

## Классификация методов построения графов Вороного исходя из топологии окружающего пространства

*Р.О. Лавренов*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Казань*

**Аннотация:** Предлагается новая классификация методов построения графов Вороного на картах, представленных точечными и полигональными препятствиями. Исходя из топологии пространства, предлагается классифицировать построенные графы Вороного, как внешние и внутренние. Таким образом, методы построения графов Вороного могут рассчитывать либо один из представленных типов графов Вороного, либо оба типа. Введенные понятия и предлагаемая классификация будут полезны для исследователей-робототехников, использующих метод графа Вороного при планировании пути мобильных роботов в различных средах.

**Ключевые слова:** граф Вороного, классификация, диаграмма Вороного, взвешенный граф, топология.

### Введение

Диаграмма Вороного конечного множества точек  $S$  на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества  $S$ , чем к любому другому элементу множества [1]. Названа в честь русского учёного Георгия Феоодосьевича Вороного (1868—1908). Также известна как: мозаика Вороного, разбиение Вороного, разбиение Дирихле. Граф, получаемый при построении диаграммы Вороного на плоской карте, называется графом Вороного.

В настоящее время граф Вороного активно используется в компьютерной графике для случайного разбиения поверхностей в комбинации с триангуляцией Делоне. Также граф Вороного применяется, например, в материаловедении и геодезии.

Активно граф Вороного применяется и в задачах планирования пути автономных робототехнических устройств. Благодаря используемому при построении графа Вороного принципу «держаться как можно дальше от

препятствий», маршрут, построенный по графу Вороного, будет одним из самых безопасных из существующих в среде [2].

### **Существующие методы построения графа Вороного**

Классические методы построения графа Вороного исходят из множества  $S$  объектов в виде точек. Это алгоритм Форчуна [3], метод триангуляции Делоне [4] и метод Боуэра — Ватсона как обобщение триангуляции Делоне для  $k$ -мерного пространства [5]. Построение графов Вороного в средах с точечными препятствиями хорошо изучено и не представляет существенной научной проблемы. Однако в задачах планирования пути автономных мобильных объектов требуется вычислять граф Вороного в более сложных средах. Для таких задач используется двумерное представление окружающей среды с картой, содержащей полигональные препятствия.

Для расчета графа Вороного на картах с полигональными препятствиями используются другие алгоритмы. Обобщенная диаграмма Вороного (англ. «Generalized Voronoi Diagram (GDV)»), описанная в [6], представляет собой множество положений точек в свободном пространстве, равноудаленных от двух или более препятствий. Подобный подход требует предварительной карты местности с указанием всех препятствий на ней, а также предполагает, что все препятствия должны быть выпуклыми многогранниками. Созданный на его примере алгоритм расчета расширенного графа Вороного (англ. "Extended Voronoi Graph") [7] рассчитывает уже путь внутри сложных препятствий типа помещений, коридоров и т.д.

Наиболее современным алгоритмом расчета графа Вороного в среде с полигональными препятствиями является разработанный в 2010 году Б. Лау и В. Бургартом алгоритм [8] поиска графа по евклидовому расстоянию.

Модификации предложенных алгоритмов построения графа Вороного активно используются для планирования пути мобильных роботов с использованием информации о расстоянии, предоставляемой различными внешними датчиками, такими, как гидролокаторы, лазерные сканеры и стереокамеры. Метод построения обобщенной локальной диаграммы Вороного (англ. "Generalized Local Voronoi Diagram (GLVG)"), примененный Махковичем в [9] использует измерения с лазерного сканера. Сначала точки, принадлежащие одному и тому же объекту, группируются, затем генерируется диаграмма Вороного. После этого края за пределами видимой области и дефектные объекты удаляются. В работе [10] автор строит диаграмму Вороного из двоичного изображения рабочего пространства, полученного с помощью цифровой камеры.

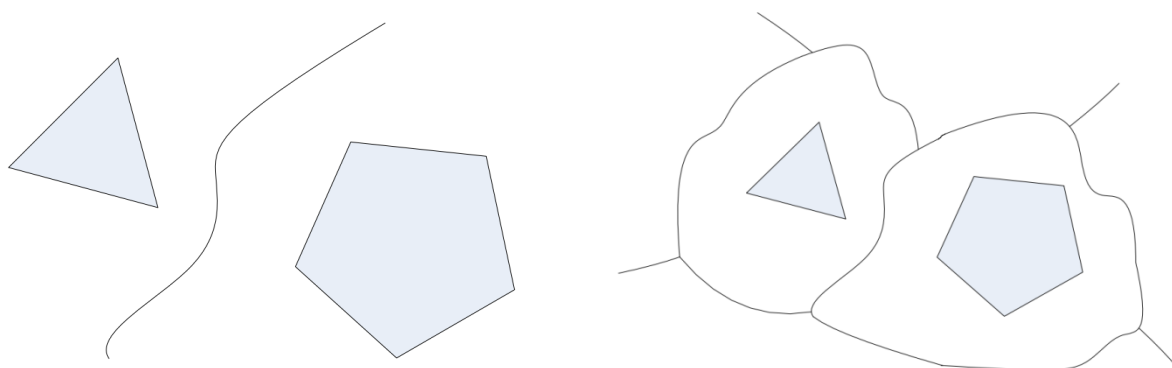


Рис. 1. – Схематичный пример неполного (изображение слева) и полного (изображение справа) графа Вороного.

### **Предлагаемая классификация методов построения графа Вороного**

В настоящее время научная теория алгоритмов построения графов Вороного в двумерных средах с полигональными препятствиями развита слабо. Существует классификация графов Вороного по полноте. Так граф может быть [11]:

- полным (рис. 1, изображение справа)
- неполным (рис. 1, изображение слева)

Задачу получения полного графа можно решить, если построить для среды с препятствиями охватывающую рамку, которую в свою очередь можно также считать препятствием при расчете графа Вороного. Однако такая классификация подходит только для топологически простых сред, представленных отдельно находящимися препятствиями. На практике же, среда чаще всего является каким-либо помещением, внутри которого нужно построить граф Вороного для обеспечения безопасной автономной навигации мобильных роботов. Для понимания, какие алгоритмы способны решать эту задачу, а какие нет – вводится новая классификация методов построения графов. Но для этого следует сначала добавить следующие определения.

#### Определение 1.

Граф Вороного называется *внешним*, если делит пространство на области, каждая точка в которых ближе к какому-то определенному препятствию, чем к какому-либо другому.

#### Определение 2.

Граф Вороного называется *внутренним*, если делит пространство на области, каждая точка в которых ближе к какой-то определенной части конкретного препятствия, чем к какой-либо другой его части или частям других препятствий.

В ходе использования методов построения графа Вороного в средах с полигональными препятствиями становится ясно, что существует два принципиально разных подхода для расчета графа Вороного, и какой из них выбрать - зависит от типа окружающей среды. Среда может быть:

- Представлена разрозненными препятствиями (пример на рис. 2, изображение слева). В таком случае предпочтительней рассчитывать внешний граф Вороного (из определения 1).
  - Представлена одним препятствием (пример на рис. 2, изображение справа) сложной топологии, внутри которого следует строить граф. В
-

таком случае предпочтительней рассчитывать внутренний граф Вороного (из определения 2).

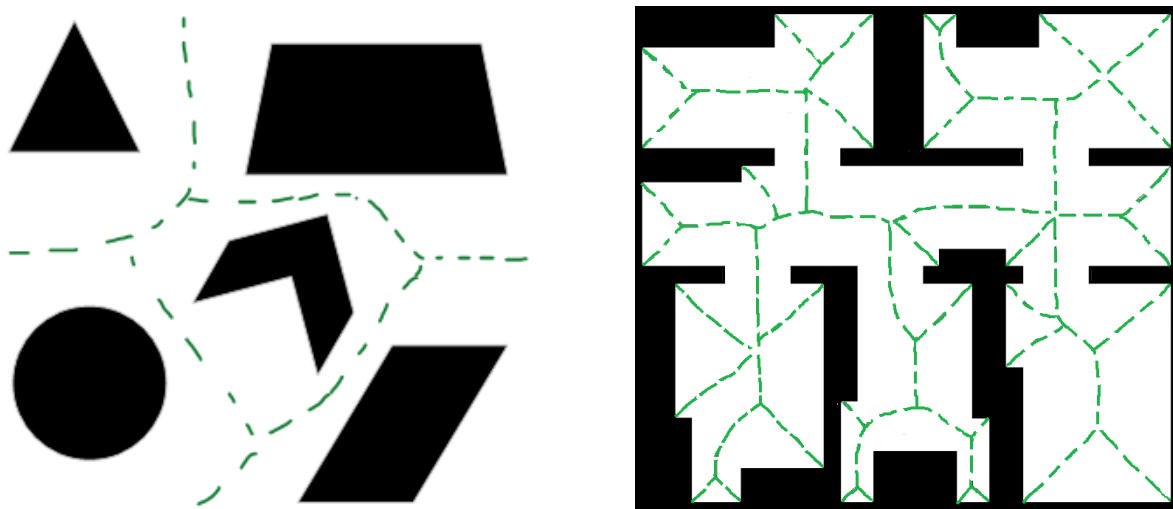


Рис. 2. – Схематичный пример внешнего (изображение слева) и внутреннего (изображение справа) графа Вороного.

- Представлена разрозненными препятствиями и частично ограничивающими их другими препятствиями. Это комбинированный случай, наиболее распространенный. В таком случае выбор типа графа лежит на пользователе.

Сложность расчета внутреннего графа заключается в том, что необходимо разделить препятствие на части, что часто сложно сделать, если у препятствия нет ярко выраженных углов, или оно представлено в виде набора пикселей на карте (так выглядят препятствия на реальных вероятностных картах занятости).

Исходя из проведенного обзора литературы, классические методы построения графа в среде с точечными препятствиями: метод Форчуна, метод триангуляции Делоне и метод Боуэра — Ватсона создают внешний граф Вороного и не способны рассчитывать внутренние графы.

Для расчета графа Вороного на картах с полигональными препятствиями используются другие алгоритмы, например обобщенная диаграмма Вороного – также пример алгоритма, рассчитывающего только внешний граф Вороного. Созданный на его примере алгоритм расчета расширенного графа Вороного строит уже исключительно внутренний граф Вороного. А алгоритм Б. Лау и В. Бургарта поиска графа по эвклидовому расстоянию способен строить как внешний, так и внутренний граф Вороного.

### **Заключение**

В данной работе вводятся два новых определения для обозначения графов по применимости методов их расчета на топологически различных пространствах. Исходя из введенных определений, методы расчета можно классифицировать следующим образом:

- 1) Способные рассчитывать только внешний граф Вороного;
- 2) Способные рассчитывать только внутренний граф Вороного;
- 3) Способные рассчитывать графы Вороного обоих типов.

Введенные понятия и предлагаемая классификация будут полезны для исследователей-робототехников, использующих метод графа Вороного при планировании пути мобильных роботов в различных средах.

### **Благодарность**

*Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета и при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 19-58-70002).*

### **Литература**

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. 1989. 478 с.

2. Лавренов Р. О. и др. Разработка и имплементация сплайн-алгоритма планирования пути в среде ROS/Gazebo //Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. №. 1. С. 57-84.
  3. Fortune S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams //Algorithmica. – 1987. Т. 2. №. 1-4. p.153.
  4. Делоне Б. Н. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï // Изв. АН СССР. VII серия. Отделение матем. и естеств. наук. 1934. № 6. С. 793-800.
  5. Watson D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes //The computer journal. 1981. Т. 24. №. 2. pp. 167-172.
  6. Choset H., Burdick J. Sensor based planning. I. The generalized Voronoi graph // Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1995. Т. 2. pp. 1649-1655.
  7. Beeson P., Jong N. K., Kuipers B. Towards autonomous topological place detection using the extended voronoi graph // Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2005. pp. 4373-4379.
  8. Lau B., Sprunk C., Burgard W. Improved updating of Euclidean distance maps and Voronoi diagrams //2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2010. pp. 281-286.
  9. Mahkovic R., Slivnik T. Generalized local Voronoi diagram of visible region // Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1998. Т. 1. pp. 349-355.
  10. Sudha N., Nandi S., Sridharan K. A parallel algorithm to construct Voronoi diagram and its VLSI architecture //Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1999. Т. 3. pp. 1683-1688.
-

11. Соловьев В. В., Шаповалов И. О., Шадрина В. В. Планирование траектории подвижного объекта с применением диаграммы Вороного // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2015. №. 2 (163). С. 29-40

### References

1. Preparata F., Sheymos M. Vychislitel'naya geometriya: vvedeniye. [Computational Geometry - An Introduction]. 1989. 478 p.
2. Lavrenov R. O., Magid E. A., Matsuno F., Svinin M. M., Suthakorn J., SPIRAS Proceedings, 18:1 (2019), pp. 57–84.
3. Fortune S. Algorithmica. 1987. Т. 2. №. 1-4. p. 153.
4. Delaunay, Boris (1934). Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. 6: pp. 793–800.
5. Watson D. F. The computer journal. 1981. Т. 24. №. 2. pp. 167-172.
6. Choset H., Burdick J. Sensor based planning. I. The generalized Voronoi graph. Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1995. Т. 2. pp. 1649-1655.
7. Beeson P., Jong N. K., Kuipers B. Towards autonomous topological place detection using the extended voronoi graph. Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2005. pp. 4373-4379.
8. Lau B., Sprunk C., Burgard W. Improved updating of Euclidean distance maps and Voronoi diagrams. Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2010. pp. 281-286.
9. Mahkovic R., Slivnik T. Generalized local Voronoi diagram of visible region. Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1998. Т. 1. pp. 349-355.
10. Sudha N., Nandi S., Sridharan K. A parallel algorithm to construct Voronoi diagram and its VLSI architecture. Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1999. Т. 3. pp. 1683-1688.





11. Solov'yev V. V., Shapovalov I. O., Shadrina V. V. Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki. 2015. №. 2 (163). pp. 29-40.