УДК 514.12+514.14

КОМБИНИРОВАНИЕ МЕТОДОВ ЕВКЛИДОВОЙ, АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В. В. Шурыгин[1, [0000-0002-4325-214X]], **В. В. Шурыгин (мл.)**[2, [0000-0001-9771-1447]]

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
[1]Vadim.Shurygin@kpfu.ru, [2]1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Аннотация

Цель работы – продемонстрировать, как методы одной из геометрий, указанных в заголовке, могут использоваться при решении задач, сформулированных в рамках другой геометрии. В частности, показано, как при решении задачи, сформулированной в рамках аффинной или проективной геометрии, может использоваться подходящим образом введенное скалярное произведение.

Ключевые слова: *Аффинная геометрия, векторное произведение, гипербола, двойственности принцип, евклидово пространство, косое произведение векторов, парабола, поляра, проективная геометрия, скалярное произведение, эллипс*

Проективным пространством размерности n над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ называется [1, 13] тройка $(P_n, \mathbf{V}_{n+1}, p)$, состоящая из некоторого множества P_n векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ размерности $n + 1$ над полем $\mathbf{R}$ и сюръективного отображения p: $\mathbf{V}_{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\} \to P_n$, такого, что $p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{w})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$. Элементы множества P_n называются точками проективного пространства. При этом говорят, что отображение p задает на множестве P_n структуру проективного пространства.

Взаимно однозначное отображение α: $P'_n \to P_n$ называется изоморфизмом проективных пространств, если существует изоморфизм ассоциированных векторных пространств $\tilde{\alpha}$: $\mathbf{V}'_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$, такой, что $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ p'$. Все проективные пространства одной размерности изоморфны. Изоморфизмы α: $P_n \to P_n$ пространства P_n на себя называются проективными преобразованиями пространства P_n.

В качестве модели проективного пространства размерности n можно взять множество одномерных подпространств векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ или фактормножество $P_n = \mathbf{V}_{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}/\sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ определяется следующим образом: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$. В этом случае точками проективного пространства P_n являются классы эквивалентных векторов $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{y} \in \mathbf{V}_{n+1} \mid \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}$.

Группа проективных преобразований $GP(P_n)$ пространства P_n индуцируется группой линейных преобразований $GL(\mathbf{V}_{n+1})$ векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$. Группа $GP(P_n)$ изоморфна факторгруппе $GL(\mathbf{V}_{n+1})/H$ группы $GL(\mathbf{V}_{n+1})$ по нормальной подгруппе H, состоящей из гомотетий $\lambda \cdot \mathrm{id}$: $\mathbf{x} \longmapsto \lambda\mathbf{x}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$.

Одномерные подпространства, принадлежащие n-мерному подпространству $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}_{n+1}$, образуют гиперплоскость P_{n-1} в P_n. Выделение подгруппы $G(P_{n-1})$ в $GP(P_n)$, состоящей из проективных преобразований, по отношению к которым гиперплоскость P_{n-1} является инвариантной, определяет на множестве $A_n = P_n \backslash P_{n-1}$ структуру n-мерного аффинного пространства. Это аффинное пространство A_n можно реализовать как гиперплоскость $\pi = \mathbf{a} + \mathbf{V}_n$, $\mathbf{a} \notin \mathbf{V}_n$, в пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$ (см. рис. 1).

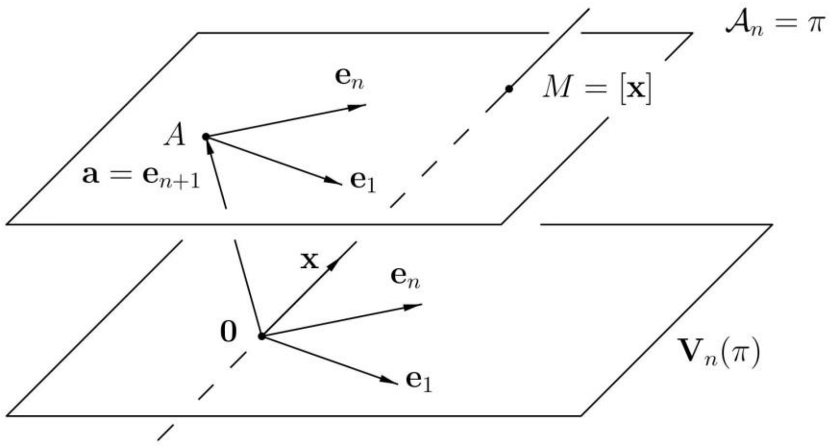

Рис. 1.

Всякий базис $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n + 1$, в векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированном с проективным пространством P_n, определяет проективную систему координат в P_n, в которой точке $\mathbf{x} \in P_n$ относятся координаты x^α вектора $\mathbf{x}$, существенные с точностью до умножения на одно и то же не равное нулю вещественное число. Проективные координаты точки $\mathbf{x}$ называются однородными координатами и обозначаются следующим образом: $[x^1 : x^2 : \ldots : x^{n+1}]$. Проективной системе координат в P_n, определяемой базисом $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n + 1$, таким, что $\mathbf{e}_i \in \mathbf{V}_n$, $i = 1, \ldots, n$, а $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{a}$, соответствует аффинная система координат в π, определяемая репером $\{A, \mathbf{e}_i\}$. Гиперплоскость P_{n-1} при этом имеет уравнение $x^{n+1} = 0$, а проективное преобразование (в последующих формулах используется правило суммирования Эйнштейна, в соответствии с которым повторяющийся индекс означает суммирование) $y^i = a_j^i x^j + a^i_{n+1} x^{n+1}$, $y^{n+1} = x^{n+1}$, оставляющее гиперплоскость P_{n-1} на месте, индуцирует аффинное преобразование $y^i = a_j^i x^j + a^i_{n+1}$ в пространстве $A_n = \pi$.

Точками гиперплоскости P_{n-1} являются одномерные подпространства в пространстве $\mathbf{V}_n$, которое является одновременно и векторным пространством, ассоциированным с $A_n = \pi$. Поэтому множество P_{n-1} находится во взаимно однозначном соответствии со множеством $\mathbf{V}_n/\sim$ направлений в пространстве A_n. Это позволяет пополнять аффинное пространство A_n указанным множеством $\mathbf{V}_n/\sim$, превращая его в проективное пространство $P_n = A_n \cup \mathbf{V}_n/\sim$. Элементы из $\mathbf{V}_n/\sim$ называют несобственными точками пространства A_n. При этом параллельные прямые пространства A_n пополняются одной и той же несобственной точкой, а именно, точкой, которая является общим направлением этих прямых.

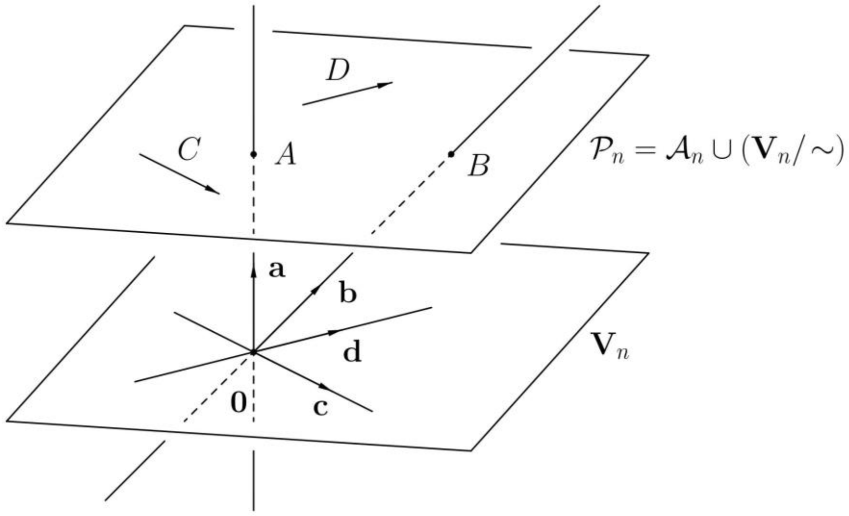

Рис. 2.

Если в пространстве $\mathbf{V}_n$ задать произвольную положительно определенную квадратичную форму $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и в группе $G(P_{n-1})$ выделить подгруппу, сохраняющую квадратичную форму $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, то тем самым это пространство окажется евклидовым векторным пространством $\mathbf{E}_n$, а пространство $A_n = \pi$ приобретет структуру n-мерного евклидова аффинного пространства E_n. Проективное пространство в этом случае можно представить как объединение евклидова аффинного пространства E_n и пространства направлений этого пространства: $P_n = E_n \cup \mathbf{E}_n/\sim$.

Используя описанную выше конструкцию, при решении геометрической задачи можно сразу предполагать, что геометрические объекты, присутствующие в ее формулировке, расположены в проективном пространстве P_n, наделенном структурой объединения $E_n \cup \mathbf{E}_n/\sim$, в котором несобственная гиперплоскость $\mathbf{E}_n/\sim$ и скалярное произведение в $\mathbf{E}_n$ могут выбираться произвольным образом и изменяться в процессе решения задачи. При этом использование скалярного произведения в аффинном или проективном пространстве, выбранного определенным образом, позволяет использовать в качестве инструмента симметрии, подобия и вращения, а также пользоваться всем объемом имеющихся знаний в области евклидовой геометрии. В свою очередь, расширение евклидова или аффинного пространства до проективного позволяет переходить к более общей формулировке задачи, в результате чего разные задачи аффинной или евклидовой геометрии оказываются разными вариантами одной задачи проективной геометрии. Использование проективного пространства позволяет также установить проективное происхождение некоторых соотношений между объектами в аффинной и евклидовой геометриях.

Различные возможности взаимодействия методов евклидовой, аффинной и проективной геометрий обсуждаются далее при рассмотрении конкретных примеров. Замечательной иллюстрацией изложенного выше может служить **теорема Паппа проективной геометрии** (см., например, [10], [8]):

Пусть ℓ и ℓ' — две различные прямые на проективной плоскости P_2. Пусть точки A, B и C принадлежат прямой ℓ, а точки A', B' и C' принадлежат прямой ℓ', и, кроме того, все указанные точки попарно различны и не совпадают с точкой пересечения прямых ℓ и ℓ'. Тогда точки U, V и W пересечения прямых $A'B$ и AB', $B'C$ и BC', $A'C$ и AC' соответственно лежат на одной прямой.

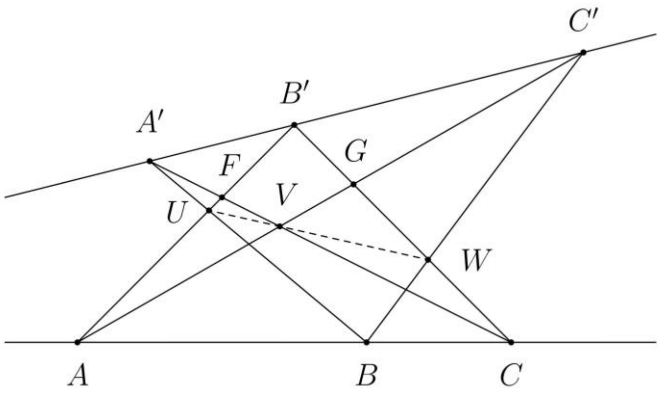

Рис. 3.

При доказательстве этой теоремы можно ([10], с. 72) выбрать модель проективной плоскости, в которой прямая ℓ' является несобственной прямой евклидовой плоскости (см. рис. 4). Принадлежность точки *W* прямой *UV* следует в этом случае из легко устанавливаемого подобия треугольников *UAW* и *VGW*.

Следует отметить, что одновременно оказываются доказанными все возможные варианты теоремы Паппа на аффинной плоскости, получаемые из проективной теоремы Паппа объявлением некоторой прямой (например, прямой *UV* или *FG*) несобственной.

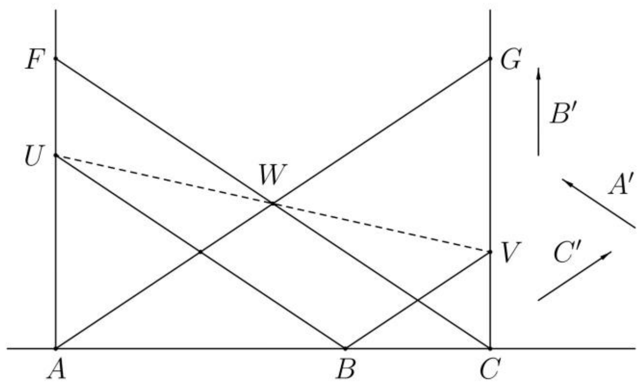

Рис. 4.

Далее, поскольку по принципу двойственности ([1], [13]) всякая прямая проективной плоскости P_2 представляет собой точку двойственной проективной плоскости P_2^*, а всякая точка проективной плоскости P_2 может рассматриваться одновременно и как прямая двойственной проективной плоскости P_2^*, и при этом соответствии сохраняется отношение инцидентности между точками и прямыми, то имеет место **теорема, двойственная теореме Паппа**, которую сформулируем, меняя местами в формулировке теоремы Паппа слова «точка» и «прямая»:

Пусть на проективной плоскости P_2 заданы две различные точки L и L' и попарно различные прямые a, b, c, a', b' и c', каждая из которых отлична от прямой LL'. Пусть a'∩b, a∩b', b'∩c, b∩c', a'∩c, a∩c' — точки пересечения прямых a' и b, a и b', b' и c, b и c', a' и c, a и c' соответственно. Пусть, далее, u — прямая, проходящая через точки a'∩b и a∩b', v — прямая, проходящая через точки b'∩c и b∩c', a w — прямая, проходящая через точки a'∩c и a∩c'. Тогда прямые u, v и w пересекаются в одной точке.

Покажем, как в рамках обсуждаемой методики двойственная теорема Паппа может быть доказана независимо. Тем самым будут заново доказаны и теорема Паппа, и все аффинные варианты этих двух теорем.

Для доказательства двойственной теоремы Паппа, полагая прямую *LL'* несобственной, можно в качестве прямых *c*, *b* и *a* взять на евклидовой плоскости с прямоугольной системой координат ось абсцисс и две параллельные прямые с уравнениями $y = p$ и $y = q$ соответственно, а в качестве прямых *a'*, *b'* и *c'* — ось ординат и две параллельные прямые с уравнениями $x = r$ и $x = s$ (см. рис. 5). Прямые *u*, *v* и *w* при этом будут иметь соответственно уравнения

$$(q - p)x - ry + pr = 0, \quad qx - sy = 0 \quad \text{и} \quad px + (r - s)y - pr = 0.$$

Принадлежность прямых *u*, *v* и *w* одному пучку следует из обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов этих уравнений.

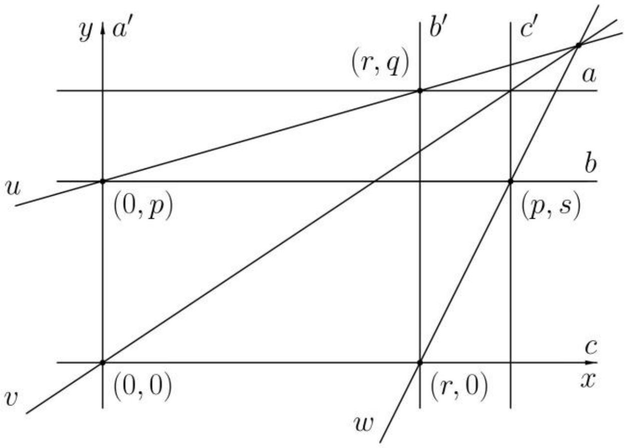

Рис. 5.

Можно сравнить приведенные выше доказательства с доказательствами, использующими только технику проективной геометрии, приведенными в книгах [4] и [8].

Аналогичным образом методами евклидовой геометрии может быть доказана **теорема Дезарга** на проективной плоскости:

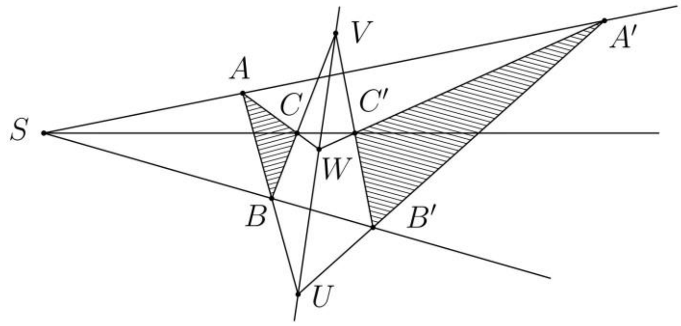

Рис. 6.

Пусть на проективной плоскости P_2 заданы два треугольника ABC и A'B'C', такие, что все точки A, B, C, A', B', C' различны, а прямые AA', BB' и CC' различны и пересекаются в одной точке S. Тогда точки U, V и W пересечения прямых AB и A'B', BC и B'C', AC и A'C' соответственно лежат на одной прямой.

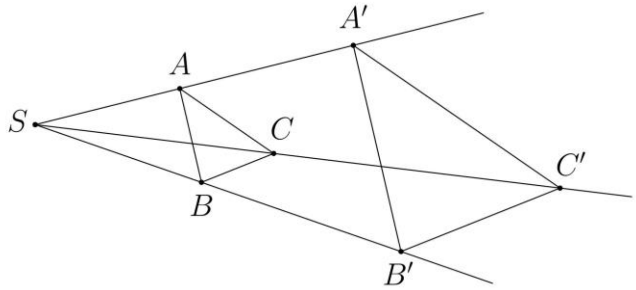

Рис. 7.

Полагая прямую $\ell = UW$ несобственной прямой евклидовой плоскости $E_2 = P_2 \setminus \ell$, приходим к ситуации, изображенной на рис. 7, где $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. Параллельность прямых BC и $B'C'$ следует из гомотетичности треугольников ABC и $A'B'C'$.

Еще одним примером использования евклидовой техники при решении проективной (аффинной) задачи может служить **теорема Сильвестра** (см. [2], с. 329, [5], с. 105, а также [13], с. 29):

Пусть на проективной плоскости заданы n точек, не лежащих на одной прямой. Тогда существует прямая, на которой лежат ровно две из этих точек.

Выбором произвольной прямой, на которой не лежит ни одна из данных точек, в качестве несобственной и заданием на дополнении к этой прямой произвольного скалярного произведения задача превращается в задачу на евклидовой плоскости, где для ее решения можно использовать расстояния между точками и прямыми. Пусть $M = \{M_1, \ldots, M_n\}$ — множество данных точек, а $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$ — множество прямых, на которых лежат по крайней мере две из данных точек. Вычислим все расстояния от точек из множества M до не содержащих их прямых из L и выберем из них наименьшее. Пусть это расстояние от точки M_i до прямой M_jM_k. Тогда прямая M_jM_k удовлетворяет условиям теоремы (см. детали в [5] и [13]). Доказательство теоремы Сильвестра, использующее только средства аффинной геометрии, приведенное на с. 262–264 книги [5], намного сложнее. Приведя оба доказательства, Г.С.М. Кокстер, автор книги [5], однако отдает предпочтение доказательству, использующему только внутренние для аффинной геометрии средства, отмечая (с. 262), что использовать понятие расстояния в доказательстве теоремы Сильвестра — «это то же самое, что раскалывать миндаль кузнечным молотом».

Многие утверждения геометрии эллипса, гиперболы и параболы на евклидовой плоскости являются следствиями простых свойств овальной кривой второго порядка на проективной плоскости. Рассмотрим в этой связи следующее утверждение (см., например, [12], задачи 53 и 56, [9], задача 643):

Пусть Φ — эллипс, гипербола или парабола, а прямая ℓ, проведенная через фокус F кривой Φ, пересекает эту кривую в точках M_1 и M_2. Тогда касательные к Φ в точках M_1 и M_2 пересекаются в точке, принадлежащей директрисе кривой Φ, соответствующей фокусу F.

При расширении евклидовой плоскости E_2 до проективной плоскости P_2 кривая Φ превращается в овальную кривую второго порядка Φ', имеющую в проективных (однородных) координатах уравнение $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$, α, $\beta = 1, 2, 3$. Кривая Φ' задает взаимно однозначное полярное соответствие a: $P_2 \to P_2^*$, $a([\mathbf{x}]) = [\mathbf{u}]$, где $u_\beta = a_{\alpha\beta}x^\alpha$ ([1], с. 60). Прямая $[\mathbf{u}]$, состоящая из всех точек, сопряженных точке [**x**] относительно *Φ′*, называется полярой точки [**x**]. При этом полярой точки [**x**], лежащей на *Φ′*, является касательная к *Φ′* в точке [**x**]. Утверждение теперь следует из легко проверяемого факта, что директриса кривой *Φ* является полярой соответствующего фокуса. Собственно, это свойство и объясняет наилучшим образом наличие директрис у эллипса, гиперболы и параболы, хотя они появляются естественным образом и при определении этих кривых как конических сечений с использованием сфер Данделена (см. [6], [12]). Обсуждаемое утверждение можно доказать, и используя стандартную технику аналитической геометрии евклидовой плоскости (см. [12], с. 133 и 142).

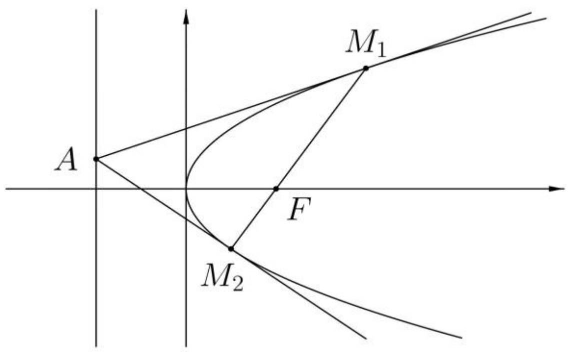

Рис. 8.

Если в задаче присутствует несколько пар параллельных прямых, то весьма вероятно, что для ее решения окажется полезным введение несобственной прямой и последующее использование методов проективной геометрии. Показательной в этом отношении является следующая задача ([9], задача 533):

Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны. Доказать, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

В формулировке задачи не присутствуют понятия евклидовой геометрии, поэтому она является аффинной. Если расширить аффинную плоскость до проективной плоскости, то все три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника окажутся принадлежащими несобственной прямой. По обратной теореме Паскаля ([1], с. 72, [3], с. 110) в этом случае существует единственная овальная кривая, проходящая через все вершины шестиугольника. Середина стороны шестиугольника является четвертой гармонической по отношению к принадлежащим этой стороне вершинам и точке, лежащей на несобственной прямой (точке пересечения параллельных сторон). Отсюда следует, что прямая, соединяющая середины противоположных (параллельных) сторон шестиугольника, является полярой общей несобственной точки этих прямых. Поляры точек, принадлежащих несобственной прямой, проходят через полюс этой прямой (точку, чьей полярой является несобственная прямая). Если шестиугольник, рассматриваемый в задаче, предполагается выпуклым, то описанная вокруг него овальная кривая (проективная кривая второго порядка) является эллипсом, и центр этого эллипса является точкой пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон шестиугольника (см. рис. 9).

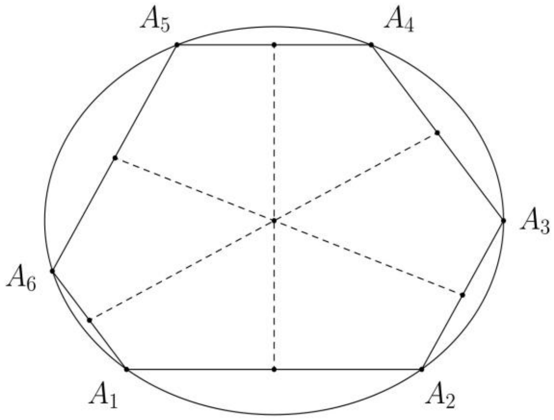

Рис. 9.

Следующие примеры посвящены применению техники евклидовой геометрии в задачах, являющихся в своей основе аффинными.

Начнем с совсем простой задачи, которая, однако, удобна для демонстрации метода:

Доказать, что точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции ABCD лежит на прямой, проходящей через середины оснований AB и CD.

Пусть *O* — середина *AB*, *E* — середина *CD*, а *S* — точка пересечения боковых сторон трапеции. Введем скалярное произведение на плоскости (если предполагается, что трапеция задана на евклидовой плоскости, то это будет новое скалярное произведение!), по отношению к которому $|\overrightarrow{SA}|=|\overrightarrow{SB}|$ (см. рис. 10). Но тогда трапеция *ABCD* оказывается равнобочной трапецией на евклидовой плоскости, которая симметрична относительно прямой *OE*.

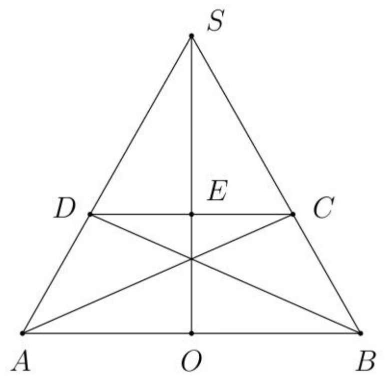

Рис. 10.

Следующая задача кажется совсем не похожей на предыдущую, однако ее решение основывается на том же методе:

Прямая ℓ пересекает ветвь гиперболы в точках A_1 *и* A_2*, а ее асимптоты – в точках* B_1 *и* B_2*. Доказать, что длины отрезков* A_1B_1 *и* A_2B_2 *равны*.

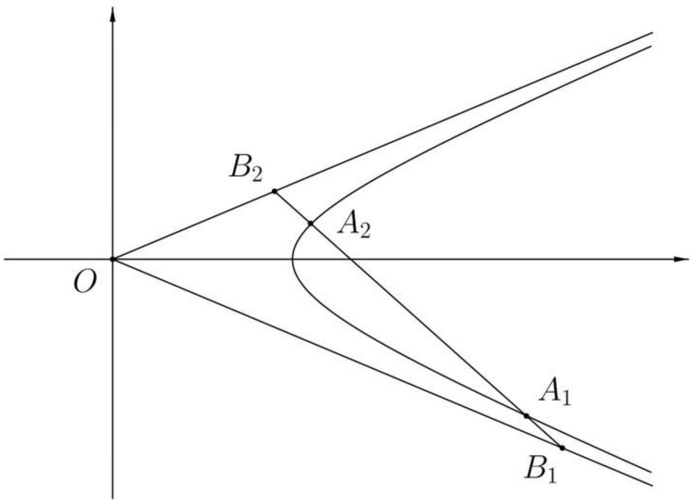

Рис. 11.

Обычно задачи такого типа формулируются для кривых второго порядка, заданных каноническим уравнением на евклидовой плоскости, однако в формулировке этой задачи скалярное произведение участвует только в утверждении о равенстве модулей векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$. Очевидно, равенство модулей коллинеарных векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{B_2A_2}$ эквивалентно равенству самих этих векторов. Равенство же векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{B_2A_2}$ от выбора скалярного произведения уже не зависит. Поэтому задача по своему существу является аффинной. Для ее решения достаточно ввести на плоскости (новое!) скалярное произведение, по отношению к которому векторы $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB_2}$ имеют одинаковую длину. При этом хорда B_1B_2 окажется перпендикулярной оси гиперболы, а отрезки A_1B_1 *и* A_2B_2 окажутся симметричными относительно оси гиперболы.

Аналогичным образом решается задача ([11], задача 469):

Доказать, что точка касания делит пополам отрезок касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами.

Замечательным является то, что в доказательстве не приходится использовать уравнения касательных, а только то, что свойство прямой быть касательной к кривой не зависит от выбора скалярного произведения на аффинной плоскости.

Площадь фигуры на плоскости, как и объем тела в n-мерном пространстве, являются в существенном аффинными понятиями. Это объясняется тем, что все n-линейные кососимметричные формы на n-мерном векторном пространстве пропорциональны ([7], с. 32–33). В частности, пропорциональны косые произведения векторов (см., например, [12], раздел 6), соответствующие различным скалярным произведениям на векторной плоскости. Поэтому, если поменять на евклидовой плоскости скалярное произведение, то площади всех фигур умножатся на одно и то же число. Этим объясняется то, что при решении следующей задачи можно поменять скалярное произведение на плоскости.

Задача. *Доказать, что касательные к гиперболе образуют с асимптотами равновеликие треугольники*.

Пусть гипербола задана каноническим уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Введем новое скалярное произведение на плоскости, принимая за единичные векторы правого ортонормированного базиса на плоскости направляющие векторы асимптот $\mathbf{i}' = ½(a\mathbf{i} - b\mathbf{j})$ и $\mathbf{j}' = ½(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$. В репере $\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ уравнение гиперболы примет вид $xy = 1$ (штрихи у координат опускаем). Если точка касания имеет координаты (x_0, y_0), то точки пересечения касательной с осями координат (в соответствии с утверждением предыдущей задачи) имеют координаты: $(2x_0, 0)$ и $(0, 2y_0)$. Следовательно, площадь треугольника, сторонами которого являются касательная и асимптоты, равна $2x_0y_0 = 2 = \text{const}$.

Как было отмечено выше, свойство прямой быть касательной к кривой второго порядка является аффинным свойством и не зависит от выбора скалярного произведения на аффинной плоскости. Но алгебраические условия касания могут быть представлены и в терминах скалярного произведения (углов и расстояний). В случае эллипса (а также и эллипсоидов в пространстве произвольного числа измерений) удобно выбрать (заменить) скалярное произведение таким образом, чтобы по отношению к новому скалярному произведению эллипс оказался окружностью. Примером может служить доказательство следующего утверждения ([11], задача 411):

Прямая $Ax + By + C = 0$ *касается эллипса* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *тогда и только тогда, когда* $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

Для вывода указанного условия можно ввести скалярное произведение на плоскости, по отношению к которому векторы $\mathbf{i}' = \{a, 0\}$ и $\mathbf{j}' = \{0, b\}$, идущие из центра эллипса к его вершинам, образуют ортонормированный базис. По отношению к новому скалярному произведению эллипс является окружностью радиуса единица и имеет в системе координат, определяемой репером $\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, уравнение $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Старые и новые координаты связаны соотношениями $x = ax'$, $y = by'$. Поэтому прямая $Ax + By + C = 0$ в новой системе координат имеет уравнение $Aax' + Bby' + C = 0$. Она будет касаться окружности $(x')^2 + (y')^2 = 1$ тогда и только тогда, когда находится на расстоянии единица от центра $O(0, 0)$ окружности:

$$\frac{|C|}{\sqrt{(Aa)^2 + (Bb)^2}} = 1.$$

Аналогичным образом доказывается, что *плоскость* $Ax + By + Cz + D = 0$ *касается эллипсоида* $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ *тогда и только тогда, когда* $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 = D^2$, *а гиперплоскость* $\sum_{i=1}^{n} A_i x^i + A_{n+1} = 0$ *в n-мерном евклидовом пространстве* E_n *касается эллипсоида* $\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2/(a^i)^2 = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{i=1}^{n} (A_i a_i)^2 = A_{n+1}^2$.

Условием коллинеарности двух векторов в трехмерном пространстве является обращение в нуль их векторного произведения, а условием компланарности трех векторов является обращение в нуль их смешанного произведения. Векторное и смешанное произведения являются соответственно билинейной и трилинейной операциями, их использование позволяет алгебраизовать геометрическую задачу (в этом и состоит метод аналитической геометрии). В последующих задачах рассматривается применение векторного и смешанного произведений к решению геометрических задач на плоскости, которые в своей основе являются аффинными.

Задача ([9], задача 46): *Четыре из пяти прямых, соединяющих вершины пятиугольника с серединами противоположных сторон, пересекаются в точке S. Доказать, что и пятая прямая проходит через точку S.*

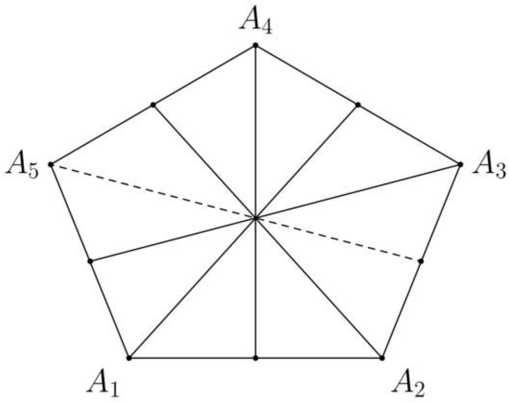

Рис. 12.

Если плоскость с пятиугольником поместить в трехмерное евклидово пространство E_3 как плоскость π этого пространства и выбрать точку O, используемую как начало радиус-векторов в этом пространстве (начало координат в случае, если какая-либо прямоугольная система координат в E_3 задана), не принадлежащей плоскости, содержащей пятиугольник, то условием коллинеарности трех точек на плоскости π будет являться обращение в нуль смешанного произведения радиус-векторов этих точек. Пусть $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, — радиус-вектор вершины A_i пятиугольника, B_i — середина стороны, противоположной вершине A_i, а $\mathbf{s}$ — радиус-вектор некоторой точки S плоскости π. Условия того, что прямые A_iB_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, проходят через точку S, имеют соответственно вид

$$([\mathbf{r}_1, (\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)/2], \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad ([\mathbf{r}_2, (\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5)/2], \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad ([\mathbf{r}_3, (\mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_1)/2], \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

$$([\mathbf{r}_4, (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2], \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad ([\mathbf{r}_5, (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/2], \mathbf{s}) = \mathbf{0}.$$

Сумма векторных произведений, находящихся в левых частях этих равенств, равна тождественно нулю. Поэтому, если выполняются четыре из них, то выполняется и пятое.

Задача ([9], задача 47): *Четыре диагонали пятиугольника параллельны четырем его соответствующим сторонам. Доказать, что и пятая диагональ параллельна соответствующей стороне*.

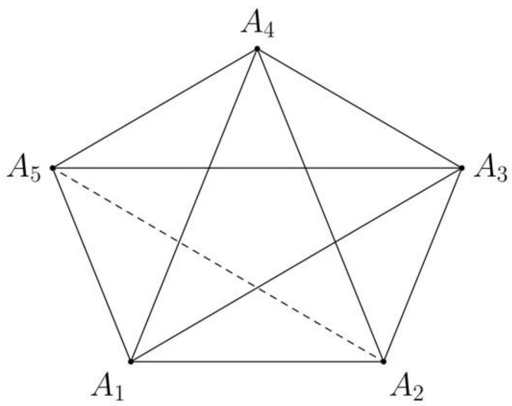

Рис. 13.

Если плоскость с пятиугольником поместить в трехмерное евклидово пространство E_3, как это было осуществлено при обсуждении решения предыдущей задачи, то условия параллельности сторон и диагоналей можно представить в виде:

$$[\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4] = \mathbf{0},$$
$$[\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_1] = \mathbf{0}.$$

Сумма левых частей полученных равенств равна нулю. Поэтому, если выполняются четыре из них, то выполняется и пятое.

Отметим, что при решении последних двух задач можно использовать и косое произведение векторов на плоскости. При решении второй задачи можно также, как это осуществлялось ранее, ввести (новое) скалярное произведение на плоскости, по отношению к которому $|\overrightarrow{A_1A_4}| = |\overrightarrow{A_2A_4}|$ (см. рис. 13, на котором диагонали, параллельные соответствующим сторонам, изображены сплошными линиями, а пятая диагональ — пунктирной). Тогда пятиугольник окажется симметричным относительно перпендикуляра, опущенного из вершины A_4 на сторону A_1A_2, а четырехугольник $A_1A_2A_3A_5$ окажется равнобочной трапецией. Из симметрии пятиугольника следует, что если $\overrightarrow{A_1A_3} \parallel \overrightarrow{A_5A_4}$, то и $\overrightarrow{A_2A_5} \parallel \overrightarrow{A_3A_4}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия II. М.: Просвещение, 1975. 367 с.
2. *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984. 560 с.
3. *Берже М.* Геометрия. Т. 2. М.: Мир, 1984. 368 с.
4. *Кокстер Х.С.М.* Действительная проективная плоскость. М.: ГИФМЛ, 1959. 280 с.
5. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию. М.: Наука, 1966. 648 с.
6. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969. 698 с.
7. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
8. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979. 336 с.
9. Сборник задач по геометрии. Под ред. В.Т. Базылева. М.: Просвещение, 1980. 240 с.
10. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 160 с.
11. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964. 336 с.
12. *Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)* Аналитическая геометрия I. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть I. Аналитическая геометрия плоскости. Казань: КФУ, 2018. 154 с.
13. *Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)* Аналитическая геометрия III. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть III. Многомерные пространства. Гиперповерхности второго порядка. Казань: КФУ, 2014. 160 с.

COMBINING METHODS OF EUCLIDEAN, AFFINE, AND PROJECTIVE GEOMETRIES IN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

V. V. Shurygin[1, [0000-0002-4325-214X]], **V. V. Shurygin, jr.**[2, [0000-0001-9771-1447]]
Kazan Federal University, Kazan
[1]Vadim.Shurygin@kpfu.ru, [2]1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Abstract

The aim of the paper is to demonstrate how the techniques of one of the geometries indicated in the title can be used for solving problems formulated in the framework of one of the other geometries. In particular, it is shown how problems formulated in the framework of affine or projective geometry can be solved with an appropriate choice of Euclidean scalar product.

***Keywords**: Affine geometry, cross product, duality principle, ellipse, Euclidean geometry, hyperbola, parabola, polar, projective geometry, scalar product, skew product of vectors*

REFERENCES

1. *Bazylev V.T., Dunichev K.I.* Geometriya II. M.: Prosveshchenie, 1975. 367 p.
2. *Berger M.* Geometry. V. 1. Springer, 1987. 432 p. (Russian translation)
3. *Berger M.* Geometry. V. 2. Springer, 1987. 406 p. (Russian translation)
4. *Coxeter H.S.M.* The real projective plane. Springer, 1993. 227 p. (Russian translation)
5. *Coxeter H.S.M.* Introduction to Geometry. NY.: John Wiley & Sons, 1989. 496 p. (Russian translation)
6. *Modenov P.S.* Analiticheskaya geometriya. M.: MGU, 1969. 698 p.
7. *Norden A.P.* Prostranstva affinnoy svyaznosti. M.: Nauka, 1976. 432 p.
8. *Postnikov M.M.* Lektsii po geometrii. Semestr I. Analiticheskaya geometriya. M.: Nauka, 1979. 336 p.
9. Sbornik zadach po geometrii. Pod red. V.T. Bazyleva. M.: Prosveshchenie, 1980. 240 p.

10. *Hartshorne R.* Foundations of projective geometry. ISHI Press, 2009. 190 p. (Russian translation)

11. *Zuberbiller O.N.* Zadachi i uprazhneniya po analiticheskoy geometrii. M.: Nauka, 1964. 336 p.

12. *Shurygin V.V., Shurygin V.V., jr.* Analiticheskaya geometriya I. Uchebnoe posobie k kursu «Analiticheskaya geometriya». Chast' I. Analiticheskaya geometriya ploskosti. Kazan: KFU, 2018. 154 p.

13. *Shurygin V.V., Shurygin V.V., jr.* Analiticheskaya geometriya III. Uchebnoe posobie k kursu «Analiticheskaya geometriya». Chast' III. Mnogomernye prostranstva. Giperpoverkhnosti vtorogo poryadka. Kazan: KFU, 2014. 160 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУРЫГИН Вадим Васильевич – профессор, кафедра геометрии, Казанский федеральный университет, Казань.

Vadim Vasilievich SHURYGIN – Professor of the Chair of Geometry, Kazan Federal University, Kazan.

Email: Vadim.Shurygin@kpfu.ru

ORCID: 0000-0002-4325-214X

ШУРЫГИН Вадим Вадимович – доцент, кафедра геометрии, Казанский федеральный университет, Казань.

Vadimovich SHURYGIN Vadim – Associate Professor of the Chair of Geometry, Kazan Federal University, Kazan.

Email: 1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

ORCID: 0000-0001-9771-1447

Материал поступил в редакцию 7 марта 2021 года