

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.З. Даутов, М.Р. Тимербаев

**Численные методы.
Приближение функций**

Учебное пособие

Казань — 2021

УДК 519.3

Рекомендовано
учебно – методической комиссией института ВМ и ИТ
Протокол №8 от 19 марта 2021 г.

Научный редактор —
д.ф.-м.н., профессор О.А. Задворнов

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор М.Ф. Павлова,
к.ф.-м.н., доцент Л.Л. Глазырина

Р.З. Даутов, М.Р. Тимербаев
Численные методы. Приближение функций: учебное пособие. — Казань: Казан. ун-т, 2021. — 123 с.

Учебное пособие представляет собой первую часть курса лекций по дисциплине “Численные методы”, читаемого авторами студентам Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета. В нем изложены теория приближения функций и методы численного интегрирования и дифференцирования, приведены также вопросы для самоконтроля и задачи по каждой теме. Пособие предназначено для студентов-бакалавров, изучающих численные методы.

УДК 519.3

© Р.З. Даутов, М.Р. Тимербаев, 2021
© Казанский Федеральный Университет, 2021

Оглавление

Предисловие	5
ГЛАВА 1. Задача приближения функций	8
§ 1. Типы функций	8
§ 2. О задаче приближения функций	10
§ 3. Приближение функций многочленами Тейлора	11
ГЛАВА 2. Интерполирование алгебраическими многочленами	17
§ 1. Остаточный член интерполирования	19
§ 2. Интерполяционный полином в форме Лагранжа	20
§ 3. Интерполяционный полином в барицентрической форме	23
§ 4. Интерполяционный полином в форме Ньютона	27
§ 5. Многочлены Чебышева	31
§ 6. Оптимальный выбор узлов интерполирования	34
ГЛАВА 3. Постоянная Лебега	39
§ 1. Новая оценка погрешности интерполяции	39
§ 2. Чувствительность интерполяции	41
§ 3. Результаты вычислительных экспериментов	43
ГЛАВА 4. Другие методы интерполяции многочленами	47
§ 1. Интерполяция Эрмита	47
§ 2. Интерполирование обобщенными многочленами	51
§ 3. Интерполяция периодических функций	53
ГЛАВА 5. Интерполирование функций сплайнами	58
§ 1. Лагранжевы сплайны	59
§ 2. Эрмитовы сплайны	61
§ 3. Естественные сплайны. Интерполяция кубическими сплайнами	61
ГЛАВА 6. Наилучшие приближения	68
§ 1. Наилучшие приближения в нормированных пространствах	69
§ 2. Наилучшие равномерные приближения полиномами	71
§ 3. Наилучшие приближения в евклидовых пространствах	74
§ 4. Вычисление элемента наилучшего приближения	76
§ 5. Наилучшее среднеквадратическое приближение	79
§ 6. Метод наименьших квадратов	80

ГЛАВА 7. Ортогональные полиномы	85
§ 1. Свойства ортогональных полиномов	87
§ 2. Ортогональные полиномы Якоби	88
§ 3. Ортогональные полиномы Лагерра и Эрмита	90
ГЛАВА 8. Квадратурные формулы	93
§ 1. Точность и устойчивость квадратурных формул	94
§ 2. Интерполяционные квадратурные формулы	95
§ 3. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса	98
§ 4. Погрешность простейших формул Ньютона – Котеса	100
§ 5. Составные квадратуры	101
ГЛАВА 9. Квадратурные формулы Гаусса	105
§ 1. Точность квадратуры Гаусса	107
§ 2. Вычисление узлов и весов квадратуры Гаусса	109
ГЛАВА 10. Численное дифференцирование	113
§ 1. Простейшие формулы вычисления $f'(x)$ и $f''(x)$	113
§ 2. Некорректность операции численного дифференцирования	115
§ 3. Применение интерполирования	117
Литература	122

Предисловие

Учебная дисциплина “Численные методы” рассматривает основные принципы построения и исследования приближенных методов решения на ЭВМ различных классов математических задач. В настоящее время к ним принято относить основные задачи следующих разделов математики, освещению которых посвящены отдельные учебные дисциплины:

- 1) математический анализ;
- 2) линейная алгебра;
- 3) обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ);
- 4) уравнения математической физики.

Понятия, задачи и методы этих разделов математики чрезвычайно важны для приложений. Однако, с практической точки зрения, в рамках этих учебных курсов остались не решенными многие важные вопросы. Отметим лишь некоторые из них.

В математическом анализе много внимания уделяется приемам интегрирования и дифференцирования функций, заданных явными аналитическими выражениями. Но, например, остается неясным вопрос вычисления производной или определенного интеграла неявно заданной функции, т.е. функции, аналитическое выражение которой неизвестно, а известен лишь способ ее вычисления в заданной точке. Более того, известны примеры очень простых аналитически заданных функций, интегралы от которых существуют, но не могут быть представлены в виде конечных алгебраических выражений. Сказанное остается справедливым и для дифференциальных уравнений: системы подобных уравнений, как правило, не имеет решения в конечном виде. В курсе “Численные методы” мы изучим различные способы приближенного решения подобных задач с помощью ЭВМ.

В учебном курсе по линейной алгебре изучаются вопросы решения систем линейных алгебраических уравнений и нахождения собственных чисел и векторов матриц. При конструировании инженерных сооружений, приборов, обработке результатов измерений, решении задач планирования производственного процесса и многих других задач

техники, экономики, научного эксперимента приходится решать подобные задачи большой и сверхбольшой размерности. Методы практического решения таких задач остаются за рамками традиционных курсов линейной алгебры и относятся к численным методам.

Таким образом, учебный курс “Численные методы” посвящен изучению методов решения с помощью ЭВМ базовых задач математического анализа (приближение функций, дифференцирование и интегрирование функций), алгебры (решение систем линейных и нелинейных уравнений, задачи определения собственных значений и векторов матриц), методов решения систем ОДУ, а также изучению методов решения уравнений математической физики.

Следует отметить, что для численных методов характерна *множественность*, т. е. возможность решить одну и ту же задачу различными методами. Например, в системе MatLab для решения задачи Коши для системы ОДУ имеются следующие функции:

ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, ode15i,

каждая из которых реализует некоторый метод решения задачи Коши. Для решения конкретной задачи Коши пользователь должен выбрать одну из этих функций: для решения нежестких систем ОДУ с невысокой (со средней, высокой) точностью подходящей является функция ode23 (ode45, ode113); напротив, эти функции оказываются неэффективными или непригодными для решения жестких систем ОДУ, для решения которых подходящими являются функции с буквой s и т.д. Аналогично, для решения системы линейных алгебраических уравнений в системе MatLab есть функции

lu, chol, qr, ...

каждая из которых также реализует свой метод решения.

Эта множественность методов вызвана существом дела. Теория и практика вычислений подтверждает справедливость следующего правила: *не существует одного лучшего метода решения рассматриваемого круга задач; каждый метод является подходящим и эффективным для решения своего подмножества задач.*

Численные методы — *приближенные методы*. При решении задач математического анализа, алгебры и т.д., в качестве решения за-

дачи могут выступать числа (вещественные или комплексные), векторы, функции и другие идеальные объекты. При решении подобных задач численными методами ищется приближенное решение задачи, которое можно получить с помощью ЭВМ и представить в виде чисел, представимых в ЭВМ, или таблиц таких чисел. Поэтому в численных методах речь всегда идет о решении задачи с определенной точностью.

Данное пособие посвящено численным методам решения задач математического анализа. Мы изучим разнообразные вопросы, связанные с методами приближенного представления (аппроксимации) функций и приложениями этих методов к задачам интегрирования и дифференцирования.

Более подробное изложение отдельных разделов курса можно найти в книгах:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бабенко К.И. Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
3. Глазырина Л.Л., Карчевский М.М. Введение в численные методы — КФУ, 2012

Многие вопросы, затронутые в пособии, активно обсуждались с сотрудниками кафедры вычислительной математики Казанского федерального университета. Авторы выражают им свою искреннюю благодарность. Рукопись пособия была внимательно прочитана О.А.Задворновым. Авторы постарались максимально учесть его замечания.

ГЛАВА 1

Задача приближения функций

Рассмотрения начнем с указания множеств функций, с которыми приходится иметь дело в вычислительной практике.

§ 1. Типы функций

Далее, как правило, будем предполагать, что функции являются вещественными, определенными на некотором конечном или бесконечном отрезке числовой оси. Множество таких функций условно можно поделить на три типа.

Функции 1 типа. К этому множеству отнесем хорошо знакомые из курса математического анализа функции, заданные явным аналитическим выражением (формулой). Примерами таких функций являются: алгебраические и тригонометрические полиномы (многочлены),

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$
$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

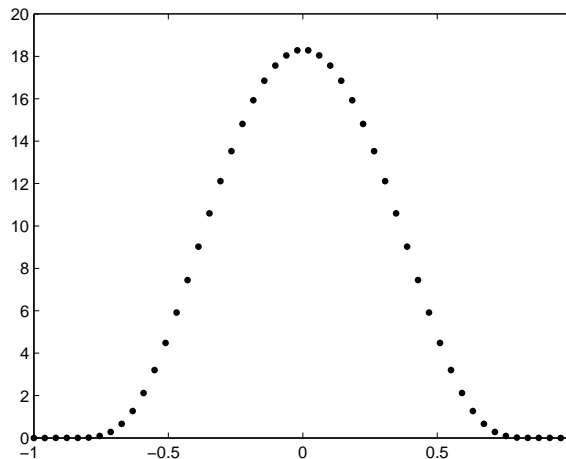
разнообразные выражения, включающие комбинации алгебраических и элементарных трансцендентных функций, например, функции вида

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^3 + d} \sin(x^2), \quad f(x) = \begin{cases} a e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

К этому же типу отнесем функции, которые задаются функциональными рядами или интегралами, например, вида:

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt, \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

и т. д. Наличие явной формулы позволяет не только вычислить значения функций этого типа, но и найти в явном виде их производные, возможно интегралы и т.д.

Рис. 1. Графическое представление табличной (сеточной) функции $f(x)$.

x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Таблица 1.1. Представление табличной функции $f(x)$.

Функции 2 типа. К этому множеству отнесем функции, определенные каким-либо способом вычисления значений в произвольной точке области определения (неявно заданные функции). В качестве способа вычисления функции может выступать, например, некоторая программа для ЭВМ, позволяющая для заданного значения x вычислять значения функции $f(x)$.

Функции 3 типа. К этому множеству отнесем таблично заданные функции, т.е. функции, заданные своими значениями лишь на некотором конечном множестве $\Omega_n = \{x_i \in [a, b], i = 1 : n\}$ различных точек области определения $[a, b]$, называемой сеткой узлов (или просто сеткой). Сетка называется равномерной, если расстояние между соседними узлами одно и то же, иначе — неравномерной. Графическое представление табличной (или иначе — сеточной) функции дано на рис. 1. Подобную функцию можно представить также в виде таблицы (см. табл. 1.1).

Считается, что функция типа 3 определена на некотором отрезке $[a, b]$ числовой оси, но ее значения в точках, отличных от Ω_n , неизвестны (по тем или иным причинам). Примером табличной функции является, например, функция, описывающая температуру тела больного, которая была измерена лишь в некоторые фиксированные моменты времени. Подобные функции, полученные в результате из-

мерений или вычислений, во множестве встречаются в приложениях.

Основное различие этих типов функций очевидно: потеря информации о функции. Мы располагаем наименьшей информацией о функции типа 3: можем знать, например, что она является дважды непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$, выпуклой, знаем ее значения в точках Ω_n , но не можем вычислить точно ее значение в других точках. Также мы не можем вычислить производные этой функции ни в одной точке, найти ее интеграл и т.д. Чуть больше мы знаем функциях типа 2; в отличие от табличных функций, мы можем их вычислить в произвольной точке $[a, b]$. Полной информацией мы располагаем лишь о функциях типа 1.

Ясно, что при необходимости функцию типа 1 мы можем рассматривать как функцию типа 2, которую, в свою очередь, можем рассматривать как функцию типа 3. В последнем случае, надо отметить, сетку узлов Ω_n мы можем выбрать по своему усмотрению (например, некоторым “оптимальным” способом) и составить таблицу функции. Обратное можно осуществить только приближенно, используя математическую теорию приближения функций, элементы которой мы далее и изучим.

§ 2. О задаче приближения функций

Теория приближения функций — раздел математики, изучающий вопрос о возможности нахождения для данной функции f функции f_n в том или ином смысле близкой к f , дающей ее приближенное представление. Предполагается, что f является элементом некоторого множества функций \mathbb{H} , а f_n принадлежит некоторому множеству простых для вычисления функций \mathbb{H}_n .

Если подходящее приближение f_n построено, то далее во всех вычислениях функцию f можно заменить функцией f_n . В этом заключается основная идея теории приближения функций. Таким образом, для функций типа 2 и 3 мы получаем их аналитическое описание в виде формулы. Для табличной функции мы также получаем способ ее вычисления во всех точках $[a, b]$. Для функций типа 1 приближения также полезны в случае, когда трудоемкость вычисления f намного выше, чем f_n , а функцию приходится вычислять многократно.

В определении выше в роли \mathbb{H} может выступать, например, множество m -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций (обозначение множества — $C^m[a, b]$). Наиболее известный пример множества \mathbb{H}_n — множество алгебраических многочленов степени не выше n (обозначение — \mathbb{P}_n). В определении параметр n характеризует точность и сложность приближения f_n : чем больше n , тем приближение является более точным, но также более трудоемким (т.е. требующем большего числа арифметических операций для его вычисления в заданной точке).

Существует много разных вариантов задачи о приближении функций (и соответственно методов приближения функций) в зависимости от того, какие функции используются для приближения, как ищется приближающая функция f_n , как понимается близость функций f и f_n и т.д.

В качестве иллюстрации рассмотрим один метод приближения функций, хорошо известный из курса математического анализа.

§ 3. Приближение функций многочленами Тейлора

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Каждой бесконечно дифференцируемой в точке x_0 функции можно поставить в соответствие ее ряд Тейлора:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x_0 \in [a, b]. \quad (1)$$

Определение 1. Функция вещественной переменной, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения $[a, b]$, называется аналитической функцией. Множество таких функций будем обозначать $A[a, b]$.

Определение 2. Многочленом Тейлора функции f , дифференцируемой n раз в точке x_0 , называется частичная сумма ряда (1):

$$\begin{aligned} H_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Как хорошо известно, если $f \in C^{n+1}[a, b]$, для для любого $x \in [a, b]$ справедлива формула

$$f(x) = H_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (2)$$

где $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$ — некоторая точка $[a, b]$. Функция $R_n(x)$ называется остаточным членом (в форме Лагранжа). Положим

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Так как $|x - x_0| \leq (b - a)/2$ для $\forall x \in [a, b]$, то из (2) следует, что

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)!} M_{n+1}. \quad (3)$$

Многочлен Тейлора H_n представляет собой приближение функции f , а неравенство (3) — оценка погрешности этого приближения.

Например, если $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi/2]$, то $M_{n+1} \leq 1$, и оценка (3) принимает вид

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \forall x \in [0, \pi/2], \quad \varepsilon_n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Если принять во внимание, что относительная точность представления чисел типа `double` в ЭВМ равна $2.2 \cdot 10^{-16}$, то из таблицы 1.2 можно заключить, что функцию $\sin(x)$ можно гарантированно приблизить полиномом Тейлора 16-ой степени на отрезке $[0, \pi/2]$ с машинной точностью.¹⁾

n	4	8	12	16
ε_n	0.0025	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$6.9 \cdot 10^{-12}$	$4.6 \cdot 10^{-17}$

Таблица 1.2. Погрешность приближения $\sin(x)$ полиномом Тейлора $H_n(x)$ на $[0, \pi/2]$.

Пример 2. В ряд Тейлора функцию можно разложить разными способами. Можно вычислять ее производные последовательно друг за другом и образовать ряд, а можно каким-либо образом получить

¹⁾Если \bar{a} есть приближение числа a , то величина $|a - \bar{a}|$ называется абсолютной погрешностью приближения, а число $|a - \bar{a}|/|a|$ — относительной погрешностью. Эти меры погрешности имеют один порядок малости, если $a = O(1)$. В инженерной практике относительную погрешность измеряют в процентах и определяют как $100 \cdot |a - \bar{a}|/|a|$.

соответствующий ей степенной ряд. Оба способа приведут к одному результату (почему?). Рассмотрим для примера функцию вида

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt,$$

предполагая, что $\varphi \in A[a, b]$. В первом случае мы можем попытаться вычислить $f(x_0)$, $f'(x_0) = \varphi(x_0)$, $f''(x_0) = \varphi'(x_0)$, и т.д. Во втором случае можно попытаться разложить подынтегральную функцию $\varphi(t)$ в ряд Тейлора и почленно проинтегрировать полученный ряд.

Применим второй способ к функции

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in [0, b],$$

известной как функция ошибок. Имеем

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Следовательно, для вычисления $\operatorname{erf}(x)$ получаем знакопеременный степенной ряд (ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ или ряд Маклорена) вида

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}. \quad (4)$$

Отметим, что модули слагаемых ряда (4) либо монотонно убывают с ростом n (при небольших x), либо сначала возрастают, а потом начинают монотонно убывать (если x достаточно велико). Во втором случае модуль первого слагаемого больше единицы. Поэтому, если вычислять сумму накоплением, то модуль первого отброшенного малого слагаемого будет определять погрешность вычисления суммы (теорема Лейбница). Таким образом, многочлен Тейлора

$$H_{2n-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

дает значение функции $\operatorname{erf}(x)$ с равномерной по $x \in [0, b]$ точностью

$$\varepsilon_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \quad \text{если } \varepsilon_n < 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Напомним теорему Лейбница. Для знакочередующегося ряда

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad a_k > 0,$$

следующих условий достаточно для сходимости ряда (признак Лейбница):

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$,
- 2) $a_k \geq a_{k+1}$, начиная с некоторого номера $k \geq N \geq 0$.

Более того, согласно теореме Лейбница

$$\left| S - S_n \right| \leq \varepsilon, \quad \text{где } S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k,$$

если дополнительно $a_{n+1} \leq \varepsilon$ при $n + 1 \geq N$.

Рассмотренные выше примеры показывают, что метод приближения функций многочленами Тейлора является подходящим для приближения аналитических функций. В качестве его недостатков отметим следующие два: 1) необходимо уметь вычислять производные функции высоких порядков; 2) метод не пригоден для приближения функций типа 2 и 3. Далее мы рассмотрим более точные и более общие методы, применимые, в частности, к табличным функциям, и функциям, имеющим небольшое число производных.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Изучению численных (приближенных) методов решения каких математических задач посвящен учебный курс “Численные методы”?
2. Дайте определение абсолютной и относительной погрешности приближенного представления чисел?
3. Какие три типа функций можно выделить в вычислительной математике? В каких приложениях математики он встречаются?
4. В чем заключается задача приближения функций? Какие ограничения накладываются на приближающую функцию?
5. Дайте определения классов функций $C^m[a, b]$, $A[a, b]$, \mathbb{P}_n .
6. Дайте определения степенной функции и ряда Тейлора функции f .
7. Дайте определение полинома Тейлора для функции f , а также его остаточного члена в форме Лагранжа.
8. Запишите ряд Маклорена функции
 - а) $\sin(x)$; б) $\cos(x)$; в) e^x ; д) $\ln(1+x)$.

9. Дайте определение знакопеременного ряда. Сформулируйте признак Лейбница сходимости таких рядов.
10. Пользуясь признаком Лейбница, проверьте равномерную сходимость рядов а)-д) из вопроса 8.
11. Дайте определение частичной суммы ряда. Приведите формулировку теоремы Лейбница о вычислении знакопеременного ряда с заданной точностью.
12. Может ли аналитическая функция быть представлена двумя различными рядами Маклорена?
13. Укажите способы разложения аналитических функций в степенные ряды.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Следующая функция, представленная в виде неберущегося интеграла

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

называется интегральным синусом. Для его вычисления:

- а) разложите $Si(x)$ в ряд Маклорена и докажите его равномерную сходимость при любых $x \in \mathbb{R}$, пользуясь признаком Лейбница;
- б) оцените точность соответствующего $Si(x)$ полинома Тейлора.

2. Следующая функция, представленная в виде неберущегося интеграла

$$Ci(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt,$$

называется интегральным косинусом. Для его вычисления:

- а) разложите $i(x)$ в ряд Маклорена и докажите его равномерную сходимость при любых $x \in \mathbb{R}$, пользуясь признаком Лейбница;
- б) оцените точность соответствующего $i(x)$ полинома Тейлора.

3. Следующая функция, представленная в виде неберущегося интеграла

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt,$$

называется интегралом (синус-интегралом) Френеля. Для его вычисления:

- а) разложите $S(x)$ в ряд Маклорена и докажите его равномерную сходимость при любых $x \in \mathbb{R}$, пользуясь признаком Лейбница;
- б) оцените точность соответствующего $S(x)$ полинома Тейлора.

4. Следующая функция, представленная в виде неберущегося интеграла

$$S(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt,$$

называется интегралом (косинус-интегралом) Френеля. Для его вычисления:

- а) разложите $C(x)$ в ряд Маклорена и докажите его равномерную сходимость при любых $x \in \mathbb{R}$, пользуясь признаком Лейбница;
- б) оцените точность соответствующего $C(x)$ полинома Тейлора.¹⁾

5. Следующая функция, представленная в виде неберущегося интеграла

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$$

называется функцией Бесселя нулевого порядка. Для его вычисления:

а) разложите $J_0(x)$ в ряд Маклорена и докажите его равномерную сходимость при любых $x \in \mathbb{R}$, пользуясь признаком Лейбница;

б) оцените точность соответствующего $J_0(x)$ полинома Тейлора.

6. Следующая функция, представленная в виде неберущегося интеграла

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t) dt$$

называется функцией Бесселя нулевого порядка. Для его вычисления:

а) разложите $J_0(x)$ в ряд Маклорена и докажите его равномерную сходимость при любых $x \in \mathbb{R}$, пользуясь признаком Лейбница;

б) оцените точность соответствующего $J_0(x)$ полинома Тейлора.

¹⁾Параметрическая кривая $x = C(t), y = S(t)$, на плоскости, называется спиралью Корню или клотоидой. Ее кривизна изменяется линейно как функция длины дуги. Клотоида используется как переходная дуга в дорожном строительстве. Когда участок дороги в плане имеет форму части клотоиды, руль автомобиля при поворотах поворачивается без рывков. Такой изгиб дороги позволяет проходить поворот без существенного снижения скорости. Клотоида предложена Корню для облегчения расчёта дифракции в прикладных задачах оптики.

ГЛАВА 2

Интерполирование алгебраическими многочленами

Интерполирование функций — частный случай задачи приближения функций, когда требуется, чтобы в определённых точках совпадали значения функции и приближающей её функции, а в более общем случае — также значения некоторых их производных.

Изучение этого способа приближения начнем, считая, что известна таблица значений функции $f \in C[a, b]$ длины $n \geq 1$:¹⁾

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \end{array}$$

Таблица 2.1. Таблица функции $f(x)$.

Для определенности будем считать, что узлы сетки (узлы интерполирования) пронумерованы по возрастанию, т.е.

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

Изучение задачи интерполирования начнем со случая, когда приближенная функция отыскивается из множества алгебраических полиномов (многочленов).

Задача. Найти алгебраический полином $L_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ такой, что

$$L_{n-1}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 : n. \tag{1}$$

Здесь и далее запись $i = 1 : n$ означает, что $i = 1, 2, \dots, n$.

Функцию $L_{n-1}(x)$ называют интерполяционным полиномом и рассматривают в качестве приближения функции $f(x)$ (см. рис. 1), условие (1) называют условием интерполяции.

¹⁾Если функция задана аналитическим выражением (типа 1) или способом вычисления (типа 2), то таблица предварительно строится. Узлы сетки x_i выбираются в этом случае из тех или иных соображений.

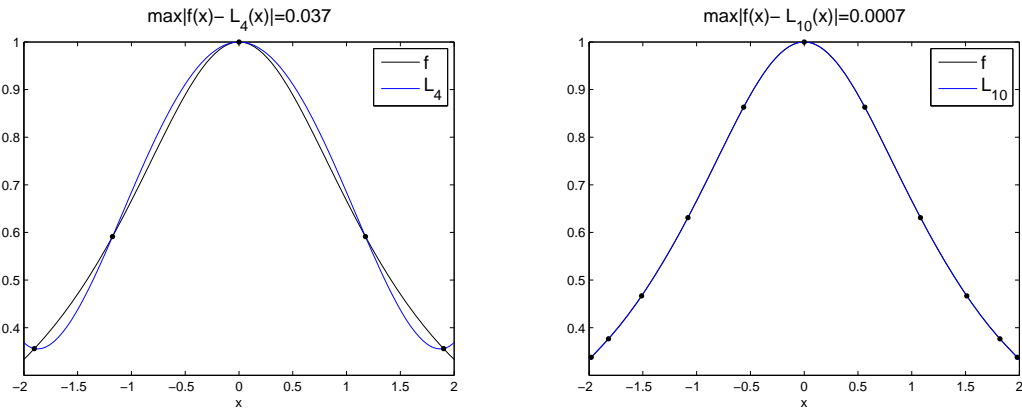


Рис. 1. Приближение функции $f(x) = 1/(1 + ax^2)$, $a = 1/2$, интерполяционным полиномом 4-ой степени (слева) и 10-ой степени (справа). Точками обозначены значения функции в узлах интерполяции.

Теорема 1. *Интерполяционный полином L_{n-1} существует и определяется условиями (1) единственным образом.*

Доказательство. Искомый полином будем искать в виде

$$L_{n-1}(x) = c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1}. \quad (2)$$

Его коэффициенты определим из условия (1):

$$c_1 + c_2x_i + \dots + c_nx_i^{n-1} = f(x_i), \quad i = 1 : n, \quad (3)$$

или более подробно

$$\begin{aligned} c_1 + c_2x_1 + \dots + c_nx_1^{n-1} &= f(x_1), \\ c_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_2^{n-1} &= f(x_2), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ c_1 + c_2x_n + \dots + c_nx_n^{n-1} &= f(x_n). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения неизвестных c_1, c_2, \dots, c_n мы получили систему линейных уравнений, определитель которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

есть определитель Вандермонда. Он отличен от нуля, если узлы различны. Следовательно, система имеет единственное решение. \square

Иногда вместо $L_{n-1}(x)$ будем использовать обозначение $L_{n-1}(x; f)$, чтобы явно указать, что интерполяционный полином строится именно по таблице функции $f(x)$.

Следствие 1. Любой полином $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ однозначно определяется своими значениями в n точках, в частности, $L_{n-1}(x; f) = f(x)$ для любого $x \in [a, b]$ и $f \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Доказательство. Ясно, что $f(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции (1) и $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Поэтому он совпадает с $L_{n-1}(x)$ в силу единственности интерполяционного полинома. \square

§ 1. Остаточный член интерполирования

Остаточный член интерполирования (называемый также погрешностью интерполирования) — это разность $R_{n-1}(x) = f(x) - L_{n-1}(x)$. По определению, он обращается в нуль в узлах интерполяции, но насколько он близок к нулю (т.е. мал) в остальных точках отрезка $[a, b]$? Следующая теорема дает его представление в форме Лагранжа.

Теорема 2. Пусть $f \in C^n[a, b]$, $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$. Тогда найдется точка $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ такая, что

$$f(x) = L_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x). \quad (4)$$

Доказательство. Пусть x фиксирована и не совпадает ни с одним узлом сетки (иначе (4) справедливо). Рассмотрим функцию

$$g(z) = f(z) - L_{n-1}(z) - K\omega_n(z), \quad z \in [a, b],$$

где $K = \text{const}$ определяется из условия $g(x) = 0$, т.е. из условия

$$f(x) = L_{n-1}(x) + K\omega_n(x). \quad (5)$$

Функция $g(z)$ обращается в нуль по крайней мере в $n + 1$ различной точке: в точке x , а также в точках x_1, x_2, \dots, x_n (так как $L_{n-1}(x_i) - f(x_i) = 0$ и $\omega_n(x_i) = 0$ при $i = 1 : n$). По теореме Ролля первая производная функции g обращается в нуль по крайней мере один раз между каждой парой соседних точек из указанного множества точек. Иными словами, существует n различных точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in [a, b]$ таких, что $g'(\xi_i) = 0$, $i = 1 : n$ (две из них зависят от x). Аналогично, вторая производная функции g обращается в нуль по крайней мере в $n - 1$ различных точках. Продолжая эти рассуждения, получим, что существует точка $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ такая, что $g^{(n)}(\xi) = 0$. Вычисляя

$g^{(n)}(x)$ в точке $x = \xi$, получим: $f^{(n)}(\xi) - Kn! = 0$, т. е. $K = f^{(n)}(\xi)/n!$, и искомое представление (4) следует из (5). \square

Из доказанной теоремы вытекает простая, но полезная равномерная оценка погрешности интерполяции.

Следствие 2. При произвольном расположении узлов интерполирования для любого $x \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{n!} (b-a)^n, \quad \text{где } M_n = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $|x - x_i| \leq b-a$ и $|\omega_n(x)| \leq (b-a)^n$ и воспользоваться формулой (4). \square

Следствие 3. Пусть узлы интерполирования заданы произвольно, функция f имеет производные любого порядка на $[a, b]$. Если

$$\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то $R_{n-1}(x) \rightarrow 0$ равномерно на $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.¹⁾

Доказательство. При $n \geq 1$, согласно формуле Стирлинга,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right), \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Следовательно, $n! > (n/e)^n$. Поэтому для любого $x \in [a, b]$

$$|R_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{n!} (b-a)^n \leq \left(\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n} e (b-a)\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

§ 2. Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Систему уравнений (3) можно решить методом Крамера или каким-либо другим методом. Однако, этот путь построения $L_{n-1}(x)$ является трудоемким уже при умеренных n . Поэтому были получены различные явные формулы для интерполяционного полинома, удобные для тех или иных целей.

¹⁾В этом случае говорят о сходимости процесса интерполяции.

Одна из идей получения явных формул заключается в следующем. Множество \mathbb{P}_{n-1} есть линейное (векторное) пространство функций размерности n . Пусть $\ell_1(x), \ell_2(x), \dots, \ell_n(x)$ есть какой-либо базис в нем.²⁾ Будем искать $L_{n-1}(x)$ в виде разложения

$$L_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n c_j \ell_j(x),$$

где c_j — искомые числа, найдем из условия интерполяции (1):

$$\sum_{j=1}^n \ell_j(x_i) c_j = f(x_i), \quad i = 1 : n, \quad \Leftrightarrow \quad Ac = F. \quad (6)$$

Это есть система линейных уравнений с матрицей $A = \{\ell_j(x_i)\}_{i,j=1}^n$ и правой частью $F = \{f(x_i)\}_{i=1}^n$. В силу этого, можно рассмотреть задачу выбора базисных функций $\ell_j(x)$ так, чтобы матрица A имела удобный для решения системы уравнений простой вид. Тогда, решая систему, получим явные формулы для коэффициентов c_j и, соответственно, явное выражение для интерполяционного полинома.

Понятно, что наиболее простой вид система (6) принимает в том случае, когда A является единичной матрицей, т.е. базисные функции удовлетворяют условиям:

$$(a) \ell_i \in \mathbb{P}_{n-1}; \quad (b) \ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1 : n. \quad (7)$$

Тогда система уравнений тривиально решается и $c_i = f(x_i)$, $i = 1 : n$, а интерполяционный полином записывается в виде

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_i(x). \quad (8)$$

Базисные функции в этом случае также легко выписываются в явном виде. Действительно, согласно (7) все точки сетки, кроме x_i , являются корнями $\ell_i(x)$, поэтому

$$\ell_i(x) = A(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

где $A = \text{const}$. Используя условие $\ell_i(x_i) = 1$, найдем

$$A = \frac{1}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

²⁾Один из базисов является каноническим: $\ell_1(x) = 1, \ell_2(x) = x, \ell_3(x) = x^2, \dots, \ell_n(x) = x^{n-1}$.

следовательно,

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

или короче

$$\ell_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1 : n. \quad (9)$$

Построенный таким образом интерполяционный полином в форме (8), (9), называют *интерполяционным полиномом в форме Лагранжа* (или просто полиномом Лагранжа), а полиномы (9) — *базисными функциями Лагранжа*. Сделаем несколько замечаний.

1. Легко видеть, что вычисление $\ell_i(x)$ по формуле (9) при фиксированном x требует $4(n-1)$ флор;¹⁾ вычисление всех базисных функций — $4(n-1)n$ флор; вычисление суммы после этого обходится в $2n$ флор. Таким образом, трудоемкость вычисления интерполяционного полинома в форме Лагранжа в точке равна $4n^2 - 2n = O(n^2)$ флор.

2. Базисным функциям и, соответственно, интерполяционному полиному можно придать несколько иной вид. Положим

$$\omega_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{j=1}^n (x - x_j).$$

Тогда, как нетрудно вычислить,

$$\omega_n'(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j).$$

Следовательно, базисные функции можно записать в виде

$$\ell_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}, \quad (10)$$

а интерполяционному полиному можно придать следующий вид:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}. \quad (11)$$

¹⁾Под 1 флор (floating point operation) будем понимать любую из арифметических операций +, −, *, / и использовать в качестве единицы трудоемкости вычислений с числами с плавающей точкой. Другими словами: 1 флор = 1 арифметическая операция.

3. Согласно следствию 1, любое $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ можно записать в виде

$$p(x) = \sum_{i=1}^n p(x_i) \ell_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

т.е. произвольный полином $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ можно однозначно разложить по системе полиномов $\{\ell_i(x)\}_{i=1}^n$. Это означает, что $\{\ell_i(x)\}_{i=1}^n$ есть базис в пространстве \mathbb{P}_{n-1} (базис Лагранжа).

4. Выберем в (12) в качестве интерполируемой функции полином $p(x) = x^m$, где $m = 0 : n - 1$. Вычислив $p(x_i) = x_i^m$, получим

$$\sum_{i=1}^n x_i^m \ell_i(x) = x^m, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Дифференцируя это тождество по x , получим также, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^m \ell'_i(x) = mx^{m-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m = 0 : n - 1.$$

В частности, при $m = 0$ получаются тождества

$$\sum_{i=1}^n \ell_i(x) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \ell'_i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

§ 3. Интерполяционный полином в барицентрической форме

Получим другую форму записи интерполяционного полинома, более экономичную, чем формула Лагранжа. Введем обозначение

$$\beta_i = \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)} = \frac{1}{\omega'_n(x_i)}. \quad (14)$$

Тогда формулу (11) можно переписать в виде

$$L_{n-1}(x) = \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i f(x_i)}{x - x_i}.$$

С другой стороны, из (13) при $m = 0$ и (10) следует $1 = \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{x-x_i}$.

Поделив одно разложение на другое, получим

$$L_{n-1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i f(x_i)}{x-x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{x-x_i}}. \quad (15)$$

Заметим, что формула (15) не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить на какую-либо подходящую постоянную c . Это позволяет определить β_i по другой, чем (14), формуле

$$\beta_i = \frac{c}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)} = \frac{c}{\omega'_n(x_i)},$$

где c — некоторая (нормирующая) постоянная.

Представление (15) называется *барицентрической формой* интерполяционного полинома. Несмотря на свой замысловатый вид (в левой части формулы — полином, справа — рациональная по своей форме функция), этот способ вычисления более экономичен и устойчив к ошибкам округления, чем формула Лагранжа (8). Если предварительно вычислить коэффициенты β_i , называемые *барицентрическими весами*, то вычисление $L_{n-1}(x)$ на заданном множестве точек x по формуле (15) потребует выполнения $O(n)$ флор для каждой точки, что на порядок по n меньше, чем требует формула Лагранжа.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте задачу интерполирования функции алгебраическим многочленом.
2. Как связаны между собой степень интерполяционного полинома и число узлов интерполяции и почему?
3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности алгебраического интерполяционного полинома.
4. Дайте определение определителя Вандермонда. Когда он равен нулю?
5. Дайте геометрическую интерпретацию задаче интерполирования функции алгебраическим многочленом в случае равномерной сетки узлов. Отметьте на рисунке узлы интерполирования.

6. Дайте геометрическую интерпретацию задаче интерполирования функции алгебраическим многочленом в случае неравномерной сетки узлов. Отметьте на рисунке узлы интерполирования.
7. Дайте геометрическую интерпретацию задаче интерполирования функции алгебраическим многочленом первой степени.
8. Дайте геометрическую интерпретацию задаче интерполирования функции алгебраическим многочленом второй степени.
9. Дайте определение остаточного члена (погрешности) интерполирования.
10. Запишите остаточный член интерполирования в форме Лагранжа. Сравните его с остаточным членом полинома Тейлора.
11. Приведите оценку остаточного члена интерполирования.
12. Запишите формулу Стирлинга для $n!$.
13. Сформулируйте достаточные условия на функцию, при которых интерполяционный полином равномерно сходится к функции с ростом степени полинома.
14. Опишите общий подход, позволяющий найти явный вид интерполяционного полинома.
15. Какими двумя условиями однозначно определяются базисные функции Лагранжа?
16. Запишите интерполяционный полином в форме Лагранжа. Какова трудоемкость этой формулы?
17. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.
18. Почему базисные функции Лагранжа называются базисными?
19. Приведите рисунки всех базисных функций Лагранжа в случае а) трех узлов интерполяции; б) четырех узлов интерполяции.
20. Чему равна сумма базисных функций Лагранжа?
21. Чему равна сумма производных базисных функций Лагранжа?
22. Запишите интерполяционный полином в барицентрической форме. Какова трудоемкость этой формулы?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2, x_3 . Запишите условия интерполяции $f(x)$ многочленом $L_2(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$. Решите полученную систему уравнений, используя правило Крамера, и найдите выражения для коэффициентов $L_2(x)$.
2. Для вычисления многочлена

$$p_n(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_{n+1}x^n$$

по схеме Горнера переписывают его виде

$$p_n(x) = c_1 + x(c_2 + x(c_3 + \dots + x(c_n + x(c_{n+1}))))),$$

и начинают вычисления с самой внутренней скобки, рекуррентно продвигаясь к c_1 . Напишите функцию на каком-либо языке программирования вычисления полинома на основе этой схемы Горнера. Определите вычислительную сложность (трудоемкость) этого метода.

3. Известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2 . Постройте интерполяционный многочлен $L_1(x) = c_1 + c_2 x$ при

- а) $x_1 = 1, x_2 = 3; f(x_1) = 3, f(x_2) = 4;$
 б) $x_1 = 3, x_2 = 5; f(x_1) = 1, f(x_2) = 3.$

Проиллюстрируйте результат рисунком.

4. Известен набор узлов $x_i, i = 1 : 6$, и значения функции $f(x)$ в этих узлах. Найдите явный вид интерполяционного полинома по узлам

- а) $x_3, x_4;$
 б) $x_1, x_2, x_3;$
 в) $x_3, x_4, x_5.$

5. Постройте интерполяционный кубический многочлен

$$L_3(x) = c_1 + c_2 x + 2x^2 + c_4 x^3,$$

для которого выполнены условия: $L_3(2) = 1, L_3(3) = 2, L_3(4) = 2.$

6. Дана таблица значений функции $f(x) = e^{-x}$:

x	1.60	1.62	1.63	1.65	1.67
e^{-x}	0.2019	0.1979	0.1959	0.1920	0.1882

- а) Вычислите значение $f(1.61)$ с помощью линейной интерполяции, $L_1(1.61)$;
 б) Оцените погрешность.

7. Определить, можно ли приблизить функцию e^{2x} на интервале $[0, 5]$ с наперед заданной точностью ε интерполяционным полиномом по какому-либо набору узлов интерполяции.

8. Определить, какую точность можно гарантировать при линейной интерполяции функции $f(x) = xe^{-x}$ на отрезке $[0, 1]$, считая узлами интерполирования его концы.

9. С какой точностью можно вычислить значение функции \sqrt{x} в точке $x = 112$ с помощью интерполяционного полинома второй степени, если заданы узлы $x_1 = 100, x_2 = 118, x_3 = 138.$

10. Определите интерполяционный полином для функции $f(x) = 3x^4 + 2x + 1$ по таблице ее значений в узлах $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4.$

11. Определить, можно ли приблизить функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционным полиномом по какой-либо сетке узлов сколь угодно точно?

12. Можно ли приблизить функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[1, 2]$ интерполяционным полиномом по какой-либо сетке узлов сколь угодно точно?

§ 4. Интерполяционный полином в форме Ньютона

Определим базисные функции в \mathbb{P}_{n-1} следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1, & \varphi_2(x) &= (x - x_1), & \varphi_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2), \dots, \\ \varphi_n(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}),\end{aligned}$$

и будем искать интерполяционный полином в виде разложения

$$L_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x). \quad (16)$$

Условия интерполяции $L_{n-1}(x_i) = f(x_i)$, $i = 1 : n$, примут вид:

$$\begin{aligned}c_1 &= f(x_1), \\ c_1 + c_2(x_2 - x_1) &= f(x_2), \\ c_1 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) &= f(x_3), \\ \dots & \\ c_1 + c_2(x_n - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) &= f(x_n).\end{aligned}$$

Отсюда последовательно можно определить все c_j . В частности,

$$\begin{aligned}c_1 &= f(x_1), \\ c_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\ c_3 &= \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right),\end{aligned}$$

и т.д. Коэффициенты c_j носят специальное название — *разделенные разности*, и могут быть вычислены по значениям f рекуррентно.

1. Разделенные разности. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах сетки $\Omega_n = \{x_i : a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b\}$.

Определение 1. Значения $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ называются *разделенными разностями функции f нулевого порядка*. *Разделенными разностями первого порядка* называются величины

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Разделенной разностью k -го порядка для набора из $k + 1$ попарно различных узлов $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1}\} \subset \Omega_n$, называется величина

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) = \frac{f(z_2, \dots, z_{k+1}) - f(z_1, z_2, \dots, z_k)}{z_{k+1} - z_1}.$$

Отметим основные свойства разделенных разностей.

1. Справедлива формула¹⁾

$$f(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{i=1}^k \frac{f(z_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^k (z_i - z_j)}. \quad (17)$$

Доказательство. При $k = 0$ формула превращается в тривиальное тождество $f(z_1) = f(z_1)$. При $k = 1$ имеем

$$f(z_1, z_2) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} = \sum_{i=1}^2 \frac{f(z_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^2 (z_i - z_j)}.$$

Далее доказательство проводится индукцией по k . Оставляем это в качестве упражнения. \square

2. Разделенная разность является симметричной функцией своих аргументов, т. е. значение разделенной разности не меняется при любой перестановке аргументов: если (i_1, i_2, \dots, i_k) есть произвольная перестановка $(1, 2, \dots, k)$, то $f(z_1, z_2, \dots, z_k) = f(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})$.

Доказательство. Пусть $\omega_k(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k)$. Тогда

$$\omega'_k(z_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^k (z_i - z_j), \quad i = 1 : k,$$

а формуле (17) можно придать следующий вид:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{i=1}^k \frac{f(z_i)}{\omega'_k(z_i)}.$$

Ясно, что если в левой части этого равенства переставить аргументы f местами, в правой части в сумме аналогично переставятся слагаемые местами, а сумма при этом не изменится. \square

¹⁾По определению $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$, $\prod_{i=1}^0 a_i = 1$.

3. Пусть $x \in [a, b]$ не является узлом сетки Ω_n . Тогда

$$f(x) = L_{n-1}(x) + f(x, x_1, x_2, \dots, x_n) \omega_n(x), \quad (18)$$

где $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа и свойству 1 имеем:

$$\begin{aligned} f(x) - L_{n-1}(x) &= \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x)} f(x) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega_n'(x_i)} = \\ &= \omega_n(x) \left(\frac{f(x)}{\prod_{j=1}^n (x - x_j)} + \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \right) = \\ &= f(x, x_1, x_2, \dots, x_n) \omega_n(x). \quad \square \end{aligned}$$

Формула (18) дает представление остаточного члена интерполирования в новой форме — в форме Ньютона.

4. Пусть $x \in [a, b]$ не является узлом сетки. Тогда найдется точка $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ такая, что

$$f(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (19)$$

Доказательство. Достаточно сравнить остаточные члены интерполирования в форме Лагранжа и Ньютона. \square

Следствием формулы (19) является тот факт, что разделенная разность n -го порядка функции f равна нулю, если $f \in \mathbb{P}_{n-1}$.

2. Форма Ньютона интерполяционного полинома. Введенные разделенные разности позволяют доказать, что справедлива

Теорема 3. В формуле (16) коэффициент c_j совпадает с разделенной разностью $f(x_1, x_2, \dots, x_j)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} L_{n-1}(x) &= c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \\ &\quad + c_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}). \quad (20) \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через $L_{k-1}(x) \in \mathbb{P}_{k-1}$ интерполяционный полином для $f(x)$, построенный по узлам x_1, x_2, \dots, x_k . Тогда

$$L_{n-1}(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \dots + [L_{n-1}(x) - L_{n-2}(x)], \quad (21)$$

причем $L_0(x) = f(x_1) = c_1$. Так как $L_{k-1}(x)$ совпадает с $f(x)$ и с $L_{k-2}(x)$ в узлах x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , то при $k \geq 2$ имеем

$$L_{k-1}(x) - L_{k-2}(x) = c_k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}),$$

где $c_k = \text{const}$. Ясно, что c_k является старшим коэффициентом полинома $L_{k-1}(x)$. Согласно формуле Лагранжа

$$L_{k-1}(x) = \sum_{i=1}^k f(x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^k (x_i - x_j)} \right) x^{k-1} + \dots$$

Следовательно, согласно свойству 1 разделенных разностей, получаем

$$c_k = \sum_{i=1}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^k (x_i - x_j)} = f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (22)$$

Утверждение теоремы, теперь, следует из формул (21)–(22). \square

Формула (20) определяет *форму Ньютона* интерполяционного полинома. Процесс вычисления разделенных разностей полезно иллюстрировать следующей таблицей (таблицей разделенных разностей):

x_1	<u>$f(x_1)$</u>				
x_2	$f(x_2)$	<u>$f(x_1, x_2)$</u>			
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	<u>$f(x_1, x_2, x_3)$</u>		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1})$	$f(x_2, x_3, x_4)$	\dots	<u>$f(x_1, \dots, x_n)$</u>
x_n	$f(x_n)$	<u>$f(x_{n-1}, x_n)$</u>			

Первые два столбца этой таблицы — исходные данные. Остальные — вычисляются последовательно один за другим. Подчеркнутые разделенные разности используются в формуле (20), определяющей интерполяционный полином.

Вычисления по формуле Ньютона (20) осуществляются следующим образом. Первоначально вычисляются разделенные разности c_i , $i = 1 : n$. Трудоемкость этого шага $O(n^2)$ флор. На втором шаге в заданных точках x вычисляется интерполяционный полином (20), переписанный в виде

$$L_{n-1}(x) = c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + \dots + (x - x_{n-2})(c_{n-1} + (x - x_{n-1})(c_n)) \dots)).$$

Вычисления начинаются с самой внутренней скобки. Нетрудно видеть, что следующий код вычисляет $L_{n-1}(x) = p$ за $O(n)$ флор:

```
p = c(n);
for i = n-1:-1:1
    p = c(i)+(x-x(i))*p;
end
```

§ 5. Многочлены Чебышева

Далее мы изучим вопрос оптимального выбора узлов интерполирования в тех случаях, когда они находятся в нашем распоряжении. При решении этой задачи нам понадобятся многочлены Чебышева, определяемые при помощи следующих рекуррентных формул:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad (23)$$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Ясно, что n определяет степень многочлена,

$$T_2(t) = 2t^2 - 1, \quad T_3(t) = 4t^3 - 2t, \dots$$

Отметим ряд свойств этих многочленов.

1. $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + \dots$. Многочлены $\tilde{T}_n(t) = 2^{1-n}T_n(t)$, со старшим коэффициентом равным единице, называют нормированными многочленами Чебышева.

2. Многочлены $T_{2m+1}(t)$ нечетной степени являются нечетными, а многочлены $T_{2m}(t)$ четной степени — четными.

3. Найдем явную формулу для полиномов Чебышева. Пусть t — фиксировано. Будем разыскивать значение $T_n(t)$ в виде $T_n(t) = \lambda^n$. Используя это представление в рекуррентной формуле (24), получим

$\lambda^{n+1} = 2t\lambda^n - \lambda^{n-1}$, откуда, предполагая, что $\lambda \neq 0$, приходим к квадратному уравнению $\lambda^2 - 2t\lambda + 1 = 0$ для определения параметра λ . Корни этого уравнения: $\lambda_{1,2} = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$. Поэтому функции

$$T_n^{(1)}(t) = \left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right)^n, \quad T_n^{(2)}(t) = \left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^n,$$

а следовательно, и функции

$$T_n(t) = c_1 T_n^{(1)}(t) + c_2 T_n^{(2)}(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, удовлетворяют рекуррентному соотношению (24). Выберем c_1, c_2 так, чтобы были выполнены начальные условия (23):

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ (c_1 + c_2)t + (c_2 - c_1)\sqrt{t^2 - 1} &= t. \end{aligned}$$

Отсюда находим $c_1 = c_2 = 1/2$, т. е. полиномы

$$T_n(t) = \frac{1}{2} \left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right)^n + \frac{1}{2} \left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению (24) и условиям (23).

Этими формулами можно непосредственно пользоваться при $|t| \geq 1$. При $|t| \leq 1$ они требуют дальнейших преобразований. Положим в этом случае $t = \cos \varphi$. Тогда

$$T_n(t) = \frac{1}{2} (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n + \frac{1}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n,$$

откуда, используя формулы Муавра, получим $T_n(t) = \cos(n\varphi)$, или

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (25)$$

4. Представление (25) позволяет найти все корни полинома Чебышева. В самом деле, из уравнения $\cos(n \arccos t) = 0$ сразу получаем, что $n \arccos t = \pi(2j - 1)/2$, $j = 1 : n$, следовательно, точки

$$t_j^0 = \cos \frac{(2j - 1)\pi}{2n}, \quad j = 1 : n$$

есть корни $T_n(t)$. Заметим, что все они лежат в интервале $(-1, 1)$.

5. Найдем также точки экстремума $T_n(t)$ на отрезке $[-1, 1]$. Ясно, что это те точки, в которых $|T_n(t)| = |\cos(n \arccos t)| = 1$ и они равны

$$\hat{t}_j = \cos \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

причем $T_n(\hat{t}_j) = (-1)^j$, $j = 0, 1, \dots, n$.

6. Полиномы Чебышева являются полиномами, наименее уклоняющимися от нуля на отрезке $[-1, 1]$. А именно, справедлива

Теорема 4. *Для любого полинома $p_n(t)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, справедлива оценка*

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |p_n(t)| \geq \max_{-1 \leq t \leq 1} |\tilde{T}_n(t)|,$$

где $\tilde{T}_n(t)$ — нормированный полином Чебышева степени n .

Доказательство. Предположим противное, и пусть $p_n(t)$ — полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице, такой, что

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |p_n(t)| < \max_{-1 \leq t \leq 1} |\tilde{T}_n(t)|. \quad (26)$$

Ясно, что полином $r_{n-1}(t) = \tilde{T}_n(t) - p_n(t)$ имеет степень не выше $n-1$. Проанализируем его значения в точках экстремума $\tilde{T}_n(t)$. По определению $\tilde{T}_n(\hat{t}_j) = (-1)^j 2^{1-n}$, а вследствие выдвинутого нами предположения $|p_n(\hat{t}_j)| < 2^{1-n}$, поэтому знаки $r_{n-1}(\hat{t}_j)$ чередуются, т.е. $r_{n-1}(\hat{t}_0) > 0$, $r_{n-1}(\hat{t}_1) < 0$, $r_{n-1}(\hat{t}_2) > 0$, \dots . Таким образом, на каждом отрезке $[\hat{t}_\ell, \hat{t}_{\ell+1}]$, $\ell = 0, 1, \dots, n-1$, полином $r_{n-1}(t)$ имеет по крайней мере по одному корню, т.е. всего имеет n корней. Следовательно, $r_{n-1}(t)$ — полином, тождественно равный нулю, что противоречит предположению (26). \square

Следствие 4. *Для любого $n \geq 1$ имеет место формула*

$$\min_{t_1, t_2, \dots, t_n \in [-1, 1]} \max_{-1 \leq t \leq 1} |(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (27)$$

причем минимум достигается в узлах Чебышева

$$t_j^0 = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1 : n.$$

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n \in [-1, 1]$ и $p_n(t) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n)$ — полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Полином

$$\tilde{T}_n(t) = \frac{T_n(t)}{2^{n-1}} = (t - t_1^0)(t - t_2^0) \dots (t - t_n^0)$$

удовлетворяет условиям теоремы и согласно теореме 4

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n)| \geq \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |T_n(t)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда непосредственно следует (27). \square

§ 6. Оптимальный выбор узлов интерполирования

Ранее мы изучили некоторые вопросы приближения функции интерполяционным полиномом. В частности, получили различные представления как самого интерполяционного полинома, так и его погрешности. В форме Лагранжа погрешность интерполирования имеет вид

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x). \quad (28)$$

Из формулы (28) следует, что погрешность интерполирования существенно зависит от величины $|\omega_n(x)|$, которая, в свою очередь, зависит от расположения узлов. В связи с этим естественно попытаться решить следующую задачу: при $n \geq 1$ расположить узлы x_1, \dots, x_n на $[a, b]$ так, чтобы минимизировать $|\omega_n(x)|$, точнее минимизировать функцию

$$W(x_1, \dots, x_n) = \max_{a \leq x \leq b} |\omega_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |(x - x_1) \dots (x - x_n)|,$$

т.е. определить решение задачи

$$W = \min_{x_1, \dots, x_n \in [a, b]} W(x_1, \dots, x_n). \quad (29)$$

Узлы интерполяции, построенные таким образом, принято называть *оптимальными узлами интерполяции*.

Вопрос выбора узлов интерполирования с необходимостью возникает, когда ставится задача интерполирования функции, заданной аналитическим выражением или способом вычисления, поскольку узлы интерполяции в этих случаях изначально не заданы.

Определение 2. Узлами Чебышева на $[a, b]$ назовем точки

$$x_j^0 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1 : n. \quad (30)$$

Теорема 5. Минимум в задаче (29) достигается в узлах Чебышева (30), при этом $W = (b-a)^n / 2^{2n-1}$.

Доказательство. Выполним линейную замену переменной, переводящую отрезок $-1 \leq t \leq 1$ в отрезок $a \leq x \leq b$:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t.$$

При обратной замене узлы x_i перейдут в некоторые узлы t_i так, что $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $i = 1 : n$. Тогда

$$\begin{aligned} x - x_i = \frac{b-a}{2} (t - t_i) \quad \Rightarrow \quad \omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) = \\ = \left(\frac{b-a}{2} \right)^n (t - t_1) \dots (t - t_n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W(x_1, \dots, x_n) = \max_{a \leq x \leq b} |\omega_n(x)| = \left(\frac{b-a}{2} \right)^n \max_{-1 \leq t \leq 1} |(t - t_1) \dots (t - t_n)|,$$

и, соответственно, согласно следствию (4),

$$\begin{aligned} W &= \min_{x_1, \dots, x_n \in [a, b]} W(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \left(\frac{b-a}{2} \right)^n \min_{t_1, \dots, t_n \in [-1, 1]} \max_{-1 \leq t \leq 1} |(t - t_1) \dots (t - t_n)| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}, \quad (31) \end{aligned}$$

причем минимум достигается в узлах Чебышева

$$t_j^0 = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1 : n,$$

которым на $[a, b]$ соответствуют узлы Чебышева x_j^0 . \square

Следствие 5. Если интерполяционный полином определен по узлам Чебышева (30), то для любого $x \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{2^{2n-1} n!} (b-a)^n. \quad (32)$$

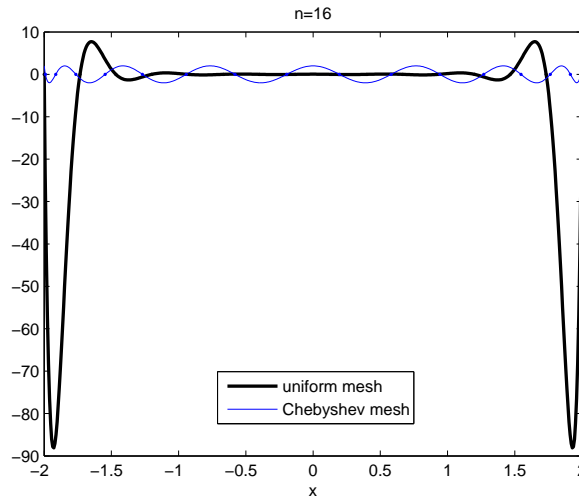


Рис. 2. Графики функции $\omega_n(x)$ при равномерном и Чебышевском выборе узлов. Синяя линия колеблется в полосе $[-W, W]$, $W = 2$, согласно (31)

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для полинома Тейлора

$$H_{n-1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},$$

при наилучшем выборе $x_0 = (a + b)/2$, мы получили ранее оценку, аналогичную (32):

$$|f(x) - H_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{2^n n!} (b - a)^n \quad \forall x \in [a, b]. \quad (33)$$

Из сравнения (32) и (33) можно заключить, что L_{n-1} в 2^{n-1} раз точнее, чем H_{n-1} .

Решение задачи об оптимальном расположении узлов интерполирования с целью минимизации $\omega_n(x)$ иллюстрирует рис. 2 при $n = 16$. Черной жирной линией изображен график функции $\omega_n(x)$ на отрезке $[-2, 2]$ при равномерном распределении узлов интерполирования, и график функции $\omega_n(x)$ при оптимальном распределении узлов в соответствии с (30) (синяя линия). Видно, что при равномерном распределении узлов интерполирования $\omega_n(x)$ сильно возрастает вблизи границ отрезка.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Укажите вид базисных функций, по которым раскладывается интерполяционный полином в форме Ньютона.

2. Дайте определение разделенных разностей: а) нулевого порядка; б) первого порядка; в) k -го порядка.
3. Укажите основные свойства разделенных разностей.
4. Запишите интерполяционный полином первой и второй степени в форме Ньютона.
5. Запишите интерполяционный полином $n - 1$ -ой степени в форме Ньютона.
6. Какова трудоемкость вычисления интерполяционного полинома в форме Ньютона?
7. Сравните трудоемкость вычисления интерполяционного полинома в форме Ньютона с трудоемкостью формулы Лагранжа.
8. Сравните трудоемкость вычисления интерполяционного полинома в форме Ньютона с трудоемкостью барицентрической формулы.
9. Дайте определение остаточного члена интерполирования в форме Ньютона.
10. Как связаны разделенные разности и производные функции?
11. Дайте определение полиномов Чебышева.
12. Укажите представление полиномов Чебышева на отрезке $[-1, 1]$.
13. Определите нормированные полиномы Чебышева. Укажите их старший коэффициент.
14. Сколько корней и экстремумов имеет полином Чебышева степени n на отрезке $[-1, 1]$?
15. Приведите формулы вычисления корней и экстремумов полином Чебышева степени n на отрезке $[-1, 1]$.
16. Чему равно максимальное по модулю значение нормированного полинома Чебышева степени n на отрезке $[-1, 1]$?
17. Сформулируйте задачу об оптимальном выборе узлов интерполяции.
18. Укажите оптимальный выбор узлов интерполяции на отрезке $[a, b]$.
19. Приведите оценку погрешности интерполяции при оптимальном выборе узлов.
20. Какой способ приближения функции точнее: интерполяция при оптимальном выборе узлов интерполирования или приближение полиномами Тейлора?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что полиномы

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = (x - x_1), \quad \varphi_3(x) = (x - x_1)(x - x_2), \dots, \\ \varphi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned} \quad (34)$$

являются линейно независимыми.

2. Докажите, что полиномы (34) образуют базис в \mathbb{P}_{n-1} .
3. Найдите интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = x^2$ по значениям в узлах $-1, 0, 1$.
4. Оцените погрешность интерполяции функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi/4]$ интерполяционным полиномом Ньютона, построенным по значениям в узлах $0, \pi/8, \pi/4$.
5. Оцените погрешность интерполяции функции $f(x) = e^{x^2}$ на отрезке $[0, 1]$ интерполяционным полиномом Ньютона, построенным по значениям в узлах $0, 1/2, 1$.

6. Дана таблица значений функции $f(x) = e^{-x}$:

x	1.60	1.62	1.63	1.65	1.67
e^{-x}	0.2019	0.1979	0.1959	0.1920	0.1882

а) Вычислите $f(1.61)$ с помощью интерполяционного полинома Ньютона 1-ой степени;

б) Оцените погрешность.

7. Дана таблица значений функции $f(x) = e^{-x}$:

x	1.60	1.62	1.63	1.65	1.67
e^{-x}	0.2019	0.1979	0.1959	0.1920	0.1882

а) Вычислите $f(1.61)$ с помощью интерполяционного полинома Ньютона 2-ой степени;

б) Оцените погрешность.

ГЛАВА 3

Постоянная Лебега

Рассмотрим два важных вопроса, касающиеся изученного нами метода интерполирования функций:

1) насколько метод интерполяции функции алгебраическим полином по точности уступает *наилучшему из возможных методов приближения* функции алгебраическим полином той же степени?

2) насколько интерполяционный полином чувствителен к погрешности задания функции? При практических вычислениях мы всегда имеем дело с приближенно заданными функциями (почему?).

Ответ на оба эти вопроса зависит от постоянной (константы) Лебега.

Определение 1. Пусть $\Omega_n = \{x_i\}_{i=1}^n$ — сетка на $[a, b]$. Функция

$$\Lambda_n(x) = \Lambda_n(x; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |\ell_i(x)| \quad (1)$$

называется *функцией Лебега*, а *постоянной Лебега* — число

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{x \in [a, b]} \Lambda_n(x; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

а) Справедливы оценки $1 \leq \Lambda_n(x) \leq \Lambda_n$ для любого $x \in [a, b]$. Левая оценка является простым следствием тождества $1 = \sum_{i=1}^n \ell_i(x)$, а правая оценка — следствие определения Λ_n .

б) Величина Λ_n не зависит от $[a, b]$, а зависит лишь от относительного расположения узлов на нем (чтобы убедиться в этом, сделайте в (1) замену переменной $x = a + (b - a)t$, $t \in [0, 1]$!).

§ 1. Новая оценка погрешности интерполяции

Рассмотрим ответ на первый из поставленных выше вопросов. Пусть $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ есть алгебраический полином — приближение функции f , полученный некоторым методом. Каждому методу, таким

образом, соответствует свой многочлен p_{n-1} . Величина $|f(x) - p_{n-1}(x)|$ определяет погрешность приближения в точке $x \in [a, b]$, а число¹⁾

$$\|f - p_{n-1}\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_{n-1}(x)|$$

— максимальную погрешность этого метода.

Определение 2. Алгебраический полином $f_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ назовем полиномом наилучшего равномерного приближения, если

$$\|f - f_{n-1}\|_{\infty} = \min_{p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}} \|f - p_{n-1}\|_{\infty}. \quad (2)$$

Далее мы увидим, что решение задачи (2) существует и определяется единственным образом. Величина

$$E_n(f) = \|f - f_{n-1}\|_{\infty}$$

называется погрешностью наилучшего равномерного приближения.

Сделаем следующие простые замечания.

1. Если $F_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ есть приближение f , полученное каким-либо методом (например, F_{n-1} является интерполяционным полиномом), то $\|f - F_{n-1}\|_{\infty} \geq E_n(f)$.

2. $E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой непрерывной на $[a, b]$ функции f . Это непосредственно следует из теоремы Вейерштрасса.¹⁾

Теорема 1. Справедливы оценки

$$E_n(f) \leq \|f - L_{n-1}\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f). \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $f_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ есть полиномом наилучшего равномерного приближения f . В силу единственности интерполяционного полинома $f_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f_{n-1}(x_i) \ell_i(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |f(x) - L_{n-1}(x)| &= |(f(x) - f_{n-1}(x)) + (f_{n-1}(x) - L_{n-1}(x))| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n-1}(x)| + \sum_{i=1}^n |f_{n-1}(x_i) - f(x_i)| |\ell_i(x)| \leq \\ &\leq (1 + \Lambda_n(x)) \|f - f_{n-1}\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f). \end{aligned}$$

¹⁾ Величину $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ принято называть равномерной нормой функции f .

¹⁾ Теоремы Вейерштрасса: для любого $f \in C[a, b]$ и $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический полином P_N степени $N = N(\varepsilon)$ такой, что $\|f - P_N\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Оценка снизу справедлива по определению $E_n(f)$. \square

Из оценки сверху (3) следует, что интерполяционный полином L_{n-1} по точности максимум в $1 + \Lambda_n$ раз менее точен, чем наилучшее равномерное приближение.²⁾

§ 2. Чувствительность интерполяции

Рассмотрим ответ на второй из поставленных выше вопросов. Пусть в узлах интерполяции вместо точных значений $f(x_i)$ известны приближенные значения $\tilde{f}(x_i)$ с погрешностью $\epsilon(x_i)$, не превышающей ϵ : $|\epsilon(x_i)| = |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \epsilon$. Таким образом, вместо L_{n-1} по значениям $\tilde{f}(x_i)$ будет построен возмущенный полином \tilde{L}_{n-1} . Практический интерес представляет отклонение \tilde{L}_{n-1} от f .

Теорема 2. *Справедлива равномерная по $x \in [a, b]$ оценка*

$$|f(x) - \tilde{L}_{n-1}(x)| \leq |f(x) - L_{n-1}(x)| + \epsilon \Lambda_n. \quad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$|L_{n-1}(x) - \tilde{L}_{n-1}(x)| = \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \tilde{f}(x_i)) \ell_i(x) \right| \leq \epsilon \Lambda_n. \quad (5)$$

Поэтому¹⁾

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{L}_{n-1}(x)| &\leq |f(x) - L_{n-1}(x)| + |L_{n-1}(x) - \tilde{L}_{n-1}(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - L_{n-1}(x)| + \epsilon \Lambda_n. \end{aligned}$$

Из оценки (4) следует, что чем больше Λ_n , тем чувствительнее процедура интерполяции к погрешности задания функции. \square

1. Зависимость $E_n(f)$ от f и n . Как отмечалось, $E_n(f)$ монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если f есть непрерывная функция. Оказывается, что имеет место более глубокая связь между скоростью убывания $E_n(f)$ к нулю и гладкостью f .

²⁾ Другими словами, рассмотренный нами метод интерполяции максимум в $1 + \Lambda_n$ раз менее точен, чем наилучший из возможных методов приближения.

¹⁾ Легко видеть, что при $x = x_*$ — точке максимума $\Lambda_n(x)$ и $\epsilon(x_i) = \epsilon \operatorname{sign}(\ell_i(x_*))$, в (5) можно поставить вместо \leq знак $=$.

Определение 3. Для $\lambda \in (0, 1]$ через $C^{0,\lambda}[a, b]$ обозначим множество таких функций f , которые удовлетворяют неравенству

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\lambda \quad \forall x, y \in [a, b],$$

с некоторой постоянной M .

Множество $C^{0,\lambda}[a, b]$ является промежуточным между $C[a, b]$ и $C^1[a, b]$. Точнее, $C^1[a, b] \subset C^{0,\lambda}[a, b] \subset C[a, b]$. Проверьте, что $x^\lambda \in C^{0,\lambda}[0, 1]$ при $\lambda \in (0, 1]$. Справедлива

Теорема 3. 1) (Бернштейн С.Н.) $f \in C^{0,\lambda}[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого n справедлива оценка

$$E_n(f) \leq \frac{C_\lambda}{n^\lambda} \quad (6)$$

с некоторой $C_\lambda = \text{const}$, зависящей от f , но не зависящей от n .

2) (Джексон) Функция $f \in C^k[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $n \geq k$

$$E_n(f) \leq \frac{C_k}{n^k} \quad (7)$$

с некоторой $C_k = \text{const}$, зависящей от f , но не зависящей от n .

2. Зависимость Λ_n от сетки. Напомним доказанные нами равномерные по $x \in [a, b]$ оценки

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f).$$

$$|f(x) - \tilde{L}_{n-1}(x)| \leq |f(x) - L_{n-1}(x)| + \varepsilon \Lambda_n. \quad (8)$$

Из этих оценок следуют простые, но важные выводы.

1. Чем меньше постоянная Лебега Λ_n , и чем более гладкой является функция, тем лучше как с точки зрения точности, так и чувствительности интерполяции к погрешности задания функции.

2. Если на последовательности сеток $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ выполнено условие $\Lambda_n E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $|f(x) - L_{n-1}(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x (в этом случае говорят о сходимости процесса интерполяции).

3. Если на последовательности сеток $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ выполнено условие $\Lambda_n \rightarrow \infty$, но $\Lambda_n E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то теоретически процесс интерполяции сходится, но практически — расходится, в силу точности оценки (8). При вычислениях может наблюдаться следующая

картина: погрешность $|f(x) - \tilde{L}_{n-1}(x)|$ с увеличением n поначалу убывает (когда второе слагаемое $\varepsilon \Lambda_n$ в (8) намного меньше первого), а затем начинает возрастать (поскольку $\varepsilon \Lambda_n \rightarrow \infty$ с ростом n).

Величина Λ_n зависит от выбора узлов Ω_n .

Теорема 4. 1) Пусть $\Omega_n = \{x_i = a + (i-1)(b-a)/(n-1)\}_{i=1}^n$ есть равномерная сетка узлов. Тогда $\Lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, причем

$$\Lambda_n \geq \lambda_n^{eq} = \frac{2^{n+1}}{(4n-2)\sqrt{n}}. \quad (9)$$

2) Если Ω_n есть Чебышевская сетка узлов, или

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right), \quad i = 1 : n,$$

то для некоторого $\theta_n \in (0, 1)$ справедливо представление

$$\Lambda_n = \lambda_n^{ch} = \frac{2}{\pi} \ln(n) + \theta_n. \quad (10)$$

3) Существует такая постоянная $c > 0$, что для любой сетки узлов Ω_n справедливо неравенство $\Lambda_n \geq c \ln(n)$.

Из этой теоремы следует, что Чебышевский набор узлов интерполяции является также оптимальным с точки зрения асимптотической минимизации постоянной Лебега.

§ 3. Результаты вычислительных экспериментов

Подтвердим вычислениями некоторые утверждения, отмеченные выше. Все вычисления проведены в MatLab.

1-й эксперимент. Начнем с практической проверки точности оценок теоремы 4 о постоянной Лебега, точнее утверждений 1) и 2). В таблице 3.1 сведены результаты вычислений констант Лебега для равномерных узлов (Λ_n^{eq}) и узлов Чебышева (Λ_n^{ch}). Как следует из графиков 1, функции Лебега в рассмотренных двух случаях существенно различаются. Следствием этого является кардинальное различие в росте констант Лебега. Как следует из таблицы 3.1, их оценки в (9) и (10) весьма точны.

2-й эксперимент направлен на проверку сходимости/расходимости процесса интерполирования при равномерном выборе узлов и по Чебышеву на примере трех функций на отрезке $[-1, 1]$:

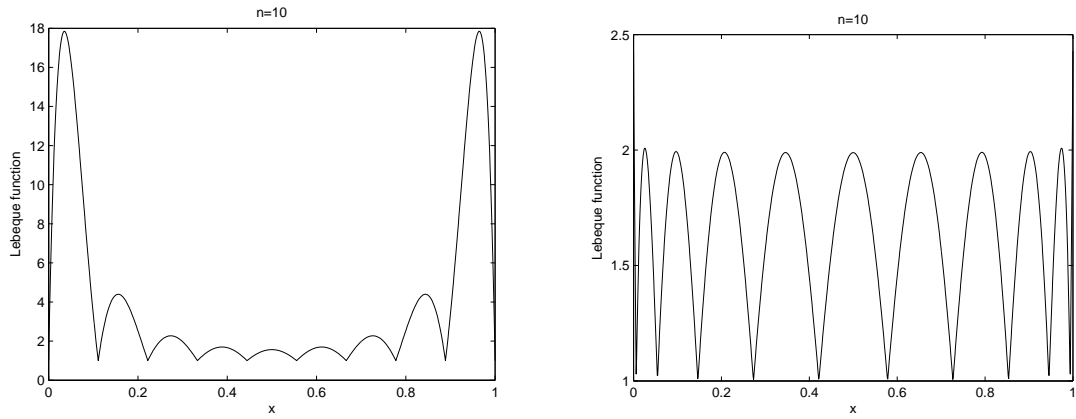


Рис. 1. Функции Лебега $\Lambda_n(x)$ при $n = 10$ для равномерных узлов (слева) и Чебышевского набора (справа).

n	10	20	30	40	50	100
Λ_n^{eq}	17.8	5886.7	$3.4 \cdot 10^6$	$2.4 \cdot 10^9$	$1.9 \cdot 10^{12}$	$8.9 \cdot 10^{26}$
λ_n^{eq}	17.0	6012	$3.3 \cdot 10^6$	$2.2 \cdot 10^9$	$1.6 \cdot 10^{12}$	$6.4 \cdot 10^{26}$
Λ_n^{ch}	2.4288	2.8698	3.1278	3.3110	3.4530	3.8943
λ_n^{ch}	2.4284	2.8697	3.1278	3.3110	3.4530	3.8943

Таблица 3.1. Константы Лебега: Λ_n^{eq} для равномерных узлов, Λ_n^{ch} — для узлов Чебышева и их оценки снизу (см. формулы (9) и (10) при $\theta_n = 0.96255$).

- 1) $f = 1/(25x^2 + 1)$ (функция Рунге; бесконечно дифференцируемая функция, но ее производные, т.е. числа M_n , быстро растут);
- 2) $f(x) = |x|$ (недифференцируема в нуле, но принадлежит $C^{0,1}[-1, 1]$);
- 3) $f(x) = \cos(x)$ (аналитическая функция, все ее производные ограничены, $M_n = 1$).

Из теоремы 1 и оценок (6), (7) и (10) следует, что в случае узлов Чебышева во всех трех случаях процесс интерполирования сходится и является устойчивым к ошибкам вычисления функций: для рассматриваемых функций она ограничена машинной точностью $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-16}$. В случае равномерных узлов процесс интерполяции расходится, хотя в случае 3) он поначалу должен сходиться (см. замечание 2 в секции 2). Результаты вычислений эти выводы подтверждают полностью.

Вычисления подтвердили также тот факт, что барицентрическая формула на порядок по n экономичнее (при $n = 400$ более чем в 600 раз) и вычисления поэтому проводились на основе этой формулы.

2-1. Функция Рунге. Таб. 3.2 и левый рис. 2 демонстрируют расходимость процесса интерполяции в случае равномерных узлов.

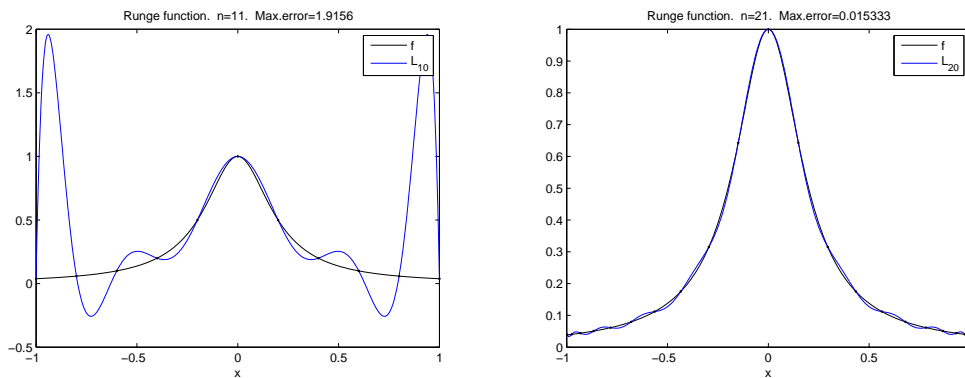


Рис. 2. Приближение функции Рунге интерполяционным полиномом по равноотстоящим узлам при $n = 11$ (слева) и по узлам чебышева при $n = 21$ (справа).

Напротив, таб. 3.3 и правый рис. 3 демонстрируют сходимость в случае узлов Чебышева.

n	11	21	31	41	51
$\ f - \tilde{L}_{n-1}\ _\infty$	1.9	59.8	2384.9	$1.0 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^6$

Таблица 3.2. Максимальная погрешность интерполяции функции Рунге на равномерной сетке узлов. Процесс интерполяции расходится.

n	51	76	101	126	151
$\ f - \tilde{L}_{n-1}\ _\infty$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-11}$	$9.3 \cdot 10^{-14}$

Таблица 3.3. Максимальная погрешность интерполяции функции Рунге на Чебышевской сетке узлов. Процесс интерполяции сходится, но достаточно медленно.

2-2. Функция $|x|$. Таблицы, аналогичные таб. 3.2 и 3.3, были получены и в этом случае. Рис. 3 качественно совпадает с рис. 2.

2-3. Функция $\cos(x)$. В этом случае приведем лишь таблицы 3.4 и 3.5 погрешностей интерполяции.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение постоянной Лебега.
2. Ответы на какие вопросы связаны с постоянной Лебега?
3. Справедливо ли утверждение: а) постоянная Лебега тем больше, чем больше отрезок интерполяции? б) постоянная Лебега тем меньше, чем больше отрезок интерполяции?
4. Дайте определение погрешности наилучшего равномерного приближения функции алгебраическими полиномами.

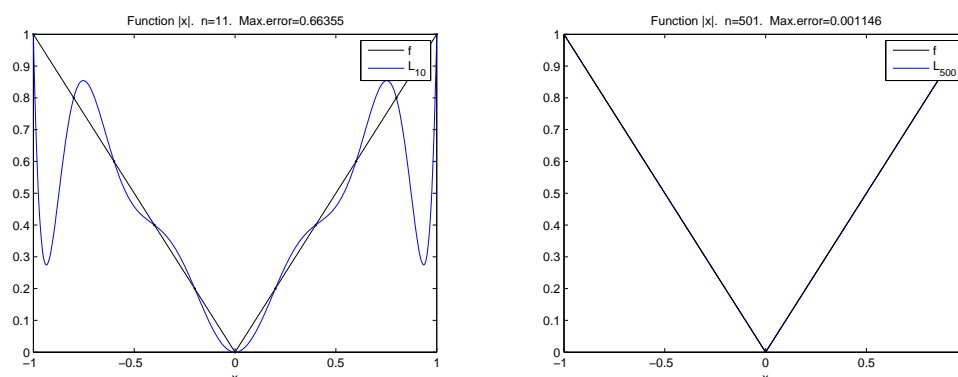


Рис. 3. Приближение функции $|x|$ интерполяционным полиномом по равноотстоящим узлам при $n = 11$ (слева) и по узлам чебышева при $n = 501$ (справа).

n	5	10	15	20	30	40
$\ f - \tilde{L}_{n-1}\ _\infty$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-14}$	$4.8 \cdot 10^{-13}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3.4. Максимальная погрешность интерполяции функции $\cos(x)$ на равномерной сетке узлов. Процесс интерполяции расходится, хотя при $n \leq 15$ погрешность заметно убывала. Это объясняется экспоненциальным ростом константы Лебега.

5. Как связаны максимальная погрешность интерполяции и погрешность наилучшего равномерного приближения функции алгебраическими полиномами?
6. Как связаны дифференцируемость функции и погрешность наилучшего равномерного приближения $E_n(f)$ при разных n ?
7. Для каких функций погрешность наилучшего равномерного приближения функции алгебраическими полиномами стремится к нулю с ростом степени полиномов?
8. Приведите оценку погрешности интерполирования функции алгебраическими полиномами через постоянную Лебега.
9. Как зависит постоянная Лебега от числа узлов равномерной сетки?
10. Как зависит постоянная Лебега от числа узлов чебышевской сетки?
11. Что понимают под сходимостью (расходимостью) интерполяционного процесса?
12. Для всех ли функций процесс интерполяции сходится?
13. Зависит ли процесс сходимости интерполяции от выбора узлов? Приведите примеры.
14. Как влияет погрешность задания функции на значение интерполяционного полинома?
15. Можно ли приблизить функцию $|x|$ интерполяционным полиномом с требуемой точностью? Как надо выбрать при этом узлы интерполяции.

n	5	10	15	20	40	80
$\ f - \tilde{L}_{n-1}\ _\infty$	$8.3 \cdot 10^{-5}$	$5.3 \cdot 10^{-10}$	$5.6 \cdot 10^{-16}$	$7.8 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-15}$	$1.6 \cdot 10^{-15}$

Таблица 3.5. Максимальная погрешность интерполяции функции $\cos(x)$ на Чебышевской сетке узлов. Процесс интерполяции быстро сходится. При $n > 15$ уменьшения погрешности не следует ожидать в силу погрешностей округления, относительная величина которых равна $2.2 \cdot 10^{-16}$.

ГЛАВА 4

Другие методы интерполяции многочленами

Ранее при построении интерполяционного полинома мы требовали совпадения значений функции со значениями полинома в узлах. Понятно, что если дополнительно известны и некоторые производные функции в узлах, то их можно включить в условия интерполяции и можно рассчитывать, что интерполяционный полином в этом случае будет лучше приближать функцию.

§ 1. Интерполяция Эрмита

Пусть f — непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, задана сетка Ω_n узлов

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

их кратности (натуральные числа)

$$m_1 \geq 1, \quad m_2 \geq 1, \quad \dots, \quad m_n \geq 1, \quad N = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

а также задана следующая таблица функции f :

x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_i)$	\dots	$f(x_n)$
$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	\dots	$f'(x_i)$	\dots	$f'(x_n)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$f^{m_1-1}(x_1)$	$f^{m_2-1}(x_2)$	\dots	$f^{m_i-1}(x_i)$	\dots	$f^{m_n-1}(x_n)$

Таблица 4.1. Таблица функции $f(x)$: заданы значения и производные функции. В i -том узле (столбце) задано m_i значений.

Определение 1. *Полином $H_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}$, удовлетворяющий условиям*

$$H_{N-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0 : m_i - 1, \quad i = 1 : n, \quad (1)$$

называется интерполяционным полиномом Эрмита.

Отметим следующие частные случаи этого метода интерполяции:

1) если все $m_i = 1$, $i = 1 : n$, то получаем изученную ранее задачу с условиями интерполирования $H_{n-1}(x_i) = f(x_i)$, $i = 1 : n$;

2) при $n = 1$ полином $H_{N-1}(x)$ удовлетворяет условиям $H_{N-1}(x_1) = f(x_1)$, $H'_{N-1}(x_1) = f'(x_1)$, \dots , $H^{(N-1)}_{N-1}(x_1) = f^{(N-1)}(x_1)$, и совпадает с полиномом Тейлора (убедитесь в этом!).

Напомним понятие кратности нуля (корня) функции.

Определение 2. Точка z является нулем кратности ℓ функции g , если $g^{(k)}(z) = 0$ для производных порядка $k = 0 : \ell - 1$ и $g^{(\ell)}(z) \neq 0$.

Хорошо известно, что если z является нулем полинома $p_n \in \mathbb{P}_n$ кратности не менее ℓ , то p_n нацело делится на $(x - z)^\ell$, т. е. его можно представить в виде $p_n(x) = (x - z)^\ell p_{n-\ell}(x)$, где $p_{n-\ell} \in \mathbb{P}_{n-\ell}$. Напомним также, что по основной теореме алгебры, алгебраический полином степени n имеет с учетом кратности в точности n нулей (включая, возможно, комплексные корни). Этот факт мы используем при доказательстве существования и единственности полинома Эрмита.

Теорема 1. Интерполяционный полином Эрмита существует и определяется условиями (1) единственным образом.

Доказательство. Запишем искомый полином в виде

$$H_{N-1}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j x^j$$

и подставим его в условия (1). Очевидно, что мы получим систему линейных относительно неизвестных c_j алгебраических уравнений $Ac = F$ с некоторой квадратной матрицей, поскольку число неизвестных совпадает с числом условий. Эта система разрешима единственным образом для любой правой части только тогда, когда однородная система имеет лишь тривиальное решение. Таким образом, для доказательства теоремы нам нужно показать, что решением задачи

$$H_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1} : H_{N-1}^{(k)}(x_i) = 0, \quad i = 1 : n, \quad k = 0 : m_i - 1, \quad (2)$$

может быть только полином $H_{N-1}(x) \equiv 0$. Равенства (2) означают, что каждый из x_i является нулем H_{N-1} кратности m_i . Следовательно, полином H_{N-1} имеет не менее $m_1 + m_2 + \dots + m_n = N$ нулей с учетом кратности, что может быть только в случае $H_{N-1}(x) \equiv 0$. \square

1. ЯВНЫЙ ВИД ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА ЭРМИТА. Как и в случае интерполирования с простыми узлами, можно выписать явный вид полинома $P_{N-1}(x)$ либо в форме, аналогичной интерполяционному полиному Лагранжа, либо в форме, аналогичной интерполяционному полиному Ньютона. В первом случае приходят к так называемой интерполяционной формуле Эрмита:

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(x_i) h_{ik}(x).$$

Здесь $h_{ik}(x)$ — базисные функции Эрмита, а именно полиномы степени $N-1$, удовлетворяющие при $i = 1 : n$ и $k = 0 : m_i - 1$ условиям:

$$h_{ik}^{(\ell)}(x_j) = \delta_{ij} \delta_{k\ell}, \quad j = 1 : n, \quad \ell = 0 : m_j - 1,$$

где δ_{st} — символ Кронекера. Т.о. $h_{ik}(x)$ интерполирует таблицу 4.2:

x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
0	0	...	0	...	0
...
0	0	...	1	...	0
...
0	0	...	0	...	0

Таблица 4.2. Таблица функции $h_{ik}(x)$. В i -том узле (столбце) задано m_i значений. Значение 1 находится в позиции $(k+1, i)$.

Явный вид полиномов $h_{ik}(x)$ в общем случае оказывается весьма громоздким. Ограничимся поэтому лишь следующим примером.

ПРИМЕР. Пусть все $m_i = 2$, $i = 1 : n$, т.е. в каждом узле сетки известно значение и производная функции (все узлы — двукратные).

Каждому узлу сетки x_i соответствуют две базисные функции: $h_{i0}(x)$ и $h_{i1}(x)$, а полином Эрмита имеет вид

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_{i0}(x) + \sum_{i=1}^n f'(x_i) h_{i1}(x). \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть $\ell_i(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, $i = 1 : n$, есть базисные функции Лагранжа, т.е. $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 1 : n$. Тогда в (3)

$$h_{i0}(x) = (1 - 2\ell'_i(x_i)(x - x_i))\ell_i^2(x), \quad h_{i1}(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x).$$

Доказательство. Для определения $h_{i0}(x)$ имеем условия: $h_{i0}(x_j) = \delta_{ij}$, $h'_{i0}(x_j) = 0$ при всех $j = 1 : n$. Следовательно, все узлы сетки, кроме x_i , являются нулями $h_{i0}(x)$ кратности 2. Эти же узлы являются нулями $\ell_i(x)$. Отсюда следует, что справедливо представление $h_{i0}(x) = (a + b(x - x_i))\ell_i^2(x)$ при некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Из условия $h_{i0}(x_i) = 1$ получаем $a = 1$. Из последнего условия определим b :

$$0 = h'_{i0}(x)|_{x=x_i} = b\ell_i^2(x) + 2\ell_i(x)\ell'_i(x)|_{x=x_i} = b + 2\ell'_i(x_i).$$

Нетрудно вычислить также, что

$$2\ell'_i(x_i) = \omega''_n(x_i)/\omega'_n(x_i), \quad \text{где } \omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Формула для $h_{i1}(x)$ получается аналогично. \square

2. Погрешность интерполяции Эрмита. Определим остаточный член эрмитовой интерполяции $R_{N-1} = f - H_{N-1}$.

Лемма 2. *Если функция g имеет на некотором отрезке $[a, b]$ с учетом кратности не менее n нулей, то ее производная g' имеет на этом же отрезке не менее $n - 1$ нулей.*

Доказательство. Если z является нулем кратности n функции g , то эта же точка z , очевидно, является нулем кратности $n - 1$ для производной. Если других нулей у g на $[a, b]$ нет, то лемма доказана.

Пусть $z_1 < z_2 < \dots < z_p$ ($p \geq 2$) — нули функции g на отрезке $[a, b]$, причем z_i является нулем кратности n_i , $n = \sum_i n_i$. Тогда эти же точки являются нулями производной g' суммарной кратности не менее $n - p$. Так как $g(z_i) = g(z_{i+1}) = 0$ для всех $i = 1 : p - 1$, то по теореме Ролля найдутся точки $\xi_i \in (z_i, z_{i+1})$ такие, что $g'(\xi_i) = 0$ для $i = 1 : p - 1$. Таким образом, с учетом кратности у производной на отрезке $[a, b]$ не менее $n - p + p - 1 = n - 1$ нулей. \square

Теорема 2. *Пусть $f \in C^N[a, b]$. Тогда*

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \omega_N(x), \quad x \in [a, b], \quad (4)$$

где $\xi = \xi(x) \in [a, b]$, $\omega_N(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)^{m_i}$.

Доказательство. Если $x \in \Omega_n$, то (4) превращается в тривиальное равенство $0 = 0$ для любой точки $\xi \in [a, b]$. Для фиксированной точки $x \notin \Omega_n$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(t) = f(t) - H_{N-1}(t) - C \omega_N(t), \quad t \in [a, b],$$

где постоянная C выбрана так, что $g(x) = 0$, т.е.

$$f(x) - H_{N-1}(x) = C \omega_N(x). \quad (5)$$

В силу условий интерполяции, определения $\omega_N(x)$ и (5), функция $g(t)$ имеет с учетом кратности не менее $N + 1$ нулей в точках множества $\Omega_n \cup \{x\}$. По лемме 2 ее производная $g'(t)$ имеет с учетом кратности не менее N нулей. По этой же лемме вторая производная $g''(t)$ имеет не менее $N - 1$ нулей. Продолжая эти рассуждения, мы получим, что существует по меньшей мере одна такая точка $\xi = \xi(x)$, что $g^{(N)}(\xi(x)) = 0$. Поскольку $H_{N-1}^{(N)}(x) \equiv 0$, $\omega_N^{(N)}(\xi) = N!$, то $g^{(N)}(\xi) = f^{(N)}(\xi) - N! = 0$. Отсюда найдем C и, согласно (5), представление (4). \square

§ 2. Интерполирование обобщенными многочленами

Выше мы изучили методы приближения функций одной переменной алгебраическими многочленами. Аналогичные вопросы можно изучить, если вместо пространства \mathbb{P}_n интерполирующих функций, рассмотреть какое-либо другое конечномерное пространство \mathbb{H}_n с базисом $\{h_j(x)\}_{j=1}^n$:

$$\mathbb{H}_n = \left\{ f_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j h_j(x) \right\}.$$

Элементы \mathbb{H}_n будем называть *обобщенными многочленами*.

Рассмотрим задачу интерполирования: для заданной функции $f \in C[a, b]$ и сетки $\{x_i\}_{i=1}^n$ на $[a, b]$ найти $f_n \in \mathbb{H}_n$ такую, что

$$f_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 : n. \quad (6)$$

Выделим то свойство обобщенных многочленов, которое гарантирует однозначную разрешимость этой задачи.

Определение 3. Конечная система функций $\{h_k(x)\}_{k=1}^n$ из $C[a, b]$ называется *системой Чебышева*, если любой ненулевой обобщенный многочлен из \mathbb{H}_n имеет на $[a, b]$ не более чем $n - 1$ нулей.

Лемма 3. Для того чтобы система $\{h_j(x)\}_{j=1}^n$ была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы определитель $H =$

$|h_j(x_i)|_{i,j=1}^n$ был отличен от нуля для любых попарно различных точек $\{x_i\}_{i=1}^n \subset [a, b]$.

Доказательство. Пусть $\{h_j(x)\}_{j=1}^n$ — система Чебышева и существуют попарно различные точки $\{x_i\}_{i=1}^n$ такие, что определитель $H = 0$. Это означает, что столбцы H линейно зависимы, т.е.

$$\sum_{j=1}^n h_j(x_i) c_j = 0,$$

где среди c_j , $j = 1 : n$, есть ненулевые. Следовательно, обобщенный многочлен $\sum_{j=1}^n h_j(x) c_j$ (ненулевой) имеет n попарно различных корней на $[a, b]$, что противоречит определению чебышевской системы.

Обратно, пусть определитель $H \neq 0$ для любых попарно различных точек $\{x_i\}_{i=1}^n$. Рассуждая от противного, предположим, что существует ненулевой обобщенный многочлен $f_n(x) = \sum_{j=1}^n h_j(x) c_j$, имеющий точки $\{x_i\}_{i=1}^n$ своими корнями, т.е.

$$\sum_{j=1}^n h_j(x_i) c_j = 0, \quad i = 1 : n.$$

Определитель матрицы этой системы $H \neq 0$, поэтому $c_1 = \dots = c_n = 0$. Это означает, что $f_n(x)$ тождественно равен нулю, что противоречит предположению. \square

Примеры чебышевских систем:

- 1) Алгебраическая система: $1, x, x^2, \dots, x^n$ на \mathbb{R} .
- 2) Тригонометрическая система: $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ является чебышевской на $[0, 2\pi)$ (см. далее).
- 3) Экспоненциальная система: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$, где λ_i , $i = 1 : n$, — попарно различные числа, является чебышевской на \mathbb{R} .

Теорема 3. *Обобщенный полином $f_n(x) \in \mathbb{H}_n$, удовлетворяющий условиям (6), существует и определяется единственным образом при любом выборе n узлов интерполирования на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\{h_k(x)\}_{k=1}^n$ есть система Чебышева на $[a, b]$.*

Доказательство. Будем искать $f_n(x)$ в виде $\sum_{j=1}^n c_j h_j(x)$. Из условия интерполяции (6) для определения n неизвестных коэффициентов разложения получим систему из n уравнений, определитель матрицы которой равен $|h_j(x_i)|_{i,j=1}^n$. Остается воспользоваться леммой 3. \square

Доказательство теоремы дает и способ построения обобщенного интерполяционного многочлена. Для конкретных базисных систем можно получить явные формулы. В связи с этим рассмотрим важный частный случай.

§3. Интерполяция периодических функций

Рассмотрим вещественную 2π -периодическую функцию $f \in C(\mathbb{R})$, сетку с $2n+1$ узлами $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n}$ на $[0, 2\pi)$. Выражение

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7)$$

будем называть тригонометрическим полиномом степени не выше n (степени n , если $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$). Их множество обозначим через \mathbb{T}_n .

По аналогии с алгебраической интерполяцией, кратко рассмотрим задачу тригонометрической интерполяции.

Определение 4. Тригонометрическим интерполяционным полиномом называется функция $t_n \in \mathbb{T}_n$, удовлетворяющая условиям

$$t_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0 : 2n. \quad (8)$$

Теорема 4. Существует единственный полином $t_n \in \mathbb{T}_n$, удовлетворяющий условиям (8).

Доказательство. Достаточно доказать, что система из $2n+1$ функций $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ является чебышевской на $[0, 2\pi)$ (см. теорему 3). Пусть ненулевой $t_n(x)$ имеет вид (7). Требуется доказать, что $t_n(x)$ имеет не более $2n$ нулей. С этой целью введем комплексную переменную $z = e^{ix}$, где i — мнимая единица. Отметим, что $|z| = 1$. С учетом равенства $z = 1/\bar{z}$ и формул Эйлера¹⁾ получаем

$$\begin{aligned} \cos kx &= \frac{z^k + \bar{z}^k}{2} = \frac{z^k + 1/z^k}{2} = \frac{z^{n+k} + z^{n-k}}{2z^n}, \\ \sin kx &= \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i} = \frac{z^k - 1/z^k}{2i} = -i \frac{z^{n+k} - z^{n-k}}{2z^n}. \end{aligned}$$

¹⁾ $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\bar{z} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

Следовательно,

$$t_n(x) = \frac{1}{2z^n} \left[a_0 z^n + \sum_{k=1}^n (a_k (z^{n+k} + z^{n-k}) - i b_k (z^{n+k} - z^{n-k})) \right].$$

Здесь сумма в квадратных скобках является *алгебраическим полиномом* степени $\leq 2n$ относительно z и может иметь не более $2n$ нулей $z_j = e^{ix_j}$. Следовательно, $t_n(x)$ также имеет не более $2n$ нулей. \square

1. Неравномерная сетка. Имеет место аналогичная алгебраическому случаю формула.

Теорема 5. *Справедлива следующая формула Лагранжа для тригонометрического интерполяционного полинома:*

$$t_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \tau_i(x), \quad \text{где} \quad \tau_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{2n} \frac{\sin \frac{x-x_j}{2}}{\sin \frac{x_i-x_j}{2}}. \quad (9)$$

Доказательство. Функции $\tau_i(x)$, называемые базисными полиномами Лагранжа, очевидно, удовлетворяют условию $\tau_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1 : n$. Поэтому $t_n(x)$ из (9) удовлетворяет условиям интерполяции (8). Остается убедиться, что $\tau_i(x) \in \mathbb{T}_n$, т.е. $\tau_i(x)$ имеет представление (7). Для этого достаточно проверить, что $g_n(x) = \prod_{j=1}^{2n} \sin \frac{x-t_j}{2} \in \mathbb{T}_n$. По индукции имеем:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sin \frac{x-t_1}{2} \sin \frac{x-t_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{t_2-t_1}{2} - \cos \frac{2x-t_2-t_1}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{t_2-t_1}{2} - \cos x \cos \frac{t_1+t_2}{2} - \sin x \cos \frac{t_1+t_2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, $g_1(x)$ можно представить в виде $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$. Пусть утверждение верно для $n = m$. Тогда $g_{m+1}(x) = g_m(x) \sin \frac{x-t_{2m+1}}{2} \sin \frac{x-t_{2m+2}}{2}$. По аналогии с g_1 произведение двух последних множителей приводится к виду $c_0 + c_1 \cos x + d_1 \sin x$. Поэтому

$$g_{m+1}(x) = (c_0 + c_1 \cos x + d_1 \sin x) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right).$$

Перемножая и преобразуя произведения синусов и косинусов в суммы, легко убеждаемся в том, что $g_{m+1}(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $m+1$. \square

2. Равномерная сетка. Рассмотрим равноотстоящие узлы

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad \dots, \quad x_{2n} = 2nh = \frac{4n\pi}{2n+1}, \quad (10)$$

с шагом $h = \frac{2\pi}{2n+1}$. В этом случае формулы для базисных тригонометрических полиномов Лагранжа упрощаются. Более того, можно

найти явные формулы для коэффициентов a_k и b_k интерполяционного полинома в форме (7). Нам потребуется известная функция из теории тригонометрических рядов Фурье, а именно, ядро Дирихле

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)}.$$

Теорема 6. Пусть $t_n(x)$ есть интерполяционный полином по узлам (10). Тогда: *i)* в формуле (9) можно принять $\tau_i(x) = \frac{2}{2n+1} D_n(x-x_i)$. *ii)* коэффициенты Фурье в формуле (7) определяются формулами

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} f(x_m) \cos(mx_k), \quad k = 0 : n,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} f(x_m) \sin(mx_k), \quad k = 1 : n.$$

Доказательство. Ограничимся лишь доказательством утверждения *ii)*. С этой целью запишем представление для $t_n(x)$ посредством ядра Дирихле с заменой этого ядра соответствующей суммой косинусов. Получим

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(x-x_k) \right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) + \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) (\cos mx_k \cos mx + \sin mx_k \sin mx). \end{aligned}$$

Первая сумма в правой части есть $a_0/2$, а коэффициенты при $\cos mx$ и $\sin mx$ равны, соответственно, a_k и b_k . \square

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Опишите задачу интерполяции Эрмита.
2. Как связаны между собой степень интерполяционного полинома, число узлов интерполяции и число значений функции и производных при интерполировании с кратными узлами?
3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности алгебраического интерполяционного полинома с кратными узлами.
4. Дайте геометрическую интерпретацию задаче интерполирования в случае двух узлов интерполяции, когда в каждом узле задано значение функции и ее производной. Отметьте на рисунке точкой значения функции, а отрезком — наклоны функции в узлах.
5. Дайте геометрическую интерпретацию задаче интерполирования в случае 2-кратных узлов интерполяции на произвольной сетке из n узлов. Отметьте на рисунке точкой значения функции, а отрезком — наклоны функции в узлах интерполирования.
6. Дайте геометрическую интерпретацию двух способов интерполирования с кратными узлами интерполяции алгебраическим многочленом третьей степени.
7. Запишите представление интерполяционного полинома в форме Эрмита.
8. Дайте определение остаточного члена (погрешности) интерполяционного полинома Эрмита. Сравните его с остаточным членом полинома Лагранжа.
9. Какими условиями однозначно определяются базисные функции Эрмита?
10. Дайте определение обобщенного многочлена.
11. Дайте определение чебышевской системы функций.
12. Приведите критерий, описывающий чебышевские системы функций.
13. Приведите примеры чебышевских систем функций.
14. Какая функция называется 2π периодической?
15. Какая функция называется тригонометрическим полиномом степени не выше n ?
16. Сформулируйте задачу тригонометрической интерполяции.
17. Постройте систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов тригонометрического интерполяционного полинома. Как связаны число узлов интерполяции и размерность этой системы?
18. Приведите формулу тригонометрического интерполяционного полинома для равноотстоящих узлов через функцию Дирихле.
19. Приведите формулы для коэффициентов Фурье тригонометрического интерполяционного полинома в случае равноотстоящих узлов интерполирования.
20. Какая из формул, указанных в вопросах 18 и 19 является более экономичной?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Известны значения функции $f(x)$ и ее производной в узлах x_1, x_2 . Получите явный вид интерполяционного полинома Эрмита.

2. Известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2 и производной $f'(x_1)$. Получите явный вид интерполяционного полинома Эрмита по этой таблице.
3. Известны значения функции $f(x)$ в узлах $x_1 = 0, x_2 = 1$ и производной $f'(x_2)$. Получите явный вид интерполяционного полинома Эрмита по этой таблице.
4. Известны значения функции $f(x)$ в узлах $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, и производной $f'(x_2)$. Получите явный вид интерполяционного полинома Эрмита по этой таблице.
5. Известны значения функции $f(x) = x^3$ в узлах $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, и производной $f'(x_2)$. Получите явный вид интерполяционного полинома Эрмита по этой таблице.
6. Известны значения функции $f(x) = e^{-x}$ в узлах $x_1 = 0, x_2 = 1$ и производные $f'(x_1), f'(x_2)$. Оцените погрешность интерполяции Эрмита по этой таблице.
7. Известны значения функции $f(x) = \sin(x)$ в узлах $x_1 = 0, x_2 = \pi/4, x_3 = \pi/2$, и производная $f'(x_2)$. Оцените погрешность интерполяции Эрмита по этой таблице.
8. Пусть известны значения функции $f(x)$ и ее производной в n узлах Чебышева на отрезке $[a, b]$. Получите оценку максимальной погрешности интерполяции Эрмита по этой таблице.
9. Пусть $n = 2m + 1$ и известны значения функции $f(x)$ в n узлах Чебышева на отрезке $[a, b]$, а также производная $f'((a + b)/2)$. Получите оценку максимальной погрешности интерполяции Эрмита по этой таблице.
10. Пусть полином Эрмита строится по таблице, все узлы которой двукратные. По аналогии с интерполяцией Лагранжа, найдите оптимальное расположение узлов.
11. Пусть известны значения функции $\sin(x)$ и ее производной в n узлах Чебышева на отрезке $[0, \pi/2]$. Определить, можно ли приблизить ее с равномерной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ полиномом Эрмита по этой таблице при а) $n = 4, \varepsilon = 10^{-6}$; б) $n = 5, \varepsilon = 10^{-5}$.
12. Показать, что для любых $x_i, i = 0 : n$, удовлетворяющих условию $a \leq x_0 < \dots < x_n < a + \pi$, и для любых $f_i, i = 0 : n$, существует единственный тригонометрический многочлен $t_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)$, такой, что $T(x_k) = y_k, k = 0 : n$.

ГЛАВА 5

Интерполирование функций сплайнами

Интерполирование функции единым алгебраическим многочленом на всем отрезке с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, если узлы не заданы специальным образом (например, как корни соответствующего полинома Чебышева). Это объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Для того чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок $[a, b]$ разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию многочленом невысокой степени (так называемая кусочно-полиномиальная интерполяция).

Одним из способов интерполирования на всем отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций. Сплайн-функцией или сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке $[a, b]$ и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных. Слово "сплайн" (английское spline) означает гибкую линейку (рейку), используемую для проведения гладких кривых через заданные точки плоскости (см. рис. 1, который изображает практический способ построения естественного кубического интерполяционного сплайна).

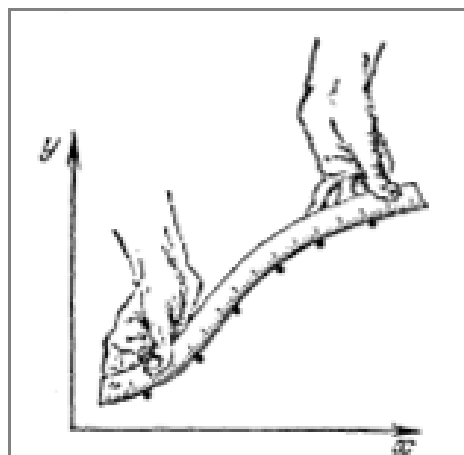


Рис. 1. Интерполирование сплайном.

Различают три типа сплайнов:

1) Лагранжевы сплайны (являются максимум непрерывными на всем $[a, b]$ и определяется лишь значениями функции в точках сетки).

2) Эрмитовы сплайны (являются гладкими на $[a, b]$; определяются как значениями функции, так и ее производными в отдельных точках каждого отрезка разбиения).

3) Естественные сплайны (являются гладкими на $[a, b]$; определяются значениями функции и, возможно, значениями ее производных в концевых точках отрезка $[a, b]$).

Рассмотрим каждый тип в отдельности.

§ 1. Лагранжевы сплайны

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $\Omega_n = \{x_i : i = 1 : n + 1\}$,

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b.$$

Введем обозначения $e_k = [x_k, x_{k+1}]$ для отрезков разбиения, $h_k = x_{k+1} - x_k$ для их длин, h — для максимальной длины подотрезков.

Определение 1. Для целого $m \geq 1$ и разбиения Ω_n пространством лагранжевых сплайнов называется множество функций

$$S_h^m = \{s \in C[a, b] : s|_{e_k} \in \mathbb{P}_m, k = 1 : n\}.$$

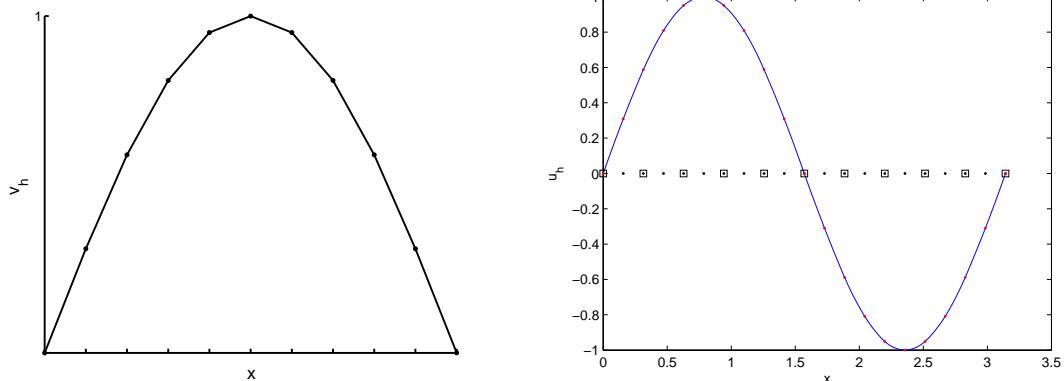


Рис. 2. Вид функции из S_h^1 (слева) и S_h^2 (справа; $n = 10, m = 2$)

Вид функций из S_h^m при двух значения m приведен на рис. 2.

На каждом отрезке e_k зададим $m + 1$ узел, включая его концы:

$$x_k = x_{k1} < x_{k2} < \dots < x_{k,m+1} = x_{k+1}.$$

Множество из $N = mn + 1$ всех точек x_{ki} обозначим через Ω_{nm} .

Определение 2. Интерполяционным лагранжевым сплайном (или просто лагранжевым сплайном) степени m функции $f \in C[a, b]$ называется функция $s_{hm} \in S_h^m$, удовлетворяющая условиям

$$s_{hm}(x) = f(x), \quad x \in \Omega_{nm}.$$

На каждом отрезке e_k полином $s_{hm} \in \mathbb{P}_m$ удовлетворяет условиям

$$s_{hm}(x_{ki}) = f(x_{ki}), \quad i = 1 : m + 1,$$

т.е. является интерполяционным полиномом и можно воспользоваться, например, формулой Лагранжа для его записи:

$$s_{hm}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} f(x_{ki}) l_{ki}(x), \quad l_{ki}(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} \frac{x - x_{kj}}{x_{ki} - x_{kj}}.$$

Теорема 1. Пусть $s_{hm}(x)$ есть лагранжев сплайн степени m функции $f \in C^{m+1}[a, b]$. Тогда

$$E_h^m = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - s_{hm}(x)| \leq \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} M_{n, m+1}, \quad (1)$$

где $M_{n, m+1} = \max_{k=1:n} \max_{x \in e_k} |f^{(m+1)}(x)|$.

Доказательство. Пусть максимальная погрешность приближения E_h^m достигается в некоторой точке x , скажем, k -го отрезка (почему такая точка существует?), т.е. $E_h^m = |f(x) - s_{hm}(x)|$, $x \in e_k$. Пользуясь остаточным членом интерполяции, будем иметь:

$$E_h^m = \left| \frac{f^{(m+1)}(\xi_k)}{(m+1)!} \omega_{k, m+1}(x) \right|, \quad x \in e_k, \quad (2)$$

где $\omega_{k, m+1}(x) = (x - x_{k1})(x - x_{k2}) \dots (x - x_{k, m+1})$. Искомая оценка (1) непосредственно следует из (2), т.к. $|x - x_{kj}| \leq h$. \square

Из оценки (1) следует, что малой погрешности можно добиться при малом m (для функций небольшой гладкости), если величина h выбрана достаточно малой.

§ 2. Эрмитовы сплайны

Лагранжевы сплайны всего лишь непрерывны на всем отрезке $[a, b]$. Эрмитов сплайн можно определить любой гладкости. Например, если необходимо построить сплайн степени m , имеющий ℓ непрерывных производных на всем отрезке $[a, b]$, то на каждом отрезке e_k в его концевых точках достаточно вычислить (задать), кроме значения функции, также его производные $f', f'', \dots, f^{(\ell)}$. Кроме того, на каждом e_k необходимо также задать значения функции (а также, если необходимо, и производные) в некоторых внутренних точках, общим числом $m + 1 - 2\ell \geq 0$. Таким образом на каждом e_k мы получим таблицу значений функции и его производных общим числом $m + 1$. По этой таблице на отрезке мы можем определить интерполяционный полином Эрмита степени m . В результате таких построений на каждом e_k , в целом на $[a, b]$ мы получим сплайн, имеющий, в общем случае, в точности ℓ непрерывных производных (почему?). Рассуждая как и выше, для погрешности приближения таким сплайном выводится оценка (1), если воспользоваться остаточным членом интерполяции Эрмита.

§ 3. Естественные сплайны. Интерполяция кубическими сплайнами

Ограничимся рассмотрением частного, но распространенного в вычислительной практике случая, когда естественный сплайн определяется на основе многочленов третьей степени (кубический сплайн).

Как и ранее, рассмотрим на $[a, b]$ сетку

$$\Omega_n = \{x_i : i = 1 : n + 1\}, \quad a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b,$$

сохраняя обозначения $e_k = [x_k, x_{k+1}]$, $h_k = x_{k+1} - x_k$, и $h = \max h_k$ — для максимальной длины отрезков разбиения.

Определение 3. *Пространством естественных кубических сплайнов (гладкости 2) называется пространство функций*

$$S_h = S_h^{3,2} = \{u \in C^2[a, b] : u|_{e_k} \in \mathbb{P}_3, \quad k = 1 : n\}.$$

Определение 4. Сплайн $s \in S_h$, удовлетворяющий условиям

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 : n + 1, \quad (3)$$

называется интерполяционным кубическим сплайном для f .

Нетрудно понять, что сплайн $s \in S_h$ условиями интерполяции (3) определяется не единственным способом. В самом деле, вычислим размерность пространства S_h . Для определения полинома 3-ей степени на отрезке e_k требуется 4 параметра; для n отрезков получается $4n$ параметров, или, как еще говорят, *степеней свободы*. С учетом включения кубического сплайна в пространство $C^2[a, b]$, для $s \in S_h$ должны выполняться условия "склейки" 2-го порядка гладкости во всех внутренних узлах:

$$\begin{aligned} s(x_i - 0) &= s(x_i + 0), & s'(x_i - 0) &= s'(x_i + 0), \\ s''(x_i - 0) &= s''(x_i + 0), & i &= 2 : n, \end{aligned}$$

т. е. всего накладывается $3(n - 1)$ ограничений. Таким образом, $N = \dim S_h = 4n - 3(n - 1) = n + 3$. Итак, для определения сплайна 3-ей степени требуется $N = n + 3$ параметров, тогда как условий (3) для его определения на 2 меньше. Для однозначной разрешимости задачи добавляют 2 так называемых *краевых (или граничных) условия*.

Примеры наиболее часто используемых краевых условий:

$$1) \quad s'(x_1) = d_1, \quad s'(x_{n+1}) = d_{n+1}, \quad (4)$$

$$2) \quad s''(x_1) = c_1, \quad s''(x_{n+1}) = c_{n+1}, \quad (5)$$

где d_1, d_{n+1} и c_1, c_{n+1} — заданные числа.

В вычислениях используются также другие краевые условия. Например, для периодических функций $f(x)$, естественно использовать периодические краевые условия:

$$s'(x_1) = s'(x_{n+1}), \quad s''(x_1) = s''(x_{n+1}).$$

Далее мы ограничимся условиями (4) и (5). В этих условиях в качестве c_i или d_i можно взять либо точные значения соответствующих производных функции $f(x)$: $c_i = f''(x_i)$ или $d_i = f'(x_i)$ для $i = 1, n+1$, либо вычислить эти производные приближенно, с требуемой точностью.

1. Вывод уравнений для параметров сплайна. Обозначим через $s_i(x)$, $i = 1 : n$, сужение искомого сплайна $s(x)$ на отрезок e_i ; так что $s_i \in \mathbb{P}_3$, $s'_i \in \mathbb{P}_2$, $s''_i \in \mathbb{P}_1$. Заметим также, что $s''(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и является линейной на e_i , т.е. является ломаной на $[a, b]$ (нарисуйте примерный график $s''(x)$ на $[a, b]$). Положим $m_i = s''(x_i)$ для $i = 1 : n + 1$. Тогда на отрезке e_i , $i = 1 : n$, мы можем записать

$$s''_i(x) = m_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + m_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}. \quad (6)$$

Интегрируя дважды по x , получим

$$s_i(x) = \frac{m_i}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i} (x - x_i)^3 + \alpha_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \beta_i \frac{x - x_i}{h_i}. \quad (7)$$

В этой формуле неизвестными являются 4 параметра. Для их определения у нас имеются условия интерполяции, C^2 -склейки в узлах и краевые условия. Рассмотрим эти условия по отдельности.

1) Подставим в (7) $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и учтем условия (3). Найдем

$$\alpha_i = f_i - \frac{m_i}{6} h_i^2, \quad \beta_i = f_{i+1} - \frac{m_{i+1}}{6} h_i^2, \quad i = 1 : n. \quad (8)$$

Формулы (7), (8) определяют сплайн, который обладает следующими свойствами: а) $s'' \in C[a, b]$ (в силу формулы (6)); б) $s(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции (3); в) $s \in C[a, b]$ (в силу б)).

2) Осталось определить параметры m_i , $i = 1 : n + 1$. Для их определения у нас остается условие непрерывности на $[a, b]$ производной $s'(x)$, а также краевые условия. Условие $s' \in C[a, b]$ принимает следующий вид:

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i), \quad i = 2 : n. \quad (9)$$

Дифференцируя (7), получаем:

$$s'_i(x) = -\frac{m_i}{2h_i} (x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i} (x - x_i)^2 + \frac{\beta_i - \alpha_i}{h_i}. \quad (10)$$

Сдвигом $i \rightarrow i - 1$ получаем также

$$s'_{i-1}(x) = -\frac{m_{i-1}}{2h_{i-1}} (x_i - x)^2 + \frac{m_i}{2h_{i-1}} (x - x_{i-1})^2 + \frac{\beta_{i-1} - \alpha_{i-1}}{h_{i-1}}. \quad (11)$$

Подставляя выражения (10) и (11) в соотношения (9), после простых преобразований получим

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} = F_i, \quad i = 2 : n, \quad (12)$$

где

$$F_i = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right).$$

3) К уравнениям (12) надо добавить два соотношения, учитывая краевые условия. Пусть заданы условия (4). Условия $s'(x_1) = d_1$, $s'(x_{n+1}) = d_{n+1}$ примут вид

$$2h_1 m_1 + h_1 m_2 = 6 \left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - d_1 \right), \quad (13)$$

$$h_n m_n + 2h_n m_{n+1} = 6 \left(d_{n+1} - \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n} \right), \quad (14)$$

если в формуле (10) принять, соответственно, $i = 1$, $x = x_1$ и приравнять результат d_1 и $i = n$, $x = x_{n+1}$ и приравнять результат d_{n+1} .

Если заданы краевые условия (5), то, в силу определения параметров m_i , получим соотношения

$$m_1 = c_1, \quad m_{n+1} = c_{n+1}. \quad (15)$$

Соотношения (13), (14) или (15) следует присоединить к основным уравнениям (12). Получится система уравнений вида $Am = g$ с симметричной положительно определенной 3-диагональной матрицей порядка $(n+1) \times (n+1)$ (с диагональным преобладанием) и вектором правой части $g \in \mathbb{R}^{n+1}$. Такие системы однозначно разрешимы при любой правой части.

Итак, задача об отыскании кубического сплайна сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно-определенной 3-диагональной матрицей для нахождения параметров m_i . Для решения подобных систем применяются специальные быстрые методы, требующие порядка $O(n)$ арифметических операций. Остальные параметры сплайна определяются согласно формулам (8), а сам сплайн в точках $x \in e_i$ вычисляется по формуле (7).

Теорема 2. *Для краевых условий (4) (также (5)) существует единственный интерполяционный кубический сплайн, а его параметры могут быть найдены за $O(n)$ арифметических операций.*

Следующая теорема, которую приведем без доказательства, справедлива при выполнении точных краевых условий

$$s'(x_1) = f'(x_1), \quad s'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1}). \quad (16)$$

или

$$s''(x_1) = f''(x_1), \quad s''(x_{n+1}) = f''(x_{n+1}). \quad (17)$$

Теорема 3. Если $f \in C^4[a, b]$, то для кубического сплайна $s \in S_h$ с крайвыми условиями (16) или (17), справедливы оценки

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq M_4 h^{4-k}, \quad k = 0 : 2,$$

где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Из этой теоремы следует, что с уменьшением h погрешность $f(x) - s(x)$ приближения функции сплайном равномерно по $x \in [a, b]$ уменьшается, причем $f(x) - s(x) = O(h^4)$. Это же относится и к производным функции, однако точность при этом падает: $f'(x) - s'(x) = O(h^3)$, $f''(x) - s''(x) = O(h^2)$.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие функции принято называть сплайнами?
2. Какие типы сплайнов вам известны? Какие свойства их характеризуют?
3. Дайте определение лагранжевых сплайнов.
4. Дайте графическую иллюстрацию лагранжева сплайна первой степени. Как еще называются такие функции?
5. Дайте графическую иллюстрацию лагранжева сплайна второй степени.
6. Дайте оценку погрешности лагранжева сплайна степени m .
7. Дайте определение эрмитовых сплайнов.
8. Какие производные функции в конечных точках подинтервалов необходимо задать, чтобы построить эрмитов сплайн из $C^k[a, b]$, $k \geq 1$?
9. Дайте графическую иллюстрацию эрмитова сплайна третьей степени из $C^1[a, b]$.
10. Дайте определение естественного интерполяционного кубического сплайна. Почему необходимо задавать крайвые условия?
11. Краевые условия каких типов используются при построении кубического сплайна?
12. Какие условия должны быть выполнены, чтобы сплайн был дважды непрерывно дифференцируем на $[a, b]$?
13. Система алгебраических уравнений какого порядка возникает для определения параметров кубического сплайна?
14. Укажите свойства матрицы системы алгебраических уравнений для определения параметров кубического сплайна?

15. Сформулируйте теорему об оценке погрешности приближения функции кубическим сплайном?
16. С какой точностью можно приблизить функцию естественным кубическим сплайном?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть известны значения функции $\sin(x)$ на интервале $[0, 90^\circ]$ с шагом $h = 1^\circ$ и $s(x)$ — лагранжев сплайн первой степени на этой сетке — приближение функции $\sin(x)$.

- а) Получите оценку максимальной погрешности приближения.
 б) Вычислите $s(45.5^\circ)$ и найдите погрешность $|\sin(45.5^\circ) - s(45.5^\circ)|$. Согласуется ли она с оценкой на шаге 1)?

Для вычисления необходимых величин используйте компьютер или калькулятор.

2. Пусть известны значения функции $\sin(x)$ на интервале $[0, 90^\circ]$ с шагом 1° и $s(x)$ — лагранжев сплайн второй степени на этой сетке — приближение функции $\sin(x)$ (с шагом $h = 2^\circ$).

- а) Получите оценку максимальной погрешности приближения.
 б) Вычислите $s(45.5^\circ)$ и найдите погрешность $|\sin(45.5^\circ) - s(45.5^\circ)|$. Согласуется ли она с оценкой на шаге а)?

Для вычисления необходимых величин используйте компьютер или калькулятор.

3. Пусть известны значения функции $f(x)$ на равномерной сетке узлов $x_i = a + ih$, $i = 0 : n$ с шагом $h = (b - a)/n$, а также производные $f'(a)$ и $f'(b)$.

а) Покажите систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения параметров естественного интерполяционного кубического сплайна при таких данных.

б) Покажите, что матрица СЛАУ для параметров (размера $(n + 1) \times (n + 1)$) может быть представлена в виде

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

с) Докажите, $\det(M) > 0$ и, как следствие, что кубический сплайн при данных краевых условиях определяется единственным образом.

4. Пусть известны значения функции $f(x)$ на равномерной сетке узлов $x_i = a + ih$, $i = 0 : n$ с шагом $h = (b - a)/n$, а также производные $f''(a)$ и $f''(b)$.

а) Покажите систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения параметров естественного интерполяционного кубического сплайна при таких данных.

б) Покажите, что матрица СЛАУ для параметров (размера $(n - 1) \times (n - 1)$) может быть представлена в виде

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

с) Докажите, $\det(M) > 0$ и, как следствие, что кубический сплайн при данных краевых условиях определяется единственным образом.

5. Пусть известны значения функции $f(x)$ на равномерной сетке узлов $x_i = a + ih$, $i = 0 : n$ с шагом $h = (b - a)/n$.

а) Получите систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения параметров естественного интерполяционного кубического сплайна $s(x)$ при краевых условиях вида

$$\alpha_1 s''(a) - \beta_1 s'(a) = d_1, \quad \alpha_{n+1} s''(b) + \beta_{n+1} s'(b) = d_{n+1},$$

где $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$.

б) Докажите, что матрица СЛАУ не вырождена, и, как следствие, что кубический сплайн при данных краевых условиях определяется единственным образом.

6. Пусть на равномерной сетке с шагом h построены естественные кубические сплайны $s(x)$ и $\tilde{s}(x)$ при использовании точных $f(x_i)$ и приближенных $\tilde{f}(x_i)$ значений функции, соответственно, причем $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon$. Доказать справедливость оценки $\max_{x \in [a,b]} |s(x) - \tilde{s}(x)| \leq 10\varepsilon$, если заданы вторые производные функции в краевых условиях.

ГЛАВА 6

Наилучшие приближения

До сих пор задача приближения функций формулировалась как задача интерполяции. Однако ее можно сформулировать и в более общем виде, а именно в терминах приближений в абстрактных линейных нормированных пространствах.

Напомним, что *нормой* на вещественном линейном пространстве \mathbb{H} называется такая функция, заданная элементами из \mathbb{H} и обозначаемая далее через $\| \cdot \|$, которая удовлетворяет трем аксиомам:

- 1) $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
 2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;
 - 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника)
- где f, g — произвольные элементы \mathbb{H} , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Понятие нормы позволяет определить расстояние между двумя элементами пространства по формуле $d(f, g) = \|f - g\|$. Говорят, что два элемента пространства близки друг к другу, если расстояние между ними мало, т.е. $\|f - g\| \leq \varepsilon$ при достаточно малом ε .

Пусть дано вещественное нормированное пространство \mathbb{H} с нормой $\| \cdot \|$, может быть бесконечномерное, и в нем задана конечная система линейно независимых элементов¹⁾

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \dots \quad \varphi_n. \tag{1}$$

Напомним, что элемент $\varphi \in \mathbb{H}$, определенный равенством

$$\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n,$$

называется *обобщенным многочленом*, построенным по системе элементов (1). Множество всех обобщенных многочленов обозначим через \mathbb{H}_n . Ясно, что оно является подпространством \mathbb{H} .

¹⁾То есть равенство $c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n = 0$, где 0 означает нулевой элемент \mathbb{H} , выполнено лишь при условии $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

§ 1. Наилучшие приближения в нормированных пространствах

Изучим *задачу*: для заданного $f \in \mathbb{H}$ найти обобщенный многочлен $f_n \in \mathbb{H}_n$, расстояние которого до f — минимально.

Определение 1. Элемент $f_n = \bar{c}_0\varphi_0 + \bar{c}_1\varphi_1 + \dots + \bar{c}_n\varphi_n \in \mathbb{H}_n$ называется элементом наилучшего приближения для $f \in \mathbb{H}$, если

$$\|f - f_n\| = \inf_{g_n \in \mathbb{H}_n} \|f - g_n\|.$$

Или, эквивалентно,

$$\|f - (\bar{c}_0\varphi_0 + \bar{c}_1\varphi_1 + \dots + \bar{c}_n\varphi_n)\| = \inf_{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \|f - (c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n)\|.$$

Задача отыскания f_n называется задачей наилучшего приближения.

Задача наилучшего приближения сформулирована нами для любых (абстрактных) нормированных пространств. Для нас, в первую очередь, интерес представляют функциональные пространства \mathbb{H} и их подпространства \mathbb{H}_n . Приведем примеры.

Пример 1. $\mathbb{H} = C[a, b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

называемой равномерной нормой¹⁾. Пусть $\mathbb{H}_n = \mathbb{P}_n$ (множество алгебраических полиномов степени не выше n). В этом случае мы приходим к задаче *наилучшего равномерного приближения* заданной непрерывной функции алгебраическим полиномом степени n . Многочлен f_n называется *полиномом наилучшего равномерного приближения*.

Пример 2. $\mathbb{H} = C[a, b]$ с нормой

$$\|f\| = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

называемой *среднеквадратической* нормой с весом ρ . Здесь ρ есть *весовая функция*: она неотрицательна и интегрируема на $[a, b]$, имеет не

¹⁾В этом случае оценка $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ означает, что равномерно по x справедливо неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, т.е. $f_n(x)$ приближает $f(x)$ с точностью ε в каждой точке $x \in [a, b]$.

более чем конечное число нулей. Если $\mathbb{H}_n = \mathbb{P}_n$ или $\mathbb{H}_n = \mathbb{T}_n$, то мы приходим к задаче *наилучшего среднеквадратического приближения* заданной функции алгебраическим или тригонометрическим полиномом степени n . Полином f_n в этом случае называется *элементом наилучшего среднеквадратического приближения*.

Теорема 1. *Элемент наилучшего приближения существует.*

Доказательство. По определению точной нижней грани, найдется последовательность элементов $\psi_m \in \mathbb{H}_n$, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - \psi_m\| = \inf_{g_n \in \mathbb{H}_n} \|f - g_n\|.$$

Следовательно, последовательность $\|f - \psi_m\|$ сходится. Так как любая сходящаяся последовательность ограничена, то

$$\|f - \psi_m\| \leq c, \quad m = 1, 2, \dots$$

где $c = \text{const} > 0$. Тогда, согласно неравенству треугольника,

$$\|\psi_m\| \leq \|f - \psi_m\| + \|f\| \leq c + \|f\| = C, \quad m = 1, 2, \dots$$

что означает ограниченность последовательности элементов $\{\psi_m\}$ в конечномерном пространстве \mathbb{H}_n . Следовательно, из этой последовательности можно выделить сходящуюся в \mathbb{H}_n подпоследовательность $\{\psi_{m_k}\}$, предел которой обозначим через f_n . Имеем

$$\inf_{g_n \in \mathbb{H}_n} \|f - g_n\| \leq \|f - f_n\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \psi_{m_k}\| = \inf_{g_n \in \mathbb{H}_n} \|f - g_n\|,$$

откуда заключаем, что предельный элемент является наилучшим приближением для f . \square

Эта теорема гарантирует только существование элемента наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве и ничего не говорит о единственности. Рассмотрим специальный случай.

Определение 2. *Пространство называется строго нормированным, если равенство $\|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|$ справедливо тогда и только тогда, когда $f_1 = \alpha f_2$, где $\alpha > 0$.*

В таких пространствах справедлива теорема единственности.

Теорема 2. В строго нормированном пространстве элемент наилучшего приближения существует и единственен.

Доказательство. Пусть f_1, f_2 два разных наилучших приближения таких, что $\|f - f_1\| = \|f - f_2\| = m$. Ясно, что $m \neq 0$ (почему?). По неравенству треугольника

$$m \leq \left\| f - \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| \leq \left\| \frac{f - f_1}{2} \right\| + \left\| \frac{f - f_2}{2} \right\| = m.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{f - f_1}{2} + \frac{f - f_2}{2} \right\| = \left\| \frac{f - f_1}{2} \right\| + \left\| \frac{f - f_2}{2} \right\|.$$

Отсюда, в силу строгой нормированности, получаем, что $\frac{f - f_1}{2} = \alpha \frac{f - f_2}{2}$. Если $\alpha \neq 1$, то $f = \frac{f_1 - \alpha f_2}{1 - \alpha}$, т.е. $f \in \mathbb{H}_n$ и $m = 0$, что есть противоречие. Если $\alpha = 1$, то $f_1 = f_2$ — противоречие с предположением $f_1 \neq f_2$. \square

Итак, при весьма общих предположениях элемент наилучшего приближения существует и единствен. В зависимости от выбора нормированного пространства \mathbb{H} и его подпространства \mathbb{H}_n можно получить ту или иную конкретную задачу о наилучшем приближении.

§ 2. Наилучшие равномерные приближения полиномами

Пусть $\mathbb{H} = C[a, b]$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C[a, b]}$, $\mathbb{H}_n = \mathbb{P}_n$. Элемент наилучшего приближения (*наилучшего равномерного приближения*) согласно Теореме 1 всегда существует. Однако Теорема 2 — теорема единственности, не применима, т.к. пространство не является строго нормированным, т.к. имеется контрпример: $[a, b] = [0, 1]$, $f_1 = 1$, $f_2 = x$. Тогда $\|f_1 + f_2\|_{C[a, b]} = \|f_1\|_{C[a, b]} + \|f_2\|_{C[a, b]} = 2$, но $f_1 \neq \alpha f_2$.

В то же время известна теорема Хаара.

Теорема 3. (Хаара) Для того, чтобы для каждой $f \in C[a, b]$ существовал единственный обобщенный многочлен наилучшего равномерного приближения необходимо и достаточно, чтобы функции $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ образовывали систему Чебышева (т.е. любой обобщенный многочлен $f_n \in \mathbb{H}_n$ должен иметь не более n нулей на $[a, b]$).

Возьмем в качестве $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ систему мономов $\{x^i\}_{i=0}^n$. В этом случае из теоремы Хаара вытекает

Следствие 1. *Алгебраический полином наилучшего равномерного приближения непрерывной функции существует и единственен.*

Пусть как и ранее $E_n(f)$ погрешность наилучшего равномерного приближения функции f многочленами из \mathbb{P}_{n-1} , т.е.

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathbb{P}_{n-1}} \|f - p\|, \quad \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Убывание этой величины в зависимости от n и гладкости функции f мы комментировали ранее. Справедлива

Теорема 4. 1) $E_n(f)$ монотонно убывает с ростом n и $E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $f \in C[a, b]$. 2) Если $f \in C^k[a, b]$, то

$$E_n(f) \leq \frac{C_m}{n^m} (b - a)^m \|f^{(m)}\|, \quad (2)$$

где $m = \min\{k, n\}$, C_m некоторая постоянная, зависящая от m , но не зависящая от n и f .

К сожалению, неизвестен ни явный вид многочлена наилучшего равномерного приближения, ни способ его построения. Имеются лишь некоторые методики построения многочленов, близких к наилучшим равномерным.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение нормы на вещественном линейном пространстве.
2. Приведите примеры линейных пространств и норм на них.
3. Дайте определение элемента наилучшего приближения.
4. Приведите примеры задач наилучшего приближения функции а) алгебраическим многочленом; б) тригонометрическим многочленом.
5. Какое пространство функций называется строго нормированным?
6. Является ли пространство функций $C[a, b]$ с равномерной нормой (нормой \max) строго нормированным?
7. Какие условия на линейное пространство достаточно наложить, чтобы наилучшее приближение а) существовало? б) было единственным?
8. а) Дайте формулировку теоремы Хаара. б) Приведите примеры систем функций, удовлетворяющих условиям этой теоремы.
9. Справедлива ли теорема существования и единственности наилучшего приближения функции алгебраическим многочленом?

10. Дайте геометрическую интерпретацию задачи наилучшего приближения функции алгебраическим многочленом нулевой степени.
11. Дайте геометрическую интерпретацию задачи наилучшего приближения функции алгебраическим многочленом первой степени.
12. Дайте геометрическую интерпретацию задачи наилучшего приближения функции обобщенным многочленом.
13. Справедлива ли теорема существования и единственности наилучшего приближения функции тригонометрическим многочленом?
14. Приведите оценку погрешности наилучшего равномерного приближения функции алгебраическими многочленами.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь аксиомами нормы, докажите, что $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
2. Определите, являются ли линейно независимыми функции
 - а) $1, x, x^3$ на отрезке $[-1, 1]$?
 - б) $1, x, x^3$ на отрезке $[0, 1]$?
3. Докажите, что: а) на пространстве $C[a, b]$ отображение $f \rightarrow \|f\|_* = \max_{x \in [a, b]} |x f(x)|$ является нормой. б) пространство $C[a, b]$ с нормой $\|f\|_*$ не является строго нормированным.
4. Докажите, что: а) на пространстве $\mathbb{H} = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = 0\}$ отображение $f \rightarrow \|f\|_* = \max_{x \in [a, b]} |f(x)/x|$ является нормой. б) Выясните, является ли строго нормированным пространство \mathbb{H} с этой нормой.
5. Докажите, что: а) на пространстве $C[a, b]$ отображение

$$f \rightarrow \|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

является нормой. б) Докажите, что $C[a, b]$ с этой нормой строго нормировано.

6. Используя геометрические соображения, постройте многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 0$ для $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$.
7. Используя геометрические соображения, найдите решение задачи наилучшего приближения функции алгебраическим многочленом нулевой степени.
8. Используя геометрические соображения, постройте многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 1$ для $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$.
9. Используя геометрические соображения, найдите решение задачи наилучшего приближения функции алгебраическим многочленом первой степени.
10. Пусть f — непрерывная нечетная функция на отрезке $[-1, 1]$. Докажите, что ее многочлен наилучшего равномерного приближения — также нечетная функция.
11. Функция $f(x) = 1/(x + 9)$ приближается на отрезке $[-1, 1]$ многочленом первой степени следующими способами:
 - 1) наилучшее равномерное приближение;
 - 2) полином Тейлора в точке $x = 0$;
 - 3) интерполяция с чебышёвскими узлами $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$.

а) Построить эти многочлены и вычислить равномерные нормы погрешностей (при необходимости используйте компьютер). б) Определить лучший метод.

12. Найти для функции $\exp(x)$ на $[0, 1]$ наилучшее приближение многочленом нулевой степени в норме $\|f\|_1$, где

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

§ 3. Наилучшие приближения в евклидовых пространствах

Важным примером нормированных пространств являются *евклидовы пространства*. В этих пространствах кроме нормы вводится также операция скалярного произведения, согласованная с нормой. Это позволяет указать метод построения элемента наилучшего приближения в таких пространствах.

1. Существование и единственность. Напомним некоторые понятия евклидовых пространств. *Скалярным произведением* на вещественном линейном (векторном) пространстве \mathbb{H} называется такая функция, заданная на парах элементов из \mathbb{H} и обозначаемая далее через (\cdot, \cdot) , которая удовлетворяет трем аксиомам:

- 1) $(f, f) \geq 0$ $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (f есть нулевой элемент \mathbb{H}).
- 2) $(f, g) = (g, f)$.
- 3) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$,

где f, g, h — произвольные элементы \mathbb{H} , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В силу аксиомы 2), переставляя аргументы, получаем $(h, \alpha f + \beta g) = \alpha(h, f) + \beta(h, g)$. Из свойства 1) следует, что $(f, g) = 0$ для любого $g \in \mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Линейное пространство, наделенное скалярным произведением, называется *евклидовым пространством*. *Норма евклидова пространства* определяется по формуле

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Справедливо важное неравенство

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad (\text{неравенство Коши-Буняковского})$$

справедливое для любых $f, g \in \mathbb{H}$.

Теорема 5. (i) $(f, g) = \|f\| \|g\|$ для ненулевых f и g тогда и только тогда, когда $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$.

(ii) Евклидово пространство является строго нормированным, т.е. равенство $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ справедливо тогда и только тогда, когда $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$.

Доказательство. (i) Если $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$, то

$$(f, g) = \alpha \|g\|^2 = \|\alpha g\| \|g\| = \|f\| \|g\|.$$

Обратно, пусть $(f, g) = \|f\| \|g\| > 0$ для некоторых $f, g \in \mathbb{H}$. Определим $\alpha = \|f\|/\|g\| > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - \alpha g\|^2 &= (f - \alpha g, f - \alpha g) = \\ &= \|f\|^2 - 2\alpha(f, g) + \alpha^2 \|g\|^2 = (\|f\| - \alpha \|g\|)^2 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|f - \alpha g\| = 0$, откуда следует $f = \alpha g$.

Докажем (ii). Если $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$, то

$$\|f + g\| = \|(1 + \alpha)g\| = (1 + \alpha)\|g\| = \|g\| + \|\alpha g\| = \|f\| + \|g\|.$$

Обратно, если для $f, g \in \mathbb{H}$ выполнено $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$, то

$$(\|f\| + \|g\|)^2 = \|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2.$$

Отсюда следует $(f, g) = \|f\| \|g\|$. В силу (i) это может быть только в случае, когда $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$. \square

Следствие 2. Наилучшее приближение в евклидовом пространстве существует и единственно.

Пример. В пространстве $\mathbb{H} = C[a, b]$ формула

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

определяет скалярное произведение (проверьте аксиомы!). Следовательно \mathbb{H} является евклидовым пространством. Норма

$$\|f\| = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

в этом пространстве (среднеквадратическая норма с весом ρ), очевидно, порождается скалярным произведением: $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Наилучшее приближение в этом пространстве существует и единственно.

§ 4. Вычисление элемента наилучшего приближения

Рассмотрим метод решения задачи о наилучшего приближении:

$$\|f - f_n\| = \min_{g_n \in \mathbb{H}_n} \|f - g_n\|.$$

Здесь мы пишем \min вместо \inf , поскольку \inf достигается. Имеет место следующий критерий наилучшего приближения.

Теорема 6. *Для того, чтобы элемент $f_n \in \mathbb{H}_n$ был наилучшим приближением для $f \in \mathbb{H}$, необходимо и достаточно, чтобы погрешность приближения $f - f_n \in \mathbb{H}$ была ортогональна подпространству \mathbb{H}_n , т.е., чтобы выполнялось равенство $(f - f_n, g_n) = 0$ для любого $g_n \in \mathbb{H}_n$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f_n есть элемент наилучшего приближения для f . Предположим против утверждаемого, что найдется такой элемент $g_n \in \mathbb{H}_n$, для которого $(f - f_n, g_n) > 0$. Для $t > 0$ положим $g_t = f_n + tg_n \in \mathbb{H}_n$. Тогда, в силу единственности наилучшего приближения, имеем:

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|^2 &< \|f - g_t\|^2 = \|(f - f_n) - tg_n\|^2 = \\ &= \|f - f_n\|^2 - 2t(f - f_n, g_n) + t^2\|g_n\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$2(f - f_n, g_n) < t\|g_n\|^2 \quad \forall t > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $t \rightarrow 0$ получим противоречие $(f - f_n, g_n) < 0$. Следовательно, $(f - f_n, g_n) = 0$.

Достаточность. Пусть $(f - f_n, g_n) = 0$ для всех $g_n \in \mathbb{H}_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - g_n\|^2 &= \|(f - f_n) + (f_n - g_n)\|^2 = \|f - f_n\|^2 + (f - f_n, f_n - g_n) + \\ &+ \|f_n - g_n\|^2 = \|f - f_n\|^2 + \|f_n - g_n\|^2 \geq \|f - f_n\|^2, \end{aligned}$$

для всех $g_n \in \mathbb{H}_n$, т.е. f_n есть наилучшее приближение для f . \square

Полученная в теореме (6) характеристика наилучшего приближения в евклидовом пространстве, позволяет указать метод решения задачи о наилучшем приближении, основанный на решении специальной системы линейных алгебраических уравнений.

Следствие 3. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ есть линейно независимая система в евклидовом пространстве \mathbb{H} (базис в \mathbb{H}_n), $A = \{(\varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=0}^n$ есть матрица Грама этой системы, $b = \{(f, \varphi_i)\}_{i=0}^n$ — вектор столбец. Тогда элемент наилучшего приближения $f \in \mathbb{H}$ определяется формулой $f_n = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j$, коэффициенты $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)^T$ которого находятся из решения системы уравнений $Ac = b$.

Доказательство. Из теоремы (6) следует что

$$(f - f_n, \varphi_i) = 0, \quad i = 0 : n.$$

Подставляя в это равенство разложение f_n получим систему

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_j, \varphi_i) c_j = (f, \varphi_i), \quad i = 0 : n,$$

т.е. систему уравнений $Ac = b$. \square

Лемма 1. Матрица Грама симметрична. Для того, чтобы она была положительно определена необходимо и достаточно, чтобы система $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ была линейно независимой.

Доказательство. Симметричность матрицы Грама очевидна. Для доказательства ее положительной определенности необходимо доказать, что квадратичная форма $Q(c) = \sum_{i,j=0}^n (\varphi_j, \varphi_i) c_j c_i$ принимает положительные значения на всех ненулевых векторах c . Имеем

$$Q(c) = \sum_{i,j=0}^n (\varphi_j, \varphi_i) c_j c_i = \left(\sum_{j=0}^n \varphi_j c_j, \sum_{i=0}^n \varphi_i c_i \right) = \|g_n\|^2 \geq 0. \quad (3)$$

Если система $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ линейно независима, то равенство в неравенстве (3) достигается лишь при $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, т.е. матрица Грама положительно определена. Обратно, если $Q(c) > 0$ при $c \neq 0$, то и $\|g_n\|^2 > 0$, т.е. $g_n \neq 0$ при $c \neq 0$. \square

1. Алгоритм нахождения наилучшего приближения. Итак, алгоритм нахождения элемента наилучшего приближения в евклидовом пространстве включает следующие этапы.

1. Выбор или построение базиса $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ в пространстве \mathbb{H}_n ;
2. Вычисление элементов матрицы A и правой части b системы уравнений по формулам следствия 3;

3. Решение системы $Ac = b$, т.е. вычисление вектора c , используя тот или иной численный метод. Симметричность и положительная определенность матрицы позволяет для решения системы применять специальные эффективные методы.

4. Вычисление наилучшего приближения по формуле $f_n = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j$.

Заметим, что от выбора базиса само наилучшее приближение не зависит, однако, с точки зрения вычислений на компьютере, выбор базиса является ключевым аспектом, поскольку такие свойства матрицы Грама, как ее заполненность или разреженность, обусловленность матрицы (отношение максимального собственного числа к минимальному), зависят выбора базиса и сильно влияют как на процесс решения в смысле затрат ресурсов компьютера (памяти и времени), так и на результат решения — в случае плохо обусловленной матрицы A ошибки округления могут сильно исказить результат. Эти вопросы мы рассмотрим в следующем семестре.

2. Ортогональный базис. Напомним ряд определений.

Определение 3. Два элемента f и g евклидова пространства \mathbb{H} называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(f, g) = 0$ (по аналогии со случаем $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ пишут $f \perp g$).

Определение 4. Говорят, что элементы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ пространства \mathbb{H} образуют ортогональную систему, если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, при $i \neq j$, $i, j = 0 : n$. Если дополнительно $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$ для всех $i = 0 : n$, то эта система называется ортонормированной.

Ясно, что ортогональная система линейно независима и из нее всегда можно получить ортонормированную систему $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$, полагая $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i / \|\varphi_i\|$.

Напомним также алгоритм Грама–Шмидта. Пусть заданы линейно независимые элементы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ евклидова пространства \mathbb{H} . Тогда по ним можно построить ортонормированную систему $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ следующим образом:

- 1) полагаем $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 / \|\varphi_0\|$;
- 2) пусть ортонормированная система $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$, $k \geq 0$, по-

строена. Для $k = 0 : n - 1$ полагаем:

$$\bar{\varphi}_{k+1} = \varphi_{k+1} - \sum_{j=0}^k c_{kj} \tilde{\varphi}_j, \quad c_{kj} = (\varphi_k, \tilde{\varphi}_j), \quad \tilde{\varphi}_{k+1} = \bar{\varphi}_{k+1} / \|\bar{\varphi}_{k+1}\|.$$

Здесь числа c_{km} находятся из условия $\bar{\varphi}_{k+1} \perp \tilde{\varphi}_m$ для всех $m = 0 : k$. Отметим следующее важное свойство алгоритма:

$\tilde{\varphi}_k$ является линейной комбинацией элементов $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$.

3. Представление наилучшего приближения в ортогональном базисе. Пусть в \mathbb{H}_n известен ортогональный базис $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$. В этом случае реализация метода построения элемента наилучшего приближения существенно упрощается, т.к. матрица Грама является диагональной:

$$A = \text{diag}(\|\varphi_0\|^2, \|\varphi_1\|^2, \dots, \|\varphi_n\|^2),$$

и система уравнений $Ac = b$ легко решается. Имеем

$$f_n = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i, \quad c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2}.$$

Коэффициенты c_i в этом разложении принято называть коэффициентами Фурье элемента f . Как видим, использование ортогональных базисов существенно упрощает вычисления на шагах 2, 3 описанного выше алгоритма. Это замечание очень важно с практической точки зрения.

§ 5. Наилучшее среднеквадратическое приближение

Пусть $\mathbb{H}_n = \mathbb{P}_n$, скалярное произведение и норма в $\mathbb{H} = C[a, b]$ при заданной весовой функции $\rho(x)$ задаются интегралами

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx, \quad \|f\| = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Тогда задача о наилучшем приближении принимает следующий вид:

$$\left(\int_a^b \rho (f - f_n)^2 dx \right)^{1/2} = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \left(\int_a^b \rho (f - p_n)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Рассмотрим два способа выбора базиса в \mathbb{P}_n .

1. Выбирая в качестве базиса в пространстве полиномов мономы $\varphi_i = x^i$, $i = 0 : n$, согласно следствию 3 для определения наилучшего среднеквадратического приближения приходим к системе уравнений с матрицей A и правой частью b вида

$$A = \left\{ \int_a^b \rho(x) x^{i+j} dx \right\}_{i,j=0}^n, \quad b = \left\{ \int_a^b \rho(x) f(x) x^i dx \right\}_{i=0}^n.$$

Для простых весовых функций элементы матрицы могут быть вычислены точно. В общем случае для вычисления интегралов, их общее число равно $(n+1)(n+2)$, необходимо использовать приближенные методы (мы их изучим далее).

2. Пусть φ_i , $i = 0 : n$, есть ортогональный базис в \mathbb{P}_n . В этом случае для определения наилучшего среднеквадратического приближения $f_n = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i$ достаточно вычислить лишь коэффициенты Фурье функции f по формулам

$$c_i = \frac{1}{\|\varphi_i\|^2} \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_i(x) dx, \quad \|\varphi_i\|^2 = \int_a^b \rho(x) \varphi_i^2(x) dx.$$

Таким образом, достаточно вычислить лишь $O(n)$ интегралов и нет необходимости решать систему алгебраических уравнений. Выгода очевидна. Это приводит нас к *системам ортогональных полиномов*. Примеры и свойства таких систем укажем далее.

§ 6. Метод наименьших квадратов

Выше мы предполагали, что функция может быть вычислена в каждой точке отрезка $[a, b]$. В практических приложениях значения функции, как правило, берутся из измерений (эксперимента) или генерируются некоторой программой. Часто они содержат погрешность. Для приближенного представления таких функций часто используется *метод наименьших квадратов*.

Пусть функция задана таблично своими значениями на сетке узлов $\Omega_N = \{a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b\}$, \mathbb{H}_n есть конечномерное пространство функций с базисом φ_i , $i = 0 : n$, который является системой Чебышева на $[a, b]$. Пусть $\rho_i \in (0, 1]$ — заданные числа,

$i = 1 : N$. Будем предполагать, что величина N достаточно велика по сравнению с n , по крайней мере $n + 1 < N$.

Рассмотрим задачу: *найти функцию $f_n \in \mathbb{H}_n$ — решение задачи*

$$\begin{aligned} \min_{g_n \in \mathbb{H}_n} \left(\sum_{j=1}^N \rho_j \left(f(x_j) - g_n(x_j) \right)^2 \right)^{1/2} = \\ = \min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \left(\sum_{j=1}^N \rho_j \left(f(x_j) - \sum_{k=0}^n \varphi_k(x_j) c_k \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (5) \end{aligned}$$

Функцию f_n называют приближением f по методу наименьших квадратов. Решение этой задачи мы получим, отметив следующую аналогию: задача (5) совпадает с задачей наилучшего среднеквадратического приближения (4), если суммы заменить интегралами, а сеточные функции — непрерывными функциями.

С этой целью обозначим через \mathbb{H} множество функций, определенных на сетке Ω_N (сеточных функций). Представляя элементы $f \in \mathbb{H}$ в виде вектора-столбца $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T \in \mathbb{R}^N$, введем на \mathbb{H} скалярное произведение и согласованную с ней норму:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^N \rho_k f(x_k) g(x_k), \quad \|f\| = \left(\sum_{k=1}^N \rho_k f^2(x_k) \right)^{1/2}.$$

Пространство \mathbb{H}_n будем рассматривать как подпространство евклидова пространства \mathbb{H} , сопоставляя каждой функции $f_n \in \mathbb{H}_n$ вектор $(f_n(x_1), f_n(x_2), \dots, f_n(x_N))^T$. Отметим, что система φ_i , $i = 0 : n$, при этом останется линейно независимой. В самом деле, если $\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n = 0$, то это означает, что $\varphi(x_j) = 0$, $j = 1 : N$. Это возможно, если все $c_j = 0$, т.к. ненулевой обобщенный многочлен φ не может иметь более n нулей (по определению системы Чебышева).

В введенных обозначениях задача (5) запишется в виде

$$\|f - f_n\| = \min_{g_n \in \mathbb{H}_n} \|f - g_n\|.$$

Решение этой задачи нам известно и дается Следствием 3. Таким образом, приходим к следующему алгоритму:

1. Формируем систему уравнений $Ac = b$, где

$$A = \left\{ (\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{k=1}^N \rho_j \varphi_j(x_k) \varphi_i(x_k) \right\}_{i,j=0}^n,$$

$$b = \left\{ (f, \varphi_i) = \sum_{k=1}^N \rho_j f(x_k) \varphi_i(x_k) \right\}_{i=0}^n.$$

2. Решая систему $Ac = b$, находим $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$;

3. Находим $f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x)$.

Выбирая в качестве \mathbb{H}_n конкретное пространство (например, \mathbb{P}_n), получим конкретный метод наименьших квадратов при том или ином выборе базиса в \mathbb{H}_n . Например, в случае $\mathbb{H}_n = \mathbb{P}_n$ в качестве базиса можно выбрать либо мономы $\{x^i\}_{i=0}^n$; либо базисные функции Лагранжа, связанные с каким-либо набором узлов $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq b$; либо семейство ортогональных с некоторым весом полиномов и т.д. От выбора базиса зависят свойства матрицы A ; сама функция f_n определяется единственным образом и от выбора базиса не зависит.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение скалярного произведения на вещественном пространстве.
2. Приведите примеры вещественных евклидовых пространств.
3. Определяет ли следующее выражение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

скалярное произведение на $C^1[a, b]$?

4. Определяет ли следующее выражение

$$(f, g) = \int_a^b (f(x) g(x) + f'(x) g'(x)) dx$$

скалярное произведение на $C^1[a, b]$?

5. Определяет ли следующее выражение

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) g(x) dx$$

скалярное произведение на пространстве $C[-1, 1]$?

6. Дайте определение евклидова пространства. Как определяется норма на нем?
7. Дайте формулировку неравенства Коши–Буняковского.
8. Является ли строго нормированным произвольное евклидово пространство?
9. Является ли пространство $C[-1, 1]$ с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

строго нормированным?

10. Какие элементы евклидова пространства называются ортогональными?
11. В каких евклидовых пространствах наилучшее приближение а) существует? б) единственно?
12. Сформулируйте алгоритм нахождения элемента наилучшего приближения в евклидовом пространстве.
13. Дайте определение матрицы Грама? Всегда ли она не вырождена?
14. Дайте определение: а) базиса линейного пространства; б) ортогонального базиса в евклидовом пространстве; с) ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.
15. Всегда ли ортогональный базис в евклидовом пространстве существует?
16. Всегда ли ортонормированный базис в евклидовом пространстве существует?
17. Как построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве?
18. Приведите формулу наилучшего приближения в евклидовом пространстве с ортогональным базисом.
19. Приведите явный вид обобщенного многочлена наилучшего приближения в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом.
20. Дайте формулировку задачи приближения функции методом наименьших квадратов. Всегда ли эта задача однозначно разрешима?
21. Опишите алгоритм приближения функции методом наименьших квадратов.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть задано скалярное произведение (\cdot, \cdot) в \mathbb{H} и $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. а) Проверьте первые две аксиомы нормы; б) докажите неравенство треугольника $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$; б) докажите неравенство Коши–Буняковского $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$.
2. Пусть скалярное произведение в \mathbb{H} задается формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

- а) Образуют ли функции $1, x, 3x^2 - 1$ ортогональный базис в \mathbb{P}_2 ? б) Постройте ортонормированный базис в \mathbb{P}_2 .
3. Функция $f(x) = \exp(-x)$ приближается на $[-1, 1]$ многочленом первой степени следующими способами:
 - 1) наилучшее равномерное приближение;
 - 2) наилучшее приближение в среднеквадратической норме

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f^2(x) dx \right)^{1/2};$$

- 3) Полином Тейлора в точке $x = 0$;
 4) интерполяция Лагранжа с узлами $x_1 = -1, x_2 = 1$;
 5) интерполяция с чебышёвскими узлами $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$

Постройте эти многочлены и вычислите равномерные нормы погрешностей (при необходимости используйте компьютер). Какой способ приближения оказался лучшим?

4. Для функции $\sin(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ найдите наилучшее приближение многочленом нулевой степени в среднеквадратичной норме

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f^2(x) dx \right);$$

5. Для функции $\sin(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ найдите наилучшее приближение многочленом нулевой степени в среднеквадратичной норме

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

6. Для заданной функции $f(x)$ найти алгебраический многочлен $p_n(x)$ степени n , минимизирующий выражение

$$\int_{-1}^1 \frac{(f(x) - p_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

в следующих случаях:

$$1) f(x) = 0.25(x^2 + 2x + 1), n = 1; \quad 2) f(x) = x^2, n = 1; \quad 3) f(x) = x^3, n = 2.$$

ГЛАВА 7

Ортогональные полиномы

Далее (a, b) будем считать либо ограниченным, либо неограниченным интервалом. Скалярное произведение определим интегралом

$$(p, q) = \int_a^b \rho(x) p(x) q(x) dx.$$

Напомним, что весовая функция $\rho(x)$ предполагается неотрицательной и интегрируемой, имеющей не более чем конечное число нулей. В случае неограниченного интервала предположим также, что абсолютно сходятся интегралы

$$\int_a^b \rho(x) x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим следующее очевидное, но важное свойство этого скалярного произведения: $(rp, q) = (p, rq)$ для любых функций p, q, r .

Пусть дана последовательность алгебраических полиномов

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (1)$$

Определение 1. Система полиномов (1) называется ортогональной, если для всех n и m : 1) $P_n \in \mathbb{P}_n$; 2) $(P_n, P_m) = 0$ при $n \neq m$.

Через \tilde{P}_n обозначим соответствующий P_n нормированный полином:

$$\tilde{P}_n = h_n P_n, \quad h_n = 1/(P_n, P_n)^{1/2}. \quad (2)$$

Лемма 1. Для любого заданного интервала (a, b) и веса ρ система ортогональных полиномов существует.

Доказательство. Построим искомую систему полиномов (1), применяя метод ортогонализации Грама – Шмидта к системе степеней независимой переменной: $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$. Положим $P_0(x) = 1$. Полином $P_1(x)$ будем разыскивать в виде $P_1(x) = x - \alpha_{10}P_0(x)$. Постоянную α_{10} определим из условия ортогональности $(P_1, P_0) = 0$. Получим

$\alpha_{10} = (x, P_0)/(P_0, P_0)$. Вообще, если полиномы $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$ уже построены, то полином $P_{k+1}(x)$ будем разыскивать в виде

$$P_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{i=1}^k \alpha_{k+1,i} P_i(x),$$

определяя постоянные $\alpha_{k+1,i}$ из условий ортогональности $(P_{k+1}, P_i) = 0, i = 0 : k$. В результате получим $\alpha_{k+1,i} = (x^{k+1}, P_i)/(P_i, P_i)$. \square

Следующая лемма утверждает, что первые $k + 1$ ортогональных полинома P_0, P_1, \dots, P_k образует базис в пространстве \mathbb{P}_k .

Лемма 2. *Любой $p_k \in \mathbb{P}_k$ однозначно представляется линейной комбинацией ортогональных полиномов $P_i(x), i = 0 : k$. Точнее*

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i P_i(x), \quad c_i = (p_k, P_i)/(P_i, P_i). \quad (3)$$

Доказательство. Разложение (3) имеет смысл, т. к. его правая часть, как и левая, является полиномом степени k . Формула для c_i получается, если обе части (3) скалярно умножить на $P_j, j = 0, 1, \dots, k$, и воспользоваться ортогональностью системы полиномов. \square

Лемма 3. *Ортогональный полином $P_n(x)$ ортогонален произвольному полиному меньшей степени, т.е. $(P_n, q) = 0$, для любого полинома q степени не выше $n - 1$. Верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x), \quad c_i = (q, P_i)/(P_i, P_i).$$

Умножая обе части этого разложения на P_n , получим $(P_n, q) = 0$. Обратное утверждение очевидно. \square

Лемма 4. *Система ортогональных полиномов определяется единственным образом с точностью до нормировки, т. е., если $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ две ортогональные системы на (a, b) с одним и тем же весом ρ , то $Q_n = c_n P_n$, где $c_n \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x), \quad c_i = (Q_n, P_i)/(P_i, P_i).$$

Но все c_i в этом разложении равны нулю, кроме c_n , т. к. $(Q_n, P_i) = 0$ при $i = 0 : n - 1$, согласно лемме 3. \square

Способ нормировки ортогональных полиномов принято называть стандартизацией. Например, P_n можно определить так, чтобы выполнялось условие $P_n(c) = d_n$, где $c = a$ или $c = b$, а d_n — заданные числа. Тогда ортогональная система $\{P_n\}$ будет единственной.

§ 1. Свойства ортогональных полиномов

Теорема 1. Нули ортогонального полинома P_n степени $n \geq 1$ простые и лежат в интервале (a, b) .

Доказательство. Поскольку ρ — неотрицательно, а

$$(P_n, 1) = \int_a^b \rho(x) P_n(x) dx = 0,$$

то P_n обязательно меняет знак на (a, b) , т. е. имеет хотя бы один нуль нечетной кратности, лежащий в (a, b) . Пусть x_1, x_2, \dots, x_m есть все различные нули нечетной кратности полинома P_n , лежащие на (a, b) . Требуется доказать, что $m = n$. Положим $\omega_m(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m) \in \mathbb{P}_m$ и представим P_n в виде $P_n(x) = \omega_m(x)q_{n-m}(x)$. По определению ω_m , полином q_{n-m} не меняет знака на (a, b) . Имеем

$$(P_n, \omega_m) = \int_a^b \rho(x) P_n(x) \omega_m(x) dx = \int_a^b \rho(x) \omega_m^2(x) q_{n-m}(x) dx \neq 0, \quad (4)$$

т.е. $m = n$, т.к. при $m < n$ левая часть (4) равна нулю. \square

Теорема 2. Пусть $\{\tilde{P}_n\}$ есть ортонормированная система, соответствующая ортогональной системе $\{P_n\}$ согласно (2). Тогда

$$x\tilde{P}_n(x) = \beta_n\tilde{P}_{n-1}(x) + \alpha_{n+1}\tilde{P}_n(x) + \beta_{n+1}\tilde{P}_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где $\tilde{P}_{-1}(x) = 0$, $\alpha_{n+1} = (x\tilde{P}_n, \tilde{P}_n)$, $\beta_{n+1} = (x\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n+1})$. Как следствие, ортогональные полиномы $\{P_n\}$ удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$P_{n+1}(x) = (a_n x - b_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x), \quad P_{-1}(x) = 0, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем

$$x\tilde{P}_n(x) = s_0\tilde{P}_0(x) + \dots + s_n\tilde{P}_n(x) + s_{n+1}\tilde{P}_{n+1}(x),$$

где $s_j = (x\tilde{P}_n, \tilde{P}_j) = (\tilde{P}_n, x\tilde{P}_j) = 0$ при $n > j + 1$, т. е. при $j \leq n - 2$. Полагая $\alpha_{n+1} = s_n$, $\beta_{n+1} = s_{n+1}$, получим (5), т. к. $s_{n-1} = \beta_n$. Произведем в (5) замену $\tilde{P}_k = h_n P_k$. После очевидных преобразований, придем к (6) с некоторыми постоянными a_n, b_n, c_n . \square

Полезно соотношениям (5) придать матричный вид.

Следствие 1. *Выполняется соотношение*

$$x \begin{bmatrix} \tilde{P}_0(x) \\ \tilde{P}_1(x) \\ \dots \\ \tilde{P}_{n-2}(x) \\ \tilde{P}_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_0(x) \\ \tilde{P}_1(x) \\ \dots \\ \tilde{P}_{n-2}(x) \\ \tilde{P}_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n \tilde{P}_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Полагая в этом матричном равенстве $x = x_j$, где x_j есть j -тый корень $P_n(x)$, получим следующее

Следствие 2. *Многочлен $P_n(x)$ имеет n простых корней x_1, \dots, x_n , совпадающих с собственными значениями симметричной трехдиагональной матрицы из следствия 1. Векторы*

$$[\tilde{P}_0(x_j), \tilde{P}_1(x_j), \dots, \tilde{P}_{n-1}(x_j)]^T, \quad j = 1, \dots, n,$$

являются собственными векторами (ненормированными).

Это следствие служит основой алгоритма Голуба–Уэлша поиска корней ортогональных полиномов. Приведем примеры ортогональных полиномов.

§ 2. Ортогональные полиномы Якоби

Полиномы Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ определяются на отрезке $[a, b] = [-1, 1]$ и зависят от двух вещественных параметров $\alpha, \beta > -1$. Они ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Теорема 3. *Справедлива формула Родриго:*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right). \quad (7)$$

Доказательство. Докажем, что (7) действительно определяет ортогональный полином с весом ρ . Простое применение формулы Лейбница показывает, что правая часть (7) действительно есть полином степени n . Пусть g есть многочлен. Учтем, что при $x = \pm 1$ имеет место равенство $\left((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right)^{(k)} = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда n раз интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} (P_n^{(\alpha, \beta)}, g) &= \int_{-1}^1 \left((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right)^{(n)} g(x) dx = \\ &= - \int_{-1}^1 \left((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right)^{(n-1)} g'(x) dx = \\ &= \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} g^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Если $g \in \mathbb{P}_{n-1}$, тогда $g^{(n)}(x) = 0$ и $(P_n^{(\alpha, \beta)}, g) = 0$. Следовательно, согласно лемме 3, $P_n^{(\alpha, \beta)}$ — искомый ортогональный многочлен. \square

При фиксированных значениях α и β получаются конкретные системы ортогональных полиномов. Под отдельными именами, в частности, известны следующие системы.

1) Полиномы Лежандра $P_n(x)$ совпадают с многочленами Якоби при $\alpha = \beta = 0$ (весовая функция $\rho \equiv 1$). При стандартизации $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, они представляются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x-1)^n (x+1)^n \right).$$

Нормированные полиномы Лежандра

$$\tilde{P}_n(x) = h_n P_n(x), \quad h_n = (n + 0.5)^{1/2},$$

удовлетворяют трехчленным соотношениям

$$x \tilde{P}_n(x) = \beta_n \tilde{P}_{n-1}(x) + \beta_{n+1} \tilde{P}_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $\beta_n = n/(4n^2 - 1)^{1/2}$, $n = 1, 2, \dots$, $\tilde{P}_{-1}(x) \equiv 0$.

2) Полиномы Чебышева $T_n(x)$ совпадают с многочленами Якоби при $\alpha = \beta = -1/2$ (весовая функция $\rho = 1/\sqrt{1-x^2}$). На отрезке $[-1, 1]$ справедливы также формулы: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

В самом деле, это следует из легко проверяемых равенств

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad n \neq m.$$

§ 3. Ортогональные полиномы Лагерра и Эрмита

1. Полиномы Лагерра определяются на полуоси $[a, b) = [0, \infty)$, ортогональны с весом $\rho(x) = e^{-x}$. Справедлива формула Родриго

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x}.$$

Это проверяется также, как формула Родриго для полиномов Якоби (проверьте!). Рекуррентное соотношение имеет следующий вид:

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1-x}{n+1} L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

2. Полиномы Эрмита определяются на оси, $(a, b) = \mathbb{R}^n$. Они ортогональны с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$. Формула Родриго (проверьте!)

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n \rho(x)}{dx^n},$$

рекуррентное соотношение принимает следующий вид:

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение весовой функции. Приведите примеры таких функций.
2. В чем проявляется различие в определении весовой функции в случае конечного и бесконечного отрезка?

3. Какой вид имеет скалярное произведение в определении ортогональных полиномов?
4. Дайте определение системы ортогональных полиномов. Чем оно отличается от определения системы ортогональных функций?
5. Как можно построить систему ортогональных полиномов?
6. Дайте эквивалентное определение системы ортогональных полиномов.
7. Единственным ли образом определяются ортогональные полиномы при заданной весовой функции?
8. Какими свойствами обладают нули ортогональных полиномов?
9. Какому трехчленному соотношению удовлетворяют ортогональные полиномы?
10. Как связаны корни ортогональных полиномов с собственными числами трехдиагональной матрицы? Укажите вид этой матрицы.
11. Дайте определение ортогональных полиномов Якоби. Почему эти полиномы определены только при $\alpha, \beta > -1$?
12. Приведите формулу Родриго для ортогональных полиномов Якоби.
13. Дайте определение ортогональных полиномов Чебышева.
14. Приведите явный вид полиномов Чебышева.
15. Дайте определение ортогональных полиномов Лагерра. Почему эти полиномы определены только при $\alpha > -1$?
16. Приведите формулу Родриго для ортогональных полиномов Лагерра.
17. Дайте определение ортогональных полиномов Эрмита.
18. Приведите формулу Родриго для ортогональных полиномов Эрмита.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить ортогональные полиномы Лежандра $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = 1$, используя:
 - а) определение ортогональных полиномов;
 - б) метод ортогонализации Грама–Шмидта;
 - в) формулу Родриго.
 - г) трехчленные рекуррентные соотношения.Объясните и устранили возможные различия в результатах.
2. Построить ортогональные полиномы Чебышева $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, используя:
 - а) определение ортогональных полиномов;
 - б) метод ортогонализации Грама–Шмидта;
 - в) формулу Родриго.
 - г) трехчленные рекуррентные соотношения.Объясните и устранили возможные различия в результатах.
3. Построить ортогональные полиномы Лагерра $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ со старшим коэффициентом равным единице, на отрезке $[0, \infty)$ с весом $\rho(x) = e^{-x}$, используя:
 - а) определение ортогональных полиномов;
 - б) метод ортогонализации Грама–Шмидта;
 - в) формулу Родриго.
 - г) трехчленные рекуррентные соотношения.

Объясните и устраните возможные различия в результатах

4. Построить ортогональные полиномы Эрмита $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, со старшим коэффициентом равным единице, на оси $(-\infty, \infty)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$, используя:

- а) определение ортогональных полиномов;
- б) метод ортогонализации Грама–Шмидта;
- в) формулу Родриго.
- г) трехчленные рекуррентные соотношения.

Объясните и устраните возможные различия в результатах

УКАЗАНИЕ. Предварительно вычислите интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$, $n \geq 1$, учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

5. Укажите вид трехдиагональной матрицы, собственные числа которой совпадают с корнями полиномов Чебыщева. Проверьте результат, используя функцию MatLab eig.

6. Укажите вид трехдиагональной матрицы, собственные числа которой совпадают с корнями полиномов Лежандра. Проверьте результат, используя функцию MatLab eig.

7. Доказать, что ортогональные многочлены $P_n(x)$ на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $\rho(x)$ обладают свойством $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

8. Пусть задан отрезок $[a, b]$, $0 < a < b$. Доказать, что все коэффициенты ортогонального многочлена отличны от нуля.

УКАЗАНИЕ. Используйте теорему Виета.

9. Доказать, что нули ортогональных многочленов $P_n(x)$ с фиксированным на отрезке $[a, b]$ весом $\rho(x) > 0$ перемежаются, т.е.

$$a < x_1^{(n)} < x_1^{(n-1)} < \dots < x_{n-1}^{(n-1)} < x_n^{(n)} < b,$$

где $x_i^{(n)}$, $1 = 1 : n$ — нули $P_n(x)$.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите трехчленные рекуррентные соотношения для $P_{n+1}(x)$ в точках $x_i^{(n)}$. Используйте индукцию.

10. Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется система ортогональных многочленов $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ с весом $\rho(x)$ и старшим коэффициентом, равным единице. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + a^{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int_a^b \rho(x) P_n^2(x) dx$ имеет ортогональный многочлен $\varphi_n(x)$.

ГЛАВА 8

Квадратурные формулы

Изучим вопросы приближенного вычисления интегралов вида

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

Часто подынтегральную функцию удобно представлять в виде произведения двух функций, одна из которых считается фиксированным весом. Например, такая необходимость возникает, когда приходится интегрировать функции с особенностями. В таких случаях приходим к интегралам вида

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx,$$

где $\rho(x)$ — весовая функция, содержит особенности подынтегральной функции, а $f(x)$ принадлежит к некоторому классу гладких функций.

Квадратурной формулой для этого интеграла, или просто квадратурой, называется приближенная формула

$$I(f) \approx S_n(f) = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j).$$

При этом точки x_j называются узлами квадратурной формулы, ω_j — весами или коэффициентами квадратуры, погрешностью квадратурной формулы называется величина

$$R_n(f) = I(f) - S_n(f).$$

Замечание 1. Сам термин квадратура восходит к древнегреческой цивилизации. А именно, античными математиками был поставлен вопрос о квадратуре круга (т. е. вопрос о возможности построения с помощью линейки и циркуля квадрата, равновеликого кругу по площади). А вычисление площадей, как известно, равносильно интегрированию подходящих функций. Простейшие квадратурные формулы для вычисления интегралов создавались и использовались уже во времена Ньютона и Лейбница. Прием, лежащий в основе всех классических квадратурных формул, состоит в замене подынтегральной функции некоторым ее приближением (например, интерполяционным полиномом или сплайном).

§ 1. Точность и устойчивость квадратурных формул

Определение 1. Говорят, что квадратура точна на алгебраических полиномах степени m (точна на \mathbb{P}_m), если $I(f) = S_n(f)$ ($R_n(f) = 0$) для всех $f \in \mathbb{P}_m$. Алгебраической степенью точностью квадратурной формулы называется максимальная степень полиномов, на которых она точна.

Пусть квадратура точна на постоянных функциях (на \mathbb{P}_0). Тогда, полагая $f = 1$ в равенстве $I(f) = S_n(f)$, получаем

$$\int_a^b \rho(x) dx = \sum_{j=1}^n \omega_j. \quad (1)$$

Теорема 1. Если квадратура точна на полиномах из \mathbb{P}_m , то справедлива оценка погрешности

$$|R_n(f)| \leq C_n E_{m+1}(f), \quad C_n = \int_a^b \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n |\omega_j|,$$

где $E_{m+1}(f)$ есть погрешность наилучшего равномерного приближения функции f полиномами из \mathbb{P}_m , т.е.

$$E_{m+1}(f) = \min_{p \in \mathbb{P}_m} \|f - p\|, \quad \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Если все веса квадратурной формулы положительны, то

$$|R_n(f)| \leq C E_{m+1}(f), \quad C = 2 \int_a^b \rho(x) dx. \quad (2)$$

Доказательство. Для любого полинома $p \in \mathbb{P}_m$ имеем:

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= |R_n(f) - R_n(p)| = \\ &= \left| \int_a^b \rho(x)(f(x) - p(x)) dx - \sum_{j=1}^n (f(x_j) - p(x_j))\omega_j \right| \leq \\ &\leq \int_a^b \rho(x)|f(x) - p(x)| dx + \sum_{j=1}^n |\omega_j| |f(x_j) - p(x_j)| \leq C_n \|f - p\|. \end{aligned}$$

Взяв в этой оценке минимум по всем полиномам p , получим первую оценку теоремы. Из нее следует вторая оценка с учетом (1). \square

1. Устойчивость квадратурных формул. Важным свойством квадратурных формул является их устойчивость по отношению к ошибкам вычисления подынтегральной функции. В практических вычислениях значений функции неизбежно возникают ошибки. В результате, вместо $f(x_k)$ получаем значения $\tilde{f}(x_k) = f(x_k) + \varepsilon_k$, и, соответственно, вместо $S_n(f)$ значение $\tilde{S}_n(f) = S_n(f) + \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i$.

Определение 2. *Квадратура называется устойчивой, если $\sum_{i=1}^n |\omega_i| \leq C$ для некоторой постоянной C , не зависящей от n .*

Если предположить, что выполняется оценка $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ для всех i , то для устойчивой квадратуры $|S_n(f) - \tilde{S}_n(f)| \leq C\varepsilon$, т. е. погрешность вычисления $S_n(f)$ определяется лишь погрешностью вычисления значений подынтегральной функции. Учитывая (1), т.о. получаем

Лемма 1. *Если при любом $n \geq 1$ все коэффициенты квадратурной формулы неотрицательны, то она устойчива.*

Эта лемма, а также оценка (2), указывают на предпочтительность квадратурных формул с положительными весами. Поскольку с ростом m величина $E_m(f)$ для $f \in C[a, b]$ убывает и стремится к нулю, то из оценки (2) следует, что чем выше алгебраическая степень точности квадратуры, тем квадратура точнее.

§ 2. Интерполяционные квадратурные формулы

Определение 3. *Квадратурная формула называется интерполяционной квадратурой, если*

$$S_n(f) = I(L_{n-1}),$$

где $L_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ обозначает интерполяционный многочлен, совпадающий в узлах квадратуры с f , т.е. $L_{n-1}(x_i) = f(x_i)$, $i = 1 : n$.

Записывая L_{n-1} в форме Лагранжа, получим, что коэффициенты интерполяционной квадратуры однозначно определяются узлами квадратуры, поскольку

$$S_n(f) = I(L_{n-1}) = I\left(\sum_{i=1}^n f(x_i) l_i\right) = \sum_{i=1}^n I(l_i) f(x_i),$$

и, по определению,

$$\omega_i = I(l_i) = \int_a^b \rho(x) l_i(x) dx, \quad (3)$$

где при $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ имеем

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega_n'(x_i)}.$$

Теорема 2. *Для того, чтобы квадратурная формула с n узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точна на полиномах степени $n - 1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Тогда $f = L_{n-1}$. Отсюда следует $S_n(f) = I(L_{n-1}) = I(f)$, т. е. квадратура точна на полиномах степени $n - 1$. Обратно. Если квадратура точна на полиномах степени $n - 1$ и $L_{n-1}(x_j) = f(x_j)$ для $j = 1, \dots, n$, то

$$S_n(f) = S_n(L_{n-1}) = I(L_{n-1}),$$

что означает, что квадратурная формула является, по определению, квадратурой интерполяционного типа. \square

1. Симметричные квадратурные формулы. Пусть $c = (a + b)/2$ — середина отрезка $[a, b]$. Будем говорить, что точки x и x' отрезка $[a, b]$ расположены симметрично относительно середины отрезка, если $c - x = x' - c$, т.е. $x' = 2c - x$.

Определение 4. *Квадратура называется симметричной, если*
 1) *узлы расположены симметрично относительно середины отрезка, т.е. $x_k = 2c - x_{n-k+1}$, $k = 1 : n$;*
 2) *веса квадратуры, соответствующие симметрично расположенным узлам, равны между собой, т.е. $\omega_k = \omega_{n-k+1}$, $k = 1 : n$.*

Свойство 2) определяется не только симметричным расположением узлов, но и симметрией весовой функции. Говорят, что ρ — четная (нечетная) функция относительно середины отрезка $[a, b]$, если

$$\rho(x) = \rho(2c - x), \quad (\rho(x) = -\rho(2c - x)).$$

Лемма 2. Пусть относительно середины отрезка $[a, b]$ а) узлы квадратуры расположены симметрично; б) $\rho(x)$ — четная функция. Тогда интерполяционная квадратура является симметричной.

Доказательство. Необходимо проверить свойство 2) симметричной квадратуры. Пусть n четно. В силу а) легко видеть, что функция $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ четная, а $\omega'_n(x)$ — нечетная относительно точки c , т.е. $\omega_n(2c - x) = \omega_n(x)$, $\omega'_n(x_i) = -\omega'_n(x_{n-i+1})$. Из б) следует, что $\rho(2c - x) = \rho(x)$. После замены $x = 2c - x'$ в (3), получим

$$\begin{aligned} \omega_i &= \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} dx = \\ &= \int_a^b \rho(x') \frac{\omega_n(x')}{(x' - x_{n-i+1}) \omega'_n(x_{n-i+1})} dx' = \omega_{n-i+1}. \end{aligned}$$

В случае нечетного n рассуждения проводятся аналогично. \square

Лемма 3. Пусть интерполяционная квадратура является симметричной и имеет нечетное число узлов n , $\rho(x)$ — четная относительно точки c . Тогда квадратура точна на полиномах из \mathbb{P}_n .

Доказательство. Пусть $p = a_n x^n + p_{n-1}$ произвольный полином из \mathbb{P}_n , $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Представим его в виде $p = a_n (x - c)^n + q_{n-1}$ с некоторым $q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ (почему это можно сделать?). Функция $(x - c)^n \rho(x)$ нечетна относительно точки c , поэтому $I(a_n (x - c)^n) = 0$. Также $S_n(a_n (x - c)^n) = 0$ в силу симметричности квадратуры. Учитывая, что интерполяционная квадратура с n узлами точна на полиномах из \mathbb{P}_{n-1} (теорема 2), получим:

$$\begin{aligned} I(p) &= I(a_n (x - c)^n + q_{n-1}) = I(q_{n-1}) = S_n(q_{n-1}) = \\ &= S_n(a_n (x - c)^n + q_{n-1}) = S_n(p). \end{aligned}$$

Следовательно, квадратура точна на полиномах из \mathbb{P}_n . \square

2. Погрешность интерполяционных квадратур. Точность интерполяционных квадратурных формул определяет

Теорема 3. а) Для произвольной интерполяционной квадратуры

$$I(f) - S_n(f) = \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x) dx. \quad (4)$$

b) Если интерполяционная квадратура удовлетворяет условиям леммы 3, то

$$I(f) - S_n(f) = \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-c) \omega_n(x) dx. \quad (5)$$

Здесь $\omega_n(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$.

Доказательство. Имеем $I(f) - S_n(f) = I(f - L_{n-1})$. Используя здесь представление остаточного члена интерполяции в виде

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x), \quad (6)$$

придем к (4). Для доказательства (5) в случае b), определим интерполяционный полином Эрмита $H_n \in \mathbb{P}_n$ по таблице значений функции f в узлах квадратуры, а также значению первой производной f в точке c . Поскольку в случае b) квадратура точна на $H_n(x)$ согласно лемме 3, и $H_n(x_i) = f(x_i)$, то $S_n(f) = S_n(H_n) = I(H_n)$. Поэтому $I(f) - S_n(f) = I(f - H_n)$. Пользуясь здесь остаточным членом интерполяции Эрмита, получим (5). \square

§ 3. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса

Так называют интерполяционные квадратурные формулы при $\rho(x) \equiv 1$ и равномерно расположенных на отрезке $[a, b]$ узлах при $n \geq 2$: $x_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \dots, n$, $h = (b-a)/(n-1)$. При $n = 1$ принято рассматривать три положения узла квадратуры: $x_1 = a$, $x_1 = b$ и $x_1 = (a+b)/2$. Отметим следующие свойства этих квадратур.

1) Квадратурные формулы Ньютона – Котеса являются симметричными при $n = 1$, $x_1 = (a+b)/2$ и $n \geq 2$, поскольку выполнены условия леммы 2.

2) Выполняя в интеграле замену переменной $x = a + th$, $h = \frac{b-a}{n-1}$, нетрудно получить, для всех $i = 1 : n$, что

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x) dx = \frac{b-a}{n-1} \int_0^{n-1} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{t-j+1}{i-j} dt = (b-a) \widehat{\omega}_i,$$

где числа $\widehat{\omega}_i$ зависят только от i и n . При заданном n они могут быть раз и навсегда вычислены.

Приведем примеры квадратур Ньютона – Котеса. Они получаются, если в интеграле функцию f заменить на полином L_{n-1} .

1. Формула левых прямоугольников. В этом случае $n = 1$, $x_1 = a$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(a). \quad (7)$$

2. Формула правых прямоугольников, $n = 1$, $x_1 = b$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(b). \quad (8)$$

3. Формула центральных прямоугольников, $n = 1$, $x_1 = (b + a)/2$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f((b + a)/2). \quad (9)$$

4. Формула трапеций. В этом случае $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $h = b - a$, $l_1(x) = (b - x)/(b - a)$, $l_2(x) = (a - x)/(a - b)$, $c_1 = c_2 = (b - a)/2$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b - a)}{2}(f(a) + f(b)). \quad (10)$$

4. Формула Симпсона (парабол). В этом случае $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = c = (a + b)/2$, $x_3 = b$, $h = (b - a)/2$,

$$l_1(x) = \frac{(c - x)(b - x)}{(c - a)(b - a)}, \quad l_2(x) = \frac{(a - x)(b - x)}{(a - c)(b - c)}, \quad l_3(x) = \frac{(a - x)(c - x)}{(a - b)(c - b)},$$

$c_1 = c_3 = (b - a)/6$, $c_2 = 4(b - a)/6$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b - a)}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b)). \quad (11)$$

Формулы (7)– (11) имеют простую геометрическую интерпретацию. Применяя формулу (7), мы заменяем, по определению квадратуры, площадь криволинейной трапеции, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx,$$

площадью прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой, равной $f(a)$, при использовании формулы (8) — площадью прямоугольника с тем

же основанием и высотой, равной $f(b)$. При использовании формулы (9) высота прямоугольника равна $f(c)$. В случае формулы (10) площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямолинейной трапеции, ограниченной прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, и, наконец, при использовании формулы (11) вычисляется площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой, проходящей через три точки: $(a, f(a))$, $(c, f(c))$, $(b, f(b))$.

Геометрически очевидно, что при плавно меняющейся функции $f(x)$ наиболее точной должна быть формула парабол.

§ 4. Погрешность простейших формул Ньютона – Котеса

Для представления погрешности простейших формул Ньютона – Котеса используем теорему 3. А именно, формулу (4) в случае формул левых и правых прямоугольников и (5) в остальных случаях. При этом в каждом случае воспользуемся теоремой о среднем для интегралов в следующей формулировке: *пусть $f \in C[a, b]$, а g не меняет знак на (a, b) ; тогда найдется $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Тогда формулы (4) и (5) примут вид (в предположении, что $\omega_n(x)$ или $(x - c)\omega_n(x)$ не меняет знак на $[a, b]$):

$$I(f) - S_n(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b \omega_n(x) dx. \quad (12)$$

$$I(f) - S_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b (x - c) \omega_n(x) dx. \quad (13)$$

В каждом случае интеграл в (12) или (13) можно вычислить, что дает искомое представление. Для примера, рассмотрим формулу Симпсона при $n = 3$. Это симметричная квадратура с узлами $x_1 = a$, $x_2 = c$, $x_3 = b$. Поэтому, согласно с (13) и теоремой о среднем, будем иметь:

$$\begin{aligned} I(f) - S_3(f) &= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x - c)^2 (x - a)(x - b) dx = \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x - c)^2 (x - a)(x - b) dx = -\frac{(b - a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Для остальных квадратур представления погрешности получаются аналогично (проделайте это!).

1. Погрешность формулы левых прямоугольников

$$I(f) - S_1(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi). \quad (15)$$

2. Погрешность формулы правых прямоугольников

$$I(f) - S_1(f) = -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi). \quad (16)$$

3. Погрешность формулы центральных прямоугольников

$$I(f) - S_1(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \quad (17)$$

4. Погрешность формулы трапеций

$$I(f) - S_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi). \quad (18)$$

Формулы Ньютона – Котеса при больших n редко используются на практике. Дело в том, что уже при $n = 8$ среди весов формулы встречаются отрицательные, и сумма их модулей неограниченно возрастает с ростом n , т. е. формулы Ньютона – Котеса неустойчивы при больших n .

§ 5. Составные квадратуры

Из формул (14)–(18) следует, что погрешности квадратур будут велики, если $b-a \gg 1$. Поэтому на практике эти формулы используют следующим образом. Отрезок $[a, b]$ разбивают на несколько частичных отрезков (скажем N) точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ и на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ применяют формулу Ньютона – Котеса с небольшим числом узлов. Полученные таким образом формулы называются *составными квадратурными формулами*.

Рассмотрим, для примера, составную формулу трапеций, считая длины отрезков равными $h = (b-a)/N$. Другие составные квадратуры рассматриваются аналогично (проделайте это!). Имеем:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \\ &= h(0.5f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + 0.5f(x_N)) = S_N(f). \end{aligned}$$

Рассмотрим погрешность этой квадратуры. Имеем ($h^3 = h^2(b-a)/N$):

$$\begin{aligned} I(f) - S_N(f) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \right) = \\ &= - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = - \frac{(b-a)h^2}{12} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f''(\xi_i) = - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среднем для сумм: если $f \in C[a, b]$, то найдется $\xi \in [a, b]$ такая, что $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i) = f(\xi)$.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. С какой целью вводится весовая функции при численном интегрировании?
2. Дайте определение квадратурной формулы (квадратуры).
3. Что понимается под алгебраической степенью точности квадратуры.
4. Чему равна сумма весов квадратурной формулы?
5. Как определяется погрешность квадратурной формулы.
6. Приведите оценку погрешности квадратуры в терминах погрешности наилучшего равномерного приближения.
7. Какая квадратура называется устойчивой? Какие квадратуры заведомо являются устойчивыми?
8. Какая квадратура называется интерполяционной?
9. На полиномах какой степени точна интерполяционная квадратура с n узлами?
10. Дайте определение симметричных квадратурных формул.
11. На полиномах какой степени может быть точна симметричная интерполяционная квадратура с n узлами и в каком случае?
12. Укажите формулы для погрешности произвольных и симметричных интерполяционных квадратур. Чем различаются эти формулы?
13. Как определяются квадратуры Ньютона–Котеса?
14. Являются ли квадратуры Ньютона–Котеса симметричными? Как зависят их коэффициенты от длины отрезка интегрирования?
15. Дайте определение квадратурной формулы левых прямоугольником. а) На каких полиномах она точна? б) дайте ее геометрическую интерпретацию.
16. Дайте определение квадратурной формулы правых прямоугольником. а) На каких полиномах она точна? б) дайте ее геометрическую интерпретацию.
17. Дайте определение квадратурной формулы центральных прямоугольником. а) На каких полиномах она точна? б) дайте ее геометрическую интерпретацию.
18. Дайте определение квадратурной формулы Симпсона. На каких полиномах она точна?

19. Приведите формулу погрешности квадратуры а) левых прямоугольников; б) правых прямоугольников; а) центральных прямоугольников. На полиномах какой степени точны эти квадратуры.
20. Приведите формулу погрешности квадратуры а) трапеций; б) Симпсона. На полиномах какой степени точны эти квадратуры.
21. Дайте определение составной квадратурной формулы.
22. Дайте определение составной квадратурной формулы: а) левых прямоугольников; б) правых прямоугольников; а) центральных прямоугольников.
23. Дайте определение составной квадратурной формулы: а) трапеций; б) Симпсона.
24. Приведите формулу погрешности составной квадратуры а) левых прямоугольников; б) правых прямоугольников; а) центральных прямоугольников.
25. Приведите формулу погрешности составной квадратуры трапеций.
26. Приведите формулу погрешности составной квадратуры Симпсона.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть квадратура $S_n(f)$ с положительными весами точна на полиномах степени m . Докажите оценку погрешности

$$|I(f) - S_n(f)| \leq C \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \frac{(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}}, \quad M_{m+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)| \quad C = 2 \int_a^b \rho(x) dx.$$

УКАЗАНИЕ. Используйте оценку $|R_n(f)| \leq C E_{m+1}(f) \leq C \max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_m(x)|$ и выберите подходящим образом $L_m \in \mathbb{P}_m$.

2. При числе узлов $n = 1, 2, 3$: а) получите формулы Ньютона – Котеса; б) получите представления их погрешности; с) при $n = 1, 3$ запишите соответствующие им составные квадратуры и получите представления их погрешности.
3. Вычислить интеграл $\int_0^1 \exp(x^2) dx$ и определить погрешность формулы Ньютона–Котеса с узлами а) $\{0, 1/2, 1\}$; б) $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$; в) $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. "Точное" значение интеграла можно вычислить используя компьютерную программу.
4. Если интегралы $I(x^k) = \int_a^b \rho(x) x^k dx$ вычисляются просто, то при заданном наборе различных узлов можно найти веса ω_j из условия точности квадратурной формулы $S_n(f) = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j)$ для произвольного многочлена наиболее высокой степени, т.е. из равенств $S_n(x^i) = I(x^i)$, $i = 0 : n - 1$, или, подробнее, из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n x_j^i \omega_j = I(x^i), \quad i = 0 : n - 1. \quad (19)$$

Этот метод определения коэффициентов квадратуры называется *методом неопределенных коэффициентов*.

- а) Докажите, что система (19) относительно ω_j , имеет единственное решение.
 - б) Докажите, что построенная квадратура точна на полиномах из \mathbb{P}_{n-1} .
 - с) Получите формулу трапеций методом неопределенных коэффициентов.
 - д) Получите формулу Симпсона методом неопределенных коэффициентов.
5. Для вычисления интегралов

$$1) \int_0^2 (x+1)f(x) dx; \quad 2) \int_0^1 x^2 f(x) dx; \quad 3) \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$$

построить формулы вида $S_2(f) = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$ с одним фиксированным узлом $x_1 = 0$, точные для многочленов максимально высокой степени.

УКАЗАНИЕ. Используйте метод неопределенных коэффициентов для определения как весов, так и x_2

6. Определить веса $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и узел x_2 так, чтобы квадратурная формула $S_3(f) = \omega_1 f(-1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(1)$ для вычисления интегралов $I(f) = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$ была точной на многочленах максимально высокой степени.

УКАЗАНИЕ. Используйте метод неопределенных коэффициентов для определения как весов, так и x_2

7. Для вычисления интегралов $I(f) = \int_a^b e^{\alpha x} f(x) dx$ построить квадратурную формулу $S_2(f) = \omega_1 f(a) + \omega_2 f(b)$, точную для многочленов максимально высокой степени.

ГЛАВА 9

Квадратурные формулы Гаусса

Рассмотрим задачу поиска квадратурной формулы с n узлами

$$I(f) = \int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx S_n(f) = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j),$$

точной на полиномах максимально возможной степени. Если эту степень обозначить за m , то для определения $2n$ неизвестных весов и узлов квадратуры, мы получим $m + 1 = \dim(\mathbb{P}_m)$ уравнений. Приравняв число уравнений и число неизвестных, находим, что алгебраическая степень точности такой квадратуры должна быть равна $2n - 1$. Это максимальная степень, так как никакая квадратура с n узлами не точна на \mathbb{P}_{2n} . В самом деле, имеем

$$\omega_n^2(x) = (x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2 \in \mathbb{P}_{2n}, \quad \text{но} \quad 0 < I(\omega_n^2) \neq S_n(\omega_n^2) = 0.$$

Определение 1. *Квадратурная формула с n узлами называется квадратурой Гаусса (или квадратурой наивысшей алгебраической степени точности), если она точна на полиномах степени $2n - 1$.*

Теорема 1. *Для того, чтобы квадратурная формула была квадратурой Гаусса, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

- 1) *она должна быть интерполяционной, т. е. точна на \mathbb{P}_{n-1} ;*
- 2) *полином $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ (с нулями в узлах квадратуры) должен быть ортогонален с весом $\rho(x)$ пространству полиномов \mathbb{P}_{n-1} , т. е. должно выполняться условие*

$$(\omega_n, p) = \int_a^b \rho(x)\omega_n(x)p(x) dx = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Доказательство. Необходимость. Если квадратурная формула является квадратурой Гаусса, то она точна на полиномах степени $2n - 1$, а значит и на полиномах степени $n - 1 < 2n - 1$. Докажем свойство

ортогональности $\omega_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$. Для произвольного $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ произведение $\omega_n p$ является полиномом степени $2n - 1$. Так как квадратура S_n точна на полиномах из \mathbb{P}_{2n-1} , то

$$(\omega_n, p) = I(\omega_n p) = S_n(\omega_n p) = \sum_{i=1}^n \omega_n(x_i) p(x_i) = 0,$$

так как $\omega_n(x_i) = 0$ во всех узлах x_i по определению полинома $\omega_n(x)$. Тем самым свойство 2) доказано.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы. Нужно доказать, что $I(f) = S_n(f)$ для всех $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Действительно, любой полином $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$ путем деления с остатком можно представить единственным образом в виде

$$f(x) = \omega_n(x)p_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),$$

где $p_{n-1}, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Следовательно, учитывая точность квадратуры S_n на \mathbb{P}_{n-1} и свойство ортогональности 2), будем иметь

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \rho(x)(\omega_n(x)p_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)) dx = I(r_{n-1}) = S_n(r_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i r_{n-1}(x_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i (f(x_i) - \omega_n(x_i)p_{n-1}(x_i)) = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) = S_n(f), \end{aligned}$$

т. е. квадратура S_n точна на полиномах \mathbb{P}_{2n-1} . \square

Отметим, что условие 2) теоремы эквивалентно можно сформулировать в следующем виде:

2) узлы квадратуры являются корнями ортогонального на (a, b) с весом $\rho(x)$ полинома $P_n(x)$.

1. Свойства квадратуры Гаусса. Отметим важнейшие свойства квадратур Гаусса.

1. Узлы квадратуры Гаусса лежат в (a, b) (почему?) и являются собственными числами трехдиагональной матрицы (какой?).

2. Все веса квадратурной формулы Гаусса положительны. Действительно, пусть $l_i(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ — базисная функция Лагранжа по узлам x_1, \dots, x_n . Напомним, что $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Тогда $l_i^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$ и в силу точности квадратуры Гаусса имеем

$$0 < I(l_i^2) = S_n(l_i^2) = \omega_i.$$

3. Если весовая функция является четной относительно середины (a, b) , то квадратура Гаусса симметрична. Это является следствием того, что нули ортогональных полиномов с таким четным весом расположены симметрично относительно середины отрезка. В этом случае мы доказали, что все интерполяционные квадратуры симметричны.

§ 1. Точность квадратуры Гаусса

Теорема 2. Если $f \in C^{2n}[a, b]$, то для погрешности квадратуры Гаусса справедливо представление

$$I(f) - S_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx, \quad (1)$$

где $\xi \in [a, b]$, $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Доказательство. Определим интерполяционный полином Эрмита $H_{2n-1}(x)$ степени $2n - 1$, удовлетворяющий равенствам

$$H_{2n-1}(x_j) = f(x_j), \quad H'_{2n-1}(x_j) = f'(x_j) \quad j = 1 : n.$$

Воспользуемся остаточным членом интерполяции Эрмита:

$$f(x) - H_{2n-1}(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \omega_n^2(x).$$

Отметим, что функция $f^{(2n)}(\xi(x))$ непрерывна по $x \in [a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} I(f) - S_n(f) &= I(f) - S_n(H_{2n-1}) = I(f) - I(H_{2n-1}) = I(f - H_{2n-1}) = \\ &= \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \omega_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

Последнее равенство для некоторой точки $\xi \in [a, b]$ получено с использованием теоремы о среднем, поскольку функция $\rho(x) \omega_n^2(x)$ не меняет знак на интервале интегрирования (a, b) . \square

Отметим, что входящий в правую часть (1) интеграл для некоторых специальных весовых функций $\rho(x)$, например, для весов Якоби $\rho(x) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta$, вычисляется в явном виде.

1. Погрешность квадратуры Гаусса в случае $\rho(x) = 1$.
Рассмотрим квадратуры Гаусса

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) = S_n(f) \quad (2)$$

в невесовом случае $\rho(x) = 1$. Его узлы являются корнями полинома Лежандра степени n , сдвинутыми на $[a, b]$. Поэтому

$$\omega_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x-a)^n(x-b)^n). \quad (3)$$

В этой формуле множитель $n!/(2n)!$ подобран так, чтобы старший коэффициент полинома был равен 1. Положим $p(x) = (x-a)^n(x-b)^n$.

Теорема 3. Если $f \in C^{2n}[a, b]$, то

$$I(f) - S_n(f) = \varepsilon_n f^{(2n)}(\xi) (b-a)^{2n+1}, \quad \varepsilon_n = \frac{n!^4}{(2n)!^3(2n+1)}. \quad (4)$$

Доказательство. Из (1) следует

$$I(f) - S_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)n!^2}{(2n)!^3} \int_a^b p^{(n)}(x)p^{(n)}(x) dx. \quad (5)$$

Используя формулу интегрирования по частям n раз, получим:

$$I_n = \int_a^b p^{(n)}(x)p^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_a^b p(x)p^{(2n)}(x) dx = (2n)! \int_a^b p(x) dx.$$

Этот интеграл легко вычисляется, если в интеграле перейти линейной заменой переменных к отрезку $[0, 1]$. В результате придем к бета-функция Эйлера и получим (проделайте вычисления!)

$$I_n = (2n)! \frac{n!^2}{(2n+1)!} (b-a)^{2n+1} = \frac{n!^2}{2n+1} (b-a)^{2n+1}. \quad \square$$

Из теоремы непосредственно следует, что если $f \in C^{2n}[a, b]$, то имеет место оценка погрешности квадратуры Гаусса

$$|I(f) - S_n(f)| \leq \varepsilon_n M_{2n} (b-a)^{2n+1}, \quad (6)$$

где ε_n быстро убывает с увеличением n :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{24}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{4320} \approx 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_3 \approx 5 \cdot 10^{-7}, \quad \varepsilon_4 \approx 5.6 \cdot 10^{-10}, \dots$$

Это свидетельствует о том, что точность квадратуры быстро растет с ростом n , если производные функции f растут не слишком быстро.

§ 2. Вычисление узлов и весов квадратуры Гаусса

На основе следующей теоремы можно определять корни ортогональных полиномов, а также узлы и веса квадратур Гаусса. Такой алгоритм известен как алгоритм Голуба – Уэлша.

Теорема 4. Пусть $\{\tilde{P}_n\}$ есть ортонормированная на (a, b) с весом ρ система полиномов, удовлетворяющая трехчленным соотношениям

$$x\tilde{P}_n(x) = \beta_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x) + \alpha_n\tilde{P}_n(x) + \beta_n\tilde{P}_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $\tilde{P}_{-1}(x) = 0$, и пусть

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Пусть далее $\{x_j, \omega_j\}_{j=1}^n$, есть узлы и веса квадратуры Гаусса

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j) \quad \forall f \in \mathbb{P}_{2n-1}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- i) узлы квадратуры совпадают с корнями $\{\tilde{P}_n\}$ и являются собственными числами матрицы A_n , упорядоченными по возрастанию;
- ii) Пусть $\Lambda_n = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и $A_n V_n = V_n \Lambda_n$ (т. е. j -тый столбец матрицы V_n есть нормированный собственный вектор A_n , соответствующий x_j). Тогда вектор $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ весов квадратуры совпадает с вектором $m_0 v_1^2$, где v_1^2 есть вектор, образованный квадратами элементов первой строки V_n , а

$$m_0 = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Утверждение i) этой теоремы было доказано ранее; утверждение ii) оставим без доказательства.

1. Реализация алгоритма Голуба – Уэлша в MatLab. Веса и узлы квадратуры Гаусса достаточно уметь вычислять для отрезка $[a, b] = [-1, 1]$. В самом деле, пусть известна квадратура Гаусса

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt \approx \sum_{j=1}^n c_j \varphi(d_j).$$

Используем замену переменных $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$, $t \in [-1, 1]$ и пусть $\varphi(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt = \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n c_j \varphi(d_j) = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j),$$

где $\omega_j = c_j (b-a)/2$, $x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} d_j$. Отсюда следует, что достаточно уметь вычислять квадратуру лишь для фиксированного отрезка $[-1, 1]$. Узлы квадратуры в этом случае являются корнями полинома Лежандра. Из теоремы 4 следует искомый алгоритм:

1) при заданных n определяем $\alpha_j = 0$, β_j из рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра, а также матрицу A_n ;

2) найдем все собственные числа и нормированные собственные векторы матрицы A_n (собственные векторы образуют столбцы матрицы V_n). Собственные числа упорядочим по возрастанию и соответственно переставим столбцы V_n . Тогда собственные числа и есть узлы квадратуры Гаусса на $[-1, 1]$;

3) выделим из матрицы V_n первую строку, ее элементы возведем в квадрат и умножим на $m_0 = 2$. Элементы полученного таким образом вектора и есть веса квадратуры Гаусса на $[-1, 1]$;

4) по формулам $\omega_j = c_j (b-a)/2$, $x_j = a + \frac{b-a}{2} (1 + d_j)$ найдем веса и узлы квадратуры Гаусса на $[a, b]$.

Описанные выше шаги реализуются в MatLab в следующей функции.

```
function [x,w] = quadg(n,a,b)
% QUADG: find nodes x, weights w of n-point
% Gauss quadrature rule on [a,b].
% x,w are columns.

if nargin==1, a=-1; b=1; end
if n==1, x=(a+b)/2; w=1; return; end
```

```

j = 1:n-1; beta = j./sqrt(4*j.^2-1);
A = diag(beta,-1)+diag(beta,1);
% Find nodes d and weights c for [-1,1].
[V,D] = eig(A); [d,k] = sort(diag(D)); c = (2*V(1,k).^2)';
w = 0.5*(b-a)*c; % transform to [a,b]
x = a+0.5*(b-a)*(d+1);

```

Дадим пояснения к этой функции. Величины $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ вычисляются векторизованно. MatLab-функция `diag` как создает матрицу, так и выделяет из матрицы ее диагональ с заданным номером. Так `diag(beta, ±1)` создают нулевую матрицу размера на единицу больше, чем длина вектора `beta` и на ее первой над и поддиагонали располагает вектор `beta`. Оператор `[V,D] = eig(A)` находит все собственные числа (располагаются на диагонали матрицы D) и собственные векторы матрицы A (столбцы V), при этом собственные числа могут быть не упорядочены по возрастанию. Они упорядочиваются следующей командой `[d,k] = sort(diag(D))` и в k располагается вектор перестановок. Матрица $V(1,k)$ получается из V соответствующей k перестановкой ее столбцов.

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая квадратура называется квадратурой Гаусса?
2. На полиномах какой степени точна квадратура Гаусса с n узлами?
3. Как определяются узлы квадратуры Гаусса?
4. Как определяются веса квадратуры Гаусса?
5. Является ли квадратура Гаусса устойчивой?
6. Являются ли квадратуры Гаусса симметричными?
7. Дайте описание алгоритма Голуба–Уэлша.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить квадратуру Гаусса с $n = 1, 2, 3$ узлами для вычисления интеграла: $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
2. Построить квадратуру Гаусса с $n = 1, 2, 3$ узлами для вычисления интеграла: $\int_0^1 x f(x) dx$; б) $\int_0^1 e^x f(x) dx$.
3. Построить квадратуру Гаусса с $n = 1, 2, 3$ узлами для вычисления интеграла $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

4. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла: а) $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$; б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) f(x) dx$
5. Вычислить $R_n(f)$ — погрешность квадратурной формулы Гаусса с n узлами для функции $f(x) = x^{2n}$, отрезка $[-1, 1]$ и весовой функции $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Проверить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n-1} |R_n(f)| = \sqrt{\pi}$.
6. Пусть $f(x)$ — непрерывная на конечном отрезке $[a, b]$ функция. Доказать, что погрешность квадратурных формул Гаусса $R_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
7. Определить веса $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и узел x_2 так, чтобы квадратурная формула $S_3(f) = \omega_1 f(-1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(1)$ для вычисления интегралов $I(f) = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$ была точной на многочленах максимально высокой степени.
8. Доказать, что не существует квадратурных формул $S_n(f)$ с n узлами, точных для всех тригонометрических многочленов степени n при весовой функции $\rho(x) = 1$.

ГЛАВА 10

Численное дифференцирование

Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Например, необходимость в численном дифференцировании возникает в том случае, когда функция задана не формулой, а таблицей или алгоритмом вычисления в произвольной точке.

Кроме того, формулы численного дифференцирования широко используются при разработке вычислительных методов решения многих задач, например, при решении дифференциальных уравнений, поиске решений систем нелинейных уравнений, поиске точек экстремума функций и т.д. Основной подход при построении формул численного дифференцирования — это аппроксимация функции. Предположим, что в окрестности точки x функция $f(x)$ аппроксимируется некоторой другой функцией $f_n(x)$, причем k -тая производная $f_n^{(k)}(x)$ легко вычисляется. Естественно в этом случае воспользоваться приближенной формулой

$$f^{(k)}(x) \approx f_n^{(k)}(x).$$

Приближение $f_n(x)$ может быть построено любым рассмотренным нами ранее методом. Например, в виде интерполяционного полинома или сплайна. Далее мы реализуем этот подход в случае, когда аппроксимация функции осуществляется с помощью лагранжевой интерполяции.

§ 1. Простейшие формулы вычисления $f'(x)$ и $f''(x)$

Пусть задана скалярная функция $f(x)$ и мы хотим приближенно вычислить $f'(x)$, используя при этом лишь значения функции $f(x)$ в двух точках. По определению

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Следовательно, разностное отношение,

$$f_x(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

которое принято называть разностью вперед функции f в точке x (или просто *разностью вперед*), при малом h позволяет приближенно вычислить $f'(x)$. Сказанное остается справедливым и для разностного отношения (*разности назад*)

$$f_{\bar{x}}(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Эти отношения являются простейшими формулами численного дифференцирования. Пользуясь разложениями Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h f'(x) + h^2/2 f''(\xi_{\pm}(x)), \quad \xi_{\pm}(x) \in [a, b],$$

получим следующие представления для погрешности этих формул:

$$f'(x) - f_x(x) = -\frac{h}{2} f''(\xi_+(x)), \quad (1)$$

$$f'(x) - f_{\bar{x}}(x) = \frac{h}{2} f''(\xi_-(x)). \quad (2)$$

Пусть, как обычно, $M_k = \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|$. Тогда из (1) и (2) получаются следующие оценки погрешностей:

$$|f'(x) - f_x(x)| \leq \frac{M_2 h}{2}, \quad |f'(x) - f_{\bar{x}}(x)| \leq \frac{M_2 h}{2}. \quad (3)$$

Следовательно, погрешности обеих формул имеют порядок малости $O(h)$, если $f(x)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$.

Рассмотрим полусумму

$$f_{\circlearrowleft}(x) = \frac{f_x(x) + f_{\bar{x}}(x)}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

называемую *центральной разностью*. Используя разложения

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_{\pm}(x))$$

получим представление ее погрешности:

$$f'(x) - f_{\circlearrowleft}(x) = \frac{h^2}{6} f'''(\xi(x)),$$

поскольку по теореме о среднем для сумм найдется $\xi(x)$ между $\xi_{\pm}(x)$ такая, что

$$\frac{f'''(\xi_+(x)) + f'''(\xi_-(x))}{2} = f'''(\xi(x)).$$

Таким образом, при одном и том же h центральная разность на порядок по h точнее, чем разности вперед и назад. Отметим, что ее нельзя использовать при вычислении производной в точке $x = a$ или $x = b$.

Повторно применяя разделенные разности, получим формулы вычисления второй и более высокой производной. Возможны комбинации

$$f_{xx}(x) = (f_x)_x(x), \quad f_{x\bar{x}}(x) = (f_x)_{\bar{x}}(x), \dots$$

Рассмотрим симметричную формулу

$$f_{x\bar{x}}(x) = \frac{f_x(x) - f_x(x-h)}{h} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Удерживая в разложениях Тейлора $f(x \pm h)$ величины до порядка h^4 , аналогично предыдущему получим (проведите выкладки!)

$$f''(x) - f_{x\bar{x}}(x) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi(x)).$$

Все рассмотренные выше формулы применимы как для табличных функций, так и для заданных формулой или алгоритмом вычисления.

§ 2. Некорректность операции численного дифференцирования

Как правило, значения функции известны не точно, а с какой-то погрешностью. Например, если трансцендентные функции вычисляются с помощью рядов, то ряды заменяются конечными суммами. Другими источниками погрешностей являются погрешности округления при вычислении функции или погрешность алгоритма ее вычисления.

Оказывается, что погрешность, возникающая при вычислении разностных отношений, намного превосходит погрешность в задании значений функции и даже может неограниченно возрастать при стремлении шага h к нулю. Поэтому операцию вычисления разностных отношений называют *некорректной*. Поясним причину некорректности на примере вычисления разностного отношения $f_x(x)$.

Разностное отношение $f_x(x)$ хорошо приближает $f'(x)$ только в том случае, когда шаг h достаточно мал. Требование малости величины h , находящейся в знаменателе разностного отношения, как раз и является причиной некорректности операции численного дифференцирования. Действительно, пусть вместо точного значения $f(x)$ нам известны приближенные значения $\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon(x)$, причем известно, что $|\epsilon(x)| \leq \varepsilon$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда вместо $f_x(x)$, будет вычислена величина

$$\tilde{f}_x(x) = f_x(x) + \epsilon_x(x)$$

Следовательно, погрешность в вычислении первой разностной производной окажется равной $\epsilon_x(x)$. Имеем

$$|\epsilon_x(x)| = \left| \frac{\epsilon(x+h) - \epsilon(x)}{h} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{h},$$

причем эта оценка достигается при $\epsilon(x+h) = -\epsilon(x) = \varepsilon$. Как видим, погрешность в вычислении первой разностной производной неограниченно возрастает с уменьшением h .

Окончательно получим следующую оценку вычисления первой производной при наличии погрешностей (с использованием оценки (3)):

$$|f'(x) - \tilde{f}_x(x)| = |(f'(x) - f_x(x)) + (f_x(x) - \tilde{f}_x(x))| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}.$$

Оценка погрешности $\varphi(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$ не стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Напротив, $\varphi(h) \rightarrow \infty$. Минимальное ее значение достигается при

$$\frac{M_2 h}{2} = \frac{2\varepsilon}{h} \quad \Rightarrow \quad h = h_0 = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{M_2}}$$

и равно $\varphi(h_0) = 2\sqrt{M_2\varepsilon}$. Отсюда следует практическая рекомендация: при вычислении первой производной функции заданной с погрешностью ε разностью вперед (или назад), шаг h должен иметь порядок $\sqrt{\varepsilon}$. Меньшие порядки h лишь ухудшат результат.

Сказанное остается справедливым для всех указанных выше формул численного дифференцирования. Для каждой формулы существует свое оптимальное значение h . При вычислении вторых и более высоких производных некорректность операции численного дифференцирования сказывается еще сильнее.

§ 3. Применение интерполирования

Многие формулы численного дифференцирования можно получить как следствие интерполяционных формул. Для этого достаточно заменить функцию $f(x)$ ее интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и вычислить производные многочлена $L_n(x)$, используя его явное представление.

Рассмотрим сетку узлов в окрестности точки x :

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Положим $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1 : n$. Величину $H = x_n - x_0$ будем считать достаточно малой. По значениям функции $f(x)$ в этих узлах построим интерполяционный полином $L_n(x)$. По формуле Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (4)$$

Для $k \leq n$ изучим аппроксимацию

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Для погрешности интерполирования нами была получена формула

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (5)$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$. Для рассматриваемых $x \in [x_0, x_n]$, очевидно, $|\omega_{n+1}(x)| \leq H^{n+1}$. Это грубая оценка. Для ее уточнения надо сделать предположение о законе распределения узлов сетки. Для узлов с равномерным шагом $h = H/n$ имеем $|\omega_{n+1}(x)| \leq n! h^{n+1}/4$ (проверьте эту оценку для $n = 1, 2$).

Из (5) следует оценка

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Теорема 1. Если $f \in C^{n+1}[a, b]$, то для любого $x \in [x_0, x_n]$

$$|f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)| \leq \frac{M_{n+1} H^{n+1-k}}{(n+1-k)!}, \quad k = 0 : n. \quad (6)$$

Доказательство. Для $k = 0$ оценка совпадает с (5). Докажем для $k = 1$. Так как для разности $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ имеют место равенства $R_n(x_{i-1}) = R_n(x_i) = 0$, $i = 1 : n$, то по теореме Ролля найдутся точки $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такие, что

$$R'_n(z_i) = f'(z_i) - L'_n(z_i) = 0, \quad i = 1 : n.$$

Это означает, что полином $L'_n(x)$ степени $n - 1$ является интерполяционным полиномом для производной $f'(x)$ с узлами интерполяции z_i , $i = 1 : n$. Применяя общую оценку (5) с заменой числа узлов интерполяции $n + 1$ на n и учитывая, что производная порядка n для интерполируемой функции $f'(x)$ совпадает с производной $f^{(n+1)}(x)$, получим

$$|f'(x) - L'_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}H^n}{n!}.$$

Это доказывает оценку (6) для $k = 1$. Далее, повторяя эти же рассуждения, но уже для разности $R'_n(x) = f'(x) - L'_n(x)$, получим оценку для $R''_n(x)$ с понижением порядка n до $n - 1$:

$$|f''(x) - L''_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}H^{n-1}}{(n-1)!},$$

что доказывает оценку (6) для $k = 2$, и т.д. \square

Как видим, точность вычисления производной падает на порядок по H при повышении порядка производной на единицу.

Пример 1. $n = 1$. В этом случае

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

и для любого $x \in [x_0, x_1]$ имеем

$$f'(x) \approx L'_1(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Правая часть совпадает с разностью вперед в точке x , если точки x_0 и x_1 выбрать следующим образом: $x_0 = x$, $x_1 = x + h$. При $x_1 = x$, $x_0 = x - h$ получаем аппроксимацию $f'(x)$ разностью назад, при $x_0 = x - h$, $x_1 = x + h$ — центральную разность.

Пример 2. $n = 2$. В этом случае для любого $x \in [x_0, x_2]$ имеем:

$$f'(x) \approx L'_2(x) = \frac{2}{x_2 - x_0} \left((x - x_{1/2}) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + (x_{3/2} - x) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right),$$

$$f''(x) \approx L''_2(x) = \frac{2}{x_2 - x_0} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right),$$

где $x_{1/2} = (x_0 + x_1)/2$, $x_{3/2} = (x_1 + x_2)/2$. Если $x_0 = x - h$, $x_1 = x$, $x_2 = x + h$, то получаем аппроксимацию $f'(x)$ центральной разностью и аппроксимацию $f''(x)$ разностью $f_{x\bar{x}}(x)$.

Пример 3. $n > 2$. Пусть требуется вычислить производные $f^{(k)}(x)$ сразу во всех точках сетки x_i , $i = 0 : n$. Получим удобные формулы для их приближенного вычисления. Имеем

$$f^{(k)}(x_i) \approx L_n^{(k)}(x_i) = \sum_{j=0}^n l_j^{(k)}(x_i) f(x_j) = \sum_{j=0}^n D_{ij}^{(k)} f(x_j) = (D^{(k)} F)_i. \quad (7)$$

Здесь $D^{(k)} = \{l_j^{(k)}(x_i)\}_{i,j=0}^n$ квадратная матрица размера $n+1$ (матрица дифференцирования k -го порядка), $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ имеет компоненты $f(x_j)$. Если обозначить через $F^{(k)} \in \mathbb{R}^{n+1}$ вектор с компонентами $f^{(k)}(x_i)$, то из (7) следует искомая формула

$$F^{(k)} \approx D^{(k)} F.$$

Укажем способ вычисления матрицы $D^{(k)}$. Из (4) следует

$$D_{ij}^{(1)} = l'_j(x_i) = \frac{\omega'_{n+1}(x_i)}{(x_i - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} = \frac{\beta_j/\beta_i}{(x_i - x_j)}, \quad i \neq j,$$

где $\beta_i = C/\omega'_{n+1}(x_i)$ — барицентрические веса, $C \in \mathbb{R}$. Т.к. $\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1$ для любого x , то дифференцированием находим диагональные элементы

$$D_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=0, k \neq i}^n D_{ik}^{(1)}.$$

Далее, из формулы $l'_j(x) = \sum_{k=0}^n l'_k(x_j) l_k(x)$ (почему эта формула справедлива?), следует, что $D^{(2)} = (D^{(1)})^2$. По индукции получаем, что $D^{(k)} = (D^{(1)})^k$ (проведите выкладки более подробно!).

Задания для самостоятельной работы

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каких случаях используется численное дифференцирование функций?
2. Приведите для разделенной разности вперед: а) формулу; б) представление погрешности; с) оценку погрешности.
3. Приведите для разделенной разности назад: а) формулу; б) представление погрешности; с) оценку погрешности.
4. Приведите для центральной разделенной разности: а) формулу; б) представление погрешности; с) оценку погрешности.
5. Укажите: а) симметричную формулу для вычисления второй производной функции; б) представление погрешности; с) оценку погрешности.
6. В чем проявляется некорректность операции численного дифференцирования функций?
7. Исходя из каких соображений выбирается шаг h при численном дифференцировании?
8. Какими способами можно получить формулы численного дифференцирования?
9. Укажите способ получения формул численного дифференцирования на основе интерполирования.
10. Укажите способ получения формул численного дифференцирования на основе приближения функции интерполяционным кубическим сплайном. Какова погрешность полученных формул?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что

$$f_x(0) - f'(0) = \frac{1}{4h} \int_{-h}^h (h - |x|)^2 f'''(x) dx.$$

2. Докажите, что

$$f''(x) - f_{x\bar{x}}(x) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi(x)).$$

3. Считая, что значения функции в формулах численного дифференцирования $f_{x\bar{x}}(x)$ заданы с максимальной абсолютной погрешностью ε , получить оценки полной погрешности этой формулы как суммы погрешности метода и вычислительной погрешности. Найти оптимальный шаг h_0 , при котором минимизируется величина оценки полной погрешности.
4. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получите оценки погрешности следующих формул численного дифференцирования (постоянные C_i , не зависят от f и h):

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'_x(x)| &\leq C_1 \int_x^{x+h} |f''(\xi)| d\xi, \\ |f'(x) - f'_x(x)| &\leq C h \int_{x-h}^{x+h} |f'''(\xi)| d\xi, \\ |f''(x) - f''_{x\bar{x}}(x)| &\leq C h \int_{x-h}^{x+h} |f^{(4)}(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

5. Доказать справедливость следующих равенств:

$$(fg)_{\bar{x}} = f_{\bar{x}} g + f g_{\bar{x}} - h f_{\bar{x}} g_{\bar{x}};$$
$$(fg)_{\underline{x}} = f_{\underline{x}} g + f g_{\underline{x}} + \frac{h^2}{2} (f_{\bar{x}x} g_{\underline{x}} + f_{\underline{x}} g_{\bar{x}x}).$$

6. Найти коэффициенты формул численного дифференцирования, приводящие к максимально возможному порядку точности по h :

$$f'(x) \approx (a f(x-h) + b f(x) + c f(x+h))/h;$$
$$f'(x) \approx (a f(x) + b f(x+h) + c f(x+2h))/h.$$

УКАЗАНИЕ. Используйте разложение функции в ряд Тейлора в соответствующей точке и приравняйте нулю коэффициенты при степенях h .

Литература

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. Учебное пособие. Под ред. В. А. Садовниченко. — М.: Высшая школа. 2000.
5. Богачев К. Ю. Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ. 2002.
6. Тыртышников Е. Е. Методы численного анализа. — М.: 2006.
7. Срочко В. А. Численные методы. Курс лекций. Учебное пособие для вузов. Санкт-Петербург: Изд-во ЛАНЬ. 2010.
8. Глазырина Л.Л., Карчевский М.М. Введение в численные методы — Казань, КФУ, 2012

Р.З. Даутов, М.Р. Тимербаев

**Численные методы.
Приближение функций**

Учебное пособие