

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И НЕФТЕГАЗОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра геофизики и геоинформационных технологий**

**Э.В. Утемов**

**Курс лекций по гравиразведке**

**Учебное пособие**

**Казань-2020**

*Печатается по решению учебно-методической комиссии Института геологии  
и нефтегазовых технологий*

*Протокол № \_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2020 года*

## **Утемов Э.В.**

Утемов Э.В. Курс лекций по гравиразведке: учебное пособие для дисциплины «Гравиразведка» (уровень бакалавриат) по направлению 05.03.01 Геология / Э.В.Утемов. – Казань: Казанский федеральный университет, 2020. – 77 с.

Пособие для самостоятельного изучения лекционного курса «Гравиразведка». В работе в лекционной форме рассматриваются основные разделы гравиметрии: теория гравитационного поля, измерения силы тяжести, гравиметрические съемки, решение прямых и обратных задач гравиразведки.

©Казанский федеральный университет, 2020

©Утемов Э.В., 2020

## Оглавление

Лекция 1.....	5
Введение.....	5
Сила тяжести.....	7
Геоид.....	11
Формула Клеро. Нормальное значение силы тяжести.....	12
Вопросы для самоконтроля.....	15
Лекция 2.....	16
Редукции и аномалии силы тяжести.....	16
Вопросы для самоконтроля.....	20
Лекция 3.....	21
Вторые производные потенциала силы тяжести.....	21
Изостазия и изостатические редукции.....	23
Плотность горных пород.....	25
Вопросы для самоконтроля.....	26
Лекция 4.....	27
Классификация методов измерения силы тяжести.....	27
Динамические методы измерения силы тяжести.....	28
Основы маятникового метода определения силы тяжести.	
Математический маятник.....	28
Физический маятник.....	30
Баллистический метод.....	32
Вопросы для самоконтроля.....	34
Лекция 5.....	35
Измерение силы тяжести гравиметрами.....	35
Измерение вторых производных потенциала силы тяжести.....	41
Вопросы для самоконтроля.....	43
Лекция 6.....	44
Гравиметрическая аппаратура.....	44

Абсолютные баллистические гравиметры.....	44
Относительные гравиметры.....	47
Аэро- и морские гравиметры.....	49
Спутниковая гравиметрия.....	52
Вопросы для самоконтроля.....	55
Лекция 7.....	56
Классификация гравиметрических съемок.....	56
Интерпретация данных гравirazведки.....	58
Качественная интерпретация гравитационных аномалий.....	59
Вопросы для самоконтроля.....	60
Лекция 8.....	61
Разделение аномальных гравитационных полей.....	61
Разделение полей как процесс частотной фильтрации.....	62
Осреднение.....	64
Аналитическое продолжение аномалий.....	66
Вычисление производных.....	68
Вопросы для самоконтроля.....	70
Лекция 9.....	71
Решение прямой задачи гравirazведки для тел простой формы.....	71
Понятие о двумерных телах. Логарифмический потенциал.....	71
Притяжение однородным шаром.....	72
Притяжение горизонтальным круговым цилиндром (горизонтальным стержнем).....	73
Притяжение вертикальной материальной плоскостью.....	75
Притяжение прямоугольной двумерной призмой.....	76
Притяжение бесконечной материальной полуплоскостью.....	76
Вопросы для самоконтроля.....	76
Литература.....	77

## *Лекция 1.*

### **Введение**

Целью курса является приобретение студентами компетенций эффективного использования полученных знаний, умения извлекать, структурировать и анализировать информацию при решении научно-исследовательских и прикладных геофизических задач.

Гравиразведка – сокращенное название разведочной гравиметрии. Гравиразведка является одним из методов исследования геологического строения верхних частей Земли.

По методу исследования (изучение гравитационного поля) гравиразведка является составной частью науки об измерении силы тяжести – гравиметрии (от латинского *gravitas* – тяжесть и греческого *μετρέω* – измеряю).

Эффективность гравиразведки как разведочного метода обусловлена тем, что плотностные неоднородности в геологических средах находят свое отражение в гравитационном поле.

Основные области применения гравиметрии:

#### *Статические измерения для решения геологических задач*

1. Изучение геологического строения земной коры и верхней мантии;
2. Поиски и разведка МПИ; Поиски нефтяных и газовых месторождений, разведка рудных полезных ископаемых.
3. Тектоническое районирование крупных регионов и изучение тектонического строения отдельных небольших территорий (нефтегазовые, рудные задачи).
4. Литолого-петрографическое районирование и расчленение;
5. Выделение перспективных участков для постановки более детальных работ.

#### *Физика и фигура Земли*

1. Изучение фигуры Земли и обработка геодезических материалов триангуляции, высокоточных нивелировок и астрономических определений.
2. Изучение планетарного строения Земли, определение распределение масс в

теле Земли.

### *Инженерная геофизика*

1. Мониторинг окружающих геологических сред вокруг древних и современных архитектурных строений и памятников с целью их долговременного сохранения;

### *Спутниковая миссия GRACE*

1. Уточнение глобальных гидрологических моделей Земли;
2. Анализ ежемесячных вариаций осадков и грунтовых вод;
3. Уточнение изостатических моделей;
4. Исследование влияния крупных землетрясений на глобальное гравитационное поле;
5. Изучение процессов таяния ледников;

### *Наземные вариационные измерения*

1. Аномалии приливных вариаций силы тяжести являются функциями реологических характеристик тела Земли, что можно использовать для построения глобальных моделей Земли.
2. Уточнение приливных компонент;
2. Изучение глобальных перемещений масс в теле Земли, происходящие в течение длительного времени по данным глобального изменения силы тяжести.
3. Долговременные региональные изменения силы тяжести (активные неотектонические процессы).

### *Измерения микросейсмического шума*

1. Использование статических гравиметров как прецизионных узкодиапазонных сейсмометров для изучения микросейсмических шумов. Спектральные характеристики микросейсм зависят от свойств геологических сред как естественных линейных фильтрующих систем, что можно использовать для

изучения газовых полей и решения других задач.

2. Изучение локальных вариаций силы тяжести и микросейсм как предвестников землетрясений.

Начало экспериментальному изучению силы тяжести положено Г.Галилеем, проводившим опыты с падающими телами под действием силы тяжести. Галилей показал, что мерой силы тяжести является ускорение. В 1590 году он определил численное значение силы тяжести. В честь Галилея единица ускорения в системе СГС названа гал.

Начало гравиметрии связано с именем И.Ньютона, который в 1678 году в работе «Математические начала натуральной философии» сформулировал закон всемирного тяготения.

*За теоретическую фигуру Земли в гравиразведке принимают однородный сфероид, сплюснутый у полюсов.*

Для земного сфероида Международной ассоциацией геодезии в 1975 г. установлены следующие параметры:

масса Земли	$M = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
полярный радиус	$b = 6357 \text{ км}$
экваториальный радиус	$a = 6378 \text{ км}$
коэффициент сжатия	$\alpha = \frac{a-b}{a} \approx \frac{1}{298.25}$
средний радиус Земли (шар того же объема, что и сфероид)	$R_{cp} = 6371 \text{ км}$

## Сила тяжести

*Значения силы тяжести, вычисленные на поверхности однородного земного сфероида, называется нормальным значением силы тяжести.*

Это значение изменяется с широтой. Поле силы тяжести – естественное

физическое поле, действие которого проявляется в том, что тело любой массы  $m$  притягивается Землей с силой  $\vec{P} = m \vec{g}$ , где  $\vec{g}$  - вектор ускорения силы тяжести. Сила  $\vec{P}$  представляет собой равнодействующую двух сил: силы притяжения  $\vec{F}_\Pi$  и центробежной силы  $\vec{F}_Ц$ , то есть  $\vec{P} = \vec{F}_\Pi + \vec{F}_Ц$  (см. рис. 1).

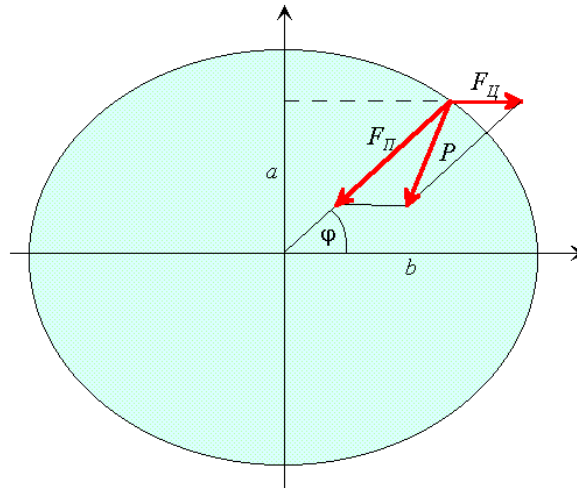


Рисунок 1. Силы притяжения и центробежная.

Сила  $\vec{F}_\Pi$  определяется законом Ньютона и направлена примерно к центру Земли. Центробежная сила  $\vec{F}_Ц$ , возникающая по причине вращения Земли, направлена перпендикулярно к оси вращения.

Максимальное значение  $\vec{F}_Ц$  не превышает 1/200 от величины силы притяжения. Коэффициент сжатия Земли также мал (1/298.25), поэтому отклонение от направления к центру вектора  $\vec{F}_\Pi$  не велико и им часто пренебрегают.

- ✓ *То, что вектор силы тяжести не направлен точно к центру Земли, определяется двумя причинами: во-первых, Земля не имеет точной формы шара, и во-вторых, Земля вращается.*

Ускорение силы тяжести является основной измеряемой величиной и его называют сокращенно: *сила тяжести*. Сила, действующая на единичную массу, называется напряженностью поля. Из сказанного следует, что ускорение



силы тяжести и напряженность гравитационного поля есть одна и та же физическая величина.

*Единицей измерения ускорения силы тяжести является  $\text{см}/\text{с}^2$ . Величина  $1 \text{ см}/\text{с}^2$  называется Галом – в честь Галилея, измерившего впервые ускорение силы тяжести.*

Эта величина не входит в мировые системы единиц, но широко используется в геофизике, точнее, на практике в качестве основной единицы используется тысячная доля Гала – миллигал (пишется: мГал).

Ускорение есть векторная величина и имеет три компоненты:  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Компоненты  $g_x$  и  $g_y$  называются горизонтальными, а  $g_z$  – вертикальной составляющими ускорения силы тяжести.

Сила притяжения  $\vec{F}_{II}$  вычисляется по закону Ньютона:

$$\vec{F}_{II} = G \frac{m_1 m_2}{\rho^3} \vec{\rho} \quad (1.1)$$

или в скалярной форме

$$F_{II} = G \frac{m_1 m_2}{\rho^2} \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho$  – расстояние между точечными массами,  $G$  – константа, которая называется *гравитационной постоянной*. Сила имеет размерность [масса][длина][время]<sup>-2</sup>. Для совпадения размерности слева и справа в формуле (1.2) необходимо, чтобы константа  $G$  имела размерность [масса]<sup>-2</sup>[длина]<sup>3</sup>[время]<sup>-2</sup>.

В системе СИ  $G = 66.7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ , в системе СГС  $G = 66.7 \cdot 10^{-9} \frac{\text{сМ}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2}$

По своему смыслу гравитационная постоянная – это сила, действующая между единичными массами на единичном (в соответствующей системе) расстоянии.

Сделаем несколько замечаний, связанных с формулами (1.1) и (1.2).

- ✓ *Во-первых, формулы описывают фундаментальный закон природы, но при этом имеют очень простой и эстетически совершенный вид.*
- ✓ *Во-вторых, формулы, описывая всемирный закон, не объясняют механизм передачи сил.*

- ✓ В-третьих, закон Ньютона действует для любых двух масс, вне зависимости от наличия других тел. Следовательно, для закона Ньютона действует принцип суперпозиции.
- ✓ В-четвертых, формулы (1.1) и (1.2) имеют тот же вид, что и формулы, описывающие закон Кулона для электрических зарядов. Но в отличие от электрических зарядов, массы всегда положительны. А значит, наблюдается всегда только притяжение.

Последнее утверждение нужно уточнить. В геофизике часто используют понятие избыточных плотностей, (избыточная плотность тела относительно плотности вмещающей среды) которые могут быть и отрицательными, а значит, может наблюдаться и относительное отталкивание, как, например, отталкивает сила Архимеда.

Векторное поле ускорения силы тяжести может быть выражено через скалярную функцию  $W(x, y, z)$  с помощью оператора градиента:

$$\vec{g} = \text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k} \quad (1.3)$$

*Функция  $W(x, y, z)$  называется гравитационным потенциалом.*

По физическому смыслу гравитационный потенциал есть мера энергии, которую нужно затратить, чтобы перенести в поле силы тяжести тело с единичной массой из некоторого положения в бесконечность.

В отношении формулы (1.3) сделаем два замечания.

- ✓ Во-первых, уравнение (1.3) определяет потенциал  $W(x, y, z)$  с точностью до постоянной.
- ✓ Во-вторых, уравнение (1.3) есть решение уравнения  $\text{rot } \vec{g} = 0$ , а значит, поле  $\vec{g}$  не вихревое.

*Векторные поля, которые можно выразить в виде (1.3) через скалярную функцию, называются потенциальными.*

Заметим, что магнитное поле не является потенциальным.

Выражение (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g_x, \frac{\partial W}{\partial y} = g_y, \frac{\partial W}{\partial z} = g_z \quad (1.4)$$

где  $g_x, g_y, g_z$  – проекции силы тяжести на координатные оси.

В общем случае можно ввести производную гравитационного потенциала по произвольному направлению:

$$\frac{\partial W}{\partial S} = g_s = g \cdot \cos(\hat{g}S) \quad (1.5)$$

Из этого выражения следует, что направление  $S$  может быть, в частности, таким, что  $\cos(\hat{g}S) = 0$ , а значит, направления  $S$  и  $g$  будут перпендикулярны.

В этом случае

$$\frac{\partial W}{\partial S} = 0 \quad \text{или} \quad W = const \quad (1.6)$$

*Более того, можно построить поверхность с постоянным значением гравитационного потенциала. Такие поверхности называются уровенными поверхностями.*

- ✓ *Сила тяжести на уровенной поверхности нормальна к ней, но при этом имеет различное значение в разных точках. Другое название такой поверхности – эквипотенциальные. Именно по такой поверхности устанавливается жидкость в сосуде.*

Другой особенный случай, когда угол  $\hat{g}S$  равен нулю, то есть когда направление  $S$  совпадает с направлением силы тяжести. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial n} = g \quad (1.7)$$

где  $n$  – нормаль к уровенной поверхности. Величина  $\partial S$  в этом случае представляет расстояние между двумя уровенными поверхностями. Из формулы (1.7) следует, что это расстояние обратно пропорционально действующей силе.

Приращение потенциала не зависит от пути перемещения, а зависит только от положения конечных точек. В частности, если конечные точки совпадают, то приращение потенциала равно нулю.

## Геоид

В геологии за теоретическую поверхность Земли принята более сложная фигура, чем сфероид, названная *геоидом*.

*Геоид можно определить как одну из уровенных поверхностей потенциала силы тяжести. Поверхность геоида совпадает с поверхностью невозмущенного океана, в любой точке которого вектор силы тяжести нормален к поверхности воды.*

Более сложная ситуация с поверхностью геоида в пределах суши. Мысленно ее можно представить так: если прорыть под сушей каналы, сообщающиеся с океанами, то уровень, который в каналах установится, и будет уровнем геоида.

*✓ Поверхность геоида незначительно отличается от поверхности сфероида на морях и океанах. Большие отклонения наблюдаются на суше. Но и они не превышают  $\pm 100$  м . Среднее отклонение составляет  $\pm 50$  м .*

## Формула Клеро. Нормальное значение силы тяжести

Рассмотрим поле силы тяжести на поверхности модели Земли, представляющей однородный сфероид.

Для вывода расчетных формул первоначально найдем значения силы тяжести для поверхности сферической модели Земли, а затем учтем сплюснутость у полюсов.

Начало координат поместим в центр шара, ось  $Z$  совместим с осью вращения. Угол, образованный радиусом, проходящим через выбранную точку  $P$  на поверхности шара и плоскостью экватора, угол  $\varphi$ , назовем *географической широтой* данной точки (см. рис. 2).

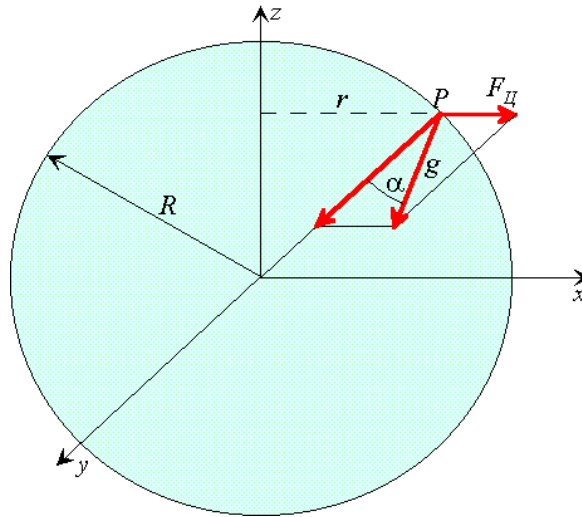


Рисунок 2. К расчету формулы Клеро.

Направление вектора силы тяжести  $\vec{g}$  составляет с вектором  $\vec{F}_{II}$  угол  $\alpha$ . Поскольку этот угол очень мал, в первом приближении им можно пренебречь. Тогда модуль силы тяжести в точке  $P$  будет равен:

$$y = |\vec{g}_\varphi| = F_{II} - F_{ц\varphi} \cos(\varphi) \quad (1.8)$$

При этом сама центробежная сила тоже меняется с широтой:

$$F_{ц\varphi} = \omega^2 r = \omega^2 R \cos(\varphi) = F_{ц\varepsilon} \cos(\varphi) \quad (1.9)$$

здесь  $F_{ц\varepsilon}$  – центробежная сила на экваторе. Подставив (9) в (8), получим:

$$y = F_{II} - F_{ц\varepsilon} \cos^2(\varphi) \quad (1.10)$$

На экваторе получим:  $y = F_{II} - F_{ц\varepsilon}$ , откуда  $F_{ц\varepsilon} = y - F_{II}$ ; подставив это выражение в (1.10), получим:

$$y = F_{II} - (F_{II} - y_\varepsilon) \cos^2(\varphi) = y_\varepsilon \left[ 1 + \frac{F_{II} - y_\varepsilon}{y_\varepsilon} \sin^2(\varphi) \right] \quad (1.11)$$

Обозначим:  $\beta = \frac{F_{II} - y_\varepsilon}{y_\varepsilon}$ . Тогда выражение (10) можно переписать в виде:

$$y = y_\varepsilon [1 + \beta \sin^2(\varphi)] \quad (1.12)$$

Эта формула названа именем Клеро. Коэффициент  $\beta$  характеризует избыток значения силы тяжести  $y$  у полюсов относительно экватора. Примерно

$$\beta = \frac{1}{189}$$

- ✓ *Формула Клеро дает грубое приближение, не учитывающее несферичность Земли. Ее нельзя использовать, так как погрешности в формуле превосходят величину аномалий, создаваемых геологическими структурами.*

Отметим, что формулу Клеро мы получили, не используя закон Ньютона, а сама формула Клеро дает значение силы тяжести относительно значения на экваторе, которое должно быть известно.

Чтобы перейти от шара к сфероиду, нужно добавить в формулу (1.12) третий член, и тогда формула примет вид:

$$y = \gamma_0 [1 + \beta_1 \sin^2(\varphi) + \beta_2 \sin^2(2\varphi)] \quad (1.13)$$

*Это выражение называется формулой нормального значения силы тяжести.*

Входящие в нее коэффициенты  $\gamma_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  определены экспериментально. В простейшем и грубом варианте эти коэффициенты можно определить по измерениям в трех точках на разных широтах. Тогда нужно решить систему трех линейных (относительно коэффициентов) уравнений:

$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma_0 [1 + \beta_1 \sin^2(\varphi_1) + \beta_2 \sin^2(2\varphi_1)] \\ g_2 &= \gamma_0 [1 + \beta_1 \sin^2(\varphi_2) + \beta_2 \sin^2(2\varphi_2)] \\ g_3 &= \gamma_0 [1 + \beta_1 \sin^2(\varphi_3) + \beta_2 \sin^2(2\varphi_3)] \end{aligned}$$

Для более точного определения коэффициентов решают систему для большего числа пунктов наблюдений методом наименьших квадратов.

Формулы (1.12) и (1.13) являются формулами разложения на сферические функции и в общем случае могут быть представлены в следующем виде:

$$y = \gamma_0 + \sum \gamma_k \sin^2(k\varphi)$$

- ✓ *Чтобы получить формулу не для шара и не для сфероида, а для наиболее подходящей фигуры, моделирующей Землю – для геоида, нужно провести разложение ряда до малых более высокого порядка.*

Самая первая формула для нормального поля была получена Гельмертом в 1884 году. Она учитывала малые только до второго порядка:

$$\gamma = 978.00(1 + 0.005310 \sin^2(\varphi)) \quad (1.14)$$

Впоследствии формула 1.13 многократно уточнялась. Приведем одну из них – формулу, принятую в 1930 году на международном геодезическом конгрессе в качестве международной (формула Кассиниса):

$$\gamma = 978.049(1 + 0.0052884 \sin^2(\varphi) - 0.0000059 \sin^2(2\varphi)) \quad (1.15)$$

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какое направление указывает вектор градиента силы тяжести?
2. Постоянно ли значение силы тяжести на эквипотенциальных поверхностях?
3. Если все тела, обладающие массой, притягиваются, то почему от Земли отталкиваются воздушные шары и дирижабли?
4. В чем принципиальное различие формул Гельмерта и Кассиниса?

## Лекция 2.

### Редукции и аномалии силы тяжести

Чтобы сравнить аномалию силы тяжести, нужно сравнить наблюдаемое поле с нормальным полем. Однако силу тяжести обычно наблюдают на физической поверхности Земли, а нормальное поле определено для поверхности сфероида, которая близка к уровню моря.

Поэтому для решения этой проблемы прибегают к процедуре, которая называется редуцированием силы тяжести. Эта процедура включает в себя введение поправок за высоту, за притяжение промежуточным слоем и некоторых других поправок, в случае, если необходимо получить высокую точность измерений (поправки за рельеф, за лунные и солнечные приливы).

*Поправки за высоту  $\delta g_h$  вводят для того, чтобы учесть разницу высот между точкой наблюдений и уровнем моря.*

Обычно говорят, что нужно *привести* значения силы тяжести к их значениям на уровне моря, то есть нужно получить такие значения поля, которые бы мы имели на уровне моря.

*✓ При этом, конечно, точки наблюдений никуда не перемещаются – эта процедура лишь воображаемая.*

Данную поправку еще называют *поправкой за свободный воздух*, или *поправкой Фая*. Название «за свободный воздух» поправка получила за то, что в ней не учитывается влияние масс, расположенных между точкой наблюдений и уровнем моря, то есть точки наблюдений как бы «висят в воздухе».

Чтобы получить поправку Фая, необходимо проделать следующие расчеты. В грубом приближении (сферичность Земли) нормальное значения силы тяжести равно:

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (2.1)$$

где  $M$  – масса Земли,  $R$  – средний радиус Земли. Пусть наша точка наблюдений  $P$  имеет превышение над уровнем моря в точке  $P'$  равно  $h$  (см. рис. 3).



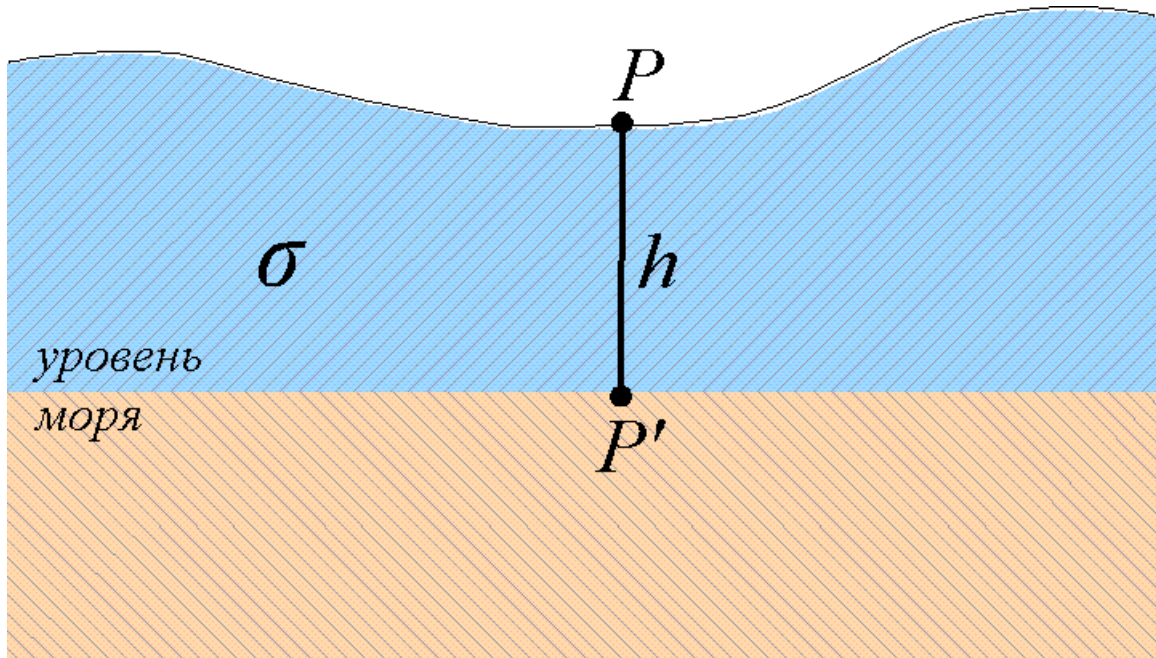


Рисунок 3. К расчету поправки за свободный воздух.

Тогда значение поля силы тяжести в точке  $P$  будет равным

$$y_2 = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad (2.2)$$

Тогда поправка за высоту будет равна разности значений силы тяжести между точками  $P$  и  $P'$ :

$$\delta g_h = G M \left[ \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2} \right] = G M \left[ \frac{R^2 + h^2 - 2Rh - R^2}{R^2(R+h)^2} \right] \approx 2 G M \frac{h}{R^3} = 2 \frac{y}{R} h \quad (2.3)$$

Здесь учтено, что  $h \ll R$ . Если подставить в (2.3) численные значения гравитационной постоянной, массы и радиуса Земли, то получим:

$$\delta g_h = 0.3086 h \quad (2.4)$$

где  $h$  измеряется в метрах, а  $\delta g$  – в миллигалах. Величина 0.3086 должна иметь размерность  $[\text{мГал}][\text{м}]^{-1}$ , то есть по смыслу должна являться вертикальным градиентом. Из (2.4) следует, что сила тяжести уменьшается примерно на 0.3 мГал на каждый метр высоты.

*Для учета масс, расположенных в слое между физической поверхностью и уровнем моря, используют специальную поправку, которая называется поправкой за промежуточный слой ( $\delta g_\sigma$ ).*

Вообще говоря, чтобы учесть влияние масс в этом слое, нужно было бы учитывать и то, какую форму имеет физическая поверхность, (рельеф), и то, как распределена плотность в этом слое. В такой постановке это не разрешимая задача, поскольку распределение плотности в слое заранее неизвестно. На практике, однако, пользуются допущениями, которые значительно упрощают проблему.

- ✓ *Первое допущение заключается в том, что плотность в слое можно считать постоянной. Это неизбежное допущение по понятным причинам.*
- ✓ *Второе допущение заключается в том, что в расчетах поправки можно использовать модель горизонтального слоя, проходящего через данную точку наблюдений (см. рис. 4). Такое предположение вполне разумно, если физическая поверхность достаточно ровная, но становится недопустимым в противном случае (горные районы). Тогда вводят дополнительную поправку за рельеф.*

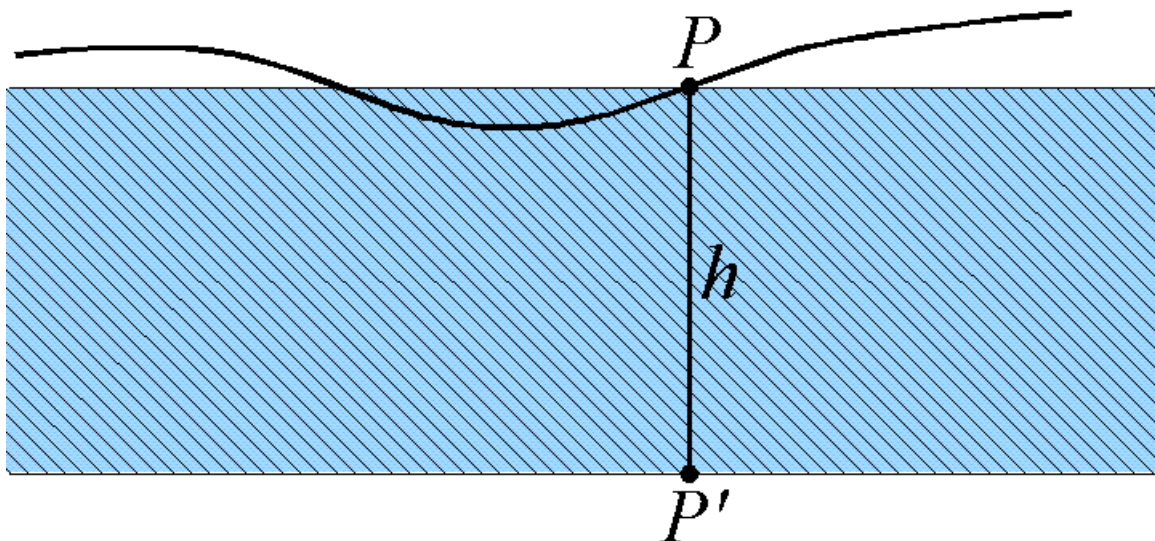


Рисунок 4: К расчету поправки за промежуточный слой

Найдем выражение для притяжения горизонтальным слоем. Поместим начало координат в точку наблюдений. Чтобы получить поправку, нужно найти гравитационный эффект от слоя с заданной плотностью. Для этого можно

воспользоваться формулой для поля силы тяжести точечной массы и проинтегрировать по всему слою.

Поле силы тяжести точечной массы равно:

$$V_z = \partial \frac{V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{M G}{\rho} \right] = M G \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] = M G \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.5)$$

интегрируя по всему объему слоя, имеем:

$$\delta g_\sigma = G \sigma \int_{\Omega} \frac{z d\Omega}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \iiint_{-\infty-\infty 0}^{\infty \infty h} \frac{z dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 2 \pi G \sigma h \approx 0.0419 \sigma h \quad (2.6)$$

При этом в формулу редуцирования поправка за промежуточный слой входит со знаком минус, поскольку промежуточный слой увеличивает поле силы тяжести.

*Суммарная поправка за высоту и промежуточный слой называется поправкой Буге:*

$$\delta g_B = \delta g_h + \delta g_\sigma = (0.3086 - 0.0419 \sigma) h \quad (2.7)$$

- ✓ *Мы уже говорили, что в районах с сильно пересеченным рельефом поправка за промежуточный слой становится слишком грубым приближением и возникает необходимость учитывать влияние рельефа с помощью введения дополнительной поправки.*

*Такая поправка называется топографической или за окружающий рельеф.*

Очевидно, что для ее вычисления нужно иметь данные об окружающем рельефе. Как правило, для вычисления этой поправки используют специальные компьютерные программы; раньше применялись палетки.

- ✓ *При высокоточной съемке возникает необходимость учета притяжения Луны и Солнца. Это дополнительное притяжение возникает при приливах в твердой оболочке Земли, и достигает максимальных значений в четверть метра.*

Влияние солнечно-лунного притяжения учитывают с помощью специальных графиков, полученных по астрономическим данным. Максимальное значение

поправки для Луны – 0.25 мГал, для Солнца – 0.1 мГал.

Аномалией силы тяжести называется разность между наблюдаемым (измеренным,  $g_n$ ) и нормальным ( $\gamma_0$ ) значениями силы тяжести:

$$\Delta g_a = g_n - \gamma_0$$

Аномалия силы тяжести, при вычислении которой использовалась поправка Буге, называется аномалией в редукции Буге. Значения аномалий Буге вычисляют по формуле

$$\Delta g_{aB} = g_n - \gamma_0 + (0.3086 - 0.0419 \sigma)h \quad (2.8)$$

- ✓ Большую роль при вычислении аномалий Буге играет правильный выбор плотности промежуточного слоя. При слишком завышенной, либо слишком заниженной плотности получается отрицательная, либо положительная корреляция поля и высотных отметок.

### Вопросы для самоконтроля

1. Изменилась ли бы поправка Фая, если бы средний радиус Земли был бы другим?
2. Почему поправка Фая и поправка за промежуточный слой входят в формулу поправки Буге с разным знаком?
3. Как объяснить тот факт, что поправка за промежуточный слой зависит от мощности слоя, но не зависит от высоты точки наблюдения? Согласуется ли это с законом всемирного тяготения?

### Лекция 3.

#### Вторые производные потенциала силы тяжести

Первые производные потенциала силы тяжести  $W$  представляют собой проекции ускорения силы тяжести на соответствующие координатные оси. В гравиразведке широко используются и вторые производные. Всего их шесть:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$$

В гравиметрии их принято разделять на градиенты и кривизны.

*Под градиентами силы тяжести понимаются вторые производные  $W$ , которые характеризуют скорость изменения вертикальной составляющей силы тяжести по соответствующим осям:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = W_{xz} \\ \frac{\partial g_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = W_{yz} \\ \frac{\partial g_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = W_{zz} \end{aligned} \quad (3.1)$$

*Градиенты  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$  называются горизонтальными градиентами,  $W_{zz}$  – вертикальным градиентом.*

Для горизонтальных градиентов можно вычислить полный горизонтальный градиент:

$$|\Gamma| = \sqrt{(W_{xz}^2 + W_{yz}^2)}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{W_{yz}}{W_{xz}}\right) \quad (3.2)$$

*Единицей измерения градиентов является эввеш (E) в, названная в честь венгерского геофизика. Один эввеш соответствует изменению силы тяжести в 0.1 мГал на 1 км.  $1 E = 10^{-9} c^{-2}$ .*

Градиенты можно определить численно, если известны значения силы тяжести, либо измерить с помощью приборов – вариометров и градиентометров.

*✓ Вторые производные  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{zz}$  позволяют вычислить*

*кривизну уровенной поверхности.*

*Кривизна уровенной поверхности определяется как величина, обратная радиусу окружности, которую можно построить по бесконечно малому элементу уровенной поверхности в данной точке.*

Это определение справедливо для двумерного случая. Очевидно, что в пространстве через данную точку можно провести бесконечное число сечений, в общем случае, каждое со своей кривизной. Тем не менее, максимальная и минимальная кривизна всегда принадлежит перпендикулярным сечениям.

Связь между вторыми производными и кривизной уровенной поверхности определяется формулой:

$$\left(\frac{1}{R_1}\right)_{max} - \left(\frac{1}{R_2}\right)_{min} = \frac{W_{yy} - W_{xx}}{g \cos(2\varphi)} \quad (3.3)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести в данной точке,  $\varphi$  – азимут сечения максимальной кривизны:

$$\tan(2\varphi) = \frac{2W_{xy}}{W_{yy} - W_{xx}} \quad (3.4)$$

Выражения (3.3) и (3.4) показывают, что вторые производные потенциала силы тяжести связаны с кривизной уровенной поверхности, поэтому их и называют кривизнами. Их измерение позволяет определить истинную фигуру Земли.

*Нормальными значениями градиентов силы тяжести, по аналогии с нормальными значениями силы тяжести, называют их значения на поверхности однородного сфероида.*

Изменение нормального значения силы тяжести по долготе равно нулю, то есть

$$W_{yz} = 0 \quad (3.5)$$

Для вычисления горизонтального градиента  $W_{xz}$  воспользуемся формулой Клеро

$$y = y_0 [1 + \beta \sin^2(\varphi)]$$

Для этого приращение  $dx$  выразим через радиус и приращение широты:

$$W_{xz} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \quad (3.6)$$

Подставляя значения  $\gamma$  из формулы Клеро, получим:

$$W_{xz} = 2 \frac{\gamma_0}{R} \beta \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \frac{\gamma_0}{R} \beta \sin(2\varphi) = 8.16 \sin(2\varphi) E \quad (3.7)$$

Нормальное значение вертикального градиента мы уже получили, когда вычисляли поправку за высоту:

$$W_{zz} = 3086 E \quad (3.8)$$

Аномалией градиентов силы тяжести естественно назвать разность между наблюдаемыми и нормальными градиентами. Очевидно, что аномалии градиентов не связаны с центробежными силами и зависят от плотностных неоднородностей в теле Земли.

### **Изостазия и изостатические редукции**

По своему замыслу аномалии в редукции Буге таковы, что в идеальном случае должны отражать только плотностные неоднородности в Земле. Однако анализ аномалий Буге, проведенный для больших масштабов свидетельствует о том, что существует ощутимая корреляция между средними аномалиями Буге и средними значениями высотных отметок. Более того, такой зависимости не наблюдается для аномалий в свободном воздухе, то есть для аномалий Фая.

Складывается впечатление, что массы, составляющие рельеф, не оказывают никакого притяжения. В действительности, это связано с тем, что избытку масс над земной поверхностью (горными массивами) соответствует недостаток масс под ними. И наоборот, для низменных областей существует избыток масс под ними.

Наблюдение таких зависимостей привело к возникновению теории изостазии. Буквальный перевод этого слова – «равновесие».

- ✓ *Суть теории изостазии состоит в предположении, что вертикальные блоки, оказывая давление на массы, расположенные под ними, образуют поверхность равного давления, глубина залегания которой зависит от*

*формы земного рельефа.*

Вообще говоря, существует две классических гипотезы относительно действия механизма изостатической компенсации. Это модели изостазии по Эри и по Пратту, представляющие собой упрощенные и крайние случаи реального механизма компенсации.

*Согласно модели по Эри (см. 5), плотность блоков постоянна, но изменяется толщины земной коры, образуя «корни гор» и океанические «антикорни».*

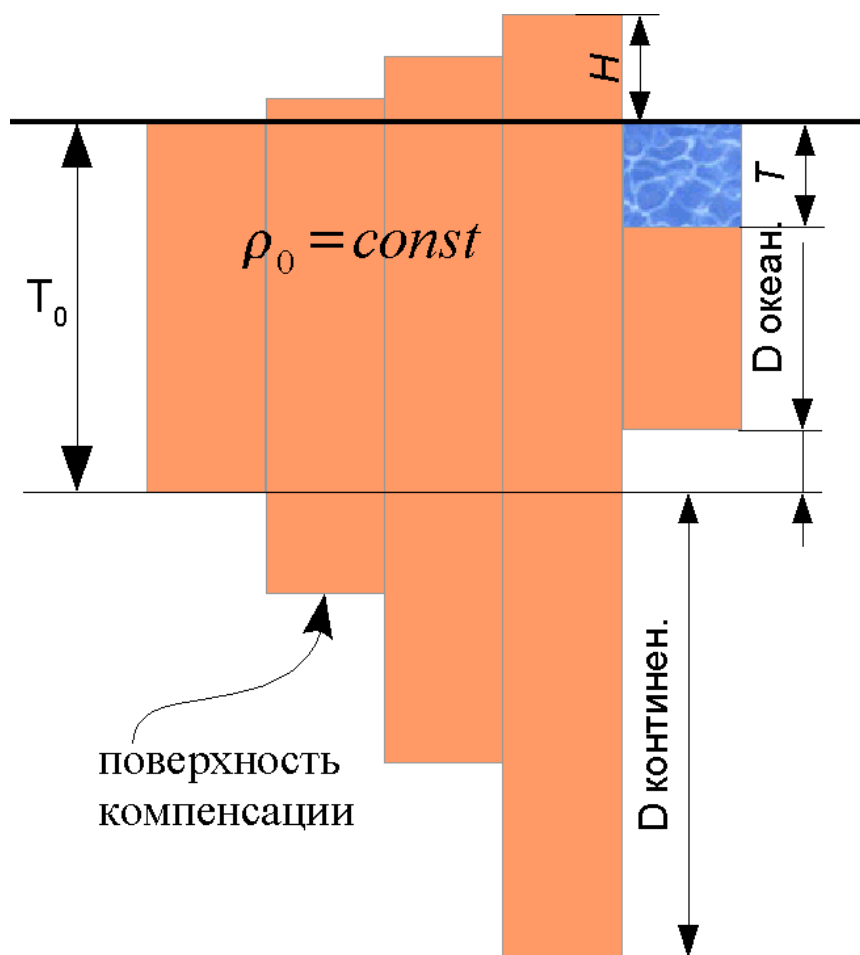


Рисунок 5. Модель изостатической компенсации по Эри

*Согласно модели по Пратту (см. 6), глубина компенсации неизменна. Равновесие же достигается за счет латеральной изменчивости плотности блоков.*



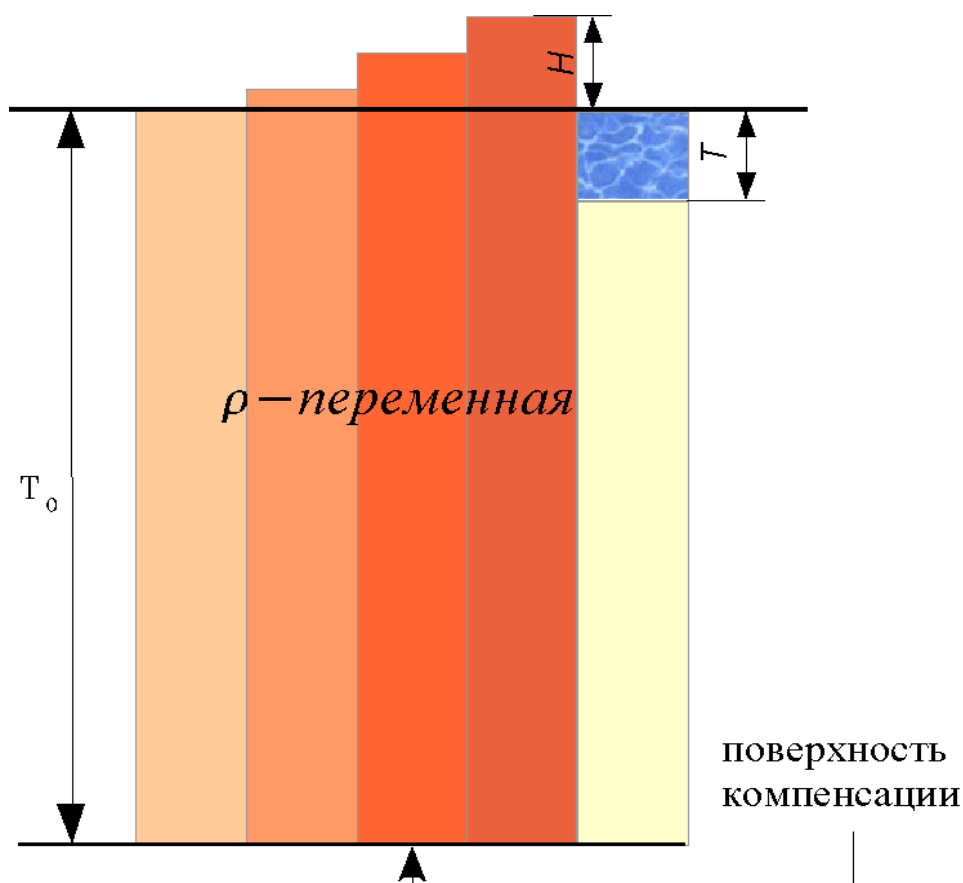


Рисунок 6. Модель изостатической компенсации по Пратту

- ✓ Сейсмические наблюдения свидетельствуют о том, что в природе действуют оба механизма.

Изостатическую аномалию вычисляют по формуле:

$$\Delta g_H = g_H - \gamma - 0.3086 h - \delta g_t + \delta g_H \quad (3.9)$$

где  $\delta g_t$  – топографическая поправка за влияние масс, возвышающихся над уровнем моря,  $\delta g_H$  – изостатическая поправка за влияние масс в вертикальных блоках земной коры согласно той или иной гипотезе изостазии.

### Плотность горных пород

Гравитационные аномалии возникают только в том случае, если горные породы, слагающие земную кору, имеют неоднородности.

*В гравиметрических задачах часто используется понятие избыточной плотности: это разность между плотностью вмещающих пород и*

*плотностью структур, создающих аномалию.*

✓ *Избыточная плотность может быть как положительной так и отрицательной.*

В общем случае горные породы состоят из вещества, находящегося в трех фазах: твердой, жидкой и газообразной. Плотность определяется соотношением этих трех фаз, а также состоянием физических характеристик естественного залегания: давление, температура, влажность и т.п.

Плотность горной породы зависит от вещественного состава ее скелета, пористости, влажности и других факторов.

Например, магматические и метаморфические породы имеют малую пористость (1-2%), и их плотность в основном определяется химико-минеральным составом породообразующих минералов. Осадочные породы, как правило, характеризуются большим диапазоном изменения пористости, поэтому их плотность также меняется в широких пределах.

Средняя плотность земной коры составляет  $2.67 \text{ г/см}^3$ . В целом Земли –  $5.52 \text{ г/см}^3$ . Как правило, плотность одних и тех же осадочных пород возрастает с увеличением глубины их залегания.

Достоверные значения плотности можно получить только при ее измерении в условиях естественного залегания пород. Чаще всего плотность пород определяют по извлеченным на поверхность образцам. При этом нужно вводить поправки, приводящие значения плотности к тем физическим условиям, в которых залегают горные породы.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. При расчетах в формулах 2.1-2.4 было получено значение нормального вертикального без учета центробежной силы. Как изменится результат, если ее учитывать?
2. В чем принципиальная разница между моделями изостатической компенсации по Эри и Пратту?

## Лекция 4.

### Классификация методов измерения силы тяжести

Для измерения силы тяжести в принципе могут быть использованы самые разнообразные физические явления, связанные с действием гравитации. Например, падение тела под действием силы тяжести в воздухе или жидкости, качание маятника, поднятие жидкости в капиллярном сосуде, колебания струны или пружины, красное смещение э/м волн в гравитационном поле и т.д. Однако лишь некоторые из множества явлений позволяют с достаточной точностью и за удовлетворительное время определять значение силы тяжести.

Все существующие методы измерения силы тяжести могут быть поделены на *динамические* и *статические*.

*Динамическими* называются такие методы, в которых наблюдается движение тела под действием силы тяжести, при этом измеряемой величиной является время.

*Статическими* называются такие методы, в которых наблюдается изменение положения равновесия тела под действием силы тяжести и некоторой другой силы, которая уравнивает силу тяжести. При этом измеряемой величиной является линейное либо угловое смещение тела. В качестве уравнивающей силы может использоваться упругая сила твердых тел (пружин, нитей, мембран и т.п.).

Среди динамических методов наиболее важными являются:

1. измерение периода колебаний маятника
2. измерение периода колебаний маятника под действием силы тяжести и силы, ей противодействующей
3. измерение времени свободного падения тел
4. измерение частоты колебаний струны, которая натянута подвешенной на ней массой.

Измерения силы тяжести бывают абсолютными и относительными.

*При абсолютных измерениях определяют полную величину силы тяжести. При относительных – определяют не полное значение, а приращение в данном пункте относительно некоторого другого, исходного, поле в котором обычно известно.*

*✓ Динамические методы могут быть как абсолютными, так и относительными. Статические – только относительными.*

*Приборы, предназначенные для относительных определений силы тяжести, называют гравиметрами.*

В настоящее время статические гравиметры являются основными приборами для относительных определений силы тяжести.

## **Динамические методы измерения силы тяжести**

### ***Основы маятникового метода определения силы тяжести.***

#### ***Математический маятник***

Среди динамических методов измерения силы тяжести долгое время главенствовал маятниковый метод, доведенный до высокой степени совершенства.

*Маятником называется любое твердое тело, способное совершать колебания около горизонтальной оси.*

В теории колебаний важную роль играет модель математического маятника. Это идеальная модель, то есть модель, которую можно реализовать лишь в некотором приближении.

*Математический маятник представляет собой материальную точку, с массой  $m$ , подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити длиной  $l$  (см. рис. 7).*

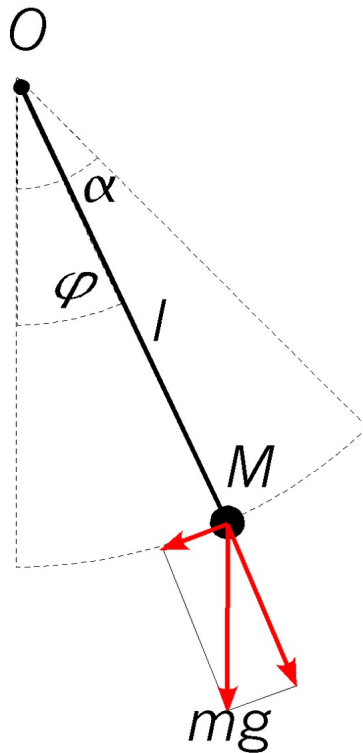


Рисунок 7. Модель математического маятника

Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi) \quad (4.1)$$

если задать начальные условия  $\varphi_{t=0} = \alpha$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}_{t=0} = 0$ , то его решением является гармоническая функция с периодом колебаний

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\alpha)}} \quad (4.2)$$

Интеграл в этом выражении относится к классу эллиптических первого рода и не приводится к элементарным функциям. Обычно чтобы получить решение в явном виде, подынтегральную функцию разлагают в ряд (по  $\varphi$ ), а затем почленно интегрируют. В нашем случае такая процедура приводит к выражению

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) \quad (4.3)$$

Решение получается сложным, потому, что уравнение (4.1) является нелинейным. Однако при малых начальных отклонениях угла  $\alpha$  можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда уравнение (3.1) примет линейный вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (4.4)$$

Для него период колебаний равен

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (4.5)$$

- ✓ *Как следует из этой формулы, при малых амплитудах период колебаний не зависит от амплитуды. Это свойство маятника называется изохронностью.*

Поскольку математический маятник является идеальной моделью, ее, как правило, невозможно реализовать с необходимой степенью точности. Поэтому на практике при определениях силы тяжести используют физический маятник.

### **Физический маятник**

*Под физическим маятником понимают любое тяжелое твердое тело, свободно вращающееся вокруг горизонтальной оси.*

Обозначим ось вращения как ось  $x$  (см. рис. 8). Уравнение движения имеет вид:

$$I_x \frac{d\omega}{dt} = \sum M_x \quad (4.6)$$

здесь  $I_x$  – момент инерции,  $M_x$  – сумма моментов сил,  $\omega$  – угловая скорость вращения.

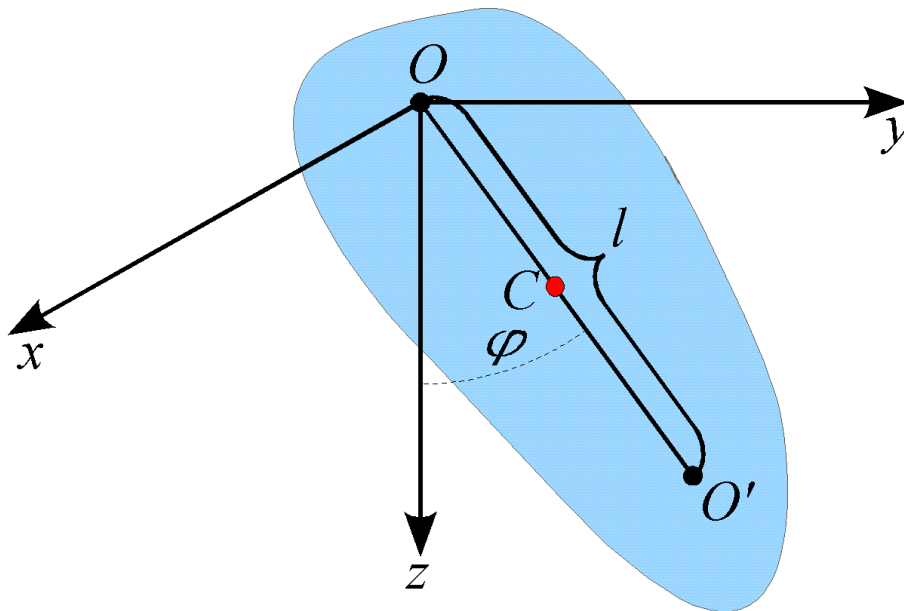


Рисунок 8. Модель физического маятника

Пусть центр тяжести маятника находится в точке  $C$  на расстоянии  $a$  от оси вращения  $O$ . Тогда сумма моментов действующих сил равна:

$$\sum M_x = -M g a \sin \varphi \quad (4.7)$$

где  $M$  – масса тела. Тогда уравнение движения примет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M g a \sin(\varphi) \quad (4.8)$$

Если ввести новую переменную  $l = \frac{I_x}{a M}$ , то мы получим уравнение, аналогичное уравнению движения математического маятника (4.1):

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi) \quad (4.9)$$

✓ *Иными словами, физический маятник движется по тем же законам, что и математический. Только роль длины маятника играет величина*

$$\frac{I_x}{a M} .$$

Если эту величину отложить на рисунке, вдоль линии, соединяющей точку  $O$  и центр тяжести  $C$ , получим точку  $O'$ , которая называется центром качания, а длина  $l$  отрезка  $OO'$  называется приведенной длиной физического

маятника. Особенность положения центра качания в том, что физический маятник, подвешенный к нему будет качаться с тем же периодом.

- ✓ *Маятниковые приборы позволяют выполнять как абсолютные, так и относительные определения силы тяжести. При абсолютных определениях измеряют период колебания и приведенную длину маятника. При относительных определениях силы тяжести достаточно измерить только период колебания маятника в двух пунктах.*

Действительно, пусть

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g_1}} ; \quad T_2 = \pi \sqrt{\frac{L}{g_2}}$$

тогда выражая значение силы тяжести на втором пункте, получим:

$$g_2 = g_1 \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad (4.10)$$

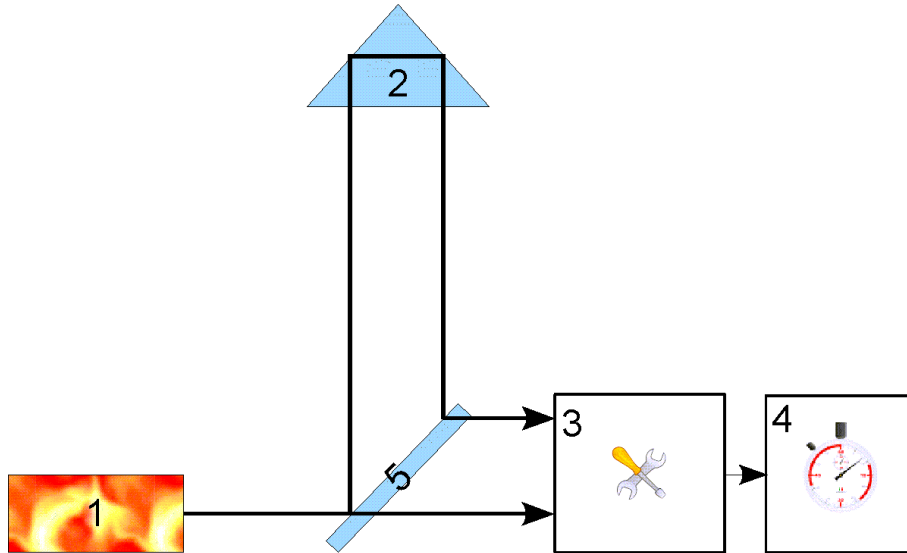
- ✓ *Маятниковые позволяют определить период колебаний с точностью  $2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ , что обеспечивает точность измерения силы тяжести до 0.1 мГал. При этом время наблюдения на одном пункте составляет около 15 минут.*

### **Баллистический метод**

В настоящее время измерения малых интервалов и времени падения тел достиг очень высокой точности, поэтому появилась возможность высокоточных абсолютных измерений силы тяжести способом падающего груза, или баллистическим способом.

В вертикальной вакуумной камере высотой примерно 50 см в качестве падающего груза используется стеклянная призма (см. 9).





1 - лазер; 2 - падающая призма; 3 - фотоблок; 4 - атомные часы; 5 - делитель луча.  
 Рисунок 9. Блок-схема баллистического гравиметра

Путь падения призмы измеряют с помощью лазерного интерферометра, а время падения – с помощью атомных часов. Пучок когерентного света от лазера полупрозрачным стеклом разделяется на два пучка. Пучки света проходят разные пути, а затем сводятся вместе. В результате будет наблюдаться интерференционная картина в виде чередования темных и светлых полос (интерференционных полос), ширина и число которых зависят от спектрального состава источника света и разности оптических путей световых пучков.

Число полос  $N$  связано с разностью хода лучей  $\Delta$  и длиной волны света  $\lambda$  соотношением

$$\Delta = N \lambda$$

время и путь свободно падающего тела связаны соотношением

$$t = \sqrt{2 \frac{S}{g}} \quad (4.11)$$

Однако на практике пользуются более сложной формулой

$$S = v_0 + \frac{gt^2}{2} \quad (4.12)$$

Это связано с тем, что в начале пути призма может получить небольшое дополнительное ускорение. Чтобы избавиться в выражении (4.12) от априорно неизвестной начальной скорости  $v_0$ , измерения проводят дважды. Тогда из системы двух уравнений получим:

$$g = \frac{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \quad (4.13)$$

- ✓ *Для повышения точности выполняются многократные измерения, которые потом статически обрабатываются. Точность абсолютных измерений баллистическим методом на сегодняшний день чрезвычайно высока – порядка одного микрогала (0.001 мГал).*
- ✓ *В последнее время появились мобильные абсолютные приборы (A10 производства компании Micro-G LaCoste и другие) сравнительно небольших размеров, рассчитанные на транспортировку на легковых автомобилях.*

### **Вопросы для самоконтроля**

1. В чем достоинства и недостатки маятникового метода измерения силы тяжести?
2. Почему в баллистическом гравиметре используется лазерный пучок когерентного света? Почему не используют обычный, некогерентный свет?
3. Для чего из камеры, в которой падает призма в баллистическом гравиметре, откачивают воздух?

## *Лекция 5.*

### **Измерение силы тяжести гравиметрами**

В гравиметрах уравнивание измеряемой силы тяжести производится некоторой другой внешней силой: упругой силы пружины, упругими силами газа или жидкости, электромагнитными силами и т.п. По конструкции гравиметры чрезвычайно разнообразны и различаются по типу уравнивающей силы (пружинные гравиметры, газовые и т.п.), способу перемещения массы (вращательное, поступательное), материалу, из которого изготовлена упругая система (кварц, металл и т.д.) и некоторым другим особенностям.

- ✓ В гравиразведке в основном применяют гравиметры с пружинными чувствительными системами.*
- ✓ По характеру действующих упругих сил гравиметры с такими системами подразделяют на приборы с поступательным движением грузика, прикрепленного к пружине (гравиметры первого рода) и приборы с вращательным движением рычага маятника (гравиметры второго рода).*
- ✓ В гравиметрах второго рода использован принцип вертикального сейсмоприемника Голицына.*

Конструкция вертикального сейсмоприемника Голицына состоит в следующем (см. рис. 10).

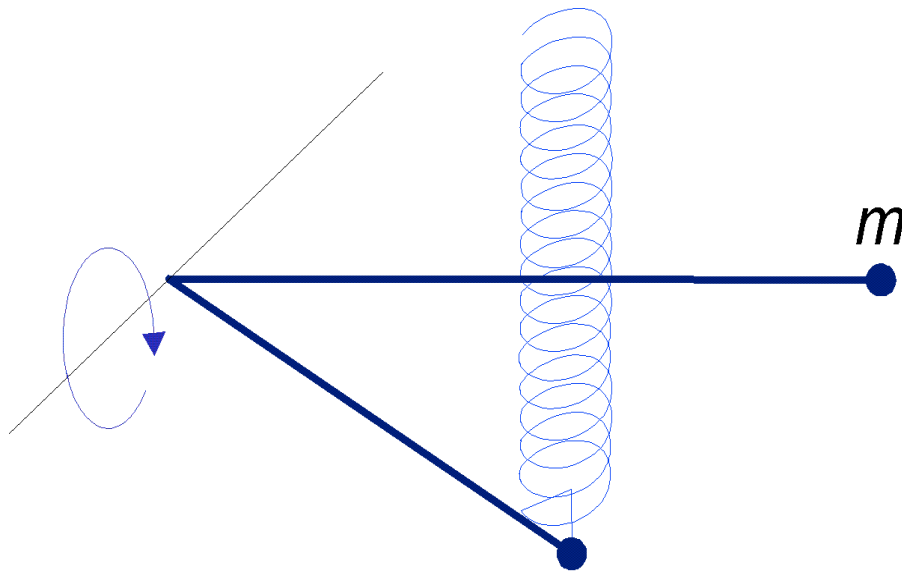


Рисунок 10. Конструкция вертикального сейсмоприемника Голицына

На тонкой горизонтальной нити укреплен горизонтально расположенный рычаг  $l$  с грузом (маятник). Он удерживается силой натяжения главной пружины, прикрепленной к маятнику и силой закручивания оси подвеса маятника. При изменении силы тяжести маятник отклоняется от горизонтального положения. При измерениях силы тяжести маятник возвращают в горизонтальное положение дополнительным моментом силы, который и является мерой приращения силы тяжести.

✓ Наиболее широкое применение получили гравиметры второго рода, упругая система которых изготовлена из кварца (кварцевые гравиметры).

Рассмотрим принцип устройства кварцевого астазированного гравиметра. Принципиальная схема чувствительной системы гравиметра изображена на рис. 11. На тонкой нити 1, являющейся осью вращения, укреплен рычаг (маятник) 2. Маятник удерживается в исходном положении силой натяжения главной (астазирующей) пружины 3, нижний конец которой через рычаг прикреплен к маятнику, и силой закручивания нити подвеса маятника. Вся эта чувствительная система гравиметра изготовлена из кварца.

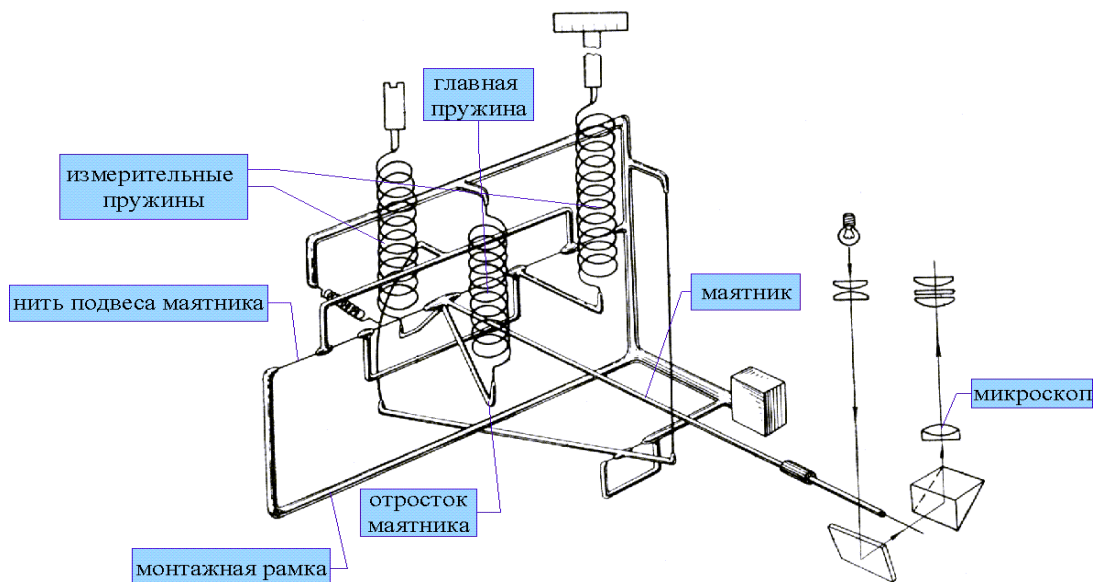


Рисунок 11 Устройство кварцевого астазированного гравиметра

При изменении силы тяжести маятник прибора отклоняется от положения равновесия, растягивая главную пружину и закручивая нить подвеса до тех пор, пока момент силы тяжести не будет уравновешен моментом главной пружины и моментом закручивания нити подвеса.

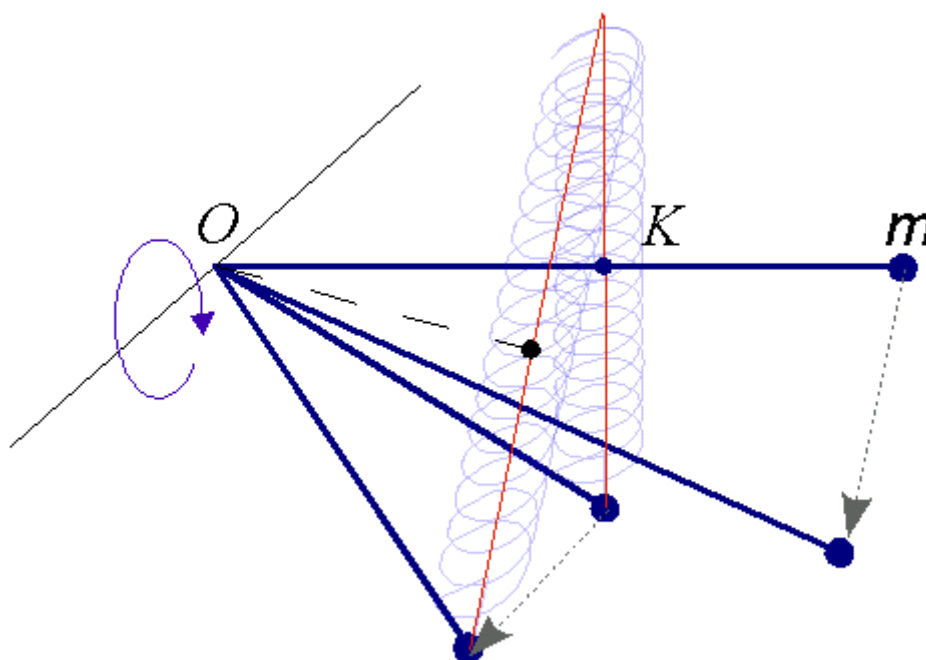
При изменении силы тяжести маятник возвращают в исходное положение, вводя в систему дополнительный момент, компенсирующий изменение силы тяжести в данном пункте относительно исходного пункта. Компенсирующий момент создается в результате дополнительного закручивания нити подвеса маятника с помощью измерительных пружин 5. Для фиксации исходного положения маятника на нем есть индекс. Регистрация производится оптическим способом, при котором за отклонением маятника наблюдают в микроскоп с большим увеличением.

Закручивая нить подвеса, совмещают индекс маятника с нулем шкалы микроскопа и берут по микрометру измерительной пружины отсчет в делениях шкалы микрометра.

- ✓ *Кварцевый гравиметр – астазированный, то есть его чувствительная система находится в положении неустойчивого равновесия. Небольшие изменения силы тяжести приводят к тому, что равновесие нарушается*

*в результате чего маятник прибора отклоняется на достаточно большой угол.*

Принцип астазирования изображен на рис.12.



*Рисунок 12. Принцип астазирования чувствительной системы гравиметра.*

При отклонении маятника под действием силы тяжести от исходного (нулевого) положения плечо  $OK$  главной (астазирующей) пружины уменьшается, следовательно, уменьшается момент главной пружины, удерживающей маятник. В результате маятник после выведения его из условия равновесия отклонится, на больший угол, чем это вызвано действием силы тяжести. Таким образом, у астазированного гравиметра резко повышена чувствительность системы к незначительным изменениям силы тяжести.

*✓ Приращения силы тяжести вначале измеряют в делениях шкалы микрометра прибора. Затем отсчеты переводят в приращения силы тяжести в миллигалах. Для этого используют переводной коэффициент, называемый ценой деления гравиметра.*

Приращение силы тяжести в двух пунктах наблюдения вычисляют по формуле

$$\Delta g = c(n_2 - n_1) \quad (5.1)$$

где  $\Delta g$  — приращение силы тяжести между двумя пунктами;  $n_1$  и  $n_2$  — отсчеты на этих пунктах, дел. шкалы;  $c$  — цена деления гравиметра, мГал.

*Операция определения цены деления гравиметра называется эталонированием гравиметра.*

- ✓ *Цена деления гравиметра (цена деления шкалы счетчика измерительного устройства прибора) может быть найдена различными способами. Наибольшее применение получили определения по наблюдениям с гравиметром на двух (или большем числе) пунктах, в которых известны значения силы тяжести, и способом наклона гравиметра.*

Сущность определения цены деления первым способом заключается в следующем. Берут отсчеты  $n_1$  и  $n_2$  по счетчику измерительного устройства гравиметра в двух пунктах, для которых известно изменение (приращение) силы тяжести  $\Delta g = g_2 - g_1$ . Цена деления шкалы (в мгал) гравиметра шкалы (мгал/дел), как следует из , равна:

$$c = \frac{\Delta g}{n_2 - n_1} \quad (5.2)$$

Цену деления способом наклона гравиметра определяют по результатам измерений на одном пункте при разных наклонах измерительной системы гравиметра. Если прибор находится в горизонтальном положении ( $\alpha = 0$ ), то маятник отклоняет сила  $mg$ , и отсчет по счетчику будет  $n_0$ . При наклоне прибора на угол  $\alpha$  маятник отклоняет сила  $mg \cos \alpha$ , и отсчет будет  $n_\alpha$ . Для малых углов наклона

$$\Delta g = g - g \cos(\alpha) = c(n_0 - n_\alpha) \approx g \frac{\alpha^2}{2}; c = \frac{g \alpha^2}{2(n_0 - n_\alpha)} \quad (5.3)$$

При определениях цены деления гравиметра способом наклона используют специальную эталонировочную наклоняющую плиту («экзаменатор») или наклоняют прибор с помощью установочных подъемных винтов.

Если на одном и том же пункте наблюдений провести измерения силы тяжести в течение продолжительного времени (часа более), то отсчеты, взятые

по микрометру гравиметра, будут разные. Разброс значений отсчетов, пересчитанный в миллигалы, может достигать несколько десятков миллигал, то есть значительно превосходить интересующие аномалии силы тяжести.

*Изменение во времени показаний гравиметра в одном и том же пункте наблюдений называется смещением нуля-пункта гравиметра.*

- ✓ *Смещение нуля-пункта гравиметра вызвано неидеальной упругостью измерительной системы: под нагрузкой упругие свойства материала, из которого изготовлен чувствительный элемент гравиметра, изменяется во времени.*

График изменения отсчетов по гравиметру во времени, называемый графиком смещения нуля-пункта прибора, в общем случае представляет кривую линию, характер которой зависит от конструкции прибора и его индивидуальных особенностей. В процессе полевых работ смещение нуля-пункта гравиметра тщательно изучают для последующего введения поправок в результаты полевых наблюдений. Графики смещения нуля-пункта обычно строят по результатам повторных наблюдений в одних и тех же пунктах в различные моменты времени в течение рабочего дня.



## Измерение вторых производных потенциала силы тяжести

Для измерения вторых производных потенциала силы тяжести применяются гравитационные вариометры и градиентометры.

В основу гравитационного вариометра положен принцип крутильных весов Кулона. Два равных по весу грузика закреплены на жестком стержне – коромысле и подвешены с помощью упругой нити так, чтобы коромысло могло свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Схемы крутильных весов с различным расположением грузиков изображены на рис. 13.

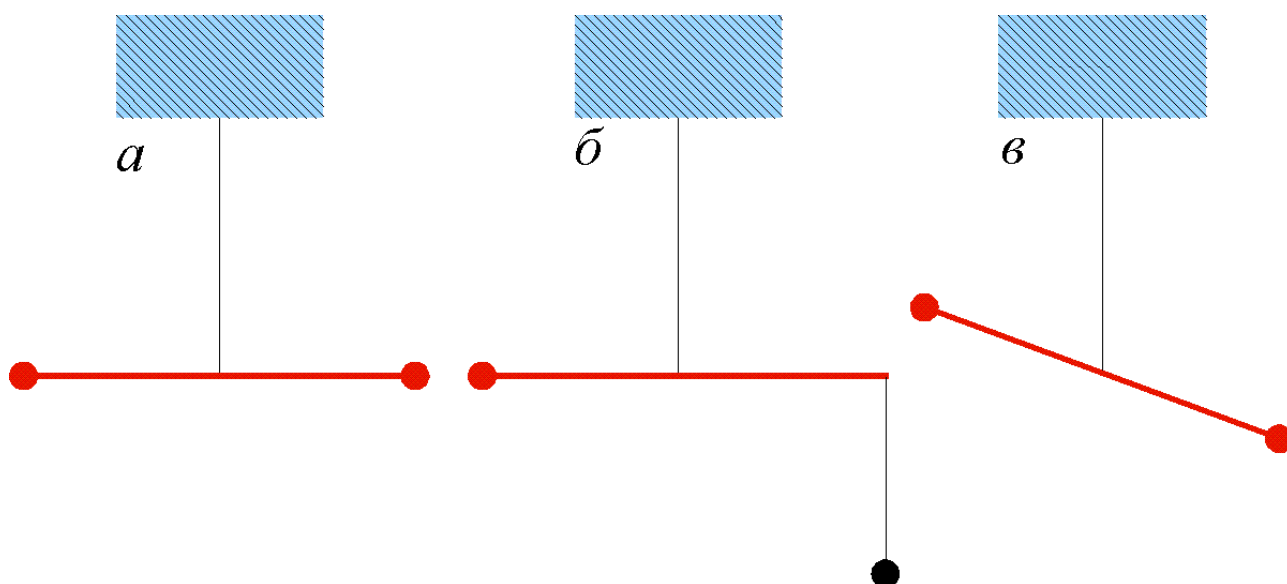


Рисунок 13. Схемы крутильных весов

Простейшие крутильные весы — весы первого рода — представляют собой (а) легкое горизонтальное коромысло с двумя равными грузиками на концах. Коромысло подвешено в середине на очень тонкой нити, вокруг которой оно может поворачиваться. Английский физик Г. Кавендиш в 1789 г. использовал подобную систему для определения гравитационной постоянной.

В гравиразведке применяют приборы, в которых грузики расположены на разных уровнях — крутильные весы второго рода (б, в). Теорию такого прибора разработал в конце XIX в. венгерский физик Р. Этвеш; он же создал его первую модель. Р. Этвеш показал, что крутильными весами второго рода можно определять градиенты силы тяжести и кривизны.

Поворот коромысла гравитационного вариометра происходит только в том случае, когда измерительная система находится в неоднородном гравитационном поле, т. е. если эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести искривлены. Неоднородность гравитационного поля может быть вызвана возмущающей массой, залегающей под поверхностью Земли и имеющей плотность, отличающуюся от плотности вмещающих пород. Горизонтальные компоненты сил, действующих на грузики прибора, поворачивают коромысло в горизонтальной плоскости. При этом происходит закручивание нити подвеса, т. е. возникает момент упругих сил кручения нити, который уравнивает момент действующих гравитационных сил. Измеряемой величиной является угол поворота коромысла, который используют для определения градиентов силы тяжести и кривизн. Современные гравитационные вариометры позволяют определять вторые производные потенциала силы тяжести с точностью до  $\pm (1-2) \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}$ , т. е.  $\pm(1-2) \text{ Е}$ . Уравнение, связывающее измеряемый угол поворота  $\theta - \theta_0$  коромысла со вторыми производными силы тяжести, называется основным уравнением гравитационного вариометра:

$$\tau(\theta - \theta_0) = k_1 W_{\Delta} + k_2 W_{xy} + k_3 W_{xz} + k_4 W_{yz} \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $\tau$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k_4$  зависят только от конструкции прибора и указаны в его паспорте. В уравнении содержатся пять неизвестных: градиенты  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$ , кривизны  $W_{xy}$  и  $\Delta W = W_{yy} - W_{xx}$  и начальный угол поворота коромысла  $\theta_0$ . Для их определения в одном пункте необходимо провести наблюдения по крайней мере в пяти разных азимутах ориентировки коромысла. Для уменьшения времени наблюдений в приборе совмещены две крутильные системы, повернутые относительно друг друга на  $180^\circ$ . Если обозначить начальный угол первого коромысла  $\theta'_0$ , а второго —  $\theta''_0$ , то в двух уравнениях теперь будут содержаться шесть неизвестных:  $\theta'_0$ ,  $\theta''_0$ ,  $\Delta W$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$ . Для их определения достаточно провести наблюдения при расположении крутильной системы прибора по трем азимутам. Обычно крутильные системы ориентируют

по азимутам 0; 120 и 240°,

Высокая чувствительность гравитационных вариометров к близким массам и большая длительность успокоения крутильных систем не позволяют непосредственно выполнять визуальные отсчеты. Поэтому предусмотрена фотографическая запись показаний прибора.

*Приборы, предназначенные для измерения только градиентов силы тяжести  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$ , называются градиентометрами.*

Промышленностью выпускались градиентометры, имеющие четыре крутильные системы, что дает возможность ограничить наблюдения двумя азимутами. Малое время успокоения крутильных систем (около 3 мин) и пониженная чувствительность градиентометров позволяют визуально производить отсчеты показаний.

### **Вопросы для самоконтроля**

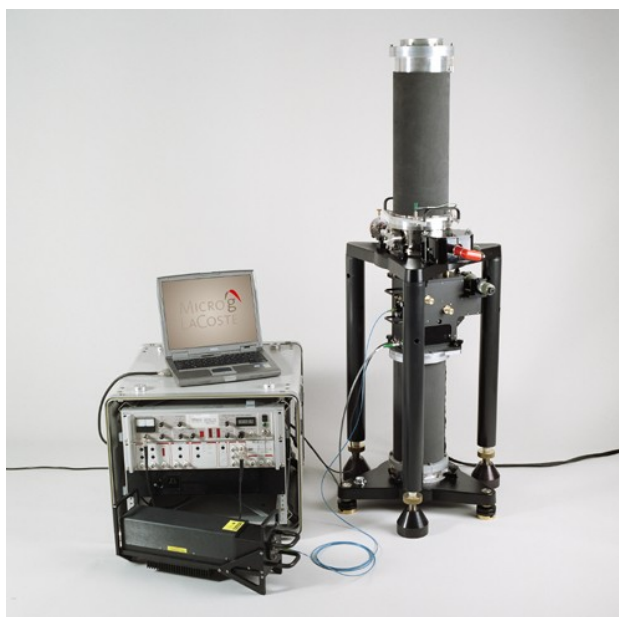
1. Почему гравиметры являются относительными?
3. К точности определения цены деления гравиметров предъявляются высокие требования. Как вы думаете, почему?
2. Для чего в устройствах гравиметров используется астазирование? Какие есть преимущества и недостатки этой технологии?

## *Лекция 6.*

### **Гравиметрическая аппаратура**

#### *Абсолютные баллистические гравиметры*

Одним из мировых лидеров по производству абсолютных гравиметров является американская компания MicroG-LaCoste. Во всех приборах данной фирмы используется система активного подавления упругих помех SuperSpring, которая позволяет значительно повысить качество измерений. На международных сличениях абсолютных гравиметров большинство используемых приборов – это MicroG-LaCoste FG5 (рис. 14) и MicroG-LaCoste FG5-X (рис. 15). Принцип действия схож со всеми современными баллистическими гравиметрами – контрольное тело падает внутри вакуумной камеры, а его положение определяется при помощи лазерного интерферометра. Заявленная точность FG5 – 2мкГал, общий вес прибора 320 кг, необходимая температура окружающей среды – от 20 до 30 градусов по Цельсию. С недавнего времени ему на смену пришёл FG5-X, который является усовершенствованной копией FG5. Так, в нём увеличилась высота камеры сбрасывателя до 35 см, что положительно сказывается на повторяемости результатов и, как следствие, на точности прибора.



*Рисунок 14. Баллистический гравиметр  
MicroG-LaCoste FG5*



*Рисунок 15. Баллистический гравиметр  
MicroG-LaCoste FG5-X*

FG5 и FG5-X позиционируются производителем как лабораторные приборы, требующие для своей работы определённых условий, таких как комнатная температура, нормальная влажность, наличие питания от сети 110В или 220В. Для полевых работ предлагается использовать абсолютный гравиметр MicroG-LaCoste A10 (рис. 16), принцип действия которого так же схож с остальными приборами компании. В A10 значительно уменьшены размеры камеры сбрасывателя (высота падения контрольного тела не превышает 10 см), что, конечно, влечёт за собой ухудшение точности измерений, но при этом значительно уменьшаются размеры прибора и его вес. Общий вес прибора составляет 105 кг, доступный диапазон температур, пригодный для выполнения работ – от -18 до +38 градусов по Цельсию. При этом, при наличии специальных кожухов и организации работы не на открытой местности, а хотя бы в закрытой палатке, диапазон температур можно расширить за счёт использования источников отопления. A10 может использоваться как лабораторный источник питания от сети 110В или 220В, так и

любой источник питания 12В, например, автомобильный аккумулятор. Точность прибора – 10 мкГал, которая может быть достигнута за 10 минут в спокойном месте. При увеличении времени наблюдения и количества бросков контрольного тела точность может быть улучшена.



*Рисунок 16. Баллистический гравиметр MicroG-LaCoste A10*

В России часто применяются абсолютные баллистические гравиметры отечественных разработчиков – гравиметры серии ГАБЛ. Это приборы ГАБЛ-М, ГАБЛ-Э и ГАБЛ-ПМ, разработанные и изготовленные в ИАиЭ СО РАН.

В настоящее время также развивается такой вид абсолютных гравиметров, как квантовые. Принцип их работы во многом схож с баллистическими гравиметрами. Однако в качестве контрольного тела используется не зеркальная призма, а падающие атомы с лазерным охлаждением. Несомненными плюсами новой технологии являются относительная компактность и небольшое время подготовки прибора к работе. Так, например, гравиметр Microquans (рис. 17) может быть готов к измерениям в течение 1 часа, а точность в 1 мкГал может быть достигнута за 1.5 часа.



*Рисунок 17. Квантовый гравиметр Miquans*

### ***Относительные гравиметры***

Без сомнения, самым популярным относительным гравиметром в мире на сегодняшний день остается канадский прибор Scintrex CG-5 Autograv (рис.18). Его выпуск прекратился в 2017 году в связи с выходом усовершенствованной модели CG-6 (рис. 19).



*Рисунок 18. Гравиметр Scintrex CG-5 Autograv.*



*Рисунок 19. Гравиметр Scintrex CG-6 Autograv*

Гравиметр CG-5 является полевым относительным кварцевым



гравиметром, масса которого составляет 8 кг. Доступный диапазон рабочих температур – от -40 до +45 градусов по Цельсию, а диапазон измерений без перенастройки чувствительного элемента составляет 8000 мГал (8Гал), что позволяет использовать данный прибор по всему миру и практически при любых условиях. Разрешение прибора – 1 мкГал, погрешность измерений не превышает 5 мкГал в зависимости от условий измерения и уровня внешних помех. В прибор встроены инклинометры, позволяющие вводить автоматическую поправку за наклон прибора при углах наклона до 200 угловых секунд.

С 2016 года компания гравиметр Scintrex приступила к производству прибора CG-6, который является логическим продолжением предыдущей модели. Изменения коснулись размеров прибора и его веса. Он стал меньше, его масса – 5.2 кг. Основные характеристики измерений не изменились, однако, в комплекте с прибором появился компьютерный планшет, позволяющий оперативно отслеживать данные наблюдений, строить графики и карты полученных значений.

Среди наземных относительных гравиметров отдельно можно выделить прибор GPHONEX (рис. 20). Это лабораторный прибор массой 58 кг, не применяющийся для измерения силы тяжести при профильных или площадных работах. Его принципиальное отличие от полевых приборов – очень низкий дрейф нуля-пункта (не более 1.5 мГал в месяц), эффект которого присутствует во всех относительных гравиметрах. В приборе применяется пружинная подвеска с нулевой длиной. Точность GPHONEX достигает 1 мкГал. GPHONEX может применяться для наблюдения долговременных вариаций силы тяжести, например, для измерения и анализа лунно-солнечных приливов.

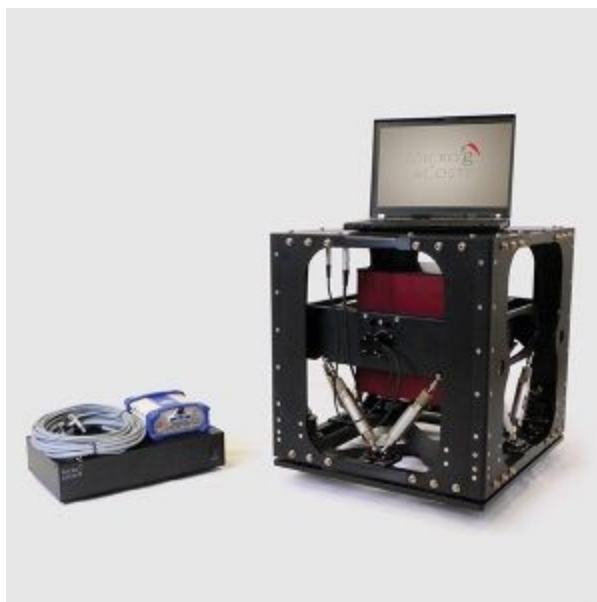


*Рисунок 20. Гравиметр Micro-g LaCoste gPhoneX*

### ***Аэро- и морские гравиметры***

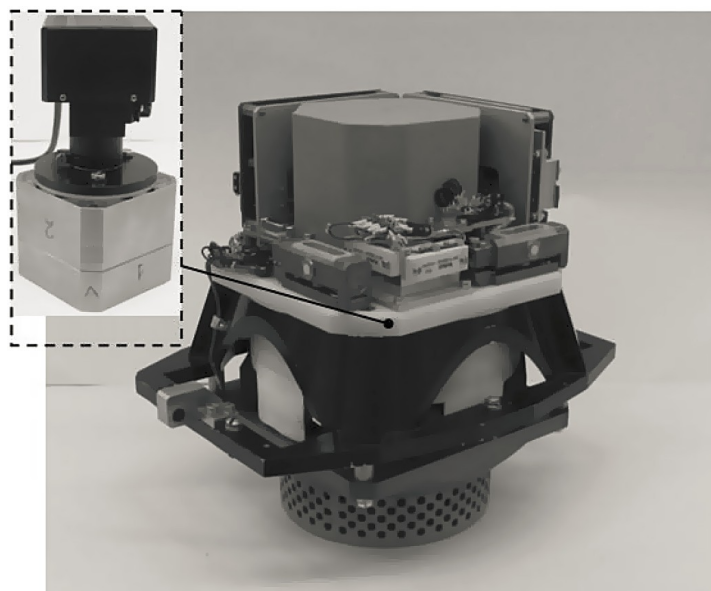
Аэрогравиметры и морские гравиметры отличаются от приборов, предназначенных для наземной съёмки, в первую очередь тем, что требуют наличие качественной активной системы, подавляющей помехи, вызванные наклоном и качкой судна.

В гравиметрической системе TAGS-7 (рис. 21) от компании MicroG-LaCoste используется гиросtabilизированная карданная платформа, позволяющая компенсировать углы наклона прибора до 25 градусов и углы поворота до 35 градусов. Качество измерений можно оценить с помощью параметра «повторяемость», который равен 0.75 мГал. В условиях больших скоростей движения во время полёта важна высокая степень временной дискретизации (20Гц), которая позволяет записывать 1200 значений измеренной силы тяжести в минуту, сопоставляя этим данным координаты, полученные с выносной GPS-антенны.



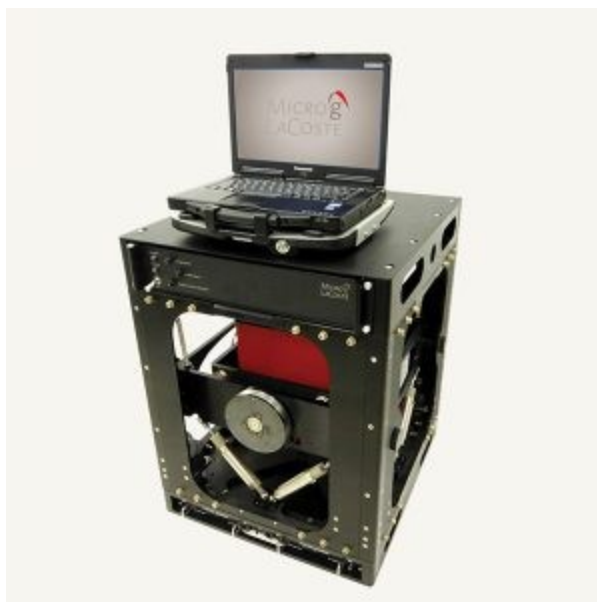
*Рисунок 21. Аэрогравиметр Micro-g LaCoste TAGS-7*

В аэрогравиметрии также применяются приборы “Чекан” (модель “Шельф-Э”) российского концерна ЦНИИ “Электроприбор” (рис.22). При разработке гравиметра “ШельфЭ” значительное внимание было уделено снижению инструментальной погрешности его гравиметрического датчика (ГД) вследствие разработки малогабаритного чувствительного элемента, а также модернизации оптикоэлектронного преобразователя и проектирования новой системы термостатирования. Гравиметрический датчик установлен в двухосную гироплатформу, обеспечивающую удержание оси его чувствительности в вертикальном направлении (т.е. по линии отвеса). Масса прибора составляет 78 кг, погрешность измерений 0.07 - 0.1 мГал при выполнении наземных измерений



*Рисунок 22. Гравиметрический датчик прибора  
“Шельф-Э”*

Прибор Marine Gravity System-6 (MGS-6) фирмы Micro-g LaCoste (см. рис. 23) позволяет производить относительные измерения силы тяжести с борта корабля или иного судна. MGS-6 основан на меньшей, более легкой и более энергоэффективной платформе аэрогравиметра TAGS-6, и использует тот же самый гравиметрический датчик. Масса прибора составляет 101 кг, автоматическая система выравнивания компенсирует углы наклона прибора до 25 градусов и углы поворота до 35 градусов. Гравиметр отличается довольно хорошим показателем дрейфа нуля-пункта – менее 3 мГал в месяц. Качество съёмки характеризуется показателями повторяемости измерений: 0.02 мГал в условиях неподвижности и 0.75 мГал в движении.



*Рисунок 23. Гравиметрический датчик прибора "Шельф-Э"*

### ***Спутниковая гравиметрия***

«GRACE», или Gravity Recovery And Climate Experiment – совместная спутниковая миссия НАСА и Германского аэрокосмического центра, нацеленная на изучение гравитационного поля Земли и его вариаций.

Два идентичных спутника-близнеца, названных "Tom" и "Jerry" (запущены в 2002 году), находящихся на полярной орбите (высота 500 км) непрерывно обмениваются радиосигналами в микроволновом диапазоне, что позволяет (с помощью микроволнового дальномера на основе эффекта Доплера) измерять их взаимное расположение с микронной точностью. Расстояние между спутниками сохраняется в пределах  $220 \pm 50$  км, движения центра масс и ориентации спутников отслеживаются с помощью высоко летящих спутников систем GPS и GLONASS, системы электростатических акселерометров и звездных датчиков. Спутники оснащены уголковыми отражателями для использования лазерной дальнометрии.

Высокая точность измерения расстояния между спутниками позволяет улавливать малейшие изменения в силе притяжения к Земле.

За сутки спутники GRACE полностью проходят по своей орбите 15 раз.

Поскольку за суточный период не обеспечивается достаточно густое покрытие всей поверхности Земли измерениями, то система GRACE выполняет накопление данных за 30-дневный период.

В середине октября 2017 года спутники выведены из эксплуатации. В конце 2018 года запущены два новых спутника (GRACE-FO).

Данные, полученные от спутников GRACE, поступают в Геофизический институт GFZ (Потсдам, Германия), Центр космических исследований CSR (Остин, США), и Лабораторию реактивного движения JPL (Пасадена, США). В этих научных центрах после первичной обработки данных (с учетом показаний систем GPS, GLONASS, акселерометров, звездных камер и др.) получают файлы данных первого уровня (L1). Для получения файлов данных второго уровня (L2) решается обратная задача с регуляризацией (определение значений силы тяжести по положениям спутников) и с учетом поправок за изменения атмосферного давления над сушей и океаном, твердотельные и океанические приливы, полярное движение. Результатом решения является разложение ежемесячного гравитационного поля по коэффициентам Стокса на сфере со средним радиусом Земли.

При вычитании среднего поля из ежемесячных коэффициентов Стокса, получаемых с GRACE, можно наблюдать изменения от месяца к месяцу с точностью до микроГала.

Ежемесячные файлы данных уровня L2 доступны на серверах GFZ, CSR и JPL, но для их использования необходима фильтрация меридиональных коррелированных шумов, называемых полосами или страйпами. Данная проблема связана с движением спутников по полярным орбитам, недостаточно хорошим отражением гравитационного сигнала и др. Научные группы, участвующие в проекте, работают над созданием оптимальных алгоритмов фильтрации шумов данного типа. Пространственное разрешение регистрируемых данных в среднем составляет 300 км и оно сильно зависит от времени их накопления.

Короткопериодные вариации силы тяжести обусловлены процессами

массопереноса в атмосфере и гидросфере, движением литосферных плит, гляциоизостазией, мантийной конвекцией, перераспределением масс в результате землетрясений, эрозией и седиментацией. Кроме того, месячные изменения гравитационного поля Земли на суше в значительной степени могут быть связаны с движением водных масс внутри континентальной части гидрологического цикла.

Измерения гравитационного поля со спутника раскладываются по сферическим функциям, производится фильтрация данных. В свободном доступе есть данные с различной степенью предварительной обработки, например, <http://geoid.colorado.edu/grace>; <http://icgem.gfz-potsdam.de/series>.

На сайте института GFZ реализована возможность расчета большого числа различных интерполяционных моделей силы тяжести и различных трансформаций гравитационного поля (внешний потенциал Земли, геоид, аномалии Буге и пр.) на основе комбинирования данных спутниковых систем GOCE и GRACE с высоким пространственным разрешением (например, разложение по сферическим функциям до 2190 порядка, модель EIGEN-6C4). Кроме того, данный интернет-ресурс предоставляет возможность трехмерной визуализации данных (см. рис. 24).

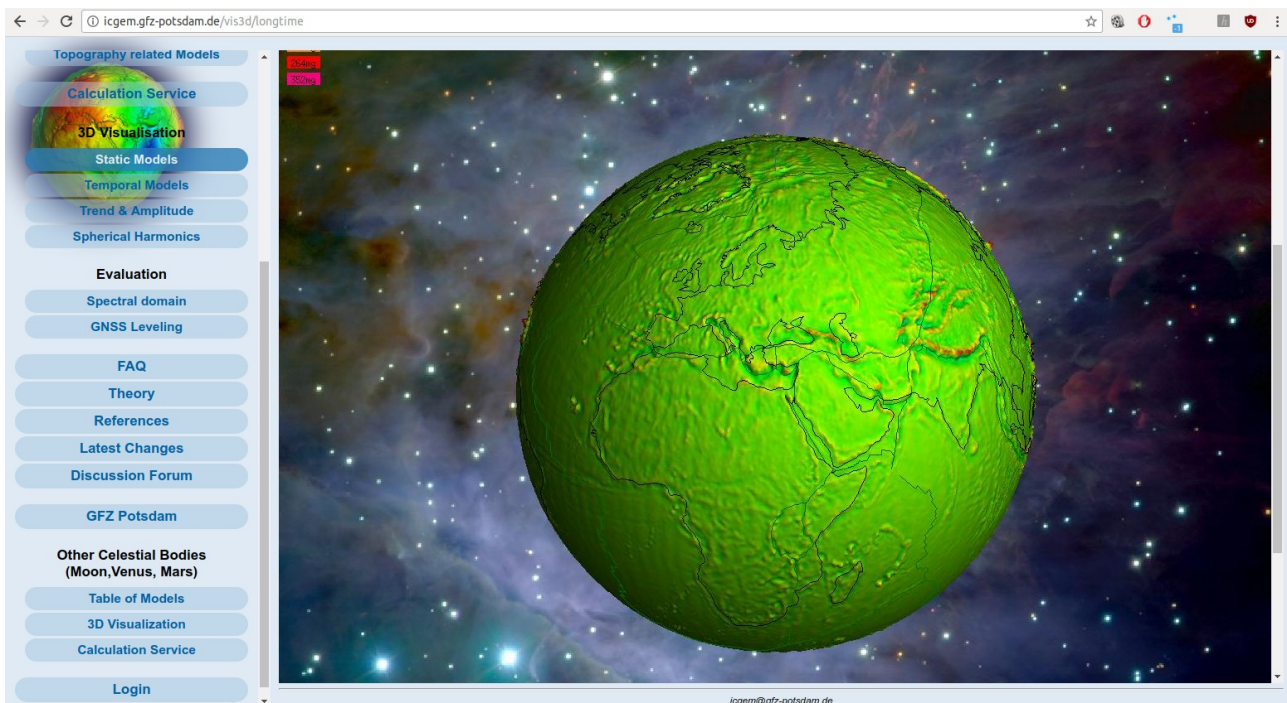


Рисунок 24. Модуль трехмерной визуализации спутниковых данных на сайте института GFZ

Несмотря на то, что основным направлением использования данных миссии GRACE является исследования климатических изменений, таких, как таяние ледников, изменение водных ресурсов крупных речных бассейнов и территорий и т. д., модели глобального гравитационного поля могут быть успешно использованы для изучения глубинного строения Земли, мантийных плюмов, конвективных течений в мантии и т. д.

### Вопросы для самоконтроля

1. В обзоре гравиметрической аппаратуры не дано описания современных криогенных сверхпроводящих гравиметров. В качестве самостоятельной работы, найдите информацию о таком типе приборов в сети интернет.
2. Почему в миссиях «GRACE», «GRACE-FO» используются два, а не один спутник?



## *Лекция 7.*

### **Классификация гравиметрических съемок**

Как правило, Гравиразведка сравнительно недорогой метод, и применение гравиразведки позволяет с меньшими экономическими затратами выделять наиболее перспективные участки для постановки более детальных исследований.

Эффективность гравиразведки значительно повышается в том случае, когда она применяется в комплексе с другими геофизическими методами. Например, при региональных исследованиях целесообразно дополнять гравиразведку аэромагнитной съемкой и сейсморазведкой. При поисках антиклинальных складок в осадочной толще можно использовать данные сейсморазведки метода отраженных волн. При поиске залежей руд – использовать магниторазведку и сейсморазведку.

В зависимости от характера геологоразведочных задач гравиметрические съемки подразделяют на региональные, поисковые и детальные.

*Региональные съемки выполняют для изучения общего характера гравитационного поля на обширных территориях. По этим материалам устанавливают общие закономерности гравитационного поля в пределах крупных регионов, выполняют тектоническое районирование.*

*Поисковые съемки проводят на отдельных перспективных площадях, установленных по региональным работам. Цель поисковых съемок – выделение локальных структур, которые могут содержать полезные ископаемые (нефть, газ, и т.д.).*

*Детальные съемки выполняют с целью изучения отдельных локальных структур. Данные детальной съемки могут использоваться для расчета глубины залегания и геометрии локальных структур.*

Выполнение гравиметрических съемок регламентированы технической инструкцией по гравиразведке. В нее включены материалы по проектированию, методике проведения работ, а также по интерпретации результатов съемок,

определены масштаб съемок, густота сети, точность наблюдений.

Гравиметрические съемки также подразделяют на площадные и профильные.

*Площадной* называется съемка, в которой пункты наблюдений достаточно равномерно заполняют изучаемую территорию. Для площадной съемки строят гравиметрические карты.

*Профильная* съемка выполняется по отдельным маршрутам (профилям). Результат такой съемки – графики аномалий силы тяжести.

Все гравиметрические съемки опираются на общегосударственную сеть гравиметрических пунктов. Эти пункты привязаны к основным маятниковым пунктам нашей страны, а они связаны с международным пунктом в Потсдаме (Германия).

Гравиразведочные работы выполняют на опорных рядовых пунктах. Полевую сеть опорных пунктов создают в начале полевых работ. Полевую сеть ОП привязывают к ОП более высокого класса (первого или второго). Точность определения силы тяжести на ОП должна быть в 1.5 – 2 раза выше точности на пунктах рядовой сети. Повышенная точность достигается применением более точного гравиметра или многократными наблюдениями на одном и том же пункте одним или несколькими гравиметрами.

ОП располагают в условиях наиболее ровного рельефа. Наблюдения на ОП ведут по замкнутым полигонам, то есть каждый рейс начинается и заканчивается в одном и том же пункте.

После создания опорной сети проводят наблюдения на рядовых пунктах. Наблюдения для рядовых рейсов всегда начинаются и заканчиваются на ОП. Методики наблюдений в рядовых рейсах бывают различные. Наблюдения могут быть однократные, либо с повторением.

При выполнении полевых работ необходимо знать географические координаты каждого пункта, а также его превышение относительно уровня

моря. Эти определения составляют топографо-геодезические работы. Точность этих работ должна быть согласована с точностью измерений аномалий силы тяжести.

### **Интерпретация данных гравirazведки**

Интерпретация данных гравirazведки состоит в определении источников аномалий, форме и глубине залегания плотностных границ и в установлении связи этих границ с геологическими границами.

Очень часто такое соответствие имеется, что и определяет эффективность гравirazведки как метода.

В качестве исходных материалов для интерпретации берут аномалии в редукции Буге. Интерпретацию данных гравirazведки подразделяют на качественную и количественную.

*Качественная интерпретация заключается в анализе особенностей аномального поля. Основа метода качественной интерпретации – метод аналогий. Данные гравirazведки сравнивают с данными других геофизических методов, бурением, а также с данными гравirazведки на уже изученных территориях.*

По результатам качественной интерпретации составляют схему распределения аномалий для тектонического районирования территории.

*Количественная интерпретация заключается в решении прямой и обратной задачи. Прямая задача сводится к вычислению гравитационного эффекта тел, составляющих модель. Для этого должны быть заданы форма, размеры, глубина залегания, плотность тел. Обратная задача сводится к определению параметров аномалиеобразующих тел – формы, глубины залегания, плотности по гравитационным аномалиям.*

- ✓ *Прямая и обратная задачи взаимосвязаны, но их решения имеют принципиальное различие. В гравirazведке прямая задача всегда имеет устойчивое и единственное решение. Обратные задачи, за исключением*

*особых случаев, не имеют единственного решения, и, как правило, неустойчивы. В математической терминологии обратные задачи гравиразведки относятся к классу некорректно поставленных задач; методам их решения посвящено много научных работ.*

### **Качественная интерпретация гравитационных аномалий**

В распределении аномалий силы тяжести на поверхности Земли обнаруживается следующая закономерность. В районах с сильно приподнятым над уровнем моря рельефом аномалии имеют большие отрицательные значения (до -400 мГал). В равнинных районах, где отметки рельефа не сильно отличаются от уровня моря, аномалии колеблются около нуля ( $\pm 100$  мГал). На акваториях морей и океанов аномалии, как правило, положительные. В районах глубоководных океанических впадин аномалии достигают значений +400 мГал.

Причина такой закономерности в следующем. Районы, где породы верхней мантии залегают наиболее близко к поверхности, наблюдаются большие положительные аномалии, и наоборот, там, где верхняя мантия погружена на большую глубину, аномалии имеют наибольшие отрицательные значения.

*Аномалии силы тяжести принято подразделять подразделять на региональные и локальные. К региональным аномалиям относятся такие, размеры которых превышают 1000 кв. км. Локальные аномалии имеют размеры от доли кв. км. до нескольких сотен.*

- ✓ Региональные аномалии связаны, как правило, с крупными прогибами и поднятиями земной коры, а также с петрографическими неоднородностями в блоках кристаллического фундамента.*
- ✓ Локальные аномалии часто связаны с с локальными структурами в осадочном чехле и зонами тектонических нарушений.*

Гравитационные ступени – это вытянутые зоны больших градиентов гравитационного поля. Они связаны, как правило, с участками быстрого погружения пород с большой избыточной плотностью, или контактов пород с

различной плотностью.

В процессе качественной интерпретации анализируют общий характер аномального поля, его индивидуальные особенности: знак и степень дифференцированности, наличие региональных и локальных аномалий, их размеры, форму, простираение, интенсивность и т. д.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Почему гравиразведка часто предшествует другим, более детальным методам полевой геофизики и поисковому бурению?
2. В чем особенности региональной, поисковой и детальной съемок?

## Лекция 8.

### Разделение аномальных гравитационных полей

Задача разделения полей может быть решена двумя путями.

- ✓ *Первый и наиболее логичный путь при достаточном количестве исходных данных – вычисление эффекта от «помех» (решение прямой задачи).*
- ✓ *Второй путь – это различные трансформации наблюдаемого поля, подчеркивающие или ослабляющие отдельные компоненты поля.*

Разделение полей путем решения прямой задачи можно осуществить лишь тогда, когда с достаточной достоверностью известны физические параметры, форма и глубина залегания вмещающих неоднородностей. В большинстве случаев эти сведения очень скудны. Однако иногда их оказывается вполне достаточно, чтобы исключить хотя бы некоторые мешающие влияния. Располагая комплексом различных геолого-геофизических сведений или частью из них, можно рассчитать эффект от различных мешающих решению основной задачи возмущающих масс и исключить этот эффект из суммарного поля.

- ✓ *Разделение полей путем вычисления прямых эффектов при повышении геолого-геофизической изученности будет находить все большее применение. Однако в общем случае такие данные имеют вероятностный характер, поэтому для их использования нужно применять методы и приемы теории вероятностей, теории информации и математической статистики.*

*Трансформации аномального поля представляют собой некоторые линейные преобразования, производимые над исходными данными, такие, например, как осреднение, сглаживание, аналитическое продолжение в верхнее и нижнее полупространства, вычисление различного порядка производных по исходному полю, повороты поля относительно принятой системы координат и т. д.*

Качественное рассмотрение карт аномалий силы тяжести или

составляющих магнитного поля уже позволяет выделить некоторые характерные особенности этих полей. Некоторые аномалии имеют небольшое площадное распространение, небольшую интенсивность и резкие градиенты, распределение которых по площади носит в большинстве случаев незакономерный (случайный) характер. На общей карте изолиний они проявляются незначительными по площади, но относительно резкими изгибами, зачастую не повторяющимися на соседних изолиниях. Другие аномалии имеют большие размеры, большую интенсивность, менее резкий градиент, а простирание их обычно согласуется с общим простиранием структур в районе. Третьи характеризуются большим площадным распространением, плавным градиентом, простирание их подчинено господствующему простиранию крупных тектонических элементов района, а интенсивность может достигать весьма больших величин.

Первые аномалии вызываются относительно неглубоко залегающими мелкими неоднородностями, а также погрешностями наблюдений. Вторые создаются относительно неглубоко залегающими объектами (в пределах нескольких сотен или тысяч метров). Третьи вызываются глубоко залегающими объектами, например, кристаллическим фундаментом или еще глубже залегающими массами. Эти аномалии обычно называют *региональным фоном*, так как в ряде случаев при поисках структур, перспективных на нефть и газ, геологические образования, вызывающие такие аномалии, служат как бы фоном, на котором проявляются более мелкие аномалии от локальных структур, являющихся объектом поисков. Аномалии от этих подлежащих исследованию структур принято называть локальными аномалиями.

Может оказаться, однако, что те аномалии, которые являлись локальными при решении одной геологической задачи, будут региональными при решении другой, и наоборот.

## **Разделение полей как процесс частотной фильтрации**

При решении конкретной геологической задачи из множества факторов, создающих суммарное поле, нужно выделить аномалию, соответствующую возмущающему действию интересующего нас объекта. При этом все прочие осложнения гравитационного поля являются помехами и лишь аномалию, вызванную интересующим нас объектом, можно считать полезным сигналом.

Следовательно, задачу разделения полей можно рассматривать как выделение полезного сигнала среди различных помех. Помехи могут отличаться одна от другой по интенсивности, форме, занимаемой полосе и обуславливаются различными причинами: особенностями геологического строения, погрешностями наблюдений, погрешностями вычислений и т. д.

Интегральные преобразования, используемые при разделении полей (осреднение, аналитическое продолжение, вычисление высших производных), имеют вид интеграла свертки (или интеграла Дюамеля). В теории связи интегралом свертки или соответствующим ему уравнением входа — выхода в частотном виде описывается процесс линейной частотной фильтрации.

Пользуясь этой аналогией, можно сформулировать задачу разделения полей как процесс линейной частотной фильтрации, а различные преобразования, употребляемые при разделении полей, как частотные фильтры с соответствующими частотными характеристиками.

В такой трактовке задача разделения полей сводится к вычислению интеграла свертки типа

$$F(x)_{tr} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x') \sum_k F_k(x-x') dx' \quad (8.1)$$

где  $F(x)_{tr}$  — новое трансформированное поле,  $\sum_k F(x-x')$  — сумма различных возмущений.

Пользуясь свойством преобразования Фурье для интеграла свертки, получим:

$$S(\omega)_{tr} = \Phi(\omega) \sum_k S_k(\omega) \quad (8.2)$$

Здесь  $\Phi(\omega)$  — характеристика частотного фильтра.



Амплитудные спектры полезного сигнала и помех иногда довольно значительно различаются по форме, что позволяет отыскивать такое преобразование, при котором будут максимально сохранены или усилены спектральные составляющие полезного сигнала, и относительно ослаблены спектральные составляющие помех.

В первом приближении суммарное поле можно разделить на три части. Погрешности наблюдений и мелкие, неглубоко залегающие плотностные неоднородности создают аномалии, обладающие сравнительно высокочастотным спектром. Аномалии, вызванные глубоко залегающими массами (назовем их региональными аномалиями), имеют низкочастотный спектр. Спектр аномалий, вызванных объектами, занимающими промежуточное положение по глубине (назовем их локальными), занимает промежуточное положение по частотному составу.

Приняв за основу эту грубую схему, можем переписать равенство (8.2) в следующем виде:

$$S(\omega)_r = \Phi(\omega) [S_0(\omega) + S_L(\omega) + S_R(\omega)] \quad (8.3)$$

где  $S(\omega)_r$  – спектр трансформированной аномалии;  $S_0(\omega)$  – спектр погрешностей наблюдений и аномалий поверхностных случайных неоднородностей;  $S_L(\omega)$  – спектр локальной аномалии;  $S_R(\omega)$  – спектр региональной аномалии.

Те или иные процедуры трансформации аномального поля можно рассматривать с точки зрения эффективности при усилении или ослаблении одной из трех составляющих выражения (8.3).

Рассмотрим с этих позиций возможности некоторых распространенных процедур трансформации.

### ***Осреднение***

Среднее значение функции в круге радиуса  $R$  можно выразить интегралом

$$\langle V_z(x, y) \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R V_z(x + r \cos(\varphi), y + r \sin(\varphi)) r dr d\varphi \quad (8.4)$$

и для двумерного случая (скользящий бокс)

$$\langle V_z(x) \rangle = \frac{1}{2R} \int_{-R}^{+R} V_z(x - x') dx' \quad (8.5)$$

Выражение (8.2) можно представить как интеграл свертки

$$\langle V_z(x) \rangle = \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} V_z(x - x') K(x') dx' = \frac{1}{2R} [V_z * K](x) \quad (8.6)$$

где  $K(x)$  – ступенчатая функция:

$$K(x) = \begin{cases} K=1, & |x| \leq R \\ K=0, & |x| > R \end{cases} \quad (8.7)$$

В спектральной области выражение (8.6) примет вид:

$$\langle \widehat{V}_z(\omega) \rangle = \frac{1}{2R} \widehat{K}(\omega) \widehat{V}_z(\omega) = \frac{\sin(\omega R)}{\omega R} \widehat{V}_z(\omega) \quad (8.8)$$

Из выражения (8.8) следует, что амплитудно-частотной характеристикой

фильтра при процедуре осреднения является функция  $\left| \frac{\sin(\omega R)}{\omega R} \right|$  (см. рис. 25).

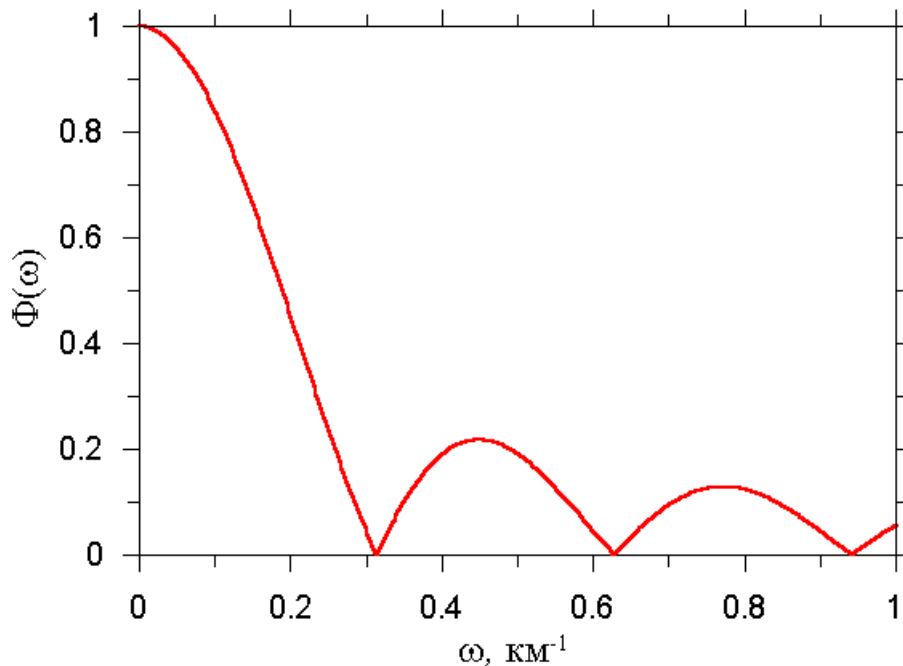


Рисунок 25. АЧХ процедуры осреднения в скользящем боксе,  $R = 10$  км

- ✓ При осреднении в наибольшем сглаживании подвергаются аномалии с относительно резким градиентом и имеющие относительно малые размеры, то есть аномалии, вызванные неглубоко залегающими массами или погрешностями наблюдений. В то же время обширные и плавные аномалии, то есть аномалии, вызванные относительно глубоко залегающими массами, подвергаются меньшему сглаживанию.

### Аналитическое продолжение аномалий

Задача пересчета аномалий силы тяжести на новый уровень  $z_0$  сводится к вычислению интеграла Пуассона:

$$\Delta g_a(z_0) = \iint_{00}^{2\pi\infty} \frac{\Delta g_a(\rho, \alpha, 0)}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}} \rho d\rho d\alpha \quad (8.9)$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Свойства этого преобразования становятся более прозрачными, если использовать спектральное представление аномалий. В общем случае выражение силы тяжести для двумерных тел имеет вид:

$$V_z(x', z') = 2f \iint_{-\infty 0}^{\infty \infty} \frac{(z' - z) \sigma(x, z) dx dz}{(x' - x)^2 + (z' - z)^2} \quad (8.10)$$

Выражение (8.10) представляет собой интеграл по  $z$  от свертки функций  $\sigma(x, z)$  и поля силы тяжести от горизонтального кругового цилиндра

$$V_z^u(x, z) = f \frac{2z}{x^2 + z^2} :$$

$$V_z(x', z') = \int_0^{\infty} [V_z^u(z' - z) * \sigma(z)](x') dz \quad (8.11)$$

Спектр Фурье этой функции имеет следующий вид:

$$S(z', \omega)_{V_z} = S'(\omega)_{V_z} = 2\pi f \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(\omega, z) e^{-\omega(z' - z)} e^{-i\omega x} dz \quad (8.12)$$

Если перейти от точки  $z'$  к точке с координатой  $z''$ , то выражение (8.7) нужно будет переписать, изменив количество штрихов:

$$S''(\omega)_{V_z} = 2\pi f \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(\omega, z) e^{-\omega(z'' - z)} e^{-i\omega x} dz \quad (8.13)$$

Вынося, соответственно,  $e^{-\omega z'}$  и  $e^{-\omega z''}$  из-под знака интеграла в выражениях (8.12) и (8.13), и поделив одно равенство на другое, получим:

$$S''(\omega)_{V_z} = S'(\omega)_{V_z} e^{-\omega(z''-z')} \quad (8.14)$$

Таким образом, пересчет аномалии на другой высотный уровень, представленный интегралом Пуассона (8.9), в спектральной области сводится к умножению спектра аномалии на экспоненту показателем, равным высоте превышения одного уровня над другим.

Из выражения (8.14) следует, что амплитудно-частотной характеристикой фильтра при процедуре пересчета на верхний уровень является функция  $e^{-\omega(z''-z')}$  и  $e^{+\omega(z''-z')}$  на нижний (см. рис. 26).

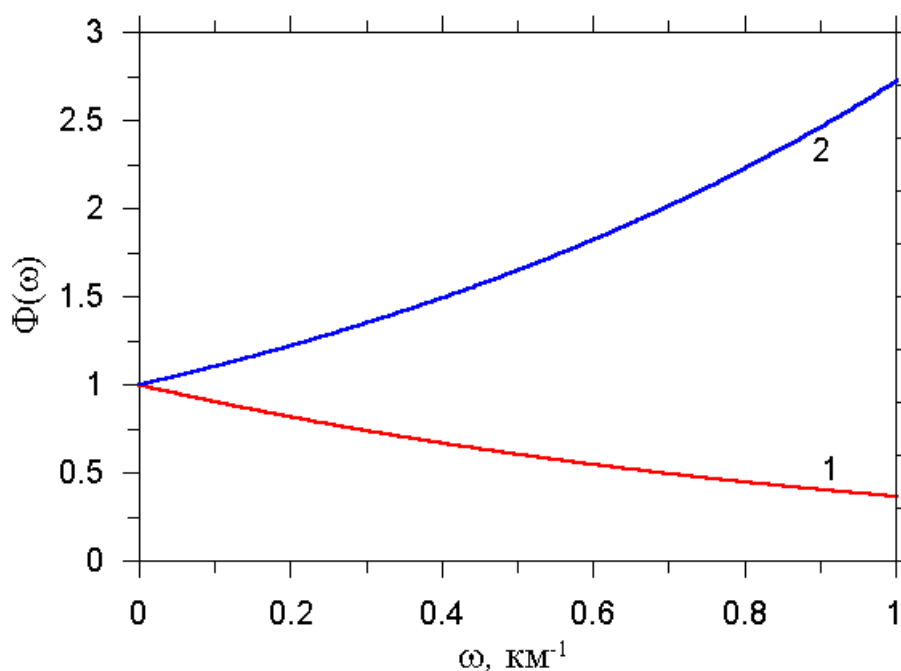


Рисунок 26: АЧХ процедуры пересчета в полупространство: 1 – верхнее на 1 км, 2 – нижнее на 1 км.

- ✓ *В основе метода аналитического продолжения аномалий лежит тот факт, что аномалии от мелких неглубоко залегающих тел с увеличением расстояния до них сглаживаются быстрее, чем от тел крупных и глубоко залегающих. Это свойство метода успешно используется для решения задачи разделения полей.*

## Вычисление производных

Спектр Фурье произвольного аномального гравитационного поля можно представить в виде ряда

$$S(h, \omega) = \sum_k a_k \Phi_k(\omega) e^{-(h+h_k)|\omega|} \quad (8.15)$$

где  $h_k$  – глубины залегания особых точек аномальных тел,  $\Phi_k(\omega)$  – коэффициенты, определяющие их геометрию,  $a_k$  – коэффициенты, зависящие от массы аномальных тел. В подтверждение справедливости этого утверждения отметим, что выражение можно получить, рассматривая набор тел простейших геометрических форм, начиная от горизонтального кругового цилиндра и кончая  $n$ -угольной призмой. Поскольку любое аномальное тело набором таких тел можно заменить с требуемой точностью, то выражение справедливо для самого общего случая.

Дифференцируя соотношение (8.10) по  $h$ , получим:

$$\frac{\partial S(h, \omega)}{\partial h} = \sum_{(k)} \omega a_k \Phi_k(\omega) e^{-(h+h_k)|\omega|} = S(h, \omega) \omega \quad (8.16)$$

или в более явной форме связь спектра поля силы тяжести и его вертикального градиента будет иметь вид:

$$S(\omega)_{V_{zz}} = \omega S(\omega)_{V_z} \quad (8.17)$$

Поскольку дифференцирование можно проводить многократно, то спектр  $n$ -ой производной будет равен спектру поля силы тяжести, умноженному на  $n$ -ую степень частоты (см. рис.27).

Связь спектра поля силы тяжести и его вертикального градиента имеет вид:

$$S(\omega)_{V_{zz}} = i \omega S(\omega)_{V_z} \quad (8.18)$$

Таким образом, АЧХ процедуры вычисления вертикальной производной является функция  $\omega^n$  где  $n$  – порядок производной. Для горизонтальной производной – функция  $(i \omega)^n$ .

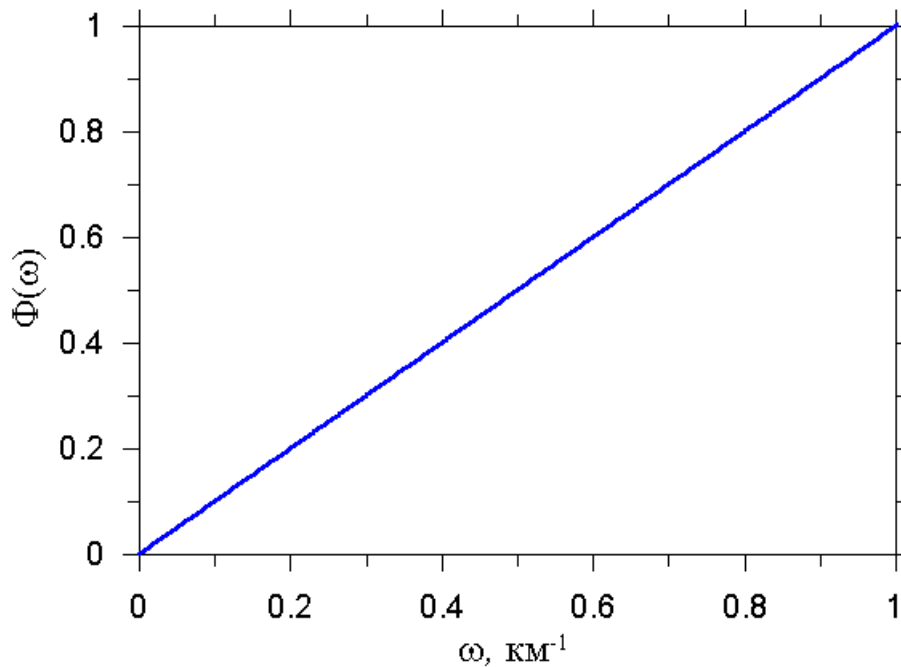


Рисунок 27. АЧХ вертикальной производной

- ✓ Из выражений (8.17) и (8.18) следует, что в спектрах горизонтального и вертикального градиентов возрастает влияние высокочастотной составляющей. Влияние на производные крупных, но удаленных масс с увеличением порядка производной уменьшается по сравнению с влиянием масс, лежащих неглубоко от дневной поверхности. С увеличением порядка производной суммарное поле все более отражает влияние локальных масс.
- ✓ Однако с увеличением порядка производной усиливаются и мелкие поверхностные неоднородности и погрешности наблюдений, которые могут возрасти настолько, что затушат аномалии, являющиеся объектом исследования.
- ✓ Отсюда следует, что, во-первых, нельзя неограниченно повышать порядок производных и, во-вторых, что одновременно с подчеркиванием аномалий от интересующих нас объектов необходимо сглаживать влияние мелких неоднородностей и погрешностей наблюдений, т. е. производить операцию прямо противоположную первой.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какие есть преимущества у представления процедур линейной фильтрации (осреднение, взятие производных и т.д.) в спектральной области?
2. В чем недостаток осреднения методом скользящего среднего?
3. Для чего, по вашему мнению, производят аналитическое продолжение аномалий в верхнее полупространство? В нижнее?

## **Лекция 9.**

### **Решение прямой задачи гравиразведки для тел простой формы**

Прямая задача гравиразведки состоит в вычислении гравитационных эффектов, создаваемых отдельными избыточными массами.

Решение прямой задачи всегда однозначно, то есть при известных форме и плотности тела в каждой точке наблюдений можно вычислить единственное значение силы тяжести.

Гравитационное поле аддитивно, то есть общее поле от различных тел всегда есть сумма полей каждого тела. Это позволяет вычислить гравитационный эффект любого сложного тела, разбив его на множество простых тел. Самым простым телом в гравиразведке можно назвать точечную массу, или материальную точку.

Гравитационный потенциал точечной массы с координатами  $(x', y', z')$  в точке пространства с координатами  $(x, y, z)$  равен:

$$V(x, y, z) = f \frac{M}{r} = f M \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (9.1)$$

Нас интересует в первую очередь поле силы тяжести  $V_z$  – вертикальной производной гравитационного потенциала, как величина, измеряемая гравиметрами, а также производные силы тяжести.

### **Понятие о двумерных телах. Логарифмический потенциал**

Широко используемым понятием в гравиразведке является понятие о двумерных телах, простирающихся по одной из горизонтальных осей от 0 до  $-\infty$  и от 0 до  $+\infty$  с постоянной в этом направлении плотностью. Обычно в качестве такой оси выбирается ось  $Y$ . Очевидно, что это математическая идеализация, и в действительности в природе таких объектов не существует. Тем не менее в случаях, когда размеры тела, создающего аномалии, по одной из осей значительно превосходят его размеры по остальным осям, такая идеализация значительно упрощает процесс интерпретации.

В качестве точечной массы в двумерном случае выступает горизонтальный тонкий стержень, а в качестве гравитационного потенциала



удобно использовать логарифмический потенциал

$$V = -f \iint_S \sigma \ln[(x-x')^2 + (y-y')^2] dx' dy'$$

Сравнительно недавно широко распространенной практикой было использование такой идеализации для решения обратных задач гравиразведки. Такой подход, как правило, был вынужденным, поскольку для решения трехмерных задач не имелось достаточных вычислительных средств.

### ***Притяжение однородным шаром***

Притяжение шара за его пределами равносильно притяжению материальной точки с той же массой, находящейся в центре шара. Поэтому чтобы получить поле  $V_z$  для шара, нужно продифференцировать выражение потенциала точечной массы (9.1) по  $z$ :

$$V_z^{шар}(x, y, z) = \frac{\partial V^{шар}}{\partial z} = f M \frac{z - z'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \quad (9.2)$$

Для упрощения записи начало координат поместим непосредственно над центром шара на высоте  $z=0$ , то есть примем, что  $x'=0, y'=0$ , а вертикальную координату центра шара переобозначим как  $z'=h$ . Кроме того, рассмотрим характеристики гравитационного поля по профилю, проходящему по линии  $y=0$ . В этом случае выражение (9.2) запишется в виде

$$V_z^{шар}(x, 0, 0) = f M \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (9.3)$$

Дифференцируя по  $x$  выражение (9.3), получим горизонтальную производную силы тяжести:

$$V_{xz}^{шар}(x, 0, 0) = -3 f M \frac{x h}{(x^2 + h^2)^{5/2}} \quad (9.4)$$

Дифференцируя выражение (9.1) дважды по  $x$  и  $z$ , получим другие вторые производные:

$$V_{xx}^{шар}(x, 0, 0) = f M \frac{2x^2 - h^2}{(x^2 + h^2)^{5/2}} \quad (9.5)$$

$$V_{zz}^{uap}(x,0,0) = f M \frac{2h^2 - x^2}{(x^2 + h^2)^{5/2}} \quad (9.6)$$

Максимальное значение функции  $V_z(x,0,0)$  находится в точке  $x=0$ .

Подставляя значения этой координаты в (9.3), получим:

$$(V_z)_{max} = f M \frac{1}{h^2} \quad (9.7)$$

Для второй вертикальной производной  $V_{zz}(x,0,0)$  имеется три экстремума: два минимума и один максимум. Чтобы найти положение этих экстремумов, нужно продифференцировать выражение (9.7) по  $x$  и приравнять полученный результат к нулю (используем признак экстремума функции: производная в этих точках должна равняться нулю). В результате получим, что положение минимумов приходится на точки

$$x = \pm 2h \quad (9.8)$$

Значение функции  $V_{zz}$  в этих точках равно:

$$(V_{zz})_{min} = -0.036 f M \frac{1}{h^3} \quad (9.9)$$

Максимум функции  $V_{zz}(x,0,0)$  находится в точке  $x=0$  и равен

$$(V_{zz})_{max} = 2 f M \frac{1}{h^3} \quad (9.10)$$

Как видно из формул (9.3) и (9.10), поле первой вертикальной производной гравитационного потенциала над шаром убывает пропорционально квадрату глубины его залегания, а поле второй вертикальной производной – пропорционально кубу глубины залегания шара.

### ***Притяжение горизонтальным круговым цилиндром (горизонтальным стержнем)***

Горизонтальный тонкий круговой цилиндр (стержень) можно представить как цепочку материальных точек, расположенных на линии оси стержня. Притяжение горизонтального стержня с любым конечным радиусом поперечного сечения эквивалентно притяжению горизонтального тонкого стержня той же массы. Масса  $dM$  элементарного отрезка  $dl$  тонкого

стержня равна

$$dM = dl \lambda , \quad (9.11)$$

где  $\lambda$  – линейная плотность. Тогда притяжение элемента массы  $dM$  равна:

$$dV_z^u(x, y, z) = f \lambda \frac{(z - z') dl}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (9.12)$$

Пусть стержень расположен вдоль оси  $Y$  и ограничен координатами  $y_1, y_2$ . Тогда полное притяжение горизонтальным круговым цилиндром (стержнем) будет равно:

$$V_z^u(x, y, z) = f \lambda \int_{y_1}^{y_2} \frac{(z - z')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dy' = \frac{f \lambda (z - z')}{(x - x')^2 + (z - z')^2} \left[ \frac{(y - y_2)}{((x - x')^2 + (y - y_2)^2 + (z - z')^2)^{1/2}} - \frac{(y - y_1)}{((x - x')^2 + (y - y_1)^2 + (z - z')^2)^{1/2}} \right] \quad (9.13)$$

Расположим начало координат так, чтобы  $x$ -координата стержня равнялась нулю:  $x' = 0$ ; переобозначим переменную  $z' = h$ . Пусть наш профиль наблюдений расположен вкrest горизонтальному стержню по линии  $z = 0, y = 0$ . Тогда формула (9.13) запишется в виде:

$$V_z^u(x, 0, 0) = \frac{f \lambda h}{x^2 + h^2} \left[ \frac{y_2}{(x^2 + y_2^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{y_1}{(x^2 + y_1^2 + h^2)^{1/2}} \right] \quad (9.14)$$

Если стержень бесконечного простираения, то есть когда  $y_{1,2} \rightarrow \pm \infty$ , содержимое квадратных скобок в выражении (9.14) в этих пределах будет равно:

$$\lim_{y_{1,2} \rightarrow \pm \infty} \left[ \frac{y_2}{(x^2 + y_2^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{y_1}{(x^2 + y_1^2 + h^2)^{1/2}} \right] = 2 ,$$

и (9.14) переписывается в виде

$$V_z^u(x, 0, 0) = \frac{2 f \lambda h}{x^2 + h^2} \quad (9.15)$$

Дифференцируя (8.15) по  $x$  и  $z$ , получим вторые производные потенциала для горизонтального стержня:

$$V_{xz}^u(x, 0, 0) = -\frac{4 f \lambda h x}{(x^2 + h^2)^2} \quad (9.16)$$

$$V_{zz}^u(x,0,0) = \frac{2 f \lambda (h^2 - x^2)}{(x^2 + h^2)^2} \quad (9.17)$$

Найдем положение и значение экстремумов функций (9.15)-(9.17). Для  $V_z$  существует один положительный экстремум в точке  $x=0$  :

$$(V_z)_{max} = 2 f \lambda \frac{1}{h} \quad (9.18)$$

Для  $V_{zz}$  – один положительный точке  $x=0$  и два отрицательных в точках  $x = \pm h\sqrt{3}$  :

$$(V_{zz})_{max} = 2 f \lambda \frac{1}{h^2} \quad (9.19)$$

$$(V_{zz})_{min} = -0.25 f \lambda \frac{1}{h^2} \quad (9.20)$$

Для  $V_{xz}$  – положительный и отрицательный, равные по модулю в точках  $\pm h\sqrt{3}/3$  :

$$(V_{xz})_{\frac{max}{min}} = \pm 1.299 f \lambda \frac{1}{h^2} \quad (9.21)$$

Графики соответствующих производных для шара и горизонтального кругового цилиндра в целом похожи, но для шара аномалии с увеличением как по переменной  $x$  так и по глубине залегания убывают быстрее. Это объясняется большей локализованностью фигуры шара в пространстве.

### ***Притяжение вертикальной материальной плоскостью***

Вертикальную материальную плоскость можно представить как вертикальную цепочку тонких горизонтальных стержней. Введем поверхностную плотность:

$$\mu = \frac{\lambda}{h_2 - h_1} \quad (9.22)$$

Для элемента массы единицы длины получим:

$$d \lambda = \mu dh \quad (9.23)$$

Притяжение этого элемента массы равно:

$$dV_z = 2 f \mu \frac{h dh}{x^2 + h^2} \quad (9.24)$$

Интегрируя от  $h_1$  до  $h_2$ , получим притяжение всей плоскости:

$$V_z(x,0) = 2 f \mu \int_{h_1}^{h_2} \frac{h dh}{x^2 + h^2} = f \mu \ln \frac{x^2 + h_2^2}{x^2 + h_1^2} \quad (8.25)$$

### **Притяжение прямоугольной двумерной призмой**

Прямоугольную двумерную призму можно представить в виде горизонтальной цепочки вертикальных материальных плоскостей. Полагая  $x = 0$ , имеем:

$$V_z(0,0) = f \sigma \left[ l_1 \ln \frac{h_2^2 + l_1^2}{h_1^2 + l_1^2} - l_2 \ln \frac{h_2^2 + l_2^2}{h_1^2 + l_2^2} \right] + \quad (9.26)$$

$$2 f \sigma \left[ h_2 \left( \arctan \frac{l_1}{h_1} - \arctan \frac{l_2}{h_2} \right) + h_1 \left( \arctan \frac{l_2}{h_1} - \arctan \frac{l_1}{h_1} \right) \right]$$

### **Притяжение бесконечной материальной полуплоскостью**

Поместим начало координат над левой границей полуплоскости. Представим полуплоскость как полубесконечную цепочку горизонтальных стержней. В результате получим:

$$V_z(x,0) = 2 f \mu \int_0^{\infty} \frac{h dx'}{(x-x')^2 + h^2} = 2 f \mu \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{h} \right) \quad (9.27)$$

### **Вопросы для самоконтроля**

1. В чем, в общем случае, принципиальное отличие прямой задачи от обратной?
- В каких задачах имеет смысл использовать логарифмического потенциал?
3. Что понимается под точечной массой в случае поля логарифмического потенциала?

## *Литература*

Бычков С.Г., Догаль А.С., Симанов А.А. Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. Пермь, УрО РАН, 2015 – 142 с.

Торге В., Гравиметрия. М., Мир, 1999 – 429 с.

Знаменский В.В., Общий курс полевой геофизики. М., Недра, 1989 – 520 с.

Миронов В.С., Курс гравиразведки. Л., Недра, 1972 – 512 с.

Булычёв А.А., Джамалов Р.Г., Сидоров Р.В. Применение данных спутниковой системы измерения поля гравитации Земли (GRACE) для изучения и оценки гидролого-гидрогеологических характеристик крупных речных бассейнов // Водные ресурсы. 2012. No 5. С. 476-484.