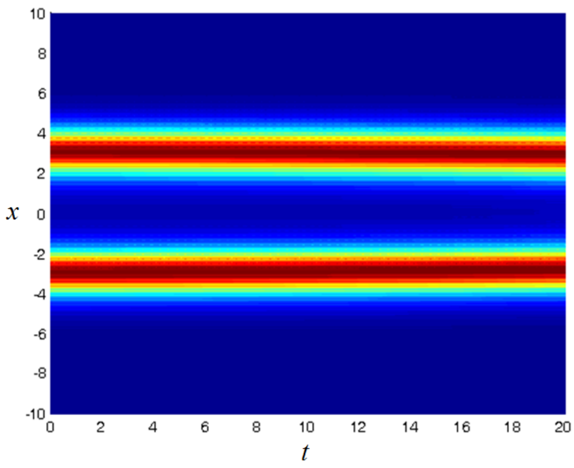

Рис. 5. Отсутствие взаимодействия импульсов GNLS при $\gamma = -1$, $\beta = 0.05$; случай отрицательной нелинейности

Резюмируя результаты, отметим, что нами получены условия устойчивости солитоноподобных решений уравнения GNLS, подтвержденные численным исследованием случаев устойчивой и неустойчивой (с образованием бризеров) эволюции импульсов различной формы, и взаимодействия 2- и 3-импульсных структур, приводящего к формированию устойчивых и неустойчивых решений.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Список литературы

1. Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH & Co. KG, Berlin-Heidelberg. – 2005. – 303 p.
2. Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Problem of stability of multidimensional solutions of the BK class equations in space plasma // Advances in Space Research. – 2018. – V. 62. – P. 65-70.
3. Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J. Interaction of the multidimensional NLS solitons in non-uniform and nonstationary medium: modeling and stability problem // J. Astrophys. Aerospace Tech. – 2018. – V. 6. – P. 38.
4. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. О теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20. – С. 1064-1982.
5. Белашов В.Ю. Об устойчивости двумерных и трехмерных солитонов в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320, № 1. – С. 85-89.
6. Белашов В.Ю. Проблема устойчивости трехмерных альфвеновских волн, распространяющихся в замагниченной плазме // Докл. Акад. Наук. – 1999. – Т. 366 (4). – С. 465-467.
7. Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Interaction of Multidimensional NLS Solitons in Nonuniform and Nonstationary Medium // 2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University. Proceedings. – IEEE Xplore Digital Library. – P. 535-538.
8. Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А., Рогава Дж.Л. Взаимодействие многомерных NLS-солитонов в неоднородной и нестационарной среде // Тр. XXVI Всеросс. откр. науч. конф. «Распространение радиоволн», Казань, 1-6 июля 2019 г.: в 2 т. Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2019. – Т. II. – С. 491-494.
9. Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А., Белашова Е.С. Динамика солитонов обобщенного уравнения NLS в неоднородной и нестационарной среде: эволюция и взаимодействие // Геомагн. и аэроном. – 2021. – Т. 61 (2). – С. 139-147.