КОММУТАТОРЫ И ИЗОКЛИННЫЕ ПРОЕКТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.М. Бикчентаев, Х.И. Алхасан
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru, alhassanmalhassan@gmail.com

УДК 517.983

Установлены новые свойства (коммутаторов) изоклинных проекторов в гильбертовом пространстве. Найдены значения определителей некоторых классов матриц.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, коммутатор, проектор, матрица, определитель

Commutators and isoclinic projections on a Hilbert space

Some new properties of commutators of isoclinic projections on a Hilbert space are established. Values of certain classes of matrices are found.

Keywords: Hilbert space, linear operator, commutator, projection, matrix, determinant

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ является коммутатором, если $X = AB - BA$ для некоторых $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Проекторы $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называются *изоклинными* (с углом $\theta \in (0, \pi/2)$, пишем $P \stackrel{\theta}{\approx} Q$), если $PQP = \cos^2\theta\, P$ и $QPQ = \cos^2\theta\, Q$, см. [1]. Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$, то $P^{\perp} = I - P$, проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$, а $P \vee Q = (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})^{\perp}$ проектирует на $\overline{\mathrm{lin}(P\mathcal{H} \cup Q\mathcal{H})}$. Проекторы P и Q находятся в общем положении в $\mathcal{H}$, если $P \wedge Q = P \wedge Q^{\perp} = P^{\perp} \wedge Q = P^{\perp} \wedge Q^{\perp} = 0$, см. [2]. При $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ отождествляется с полной матричной алгеброй $\mathcal{M}_n$.

Теорема 1. *Пусть $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ и $P \stackrel{\theta}{\approx} Q$ с некоторым углом $\theta \in (0, \pi/2)$. Тогда справедливы следующие соотношения:*
(i) $|PQ + QP| = \cos\theta\,(P + Q)$;
(ii) $|PQ| = \cos\theta\, Q$;
(iii) $|PQ + QP| = |PQ| + |QP|$;
(iv) $|PQ - QP| = \cos\theta\, |P - Q|$;
(v) $|S_P S_Q - S_Q S_P| = 2\cos\theta\, |S_P - S_Q|$;
(vi) $\|PQ - QP\| = \sin\theta\, \cos\theta$;
(vii) $P \vee Q - P \stackrel{\pi/2-\theta}{\approx} Q$;
(viii) $P \vee Q - P \stackrel{\theta}{\approx} P \vee Q - Q$.

Следствие 1. *Пусть $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ и $P \stackrel{\theta}{\approx} Q$ с некоторым углом $\theta \in (0, \pi/2)$, $X = P \vee Q - P - Q$. Тогда*
(i) $\|X\| = \cos\theta$ *и* $\mathrm{tr}(P \vee Q) = \mathrm{tr}(P + Q)$*;*
(ii) *если* $\dim \mathcal{H} < \infty$*, то* X *является коммутатором.*

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

Бикчентаев Айрат Мидхатович, д.ф.-м.н., доцент, КФУ (Казань, Россия); Airat Bikchentaev (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Алхасан Хасан, аспирант, КФУ (Казань, Россия); Alhasan Hasan (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Теорема 2. *Пусть* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ *и* $P \overset{\theta}{\approx} Q$ *с некоторым углом* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $P \overset{\pi/2-\theta}{\approx} Q^{\perp}$;

(ii) $P^{\perp} \overset{\theta}{\approx} Q^{\perp}$;

(iii) $|P - Q| = \sin\theta\, I$;

(iv) $|PQ - QP| = \sin\theta\, \cos\theta\, I$;

(v) $P \vee Q = I$;

(vi) $X = P \vee Q - P - Q$ *обратим.*

Следствие 2. *Пусть* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ *и* $P \overset{\theta}{\approx} Q$ *с некоторым углом* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Если* $|P - Q| = \sin\theta\, I$, *то* P *и* Q *находятся в общем положении в* $\mathcal{H}$.

Следствие 3. *Пусть* $P, Q \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{pr}}$ *и* $P \overset{\theta}{\approx} Q$ *с некоторым углом* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Если* n *нечетно, то* $P \vee Q \neq I$ *и соотношения* (i), (ii) *теоремы* 2 *не выполнены.*

Литература

1. *Шерстнев А.Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. — М.: Физматлит, 2008.

2. *Halmos P.R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 381–389.