

В.Ю. Белаиов, vybelashov@yahoo.com, КФУ, Казань

К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ НИЗКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДЯЩИХ ОБЪЕКТАХ ЭЭС

Представлен теоретический анализ и даны количественные оценки вклада поля дифракции электромагнитных волн на симметричных проводящих объектах в суммарное поле СНЧ-ОНЧ диапазона вблизи источников, которыми могут служить отдельные элементы электроэнергетических систем. Полученные в виде достаточно простых и удобных для практического использования соотношений результаты представляют интерес при решении комплекса задач, связанных с различными аспектами проблем электромагнитной совместимости, помехозащищенности и безопасности жизнедеятельности в электроэнергетике.

Введение

Изучение низкочастотных (диапазон СНЧ-ОНЧ – 10-10000 Гц) электромагнитных (ЭМ) полей, генерируемых элементами электроэнергетических систем (ЭЭС), и исследование воздействия ЭМ полей естественного и искусственного происхождения на различные структуры ЭЭС представляет интерес при решении комплекса задач, связанных с различными аспектами проблем электромагнитной совместимости, помехозащищенности и безопасности жизнедеятельности в электроэнергетике. При этом, изучение структуры и интенсивности ЭМ поля вблизи объектов различной, подчас довольно сложной, конфигурации (строения, трубопроводы, открытые кабельные линии и т.п.) требует анализа суммарной картины, представляющей собой суперпозицию поля источника и поля, являющегося результатом дифракции на соответствующем объекте. Целью работы является теоретический анализ и получение количественных оценок вклада поля дифракции ЭМ волн на проводящих объектах цилиндрической и сферической формы в суммарное поле вблизи источников, которыми могут служить отдельные элементы ЭЭС. При анализе ограничимся допущениями: 1) объекты, на которых изучается поле, – идеально проводящие, что допустимо в условиях низкой проводимости земли, часто имеющей место в реальных условиях; 2) волны СНЧ-ОНЧ диапазона – плоские монохроматические, так как рассматривается малый участок волновой зоны.

Дифракция на цилиндрическом объекте

Будем предполагать, что в случае низкой проводимости земли в некотором приближении допустимо свести задачу к оценке вклада поля, вы-

званного дифракцией на идеально проводящем цилиндре бесконечной длины (последнее справедливо, поскольку результирующее поле исследуется на расстояниях от объекта, много меньших его линейных размеров).

Введем цилиндрическую систему координат так, что ось x совпадает с осью цилиндра (рис. 1). Пусть для падающей волны $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{x}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{x}$ (стоит задача оценки максимального вклада дифракционной составляющей), угол α отсчитываем от направления \mathbf{k} . В этом случае поле имеет компоненты E_x, H_r, H_α . С учетом геометрии задачи величину E_x определим из волнового уравнения для \mathbf{E} : $\Delta \mathbf{E} - (1/v_{ph}^2)(\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2) = 0$. Компонента E_{xc} вторичного поля, обусловленного дифракцией, $\mathbf{E}_c = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_c}{\partial \alpha^2} + k^2 E_c = 0. \quad (1)$$

Разделив переменные в (1), получим [1]

$$E_v''(r) + (1/r)E_v'(r) + (k^2 - v^2/r^2)E_v(r) = 0, \quad (2)$$

$$E_v''(\alpha) + v^2 E_v(\alpha) = 0, \quad (3)$$

где $v^2 = C$ – постоянная разделения.

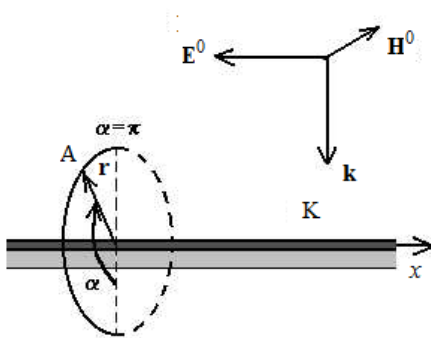


Рис. 1. Схема постановки задачи дифракции на цилиндрическом объекте: А – точка, в которой вычисляется поле; К – цилиндрический объект.

Уравнение (2) – уравнение Бесселя, решение которого в общем случае можно записать в виде

$$E_c = C_1 H_v^{(1)}(kr) + C_2 H_v^{(2)}(kr),$$

причем второй член описывает сходящуюся волну, которой в реальных условиях, описываемых задачей, не существует.

В области малых значений r (вблизи объекта, где $r \ll \lambda$), применяя граничное условие $r \rightarrow 0$, запишем функцию E_c в виде произведения

$$E_c = \varepsilon_0 f_1(r) f_2(\alpha), \quad (4)$$

где $f_1(r)$ – степенная функция, описывающая затухание волны при увеличении r ; $f_2(\alpha)$ – некоторая функция, определяющая осциллирующее распределение вектора E_c “внутри” огибающей – степенной функции.

Поскольку в рассматриваемом диапазоне ($f \approx 10^1 \div 10^4$ Гц) $k \approx 10^{-4} \div 10^{-7}$ и, соответственно, $(kr) \ll 1$, то, чтобы удовлетворить условию (4), в качестве решения уравнения (2) следует выбрать функцию Ханкеля для малых значений аргумента [1, 2]:

$$E_\nu(r) = H_\nu^{(1)}(kr) = (1/i\pi) \Gamma(\nu)(kr/2)^{-\nu} \quad (\nu \neq -1, -2, \dots). \quad (5)$$

Уравнение (3) имеет решение $E_\nu(\alpha) = A_\nu \exp(i\nu\alpha) + B_\nu(\alpha) \exp(-i\nu\alpha)$. Параметр ν – целый и, согласно (5), положителен. Учитывая, что общее решение уравнения (1) $E_c(r, \alpha) = \sum_\nu E_\nu(r)E_\nu(\alpha)$, имеем

$$E_c(r, \alpha) = \varepsilon_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} (A_\nu e^{i\nu\alpha} + B_\nu e^{-i\nu\alpha}) H_\nu^{(1)}(kr).$$

Коэффициенты A_ν, B_ν нетрудно найти из граничного условия на поверхности идеально проводящего цилиндра $\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_0 = 0$ при $r = a$ (где a – радиус цилиндра), используя свойство ортогональности $\exp(im\alpha)$:

$$A_\nu = i^\nu J_\nu(ka) / H_\nu^{(1)}(ka), \quad B_\nu = i^\nu J_\nu(ka) / H_\nu^{(1)}(ka).$$

Полное электрическое поле, таким образом, равно

$$E_x(r, \alpha) = \varepsilon_0 \left\{ \exp(ikr \cos \alpha) - \sum_\nu \frac{J_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(kr) (i^\nu e^{i\nu\alpha} + i^{-\nu} e^{-i\nu\alpha}) \right\}. \quad (6)$$

Компонента H_α находится из первого уравнения Максвелла:

$$H_\alpha = -(1/ik) \partial E_x / \partial r = -\varepsilon_0 \left\{ \cos \alpha \exp(ikr \cos \alpha) - \sum_\nu \frac{J_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka)} \frac{dH_\nu^{(1)}(kr)}{d(kr)} (i^{\nu-1} e^{i\nu\alpha} + i^{-\nu-1} e^{-i\nu\alpha}) \right\}. \quad (7)$$

Составляющая H_r при $0 \leq \alpha \leq \pi$ рассчитывается аналогично.

Полученные соотношения (6) и (7) позволяют оценить вклад дифракционной части в суммарное поле, принимаемое антенной:

$$\delta_{E_x}(r, k) = E_{xc} / (E_{x0} + E_{xc}), \quad \delta_{H_\alpha}(r, k) = H_{\alpha c} / (H_{\alpha 0} + H_{\alpha c}).$$

Произведенные оценки влияния дифракции на цилиндрическом объекте для волн с частотами $10 \div 10000$ Гц при $a = 1$ см, $r = 1 \div 30$ м позволили получить следующие аналитические зависимости относительных оценок от пространственных координат и k :

$$\delta_{E_x}(r, k) |_{\alpha=\pi} = e^{ikr} (k/2r)^2, \quad \delta_{H_\alpha} |_{\alpha=\pi} = ie^{ikr} k/2r^3. \quad (8)$$

Формулы (8) позволяют легко рассчитать относительный вклад дифракционной составляющей в суммарное ЭМ поле вблизи проводящего объекта цилиндрической формы.

Дифракция на сферическом объекте

Рассмотрим теперь вклад в суммарное ЭМ поле поля дифракции на объекте сферической формы. Пусть однородная плоская волна, векторы которой имеют амплитуды

$$\dot{E}_m^0 = x_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \quad \dot{H}_m^0 = y_0 (\dot{A}/W_0) e^{-ik_0 z},$$

падает на сферическое тело с проницаемостями $\dot{\epsilon}$, $\dot{\mu}$; проницаемости среды – ϵ_0 и μ_0 (рис. 2).

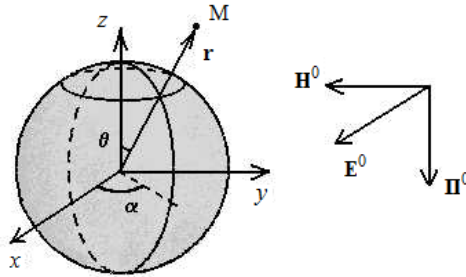


Рис. 2. Схема постановки задачи дифракции на сферическом объекте, М – точка, в которой вычисляется поле.

Необходимо построить решения для внешнего поля дифракции (внутреннее поле дифракции в рассматриваемой постановке задачи нас не интересует), которые можно получить тем же способом, что и в предыдущем разделе – путем разложения падающей волны по подходящим функциям и составления аналогичных разложений с неопределенными коэффициентами для поля дифракции.

Последние будут находиться при наложении соответствующих граничных условий. Заметим, однако, что реализация такого подхода в случае сферической геометрии оказывается более сложной.

Будем использовать сферические гармоники \mathfrak{R} , Θ , \mathfrak{Z} . Однородное уравнение Гельмгольца, описывающее поле, в сферических координатах будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + k^2 u = 0. \quad (9)$$

Подстановка $u(r, \vartheta, \alpha) = \mathfrak{R}(r)\Theta(\vartheta)\mathfrak{Z}(\alpha)$ с последующим умножением всех членов уравнения (9) на $r^2 \sin^2 \vartheta / (\mathfrak{R}\Theta\mathfrak{Z})$ дает

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Re}{\partial r} \right) + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\Im} \frac{\partial^2 \Im}{\partial \alpha^2} + k^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 0.$$

Приравнявая третий член, зависящий только от α , $-m^2$, получаем два уравнения, одно из которых делится на $\sin^2 \vartheta$ [3]. Далее, члены, зависящие только от r , приравняем p^2 . В результате получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Re} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Re}{dr} \right) + k^2 r^2 &= 0, & \frac{\partial^2 \Im}{\partial \alpha^2} + m^2 \Im &= 0, \\ \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} &= -p^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, то $u(r, \vartheta, \alpha + 2\pi) = u(r, \vartheta, \alpha)$, так что $m = 0, 1, 2, \dots$. Производя во втором уравнении системы (10) замену $t = \cos \vartheta$, получим

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right] + \left(p^2 - \frac{m^2}{1-t^2} \right) \Theta = 0 \quad (-1 < t < 1).$$

Ограниченными решениями последнего уравнения являются присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(t)$ [при этом собственные значения, отвечающие этим собственным функциям, $p^2 = n(n+1)$] [3]:

$$T(t) = P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m \leq n),$$

где $P_n(t)$ – полиномы Лежандра [2]. Отсюда следует, что $\Theta(\vartheta) = P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Первое из уравнений (10) после дифференцирования выражения в круглых скобках и выполнения замен $p = n(n+1)$, $\Re(r) = \rho(r)/\sqrt{kr}$ приводится к виду

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \left[k^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 / r^2 \right] \rho = 0,$$

а это не что иное, как уравнение Бесселя порядка $n+1/2$ относительно функции $\rho(kr)$ [2]. Таким образом, решением первого уравнения системы (10) является функция

$$\Re(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} [AJ_{n+1/2}(kr) + BN_{n+1/2}(kr)] = \frac{1}{\sqrt{kr}} [PH_{n+1/2}^{(1)}(kr) + QH_{n+1/2}^{(2)}(kr)].$$

Окончательно, решения уравнения (9) будут иметь вид

$$u(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \left\{ AJ_{n+1/2}(kr) + BN_{n+1/2}(kr) \right\} \times P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \left\{ C \cos m\alpha + D \sin m\alpha \right\} \left\{ Re^{im\alpha} + Se^{-im\alpha} \right\}.$$

Пользуясь известными рекуррентными соотношениями для сферической и модифицированной сферической функций Бесселя I рода [2], можно теперь записать решение для внешнего поля дифракции [4]:

$$\dot{E}_m = \dot{A} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(c_n^M M_{on} + i c_n^N N_{en} \right), \quad r > R; \quad (11)$$

$$\dot{H}_m = -\frac{\dot{A}}{\dot{W}} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(b_n^N M_{en} - i b_n^M N_{on} \right), \quad r > R. \quad (12)$$

где

$$M_{on} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} J_{n+1/2}(kr) \left[\pm \vartheta_0 \frac{1}{\sin \vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \alpha_0 \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right],$$

$$N_{on} = \frac{1}{k_0 r} \left\{ r_0 n(n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r) P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \right. \\ \left. + \vartheta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{k_0 r} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r) \right]' \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \right. \\ \left. \pm \alpha_0 \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{k_0 r} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r) \right]' P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right\}.$$

Индексы o и e в последних формулах соответствуют выбору, соответственно, верхнего и нижнего вариантов двойного знака и тригонометрической функции. Коэффициенты в круглых скобках формул (11), (12) определяются выражениями, приведенными в [4]. Формулы (11), (12) позволяют рассчитать поле вне сферы радиуса R для волн СНЧ-ОНЧ диапазона.

Количественные оценки

Для получения количественных оценок вклада дифракционного поля в суммарную картину проводилось численное моделирование дифракции с помощью специально разработанной на основе алгоритмов, предложенных

в [2], программы DIFFRACT [4]. На рис. 3 и 4 приведены примеры результатов моделирования дифракции на проводящем цилиндре для падающих ЭМ волн с частотами $10 \div 30$ Гц и $1-3$ кГц, соответственно.

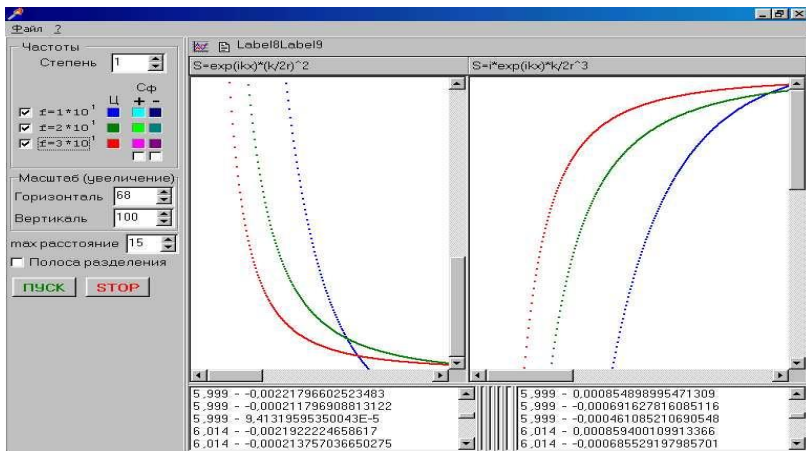


Рис. 3. Результаты моделирования вклада дифракционной составляющей в суммарное поле в частотном диапазоне $f = 10 \div 30$ Гц.

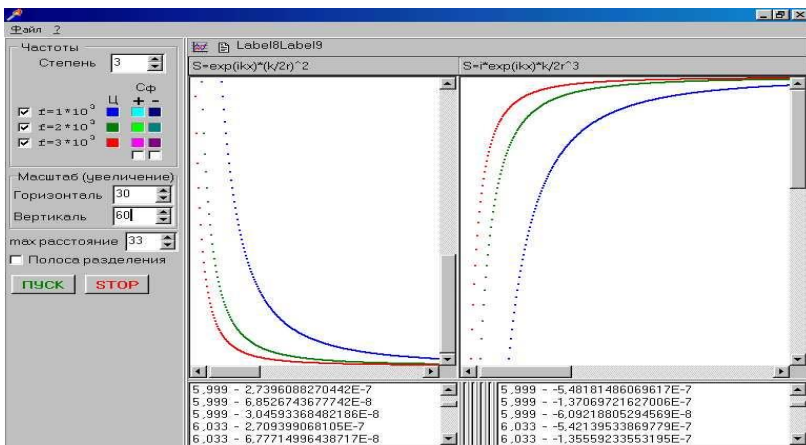


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, для частотного диапазона $f = 1 \div 3$ кГц.

Дифракционное поле для сферического проводящего объекта имеет качественно такой же характер: модули его компонент вне сферы убывают экспоненциально с ростом r , причем, как и в случае дифракции на объекте

цилиндрической формы, амплитуды составляющих вблизи объекта зависят обратно пропорционально от частоты падающей волны. Однако, в отличие от случая дифракции на цилиндре, вклад в суммарное поле дифракционного поля на сферическом объекте оказывается при тех же условиях практически на порядок большим. Полученные результаты, несмотря на некоторую идеализацию задачи, позволяют заключить о некотором искажении низкочастотного поля в результате дифракции, увеличивающемся с уменьшением частоты по законам (8), (11), (12), однако эти искажения, ввиду их относительной малости, должны учитываться лишь при построении высокочувствительных к внешним воздействиям систем.

Заключение

В работе представлен теоретический анализ и даны количественные оценки вклада поля дифракции электромагнитных волн на симметричных проводящих объектах цилиндрической и сфероидальной формы в суммарное поле СНЧ-ОНЧ диапазона вблизи источников, которыми могут являться отдельные элементы ЭЭС. Результаты, полученные для объектов, обладающих высокой степенью симметрии, могут служить основой при изучении структуры и интенсивности ЭМ поля вблизи объектов более сложной конфигурации (строения, трубопроводы, открытые кабельные линии и т.п.), отдельные участки которых геометрически симметричны. Во всех случаях при этом необходим анализ суммарной картины, представляющей собой суперпозицию поля источника и поля, являющегося результатом дифракции на соответствующем объекте или суперпозицию дифракционных полей его отдельных элементов. Результаты представлены в виде простых и удобных для расчетов соотношений и представляют интерес при решении задач, связанных с различными аспектами проблем ЭМС, помехозащищенности и безопасности жизнедеятельности в электроэнергетике.

Литература

1. **Белашов В.Ю.** Оценка влияния дифракции на кабеле на характеристики естественного электромагнитного поля КНЧ-ОНЧ-диапазона, принимаемого антенной // Геомагн. и аэронавигация. 1984. № 5. С. 851-853.
2. **Белашов В.Ю.** Специальные функции и алгоритмы их вычисления. Магадан: МПУ, 1997. 36 с.
3. **Никольский В.В.** Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973. 544 с.
4. **Белашов В.Ю., Александров И.А.** Задачи дифракции электромагнитных волн в курсе электродинамики: компьютерное моделирование // II Межд. научно-метод. конф. «Новые технологии в преподавании физики: школа и вуз» 13-16 марта 2000 г. Сб. докл. М.: МПГУ, 2000. С. 89.