

А.М. БИКЧЕНТАЕВ, Х. ФАУАЗ

РАЗНОСТИ И КОММУТАТОРЫ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^* -АЛГЕБРАХ

Аннотация. Установлено подобие некоторых трипотентов и идемпотентов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Получены новые результаты о разностях и коммутаторах идемпотентов P и Q . В унитарном случае с разностью $P - Q$ нами связана разность $A_{P,Q}$ другой пары идемпотентов. Пусть φ — след на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} , \mathfrak{M}_φ — идеал определения следа φ . Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$. В некоторых случаях это позволило установить равенство $\varphi(P - Q) = 0$. Получены новые тождества для пар идемпотентов и для пар изоклинных проекторов. Доказано, что каждый оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, представляется в виде суммы не более чем пятидесяти коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Показано, что коммутатор идемпотента и произвольного элемента из алгебры \mathcal{A} не может быть ненулевым идемпотентом. Если \mathcal{H} сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T = \sum_{k=1}^4 [A_k, B_k]$, где $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, идемпотент, трипотент, изоклинные проекторы, коммутатор, подобие, C^* -алгебра, след, определитель.

УДК: 517.98

DOI:

ВВЕДЕНИЕ

Пусть P, Q — идемпотенты в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Различные свойства (обратимость, фредгольмовость, ядерность, положительность и др.) разности $X = P - Q$ были исследованы в работах [1]–[6]. Каждый трипотент ($A = A^3$) является разностью $P - Q$ некоторых идемпотентов P и Q с $PQ = QP = 0$ ([7], предложение 1). Поэтому трипотенты наследуют некоторые свойства идемпотентов [8]. Если X является ядерным оператором, то следы всех нечетных степеней X совпадают:

$$\operatorname{tr}(P - Q) = \operatorname{tr}((P - Q)^{2n+1}) = \dim \ker(X - I) - \dim \ker(X + I) \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где I — тождественный оператор в \mathcal{H} . Если X является компактным оператором, то правая часть (1) дает естественную “регуляризацию” для следа и показывает, что это всегда является целым числом [9], [6]. В ([10], теорема 3) установлен C^* -аналог утверждения: пусть φ — след на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} , \mathfrak{M}_φ — идеал определения следа φ и трипотенты $P, Q \in \mathcal{A}$; если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$.

Поступила в редакцию 04.09.2020, после доработки 04.09.2020. Принята к публикации 24.12.2020.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

Пары идемпотентов играют важную роль в квантовом эффекте Холла (the Quantum Hall Effect, [11]). Для идемпотентов P, Q, R с ядерными $P - Q$ и $Q - R$ из равенства $\text{tr}(P - Q) = \text{tr}(P - R) + \text{tr}(R - Q)$ и (1) имеем

$$\text{tr}((P - Q)^3) = \text{tr}((P - R)^3) + \text{tr}((R - Q)^3). \quad (2)$$

Физическое понимание аддитивности в (2) приходит из интерпретации $\text{tr}((P - Q)^3)$ как *проводимости Холла* (the Hall conductance). Аддитивность (кубического) уравнения в (2) может быть рассмотрена как вариант закона Ома (the Ohm's law) об аддитивности проводимости [12]. В ([13], теорема 1) получен C^* -аналог квантового эффекта Холла и доказана вещественность следа разностей широкого класса симметрий из C^* -алгебры (см. следствия 2 и 3 в [13]). Для C^* -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ X \in \mathcal{A} : X = \sum_{n \geq 1} [X_n, X_n^*] \text{ для } (X_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \right\},$$

ряд $\|\cdot\|$ -сходится. В ([14], теорема 2.6) доказано, что \mathcal{A}_0 совпадает с нуль-пространством всех конечных следов на \mathcal{A}^{sa} ; для широкого класса C^* -алгебр, содержащего все W^* -алгебры, можно обойтись конечными суммами указанного вида [15]. Если $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то 1) $QP \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ тогда и только тогда, когда $[P, Q]$ отображает подпространство $P\mathcal{H}$ в подпространство $\text{Ker } Q$ ([16], гл. II, задача 241); 2) P и Q *эквивалентны* тогда и только тогда, когда $P - Q = [X, Y]$ и $P + Q = XY + YX$ для некоторых $X, Y \in \mathcal{A}$ ([17], с. 97). В [18] в терминах конечных сумм коммутаторов описаны унитарные C^* -алгебры, на которых нет конечных нетривиальных следов.

В этой работе установлено подобие некоторых трипотентов и идемпотентов (теоремы 1 и 2). Получены новые результаты о разностях и коммутаторах идемпотентов P и Q . В унитарном случае с разностью $P - Q$ нами связана разность $A_{P,Q}$ другой пары идемпотентов. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$ (теорема 3). В некоторых случаях это позволило установить равенство $\varphi(P - Q) = 0$ (следствие 3). Получены новые тождества для пар идемпотентов и для пар изоклинных проекторов (лемма 6, теорема 5). Доказано, что каждый оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, представляется в виде суммы не более чем 50 коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (теорема 6). Если \mathcal{A} — алгебра, то $\{[P, X] : P \in \mathcal{A}^{\text{id}}, X \in \mathcal{A}\} \cap \mathcal{A}^{\text{id}} = \{0\}$ (теорема 7). Если \mathcal{H} сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T = \sum_{k=1}^4 [A_k, B_k]$, где $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы (теорема 8). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ с $P = P^2$, $X = [A, P]$. Тогда (i) если $k \in \mathbb{N}$ нечетно, то X^k является коммутатором; (ii) если $n \in \mathbb{N}$ нечетно, то $\det(X) = 0$ (следствие 6).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для алгебры \mathcal{A} через \mathcal{A}^{id} и \mathcal{A}^{tri} будем обозначать ее подмножества идемпотентов ($P^2 = P$) и трипотентов ($P^3 = P$) соответственно. Для $A, B \in \mathcal{A}$ определим их коммутатор $[A, B] = AB - BA$. Если \mathcal{A} унитарна, то через I обозначим единицу алгебры \mathcal{A} и пусть $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Формула $S_P = 2P - I$ устанавливает биекцию между множествами \mathcal{A}^{id} и \mathcal{A}^{sym} .

C^* -алгеброй называется комплексная банахова $*$ -алгебра \mathcal{A} такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^* -алгебры \mathcal{A} через \mathcal{A}^{pr} , \mathcal{A}^{sa} и \mathcal{A}^+ будем обозначать ее подмножества проекторов ($P^2 = P = P^*$), эрмитовых и положительных элементов соответственно. Проекторы $P, Q \in \mathcal{A}$ называются *изоклинными* (с углом $\theta \in (0, \pi/2)$), если $PQP = \cos^2 \theta P$ и $QRP = \cos^2 \theta Q$. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$. Для унитарной C^* -алгебры \mathcal{A} через \mathcal{A}^u и \mathcal{A}^{inv} будем обозначать ее подмножества унитарных и обратимых элементов соответственно.

W^* -алгеброй называется C^* -алгебра \mathcal{A} , имеющая преддвойственное банахово пространство \mathcal{A}_* : $\mathcal{A} \simeq (\mathcal{A}_*)^*$. Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство над полем \mathbb{C} , $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} . Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, то проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$, а $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp$ проектирует на $\overline{\text{lin}(P\mathcal{H} \cup Q\mathcal{H})}$. Любую C^* -алгебру можно реализовать как C^* -подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства \mathcal{H} (Гельфанд–Наймарк; см. [19], теорема 3.4.1).

Следом на C^* -алгебре \mathcal{A} называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, что $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ : \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi^{\text{sa}} = \text{lin}_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_\varphi^+, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \text{lin}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на \mathfrak{M}_φ , который будем обозначать той же буквой φ . W^* -алгебра называется *собственно бесконечной*, если на ней нет ненулевых нормальных конечных следов.

2. РАЗНОСТИ И КОММУТАТОРЫ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^* -АЛГЕБРАХ

Пусть \mathcal{A} — W^* -алгебра, $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ и $A = PQ$. Тогда существует симметрия $S \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ такая, что $SAS^{-1} = A^*$, см. ([20], гл. 4, упражнение 4.4). Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что $SAS^{-1} = A^*$, где оператор S сильно обратим в том смысле, что 0 не лежит в замыкании числового образа S . Тогда A подобен некоторому $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$, см. [21].

Лемма 1. Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра и $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$. Если A и B подобны, то A и A^* также подобны.

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ такой, что $A = T^{-1}BT$. Тогда $B = TAT^{-1}$ и для $S = T^*T \in \mathcal{A}^+$ имеем

$$A^* = (T^{-1}BT)^* = T^*B(T^{-1})^* = T^*B(T^*)^{-1} = T^*TAT^{-1}(T^*)^{-1} = SAS^{-1}. \quad \square$$

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{tri}}$. Тогда A и A^* подобны.

Доказательство. В силу теоремы 3 из [8] каждый $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{tri}}$ подобен некоторому трипотенту $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$. Теперь нужное утверждение вытекает из леммы 1. \square

Следующая лемма принадлежит математическому фольклору.

Лемма 2. Пусть \mathcal{A} — унитарная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Если $PQ = Q$ и $QP = P$ (соответственно $PQ = P$ и $QP = Q$), то P и Q подобны.

Доказательство. Положим

$$T = I - P + Q, \quad S = I + P - Q.$$

Тогда $TS = ST = I$ и $S = T^{-1}$. Очевидно, $SPS^{-1} = Q$ (соответственно $TPT^{-1} = Q$). \square

В условиях леммы 2 имеем $S_Q(P - Q)S_Q = Q - P$ и если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ с нечетным $n \in \mathbb{N}$, то определитель $\det(P - Q) = 0$ в силу теоремы об определителе произведения матриц и соотношения $\det(S_Q) \in \{-1, 1\}$.

Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра и $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Существует единственное разложение $P = \tilde{P} + Z$, где $\tilde{P} \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ и нильпотент $Z \in \mathcal{A}$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\tilde{P} = 0$, $\tilde{P}Z = Z$ ([22], теорема 1.3).

Теорема 2 (ср. с [23], лемма 16). Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра и $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $P = \tilde{P} + Z$ — описанное выше разложение. Тогда P, \tilde{P}, P^* подобны.

Доказательство. Поскольку $Z\tilde{P} = 0$ и $\tilde{P}Z = Z$, имеем $P\tilde{P} = \tilde{P}$ и $\tilde{P}P = P$. Поэтому P и \tilde{P} подобны в силу леммы 2. Поскольку $\tilde{P} \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$, идемпотенты P и P^* подобны в силу леммы 1. \square

Следствие 1. Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра. Для $S \in \mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $S \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$;
- (ii) $S = TUT^{-1}$ для некоторых $T \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и $U \in \mathcal{A}^{\text{sa}} \cap \mathcal{A}^{\text{u}}$.

Доказательство. (i) \Rightarrow (ii) Если $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то $P = T\tilde{P}T^{-1}$ для некоторого $T \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ в силу теоремы 2 или ([23], лемма 16). Поэтому

$$S_P = 2P - I = 2T\tilde{P}T^{-1} - I = T(2\tilde{P} - I)T^{-1},$$

т. е. можно выбрать $U = 2\tilde{P} - I$. \square

Определение. Пусть \mathcal{A} — унитарная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Положим

$$A_{P,Q} = S_Q P S_Q - S_P Q S_P.$$

Имеем $A_{Q,P} = A_{P^\perp, Q^\perp} = -A_{P,Q}$, $A_{P^\perp, Q} = -A_{P, Q^\perp} = I - S_P Q S_P - S_Q P S_Q$ и $A_{P,Q}(P-Q) = (P-Q)A_{P,Q}$. Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра и $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $P = \tilde{P} + Z$ — описанное выше разложение. Тогда $A_{\tilde{P}, P} = 3P - 3\tilde{P} = 3Z$.

Лемма 3. Пусть J — идеал в унитарной алгебре \mathcal{A} , $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda \neq -\mu$. Тогда

- (i) если $P - Q \in J$, то $A_{P,Q} \in J$;
- (ii) имеем $P, Q \in J \Leftrightarrow \lambda P + \mu Q \in J$.

Доказательство. (i). Имеем

$$A_{P,Q} = S_P(P-Q)S_P + S_Q(P-Q)S_Q - (P-Q) = 4QPQ - 4PQP + (P-Q). \quad (3)$$

В частности, $QPQ - PQP \in J$.

(ii), “ \Leftarrow ”. Имеем

$$P = \frac{\mu}{\lambda(\lambda + \mu)} P(\lambda P + \mu Q) \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} I - Q \right) \in J.$$

\square

Из (3) видно, что если $\{PQ, QP\} \cap \{0\} \neq \emptyset$ (или $\{P, Q\} \cap \{I\} \neq \emptyset$), то $A_{P,Q} = P - Q$.

Теорема 3. Пусть φ — след на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} . Если $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Напомним, что \mathfrak{M}_φ является идеалом в \mathcal{A} , причем $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ для всех $X \in \mathfrak{M}_\varphi$, $Y \in \mathcal{A}$ (см. [19], гл. 6, упражнение 6). В силу п. (i) леммы 3 получаем $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Поскольку

$$\varphi(S_P(P-Q)S_P) = \varphi(S_Q(P-Q)S_Q) = \varphi(P-Q),$$

имеем $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$ в силу линейности продолжения φ на \mathfrak{M}_φ , (3) и теоремы 3 из [10]. \square

Следствие 2. В условиях п. (i) теоремы 3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\varphi(A_{P,Q}^{2n+1}) = \varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из ([13], теорема 1) и (1) получаем

$$\varphi(A_{P,Q}^{2n+1}) = \varphi(A_{P,Q}) = \varphi(4QPQ - 4PQP + P - Q) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R},$$

поскольку $QPQ - PQP \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(QPQ - PQP) = 0$ (см. шаг 2 доказательства теоремы 1 из [13]). \square

Отметим, что п. (i) следующей теоремы обобщает п. (i) теоремы 3.2 из [24].

Теорема 4. Пусть φ — след на C^* -алгебре \mathcal{A} .

- (i) Если $X \in \mathcal{A}^{\text{tri}}$, $Y \in \mathcal{A}$ и $[X, Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi([X, Y]) = 0$.
- (ii) Если $X, Y \in \mathcal{A}$ и $[X, Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $[X^k, Y^n] \in \mathfrak{M}_\varphi$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$.
- (iii) Если $X, Y \in \mathcal{A}$ и $X - Y \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $[X^k, Y^n] \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi([X^k, Y^n]) = 0$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. (i). Шаг 1. Пусть $X \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Поскольку

$$XY - 2XYX + YX = X[X, Y] - [X, Y]X \in \mathfrak{M}_\varphi,$$

утверждение следует из представления

$$[X, Y] = X(XY - 2XYX + YX) - (XY - 2XYX + YX)X$$

и линейности продолжения φ на \mathfrak{M}_φ .

Шаг 2. Пусть $X \in \mathcal{A}^{\text{tri}}$ и $X = P - Q$ с $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $PQ = QP = 0$ (см. предложение 1 в [7]). Тогда $X^2 = P + Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и

$$[P, Y] + [Q, Y] = [X^2, Y] = X[X, Y] + [X, Y]X \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

По условию, $[P, Y] - [Q, Y] = [X, Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$. Из двух последних соотношений имеем $[P, Y], [Q, Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$ и в силу шага 1 и линейности продолжения φ на \mathfrak{M}_φ получаем

$$\varphi([X, Y]) = \varphi([P, Y]) - \varphi([Q, Y]) = 0 - 0 = 0.$$

(ii) Воспользуемся методом математической индукции. Для всех $k \geq 2$ имеем

$$[X^k, Y] = X[X^{k-1}, Y] + [X, Y]X^{k-1} \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Для всех $n \geq 2$ получаем

$$[X^k, Y^n] = Y[X^k, Y^{n-1}] + [X^k, Y]Y^{n-1} \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

(iii) Шаг 1. Методом математической индукции покажем, что $X^k - Y^k \in \mathfrak{M}_\varphi$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $X^{k-1} - Y^{k-1} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Тогда

$$X^k - Y^k = X^{k-1}(X - Y) + (X^{k-1} - Y^{k-1})Y \in \mathfrak{M}_\varphi,$$

что и требовалось.

Шаг 2. Из представления

$$X^k Y^n - Y^n X^k = (X^k - Y^k)Y^n - Y^n(X^k - Y^k)$$

следует $[X^k, Y^n] \in \mathfrak{M}_\varphi$ и

$$\varphi([X^k, Y^n]) = \varphi((X^k - Y^k)Y^n) - \varphi(Y^n(X^k - Y^k)) = 0$$

для всех $k, n \in \mathbb{N}$ в силу линейности продолжения φ на \mathfrak{M}_φ . \square

Пример 1. Пусть \mathcal{A} — алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $PQ = Q$ и $QP = P$. Тогда $PQP = P$ и $QPQ = Q$; имеем $(P + Q)^k = 2^k(P + Q)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $(P - Q)^2 = 0$. Поэтому для $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ в силу теоремы об определителе произведения матриц получаем $\det(P + Q) = \det(P - Q) = 0$.

Для идемпотентов

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})^{\text{id}}$$

имеем $PQP = P$ и $QPQ = Q$, но $\{PQ, QP\} \cap \{P, Q\} = \emptyset$.

Лемма 4. Пусть \mathcal{A} — унитарная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Положим

$$A = (1 - \lambda)P + (\lambda^{-1} - \lambda - 1 + \lambda^2)PQ + \lambda QP + (\lambda^2 - \lambda^4)Q, \quad B = (1 - \lambda)Q + (2\lambda^{-1} - 1)PQ.$$

Если $PQP = \lambda^2 P$ и $QPQ = \lambda^2 Q$, то идемпотенты P и A (соответственно, Q и B) подобны. Имеем $(\lambda P - \lambda^{-1}QP)^2 = (\lambda Q - \lambda^{-1}PQ)^2 = 0$.

Доказательство. Положим

$$T = I + \lambda^{-1}PQ - \lambda Q, \quad S = I - \lambda^{-1}PQ + \lambda Q.$$

Тогда $TS = ST = I$ и $S = T^{-1}$. Имеем $SPS^{-1} = A$ и $TQT^{-1} = B$, поэтому $A, B \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Равенства $(\lambda P - \lambda^{-1}QP)^2 = (\lambda Q - \lambda^{-1}PQ)^2 = 0$ легко проверяются. \square

Следствие 3. Пусть \mathcal{A} — унитарная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Если $PQP = P$ и $QPQ = Q$, то идемпотенты P и QP (соответственно Q и PQ) подобны. Имеем $(P - QP)^2 = (Q - PQ)^2 = 0$.

В условиях леммы 4 имеем $A_{P,Q} = (1 - 4\lambda^2)(P - Q)$ и если φ — след на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} и $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) = 0$. Если \mathcal{A} — унитарная $*$ -алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то $PQ = Q \Leftrightarrow Q^{*\perp}P^{*\perp} = P^{*\perp}$.

Лемма 5. Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ и $PQP = P$, то $QP = P$, т. е. $P \leq Q$.

Доказательство. Поскольку $Q \cdot PQP = QP \cdot QP = QP$, имеем

$$(P - QP)^2 = Q^\perp P Q^\perp P = 0.$$

Умножив это соотношение слева на проектор P , получаем $(PQ^\perp P)^2 = 0$. Поскольку $PQ^\perp P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$, имеем $0 = PQ^\perp P = |Q^\perp P|^2$, т. е. $|Q^\perp P| = 0$ и $Q^\perp P = 0$. \square

Пример 2. Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра, проекторы $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ изоклины с некоторым углом $\theta \in (0, \pi/2)$. Тогда $(\cos^2 \theta P - QP)^2 = 0$ и

$$A_{P,Q} = (1 - 4\cos^2 \theta)(P - Q), \tag{4}$$

для $\theta = \pi/3$ имеем $A_{P,Q} = 0$. Напомним, что

$$P \vee Q = \frac{1}{\sin^2 \theta}(P - Q)^2, \tag{5}$$

(см. [25], гл. 2, §10, п. 10.5 (iii)). Следовательно, $P \vee Q \in \mathcal{A}$,

$$A_{P,Q}^2 = (1 - 4\cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta P \vee Q,$$

$$\sin(P - Q) = \frac{\sin(\sin \theta)}{\sin \theta}(P - Q), \quad \cos(P - Q) = I + (\cos(\sin \theta) - 1)P \vee Q,$$

$$\sinh(P - Q) = \frac{\sinh(\sin \theta)}{\sin \theta}(P - Q), \quad \cosh(P - Q) = I + (\cosh(\sin \theta) - 1)P \vee Q$$

и $\exp(P - Q) = \sinh(P - Q) + \cosh(P - Q)$. Соотношение

$$(P - Q)^4 = (P - Q)^2 - |PQ - QP|^2 \quad (6)$$

(см. доказательство предложения 1 в [10]) и (5) дают

$$|[P, Q]| = \sin \theta \cos \theta P \vee Q.$$

Если J — левый (или правый) идеал в \mathcal{A} и $P - Q \in J$, то $P \vee Q \in J$ в силу равенства (5). Поэтому проекторы $P = P \vee Q \cdot P$ и $Q = P \vee Q \cdot Q$ лежат в J . Ясно, что

$$P - Q \in J \Leftrightarrow (P - Q)^2 \in J \Leftrightarrow |[P, Q]| \in J \Leftrightarrow P \vee Q \in J \Leftrightarrow P, Q \in J.$$

Если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, то из теоремы об определителе произведения матриц и (5) получаем

$$\det(P - Q) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \vee Q \neq I; \\ \pm \sin^n \theta, & \text{если } P \vee Q = I. \end{cases}$$

Следствие 4. Пусть φ — след на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} и проекторы $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ изоклинны с некоторым углом $\theta \in (0, \pi/2)$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $P, Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, и из теоремы 3 и равенства (4) имеем $0 = \varphi(P - Q) = \varphi(P) - \varphi(Q)$. Из равенства (5) получаем $\varphi(P \vee Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) = 2\varphi(P)$.

Лемма 6. Пусть \mathcal{A} — алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

- (i) $(P - Q)^4 + (P + Q)^4 = 2(P + Q)^2 + 2(PQ + QP)^2$;
- (ii) $(P - Q)^2 + (P + Q)^2 = 2(P + Q)$;
- (iii) если \mathcal{A} унитарна, то $[P, Q] = (I - P - Q)(P - Q) = -(P - Q)(I - P - Q)$.

Теорема 5. Пусть \mathcal{A} — C^* -алгебра и проекторы $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ изоклинны с некоторым углом $\theta \in (0, \pi/2)$. Тогда $\sin^4 \theta P \vee Q + (P + Q)^4 = (2 + \cos^2 \theta)(P + Q)^2$, где $(P + Q)^2 = 2(P + Q) - \sin^2 \theta P \vee Q$.

Доказательство следует из леммы 6 и равенства (5).

Лемма 7. (i) Если \mathcal{A} — собственно бесконечная W^* -алгебра, то каждый коммутатор $[A, B]$ ($A, B \in \mathcal{A}$) представляется в виде суммы не более чем 25 коммутаторов идемпотентов из \mathcal{A} .

(ii) Если \mathcal{H} сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый коммутатор $[A, B]$ операторов $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ с $\|A\| < 1$, $\|B\| < 1$ представляется в виде суммы не более чем 2025 коммутаторов проекторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Доказательство. (i) В силу ([26], теорема 4) имеем

$$A = P_1 + \dots + P_5, \quad B = Q_1 + \dots + Q_5$$

с некоторыми $P_k, Q_k \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $k = 1, \dots, 5$.

(ii) Если \mathcal{H} сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ с $\|T\| < 1$ представляется в виде

$$T = 5(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - 5P_5 - 8P_6 - 12P_7$$

с $P_1, \dots, P_7 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ ([27], замечание 4). □

Теорема 6. Каждый оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, представляется в виде суммы не более чем 50 коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Доказательство. Каждый оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве \mathcal{H} представляется в виде суммы двух коммутаторов ([28], следствие 2 из задачи 186). Далее работает п. (i) леммы 7, поскольку $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ является собственно бесконечной W^* -алгеброй. □

Теорема 7. Если \mathcal{A} — алгебра, то $\{[P, X] : P \in \mathcal{A}^{\text{id}}, X \in \mathcal{A}\} \cap \mathcal{A}^{\text{id}} = \{0\}$. Вообще говоря, $\{[P, Q] : P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}\} \cap \mathcal{A}^{\text{tri}} \neq \{0\}$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}, X \in \mathcal{A}$ и

$$[P, X]^2 = [P, X]. \quad (7)$$

Умножив обе части (7) слева и справа на идемпотент P , получаем

$$PXPXP = PX^2P. \quad (8)$$

Далее, умножив обе части (7) справа на P , с учетом (8) имеем $PXP = XP$. Умножив обе части (7) слева на P , с учетом (8) имеем $PX = PXP$. Следовательно, $[P, X] = 0$ и $\{[P, X] : P \in \mathcal{A}^{\text{id}}, X \in \mathcal{A}\} \cap \mathcal{A}^{\text{id}} = \{0\}$.

Числа

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad b = \sqrt{a-a^2} = \sqrt{\sqrt{5}-2}$$

удовлетворяют условию $2a - b^2 = 1$. В алгебре $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ для идемпотентов

$$P = \begin{pmatrix} 1 & b^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$

имеем $[P, Q]^2 = \text{diag}(1, 1) = I$, т. е. $[P, Q] \in \mathcal{A}^{\text{sym}} \subset \mathcal{A}^{\text{tri}} \setminus \{0\}$. \square

Каждый оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, представляется в виде конечной суммы попарных произведений проекторов ([29]; [30], теорема). Поэтому каждый косоэрмитов оператор ($A^* = -A$) из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов ([24], теорема 5.1). Следующая теорема была анонсирована первым автором без доказательства в ([24], с. 12, утверждение I).

Теорема 8. Если \mathcal{H} сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T = \sum_{k=1}^4 [A_k, B_k]$, где $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы.

Доказательство. Воспользуемся следствием 2 из ([28], задача 186): каждый оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы двух коммутаторов: $T = [A, B] + [C, D]$ с $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть $T = -T^*$ и $T = [A, B] + [C, D]$. Тогда

$$T = \frac{T - T^*}{2} = \frac{AB - BA + A^*B^* - B^*A^* + CD - DC + C^*D^* - D^*C^*}{2}. \quad (9)$$

Для каждого $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ операторы $Y - Y^*$, $i(Y + Y^*)$ являются косоэрмитовыми, где $i \in \mathbb{C}$ и $i^2 = -1$. Легко проверить, что

$$[A - A^*, B - B^*] + [i(B + B^*), i(A + A^*)] = 2AB - 2BA + 2A^*B^* - 2B^*A^*.$$

Поэтому

$$\frac{AB - BA + A^*B^* - B^*A^*}{2} = \left[\frac{A - A^*}{2}, \frac{B - B^*}{2} \right] + \left[\frac{i(B + B^*)}{2}, \frac{i(A + A^*)}{2} \right], \quad (10)$$

$$\frac{CD - DC + C^*D^* - D^*C^*}{2} = \left[\frac{C - C^*}{2}, \frac{D - D^*}{2} \right] + \left[\frac{i(D + D^*)}{2}, \frac{i(C + C^*)}{2} \right]. \quad (11)$$

Подставляем правые части (10) и (11) в (9) и завершаем доказательство. \square

Следствие 5. Если \mathcal{H} сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T = \sum_{k=1}^4 [C_k, D_k]$, где $C_k, D_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$.

Доказательство. Положим $C_k = iB_k$, $D_k = iA_k$ для $k = 1, 2, 3, 4$. \square

Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, то из (6) имеем (см. также [4], предложение 3)

$$|PQ - QP|^2 = (P - Q)^2 - (P - Q)^4 \leq (P - Q)^2. \quad (12)$$

Теорема 9. Пусть φ — точный след на W^* -алгебре \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ и $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Для $X = [A, P]$ имеем $S_P X = -X S_P$. Если $X^k \in \mathfrak{M}_\varphi$ для некоторого нечетного $k \in \mathbb{N}$, то $\varphi(X^k) = 0$. Если еще $P = P^*$, то $[[X], P] = 0$ и для $A \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $X^2 \in \mathfrak{M}_\varphi$ имеем $\varphi(X^2) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Доказательство. Очевидно $X S_P = -S_P X$. Для $U \in \mathcal{A}$ и $V \in \mathfrak{M}_\varphi$ имеем $\varphi(UV) = \varphi(VU)$ (см. [19], гл. 6, упражнение 6). Поэтому, если $X^k \in \mathfrak{M}_\varphi$ для некоторого нечетного $k \in \mathbb{N}$, то $\varphi(X^k) = 0$ (ср. с [5], теорема 2.26). Если еще $P = P^*$, то $X^* S_P = -S_P X^*$ и $S_P X^* S_P = -X^*$. Поэтому $|X|^2 = S_P |X|^2 S_P$, т.е. $|X|^2 S_P = S_P |X|^2$ и $|X|^2 P = P |X|^2$. Теперь в силу спектральной теоремы имеем $|X|P = P|X|$.

Пусть $A, P \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, $X = [A, P]$ и $X^2 \in \mathfrak{M}_\varphi$ с $\varphi(X^2) = 0$. Так как $X^2 = -|X|^2$, из (12) получаем

$$0 = \varphi(X^2) = \varphi(-|X|^2) = -\varphi(|X|^2) = -\varphi((A - P)^2 - (A - P)^4). \quad (13)$$

Поскольку $(A - P)^2 - (A - P)^4 \geq 0$ (напомним, что $\|A - P\| \leq 1$) и след φ точен, из (13) имеем $(A - P)^2 - (A - P)^4 = 0$, т.е. $(A - P)^2 = |A - P|^2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Следовательно, оператор $U = A - P$ является частичной изометрией в \mathcal{H} . Поэтому $UU^*U = U$ ([28], следствие 3 из задачи 98). Из равенства $(A - P)^3 = A - P$ получаем $PAP = APA$. Следовательно, $PAP \leq A$ и $AP = PA$ в силу ([31], предложение 2.1). \square

Следствие 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ с $P = P^2$, $X = [A, P]$.

- (i) Если $k \in \mathbb{N}$ нечетно, то X^k является коммутатором.
- (ii) Если $n \in \mathbb{N}$ нечетно, то $\det(X) = 0$.

Доказательство. Известно, что для $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ следующие условия эквивалентны: 1) T унитарно эквивалентна матрице с нулевой диагональю; 2) след $\text{tr}(T) = 0$; 3) T является коммутатором; 4) $\text{tr}(|I + zT|) \geq n$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Доказательство эквивалентности 1) \Leftrightarrow 2) см. в ([16], гл. II, задача 209); эквивалентности 2) \Leftrightarrow 3) см. в ([28], задача 182); эквивалентности 2) \Leftrightarrow 4) установлены (в теореме 4.8 [32]).

(i) Используем эквивалентность 2) \Leftrightarrow 3).

(ii) Поскольку $S_P^2 = I$ и $\det(S_P) \in \{-1, 1\}$ в силу теоремы об определителе произведения матриц, к равенству $S_P X = -X S_P$ с $X = [A, P]$ применяем теорему об определителе произведения матриц. \square

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Koliha J.J., Rakočević V. *Invertibility of the difference of idempotents*, Linear Multilinear Algebra **51** (1), 97–110 (2003).
- [2] Koliha J.J., Rakočević V., Straškraba I. *The difference and sum of projectors*, Linear Algebra Appl. **388**, 279–288 (2004).
- [3] Koliha J.J., Rakočević V. *Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space*, Integral Equat. Oper. Theory **52** (1), 125–134 (2005).
- [4] Бикчентаев А.М. *След и разности идемпотентов в C^* -алгебрах*, Матем. заметки **105** (5), 647–655 (2019).
- [5] Бикчентаев А.М. *Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **100** (4), 492–503 (2016).
- [6] Kalton N.J. *A note on pairs of projections*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **3** (2), 309–311 (1997).
- [7] Bikchentaev A.M., Yakushev R.S. *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
- [8] Bikchentaev A.M. *Tripotents in algebras: invertibility and hyponormality*, Lobachevskii J. Math. **35** (3), 281–285 (2014).

- [9] Avron J., Seiler R., Simon B. *The index of a pair of projections*, J. Funct. Anal. **120** (1), 220–237 (1994).
- [10] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^* -алгебрах*, Сиб. матем. журн. **58** (2), 243–250 (2017).
- [11] Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics*, J. Math. Phys. **35** (10), 5373–5451 (1994).
- [12] Gesztesy F. (coordinating Editor) *From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden*, II, Notices Amer. Math. Soc. **63** (8), 878–889 (2016).
- [13] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^* -алгебрах и квантовый эффект Холла*, ТМФ **195** (1), 75–80 (2018).
- [14] Cuntz J., Pedersen G.K. *Equivalence and traces on C^* -algebras*, J. Funct. Anal. **33** (2), 135–164 (1979).
- [15] Fack T. *Finite sums of commutators in C^* -algebras*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **32** (1), 129–137 (1982).
- [16] Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ* (Наука, М., 1969).
- [17] Davidson K.R. *C^* -algebras by examples*. Fields Institute Monographs (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1996).
- [18] Pop C. *Finite sums of commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (10), 3039–3041 (2002).
- [19] Мерфи Дж. *C^* -алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).
- [20] Strătilă Ş, Zsidó L. *Lectures on von Neumann algebras* (Abacus Press, England, 1979).
- [21] Williams J.P. *Operators similar to their adjoints*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1), 121–123 (1969).
- [22] Koliha J.J. *Range projections of idempotents in C^* -algebras*, Demonstratio Math. **24** (1), 91–103 (2001).
- [23] Kaplansky I. *Modules over operator algebras*, Amer. J. Math. **75** (4), 839–858 (1953).
- [24] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов*, III. *Коммутаторы в C^* -алгебрах*, Матем. сборник **199** (4), 3–20 (2008).
- [25] Шерстнев А.Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла* (Физматлит, М., 2008).
- [26] Pearcy C., Topping D.M. *Sums of small numbers of idempotents*, Mich. Math. J. **14** (4), 453–465 (1967).
- [27] Paszkiewicz A. *Any selfadjoint operator is a finite linear combination of projectors*, Bull. L'Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. **28** (7–8), 337–345 (1980).
- [28] Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах* (Мир, М., 1970).
- [29] Бикчентаев А.М. *О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов*, ДАН **393** (4), 444–447 (2003).
- [30] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов*, Сиб. матем. журн. **46** (1), 32–45 (2005).
- [31] Бикчентаев А.М. *Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана*, Сиб. матем. журн. **51** (6), 1228–1236 (2010).
- [32] Бикчентаев А.М. *О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана*, Тр. МИАН **293**, 73–82 (2016).

Айрат Мицхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Хаттаб Фауаз

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: khattab1058@hotmail.com

A.M. Bikchentaev and Kh. Fawwaz

Differences and commutators of idempotents in C^* -algebras

Abstract. We establish similarity between some tripotents and idempotents on a Hilbert space \mathcal{H} and obtain new results on differences and commutators of idempotents P and Q . In the unital case, the difference $P - Q$ is associated with the difference $A_{P,Q}$ of another pair of idempotents. Let φ be a trace on a unital C^* -algebra \mathcal{A} , \mathfrak{M}_φ be the ideal of definition of the trace φ . If $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, then $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ and $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$. In some cases, this allowed us to establish the equality $\varphi(P - Q) = 0$. We obtain new identities for pairs of idempotents and for pairs of isoclinic projections. It is proved that each operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, can be presented as a sum of no more than 50 commutators of idempotents from $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. It is shown that the commutator of an idempotent and an arbitrary element from an algebra \mathcal{A} cannot be a nonzero idempotent. If \mathcal{H} is separable and $\dim \mathcal{H} = \infty$, then each skew-Hermitian operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ can be represented as a sum $T = \sum_{k=1}^4 [A_k, B_k]$, where $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ are skew-Hermitian.

Keywords: Hilbert space, linear operator, idempotent, tripotent, isoclinic projections, commutator, similarity, C^* -algebra, trace, determinant.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Khattab Fawwaz

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: khattab1058@hotmail.com