

Используя это решение, исключаем столбец $y(l)$ из условий (2) на правом краю и, таким образом, переносим их в точку x_{n-1} , а затем аналогично в точку x_i

$$H_k(x_i)y(x_i) = r_k(x_i), \quad (6)$$

где $H_k(x_i) = H_k(x_{i+1})K_{x_i}^{x_{i+1}}$ или $H_k(x_i) = H_k(l)K_{x_{n-1}}^{x_n} \cdot K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \dots K_{x_i}^{x_{i+1}}$,

$$r_k(x_i) = r_k(l) - H_k(l)(y_{x_{n-1}}^{*x_n} + K_{x_{n-1}}^{x_n}y_{x_{n-2}}^{*x_{n-1}} + \dots + K_{x_{n-1}}^{x_n}K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \dots K_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}y_{x_i}^{*x_{i+1}}).$$

Краевые условия (5) и (6), перенесенные в произвольно выбранную точку x_i , объединяем в систему алгебраических уравнений.

$$D(x_i)y(x_i) = r(x_i), \quad D(x_i) = \begin{vmatrix} H_l(x_i) \\ H_k(x_i) \end{vmatrix}, \quad r(x_i) = \begin{vmatrix} r_l(x_i) \\ r_k(x_i) \end{vmatrix}.$$

Решение краевой задачи для точек x_i заканчивается определением столбца $y(x_i)$ искомым величин

$$y(x_i) = [D(x_i)]^{-1}r(x_i).$$

Три других модификации метода решения краевых задач отличаются направлениями вычисления функций Коши–Крылова по отношению к точке, куда переносятся краевые условия.

Устойчивость счета при решении краевых задач обеспечивается построчным ортонормированием краевых условий после переноса их в новую точку.

1. *Виноградов Ю. И.* Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН РАН. — 2006. — Т. 409, №1. — С. 15–18.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫТЕСНЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ–ШОУ*

С. В. Гараева¹, Е. А. Марфин²

¹Институт физики КФУ, Казань, Россия; ²ИЭПТ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

Современное состояние в области разработки нефтяных месторождений характеризуется низкой эффективностью процесса добычи. В России извлекается около 30% от начальных запасов. Одна из причин этого заключается в том, что добыча нефти осуществляется вытеснением ее в пласте водой. В физическом смысле этот процесс подобен явлению неустойчивости Саффмана–Тейлора [1], которое возникает при течении через ячейку Хеле–Шоу двух жидкостей с различной вязкостью. Если одна жидкость вытесняется другой менее вязкой жидкостью, то граница раздела между ними деформируется и образуются «вязкие пальцы» [2]. В работе [3] показаны условия деления таких пальцев, которые зависят от поверхностного натяжения. Подобные этой неустойчивости явления, не позволяют извлечь всю нефти из продуктивного пласта [4]. Теоретические исследования [5–7] свидетельствуют о том, что такой неустойчивостью можно управлять внешним воздействием. Косвенным подтверждением этого является факт снижения обводненности добываемой нефти при акустическом воздействии на пласт [8].

Настоящая работа посвящена численному моделированию процесса вытеснения масла водой в ячейке Хеле–Шоу при различных параметрах возмущений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-08-01047).

Исследование аналогично работе [9], где изучался процесс вытеснения в стационарных условиях. Численное моделирование производилось в программном комплексе FlowVision, в который были загружены 3D-модели ячеек, созданные в программе SolidWorks со следующими параметрами: ширина $h = 176$ мм, длина $l = 400$ мм, толщина $d = 0,81$ мм, а граница раздела задавалась уравнением: $x = A \cdot \cos(2\pi Ty/h)$, где A и T — амплитуда и период возмущений. В программе FlowVision в качестве математической модели использовалась модель ламинарного течения. Вязкость вытесняемой жидкости $\mu_0 = 133$ мПа·с. Вытесняющая жидкость — чистая вода. Граничным условием на входе задавалась скорость подачи воды $u_x = 3$ мм/с, на выходе — свободный выход, на остальные границах — стенка с прилипанием.

На рис. 1 представлены типичные изображения образовавшихся «вязких пальцев» при различных амплитудах возмущений. Видно, что скорость их роста зависит от амплитуды возмущений. На рис. 2 показаны графики зависимости изменения скорости роста самого большого «вязкого пальца» от времени при различных периодах и амплитудах начального возмущения границы. Видно, что при периоде $T = 9$, скорость роста пальцев максимальна и больше, чем в отсутствии начального возмущения. С увеличением периода возмущений скорость роста значительно снижается.

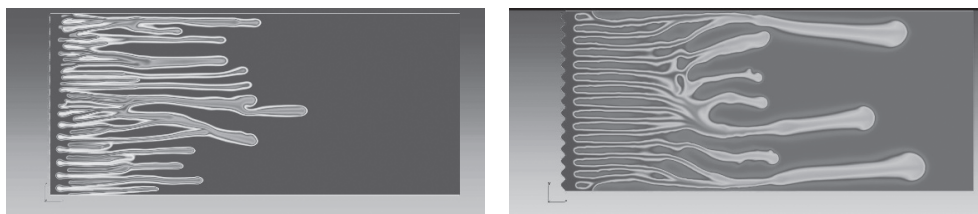


Рис. 1. Моделирование процесса вытеснения масла водой при одинаковых фазах эксперимента (справа — $A = 0,2$ мм, слева — $A = 1$ мм)

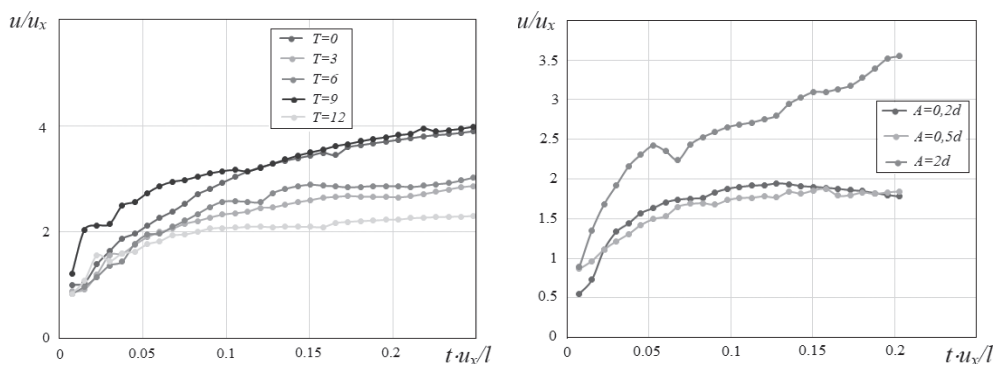


Рис. 2. Зависимости изменения относительной скорости роста вязких пальцев от безразмерного времени при различных периодах (справа) и амплитудах (слева) возмущения

Увеличение амплитуды возмущения приводит к увеличению скорости роста «вязких пальцев» (рис. 2 справа). При заданных условиях численного эксперимента относительная скорость роста «вязких пальцев» u/u_x меняется от 1,7 до 4. На основе анализа процесса вытеснения установлено, что характеристики начального возмущения оказывают влияние в основном на процесс формирования «вязких пальцев», а на их дальнейшее развитие практически не влияют. Было выявлено,

что на начальных этапах численного эксперимента скорость роста «вязких пальцев» резко возрастает, а после достижения $t_{\text{отн}} = 0,05$ изменение скорости мало. На основании полученных данных была разработана установка для проведения последующих экспериментальных исследований.

1. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. — 1958. — V. A245, No. 1242. — P. 311–329.
2. *Paterson L.* Radial fingering in a Hele Shaw cell // Journal of Fluid Mechanics. — 1981. — V. 113. — P. 513–529.
3. *Mclean J. W., Saffman P. G.* The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele Shaw cell // Journal of Fluid Mechanics. — 1981. — V. 102. — P. 455–469.
4. *Sahimi M.* Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // Reviews of Modern Physics. — 1993. — V. 65 (4). — P. 1393–1534.
5. *Park C.-W., Homsy G. M.* Two-phase displacement in Hele Shaw cells: Theory // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — V. 139. — P. 291–308.
6. *Марфин Е. А., Кравцов Я. И., Абдрашитов А. А.* Устойчивость нестационарного двухфазного течения в пористой среде // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции, посвященной 115-летию со дня рождения Н. Г. Четаева и памяти академика АН РТ Т. К. Сиразетдинова. — 2017. — С. 225–230.
7. *Marfin E. A., Abdrashitov A. A., Gataullin R. N., Gavrilo A. G.* On the feature of two-phase filtration in a porous medium under elastic-wave action // Engineering and Mining Geophysics 2018 — 14th Conference and Exhibition 14. — 2018.
8. *Marfin E. A., Abdrashitov A. A.* Extraction of heavy oil at thermal-wave impact on the producing formation // 6th Saint Petersburg International Conference and Exhibition on Geosciences 2014: Investing in the Future. — 2014. — P. 607–611.
9. *Марфин Е. А., Ермолаев Д. В., Гараева С. В.* Динамика границы раздела жидкостей в ячейке Хил–Шоу // материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), 24–31 мая 2018 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2018. — С. 205–207.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАПЫЛЕНИЯ ТОНКИХ ПЛЕНОК В МАГНЕТРОННЫХ УСТАНОВКАХ БАРАБАННОГО ТИПА С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ОБРАЗЦАМИ

В. М. Градов

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Магнетронные системы используются при создании новых материалов, ионно-плазменном нанесении покрытий и получении нанопленок в оптоэлектронике, машиностроении, квантовой электронике [1, 2]. Настоящая работа посвящена моделированию процесса формирования покрытия на цилиндрической поверхности вращающихся вокруг своих осей образцов, установленных на барабан, в свою очередь вращающийся относительно неподвижной мишени. При этом предполагается, что режим транспорта напыляемого вещества от мишени к образцу является прямопролетным, и скорость напыления однозначно связана со скоростью распыления.

Компьютерная реализация модели учитывает сложные пространственные траектории точек, расположенных на цилиндрической поверхности образцов, участ-