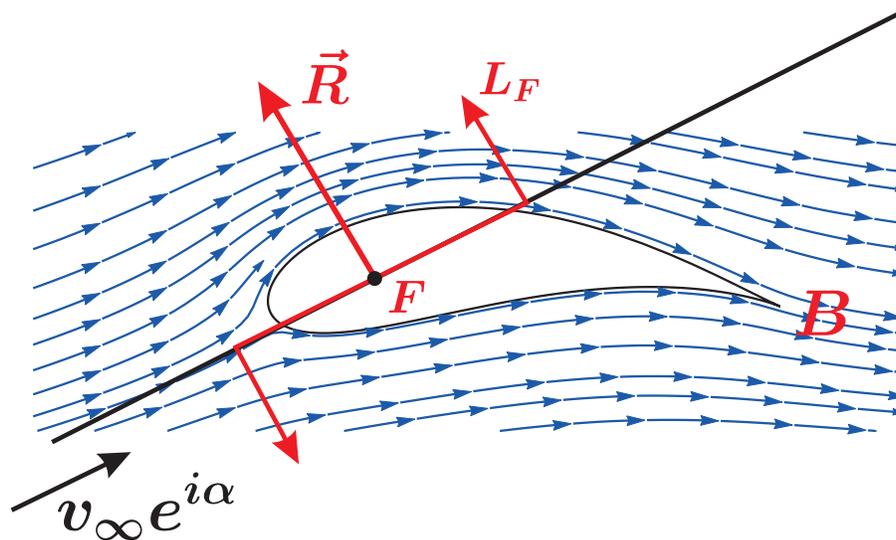


Д.В. МАКЛАКОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Часть 1. Крыловой профиль в плоскопараллельном потоке

Учебное пособие



Казань – 2020

**Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского
Кафедра аэрогидромеханики**

Д.В. МАКЛАКОВ

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ГИДРОДИНАМИКИ
Часть 1. Крыловой профиль в плоскопараллельном потоке**

Учебное пособие

Казань – 2020

УДК 532.5

Публикуется по рекомендации Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Протокол №7 от 7 мая 2020 года

Принято на заседании кафедры аэрогидромеханики
Протокол №8 от 24 апреля 2020 года

Научный редактор
доктор физико-математических наук
профессор А.Г. Егоров

Рецензент
доктор физико-математических наук
профессор кафедры математического анализа КФУ И.Р. Каюмов

Маклаков Д.В.

Аналитические методы гидродинамики. Часть 1. Крыловой профиль в плоскопараллельном потоке. Учебное пособие / Д.В. Маклаков. – Казань: Казан. ун-т, 2020. – 59 с.

Учебное пособие основано на курсе лекций и практических занятий для студентов старших курсов и магистров Института математики и механики КФУ. В нём излагается теория обтекания профилей идеальной жидкостью на основе классического метода конформных отображений. По каждой теме студенту предлагаются задания, выполнение которых с помощью пакета Математика способствует освоению изложенного материала. Пособие может быть полезно также аспирантам и инженерам, интересующимся приложениями комплексного анализа к задачам гидромеханики.

©Маклаков Д.В., 2020
©Казанский университет, 2020

Содержание

1	Основные сведения из кинематики плоских установившихся течений идеальной жидкости	7
1.1	Комплексный потенциал и комплексно-сопряженная скорость .	7
1.2	Свойства комплексного потенциала	8
1.3	Потенциалы простейших течений	10
1.3.1	Равномерный поток	10
1.3.2	Источник в точке z_0	10
1.3.3	Диполь (дублет) в точке z_0	12
1.3.4	Вихрь в точке z_0	13
1.3.5	Вихреисточник в точке z_0	14
1.3.6	Потенциалы особенностей высших порядков	15
1.3.7	Источник или вихрь вблизи твёрдой стенки (метод отражения)	16
1.4	Примеры непосредственного построения комплексных потенциалов	17
1.4.1	Пример 1. Обтекание выступа в виде пластинки, перпендикулярной горизонтальному дну.	17
1.4.2	Замечание о разрезах при вычислении аргумента многозначных функций	19
1.4.3	Пример 2. Обтекание цилиндра, лежащего на дне	20
	Задание 1	22
2	Обтекание кругового цилиндра	23
2.1	Бесциркуляционное обтекание	23
2.2	Циркуляционное обтекание цилиндра	25
	Задание 2	29
3	Обтекание цилиндра произвольного сечения	29
3.1	Обтекание эллипса	31
3.2	Обтекание пластинки	34
	Задание 4	35

4	Постулат Жуковского–Чаплыгина	35
4.1	Формулировка постулата	35
4.2	Острая кромка – точка схода потока	36
4.3	Формула для определения циркуляции	37
	Задание 5	38
5	Профили Жуковского	39
5.1	Потенциал обтекания профиля Жуковского	42
5.2	Обобщённые профили Жуковского	43
	Задание 6	43
6	Формулы Чаплыгина	44
6.1	Интегральные формулы Чаплыгина	44
6.2	Обтекание одиночного профиля	46
6.3	Обтекание пластинки	48
	Задание 7	50
7	Фокус профиля	50
7.1	Понятие фокуса профиля	50
7.2	Линия действия результирующей силы	54
7.3	О параболе устойчивости	57
	Задание 8	59
	Литература	59

1 Основные сведения из кинематики плоских установившихся течений идеальной жидкости

1.1 Комплексный потенциал и комплексно-сопряженная скорость

Если течение безвихревое, то оно имеет потенциал:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где \vec{v} – вектор скорости, v_x и v_y – компоненты вектора скорости, x и y – декартовы координаты.

Уравнение неразрывности приводит к уравнению Лапласа для потенциала φ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Введем сопряжённую к $\varphi(x, y)$ гармоническую функцию $\psi(x, y)$. Тогда φ и ψ удовлетворяют условиям Коши–Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Функция $w(z) = \varphi + i\psi$ будет аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$). Функцию $w(z)$ называют комплексным потенциалом.

Условия (1.1) обеспечивают независимость производной $\frac{dw}{dz}$ от направления дифференцирования. В частности, дифференцируем $w(z)$ в направлении действительной оси:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Теперь дифференцируем в направлении мнимой оси:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial(iy)} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{i\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.2) у нас $dz = \partial x$, в соотношениях (1.3) – $dz = \partial(iy)$. Как видно из формул (1.2) и (1.3), результат не зависит от направления дифференцирования. Таким образом, производная от аналитической функции зависит только от точки, в которой проводится дифференцирование.

Плоское поле векторов можно представить как поле комплексных чисел, например, $\vec{v} = v_x + iv_y$. Из соотношений (1.2) и (1.3) вытекает, что

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y.$$

Комплексное число $v_x - iv_y$ является комплексно–сопряжённым к числу $\vec{v} = v_x + iv_y$, поэтому производную комплексного потенциала $w'(z)$ называют комплексно–сопряжённой скоростью.

1.2 Свойства комплексного потенциала

Обозначим через v модуль вектора скорости, а через θ – угол, образованный вектором скорости с осью x . Тогда

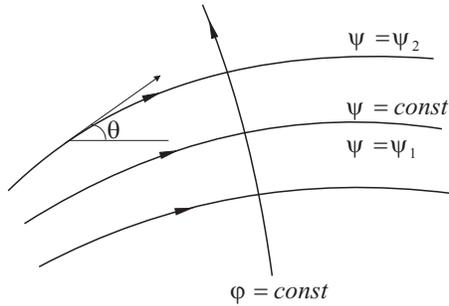


Рис. 1.

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_y &= v \sin \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Возьмём любую линию тока и будем двигаться по этой линии в направлении движения жидкости. Для потенциала $\varphi(x, y)$ имеем

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v \cos \theta dx + v \sin \theta dy.$$

Учтём, что

$$dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta, \quad (1.5)$$

где s – длина дуги линии тока, отсчитываемая в сторону направления движения жидкости. Получаем

$$d\varphi = v \cos^2 \theta + v \sin^2 \theta = v ds.$$

Аналогично действуем для функции тока $\psi(x, y)$ и снова привлекаем равенства (1.5):

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v \sin \theta dx + v \cos \theta dy = \\ -v \sin \theta \cos \theta ds + v \cos \theta \sin \theta ds = 0.$$

Таким образом, вдоль линии тока

$$d\varphi = vds, \quad d\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = const. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь линию, ортогональную линиям тока. Вдоль такой линии

$$dx = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) ds = -\sin \theta ds, \\ dy = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) ds = \cos \theta ds.$$

Аналогично (1.6) найдем, что вдоль этой линии

$$d\varphi = 0, \quad d\psi = vds. \quad (1.7)$$

Из первой формулы (1.7) следует, что вдоль такой линии потенциал $\varphi = const$, поэтому линии ортогональные линиям тока называются эквипотенциалами. Кроме того, из второй формулы (1.7) вытекает, что разность $\psi_2 - \psi_1$ есть расход жидкости между двумя линиями тока $\psi = \psi_2$ и $\psi = \psi_1$.

Физический смысл имеют только производные функций φ и ψ , поэтому комплексный потенциал определяется с точностью до произвольной комплексного слагаемого $w_0 = \varphi_0 + i\psi_0$.

Отметим, что через модуль v и угол наклоны θ вектора скорости комплексно-сопряженная скорость выражается так:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = ve^{-i\theta}.$$

1.3 Потенциалы простейших течений

1.3.1 Равномерный поток

Комплексный потенциал равномерного потока $w = V_0 z$, где V_0 – комплексная постоянная. Комплексно сопряженная скорость будет

$$\frac{dw}{dz} = V_0.$$

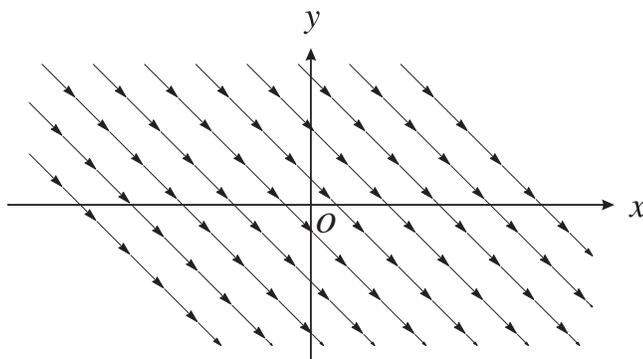


Рис. 2. Линии тока равномерного потока с потенциалом $w = (1 + i)z$

Заметим, что V_0 – это комплексная величина, сопряженная вектору скорости \vec{v} . В частности, если $V_0 = 1 + i$, то вектор скорости такого равномерного потока будет $\vec{v} = 1 - i$.

1.3.2 Источник в точке z_0

Комплексный потенциал источника, расположенного в точке z_0 , имеет вид

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (1.8)$$

Все линии тока от источника – прямые линии, исходящие из z_0 . В самом деле,

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz} = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} = \frac{q}{2\pi} \frac{\overline{z - z_0}}{(z - z_0)(\overline{z - z_0})} = \frac{q}{2\pi} \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|^2},$$

$$\vec{v} = v_x + iv_y = \frac{q}{2\pi} \frac{z - z_0}{|z - z_0|^2}.$$

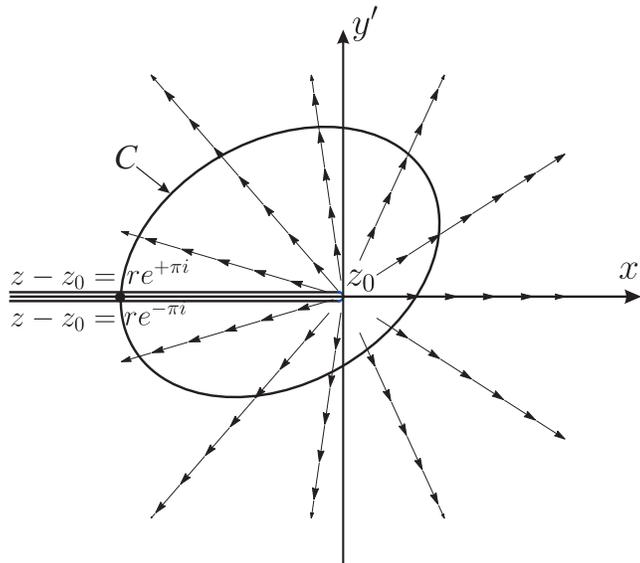


Рис. 3. Линии тока у источника

Отсюда видно, что вектор скорости \vec{v} направлен также, как и вектор $z - z_0$. Линии тока от источника показаны на рис. 3 в системе координат x', y' , начало которой помещено в точку z_0 . Эквипотенциали для источника – это окружности с центром в точке z_0 .

Следует отметить, что в комплексной области функция

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

является многозначной функцией, так как $\arg z$ может быть определен по-разному. Во всех языках программирования и математических пакетах (C++, Fortran, Mathematica, Matlab) стандартное определение $\arg z$ имеет вид

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Это означает, что для выделения однозначной ветви у $\ln(z - z_0)$ необходимо провести разрез из точки z_0 в отрицательную сторону оси Ox , как показано на рис. 3. На верхнем и нижнем берегах этого разреза функция $\ln(z - z_0)$ будет принимать различные значения:

$$\begin{aligned} \ln(z - z_0) &= \ln |z - z_0| + \pi i && \text{на верхнем берегу,} \\ \ln(z - z_0) &= \ln |z - z_0| - \pi i && \text{на нижнем берегу.} \end{aligned}$$

Рассмотрим замкнутый контур C , охватывающий z_0 и пересекающий

разрез в точках $z_0 + re^{+\pi i} = z_0 - r$ и $z_0 + re^{-\pi i} = z_0 - r$. Обойдем источник по контуру C против часовой стрелки от точки $z_0 + re^{-\pi i}$ до $z_0 + re^{+\pi i}$. Приращение функции тока $\psi = \text{Im } w$ при таком обходе равно расходу жидкости через контур. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Im}[w(re^{+\pi i}) - w(re^{-\pi i})] &= \frac{q}{2\pi} \text{Im}[\ln(re^{+\pi i}) - \ln(re^{-\pi i})] = \\ &= \frac{q}{2\pi} \text{Im}[\ln r + \pi i - \ln r + \pi i] = \text{Im}(qi) = q. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что величина q есть расход жидкости через любой замкнутый контур, охватывающий источник. Величина q называется обильностью или интенсивностью источника. Если $q < 0$, то получится сток.

1.3.3 Диполь (дублет) в точке z_0

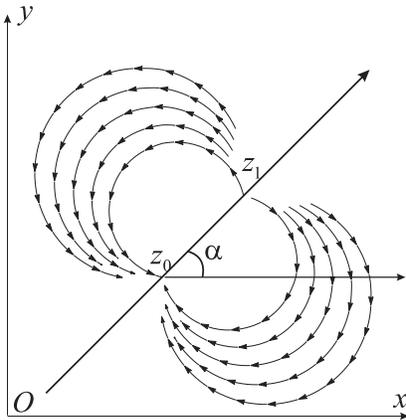


Рис. 4.

Комплексный потенциал такого течения будет

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_1) - \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) = \frac{M}{2\pi\varepsilon} [\ln(z - z_1) - \ln(z - z_0)].$$

Пусть теперь $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} w &= \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\ln(z - z_1) - \ln(z - z_0)] = \\ &= \frac{M}{2\pi} e^{i\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon e^{i\alpha}} [\ln(z - z_1) - \ln(z - z_0)]. \end{aligned}$$

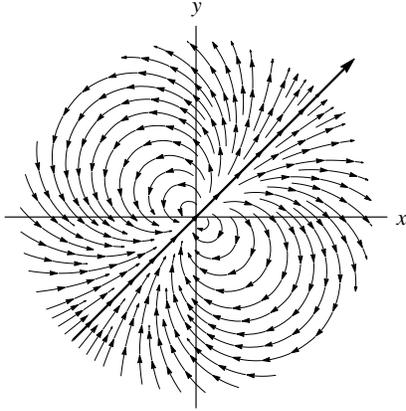


Рис. 5. Линии тока для диполя

Обозначим $\Delta z = z_1 - z_0 = \varepsilon e^{i\alpha}$. Учтем, что $z_1 = z_0 + \Delta z$. Подставив это значение z_1 в предыдущую формулу, будем иметь

$$\begin{aligned} w &= \frac{M}{2\pi} e^{i\alpha} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\ln(z - z_0 - \Delta z) - \ln(z - z_0)}{\Delta z} = \\ &= -\frac{M}{2\pi} e^{i\alpha} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\ln(z - z_0 - \Delta z) - \ln(z - z_0)}{-\Delta z} = \\ &= -\frac{M}{2\pi} e^{i\alpha} \frac{d}{dz} [\ln(z - z_0)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$w = -\frac{M}{2\pi} e^{i\alpha} \frac{1}{z - z_0}. \quad (1.9)$$

Комплексный потенциал, выражаемый формулой (1.9) – это и есть потенциал диполя. Линии тока диполя – окружности, касающиеся его оси. Ось диполя всегда направлена от стока к источнику.

1.3.4 Вихрь в точке z_0

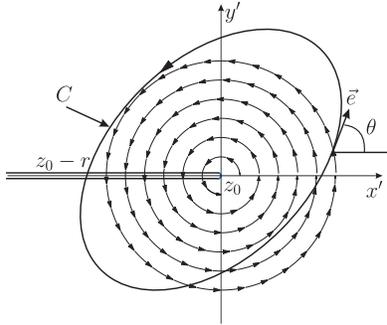


Рис. 6. Линии тока для вихря

Комплексный потенциал вихря, расположенного в точке z_0 имеет вид

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0). \quad (1.10)$$

Линии тока – окружности с центром в точке z_0 . Окружим z_0 произвольным замкнутым контуром C , который обходится против часовой стрелки.

Вычислим циркуляцию γ по этому контуру. Согласно определению, циркуляция определяется формулой

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{e}) ds,$$

где \vec{e} – единичный вектор касательной к контуру C , направленный в сторону обхода. Пусть θ – угол наклона касательной контура C . Тогда комплексное представление вектора \vec{e} будет $\vec{e} = e^{i\theta}$.

Замечаем, что если $a = a_x + ia_y$ и $b = b_x + ib_y$ два комплексных числа,

представляющих векторы \vec{a} и \vec{b} , то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y = \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(\bar{a}b),$$

где, как обычно, черта означает комплексное сопряжение. Отсюда следует, что

$$(\vec{v} \cdot \vec{e}) ds = \operatorname{Re} \left[\frac{dw}{dz} e^{i\theta} \right] ds = \operatorname{Re} \left[\frac{dw}{dz} e^{i\theta} ds \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{dw}{dz} dz \right],$$

так как $dz = e^{i\theta} ds$. Значит циркуляция будет равна

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{Re} \left[\frac{dw}{dz} dz \right] &= \operatorname{Re} \oint_C dw = \operatorname{Re} \{ w [z_0 + re^{+\pi i}] - w [z_0 + re^{-\pi i}] \} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln(re^{+\pi i}) - \ln(re^{-\pi i})] \right\} = \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} 2\pi i \right) = \Gamma, \end{aligned}$$

где $z_0 + re^{+\pi i} = z_0 - r$ и $z_0 + re^{-\pi i} = z_0 - r$ суть точки пересечения контура C с разрезом, выделяющим однозначную ветвь у $\ln(z - z_0)$. Значит, параметр Γ в формуле (1.10) определяет циркуляцию по замкнутому контуру, охватывающему вихрь, и потому называется циркуляцией вихря.

1.3.5 Вихреисточник в точке z_0

Вихреисточник – это комбинация вихря и источника с комплексным потенциалом

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (1.11)$$

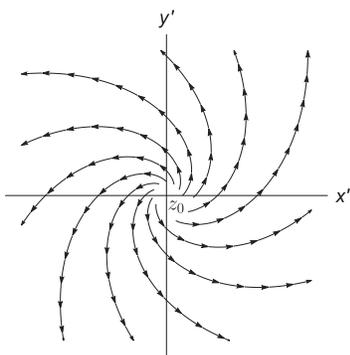


Рис. 7. Линии тока для вихреисточника

Пусть $z - z_0 = re^{i\alpha}$. Тогда

$$w = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\alpha),$$

$$\varphi = \operatorname{Re} w = \frac{q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \alpha,$$

$$\psi = \operatorname{Im} w = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \frac{q}{2\pi} \alpha.$$

Найдем линии тока для вихреисточника. Для этого рассмотрим уравнение $\psi = C = \text{const}$:

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \frac{q}{2\pi} \alpha = C \Rightarrow r = C_1 \exp\left(\frac{q}{\Gamma} \alpha\right),$$

где $C_1 = \exp(-2\pi C/\Gamma)$.

Следовательно, линии тока от вихреисточника будут логарифмическими спиралями. Легко видеть, что эквипотенциали также являются логарифмическими спиралями.

1.3.6 Потенциалы особенностей высших порядков

Мы выяснили, что потенциалы источника, вихря и вихреисточника имеют логарифмическую особенность, в точке расположения особенности z_0 , а диполь имеет полюс первого порядка в этой точке. В приложениях теории встречаются и потенциалы с особенностями более высоких порядков. Квадруполь имеет полюс второго порядка с комплексным потенциалом $w = C/(z - z_0)^2$, октуполь имеет полюс третьего порядка с потенциалом $w = C/(z - z_0)^3$. Квадруполь получается в результате сближения двух диполей, октуполь – в результате сближения двух квадрупольей. Картины линий тока для квадруполья и октуполья показаны на рис. 8. Квадруполь имеет четыре лепестка, октуполь – шесть. Особенность вида $w = C/(z - z_0)^4$ будет иметь восемь лепестков.

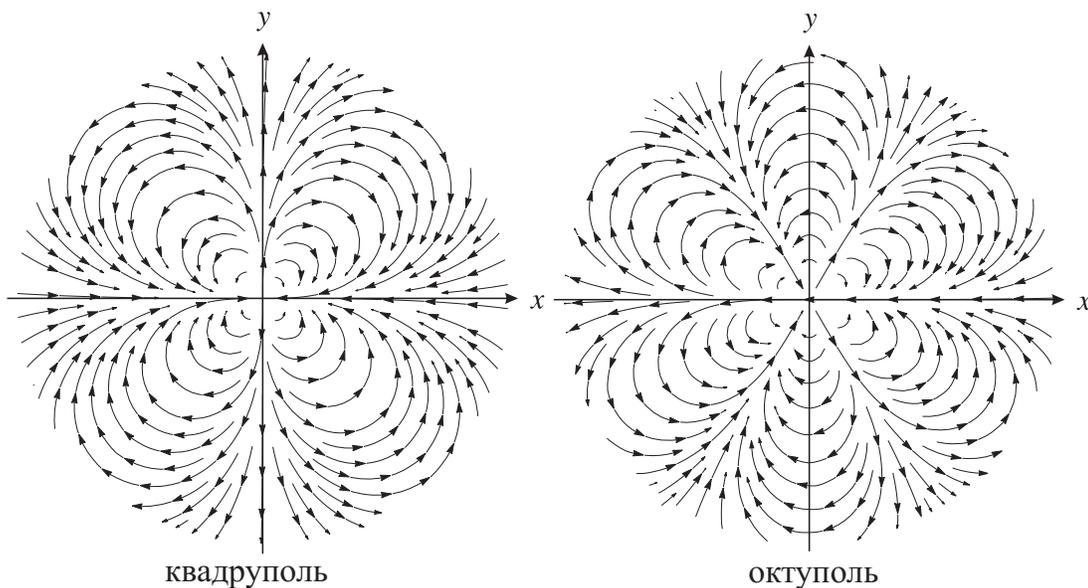


Рис. 8. Линии тока квадруполья и октуполья

1.3.7 Источник или вихрь вблизи твёрдой стенки (метод отражения)

Поместим источник обильности q в точку z_0 , а в симметричной относительно действительной оси точке \bar{z}_0 также расположим источник той же самой обильности q . Комплексный потенциал такого течения будет

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{q}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0).$$

На действительной оси при $z = x$ получим

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln(x - z_0) + \frac{q}{2\pi} \ln(x - \bar{z}_0) = \frac{q}{2\pi} \ln[(x - z_0)(x - \bar{z}_0)].$$

Величины $x - z_0$ и $x - \bar{z}_0$ являются комплексно сопряжёнными числами, поэтому их произведение есть положительное действительное число, так как всегда $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Следовательно, при $z = x$ функция тока $\psi = \text{Im } w = 0$. Значит действительная ось является линией тока и мы получили источник, расположенный вблизи твёрдой стенки.

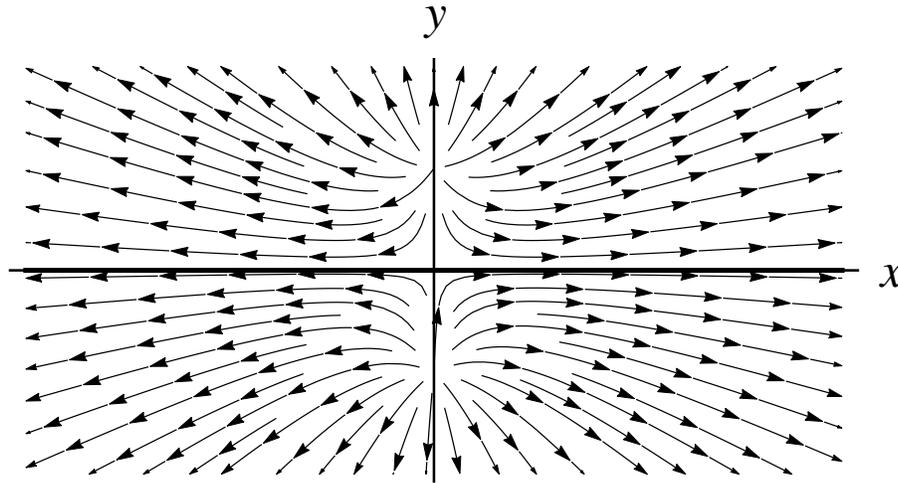


Рис. 9. Источник вблизи твёрдой стенки

Аналогичная ситуация будет и с вихрем, однако если в точке z_0 расположен вихрь с циркуляцией Γ , то в симметричной точке \bar{z}_0 должен располагаться вихрь с отрицательной циркуляцией $-\Gamma$, то есть

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \bar{z}_0).$$

Для такого потенциала картина линий тока показана на рис. 10.

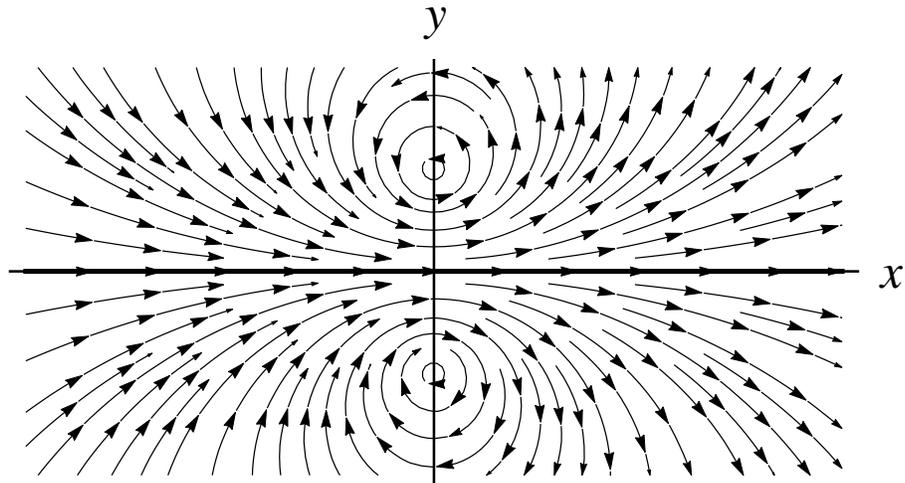


Рис. 10. Вихрь вблизи твёрдой стенки

1.4 Примеры непосредственного построения комплексных потенциалов

Если комплексный потенциал течения $w(z)$ – известная функция, то мы можем определить поле скоростей

$$v_x = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz}, \quad v_y = \operatorname{Im} \frac{dw}{dz},$$

построить линии тока и рассчитать все характеристики течения. К сожалению, примеров потенциалов для течений, имеющих определённый физический смысл существует очень ограниченное количество.

1.4.1 Пример 1. Обтекание выступа в виде пластинки, перпендикулярной горизонтальному дну.

Рассмотрим течение идеальной жидкости, изображённое на рис. 11, а. Область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ – верхняя полуплоскость. Чтобы построить $w(z)$ надо найти конформное отображение области течения на верхнюю полуплоскость с нормировкой

$$\infty \rightarrow \infty, \quad ih \rightarrow 0, \quad \frac{dw}{dz}(\infty) = v_\infty,$$

где v_∞ – скорость на бесконечности.

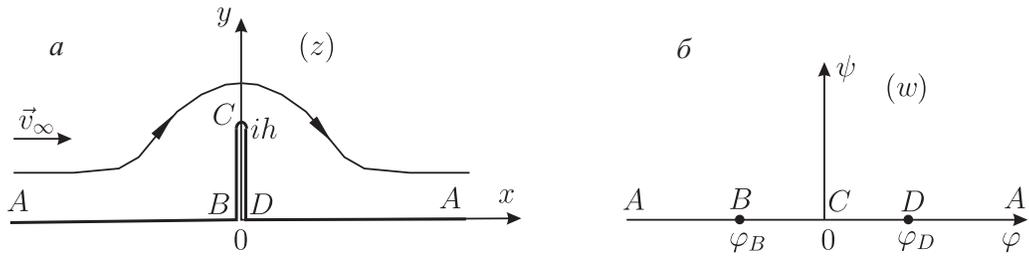


Рис. 11.

Найдем это отображение с помощью последовательности конформных отображений.

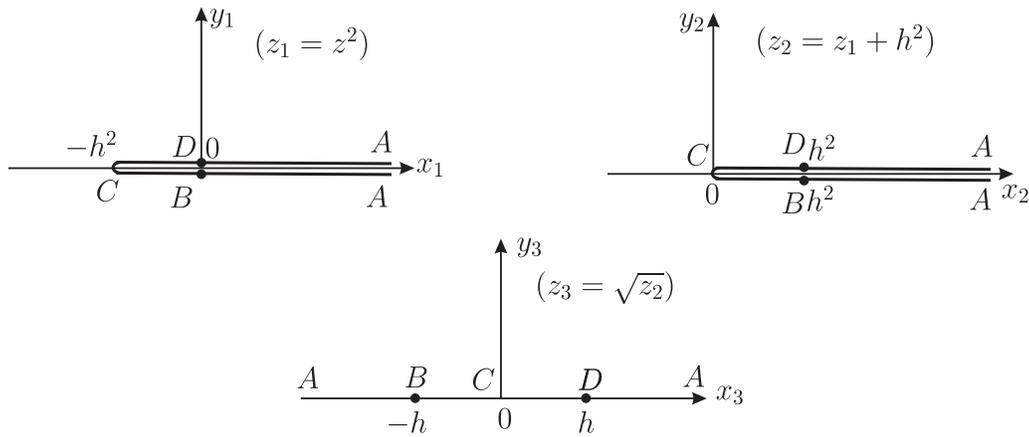


Рис. 12.

Чтобы от области в плоскости z_3 перейти в область w необходимо z_3 пропорционально растянуть. Тогда

$$w = A\sqrt{z^2 + h^2},$$

где A – действительная постоянная. Константу A надо подобрать таким образом, чтобы $\frac{dw}{dz}(\infty) = v_\infty$. Имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Az}{\sqrt{z^2 + h^2}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Az}{\sqrt{z^2 + h^2}} = A = v_\infty \Rightarrow A = v_\infty.$$

Таким образом, окончательно

$$w(z) = v_\infty \sqrt{z^2 + h^2}. \quad (1.12)$$

В пакетах по программированию (C++, Fortran, Mathematica, Matlab) функция квадратного корня обычно обозначается Sqrt. Если положить, что

$w(z) = v_\infty \text{Sqrt}(z^2 + h^2)$ и построить линии тока, то получится картина изображенная на рис.13:

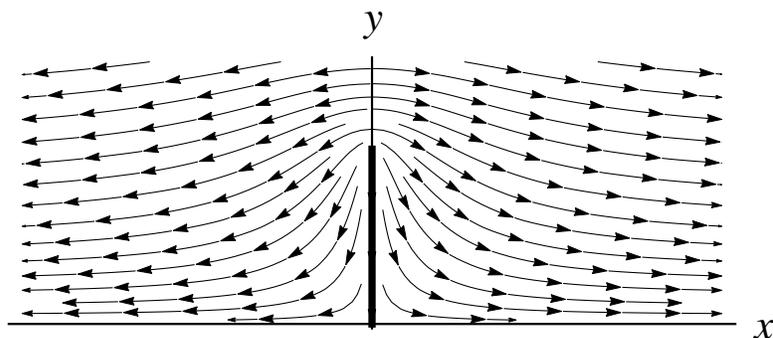


Рис. 13. Неправильная картина линий тока

Дело в том, что в формуле (1.12) при вычислении \sqrt{z} функция $\arg z$ изменяется в пределах

$$0 \leq \arg z < 2\pi$$

(разрез проходит по положительной части оси Ox), а при вычислении стандартного $\text{Sqrt}(z)$

$$-\pi < \arg z \leq \pi,$$

то есть разрез проходит по отрицательной части оси Ox .

Как же исправить ситуацию?

1.4.2 Замечание о разрезах при вычислении аргумента многозначных функций

Для того чтобы выделить однозначную ветвь аргумента в комплексной плоскости z , необходимо провести разрез. Пусть этот разрез проходит под углом α к оси Ox .

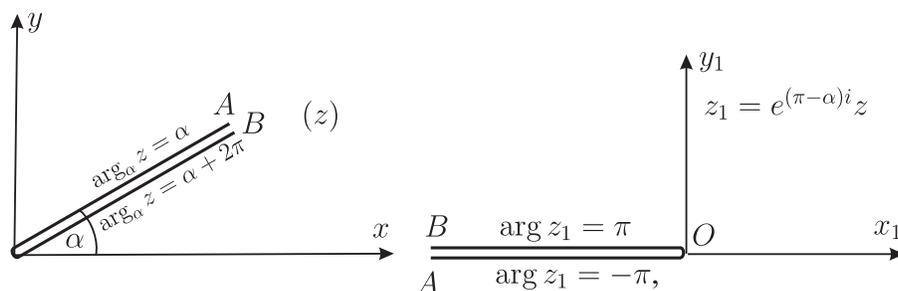


Рис. 14.

Аргумент z при таком разрезе будем обозначать $\arg_{\alpha} z$, при этом

$$\alpha \leq \arg_{\alpha} z < \alpha + 2\pi.$$

Стандартный аргумент с разрезом по отрицательной части оси Ox обозначаем просто $\arg z$, и при этом $-\pi < \arg z \leq \pi$. Легко видеть (проверить самостоятельно), что

$$\arg_{\alpha} z = \arg \left[e^{(\pi-\alpha)i} z \right] + \pi + \alpha.$$

Для формулы (1.12) угол $\alpha = 0$, поэтому

$$\arg_{\alpha=0} z = \arg (e^{\pi i} z) + \pi = \arg(-z) + \pi,$$

$$\arg_{\alpha=0} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \arg(-z) + \frac{1}{2}\pi.$$

Для формулы (1.12) получаем

$$\sqrt{z} = i \operatorname{Sqrt}(-z) \quad \Rightarrow \quad w(z) = i \operatorname{Sqrt}(-z^2 - h^2).$$

Картина линий тока становится правильной.

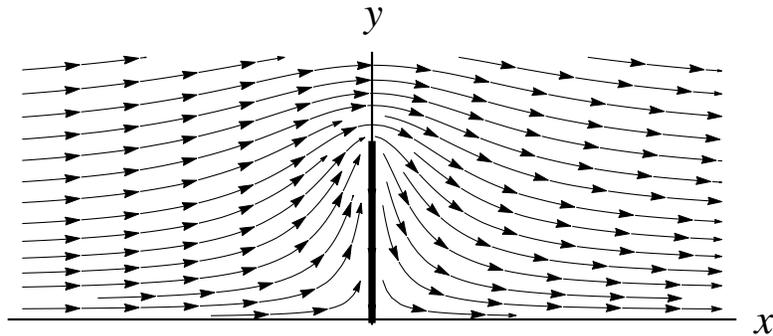


Рис. 15. Правильная картина линий тока

1.4.3 Пример 2. Обтекание цилиндра, лежащего на дне

Рассмотрим цилиндр радиуса r , лежащий на горизонтальном дне. Начало координат в точке касания цилиндра и дна. Область изменения комплексного потенциала – верхняя полуплоскость. Чтобы найти $w(z)$ надо найти конформное отображение области течения на верхнюю полуплоскость. Прдела-

ем это с помощью последовательности конформных отображений.

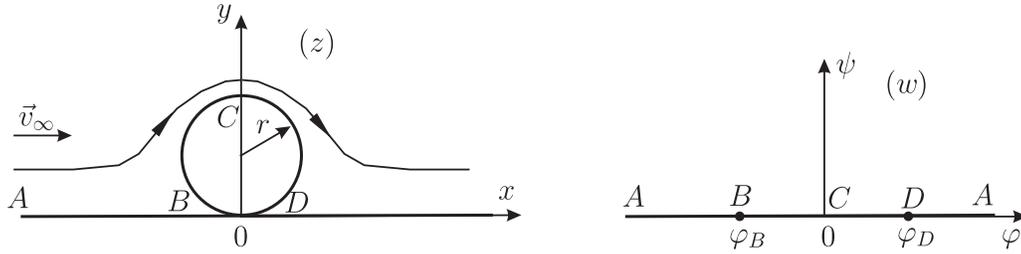


Рис. 16.

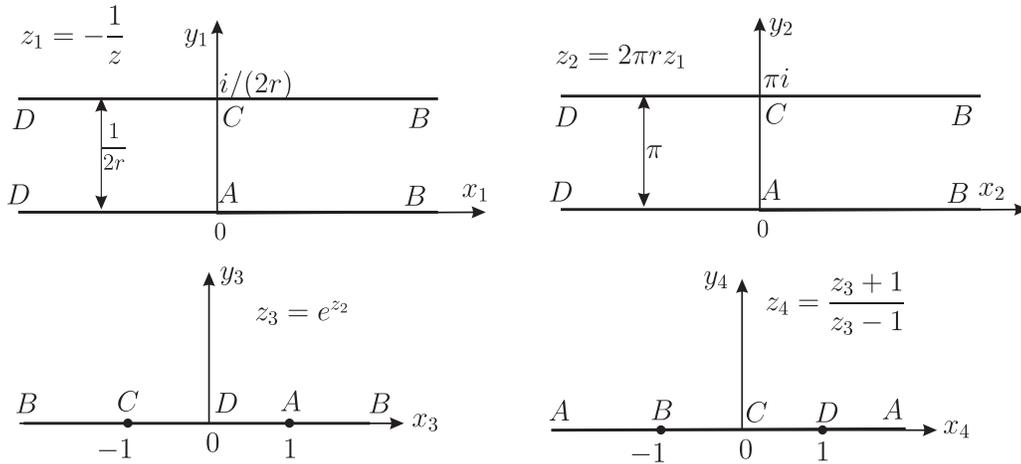


Рис. 17.

Чтобы из области в плоскости z_4 получить область изменения w надо положить $w = \varphi_D z_4$. Объединяем все отображения:

$$\begin{aligned} w &= -\varphi_D \frac{e^{-2\pi r/z} + 1}{e^{-2\pi r/z} - 1} = \varphi_D \frac{e^{2\pi r/z} + 1}{e^{2\pi r/z} - 1} = \\ &= \varphi_D \frac{e^{\pi r/z} + e^{-\pi r/z}}{e^{\pi r/z} - e^{-\pi r/z}} = \varphi_D \operatorname{cth} \frac{\pi r}{z}. \end{aligned}$$

Найдем константу φ_D . Должно быть

$$\frac{dw}{dz}(\infty) = v_\infty, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\varphi_D \pi r}{z^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi r}{z}}, \quad \frac{dw}{dz}(\infty) = \frac{\varphi_D}{\pi r}.$$

$$\frac{\varphi_D}{\pi r} = v_\infty \Rightarrow \varphi_D = v_\infty \pi r.$$

Окончательно

$$w(z) = v_\infty \pi r \operatorname{cth} \frac{\pi r}{z}.$$

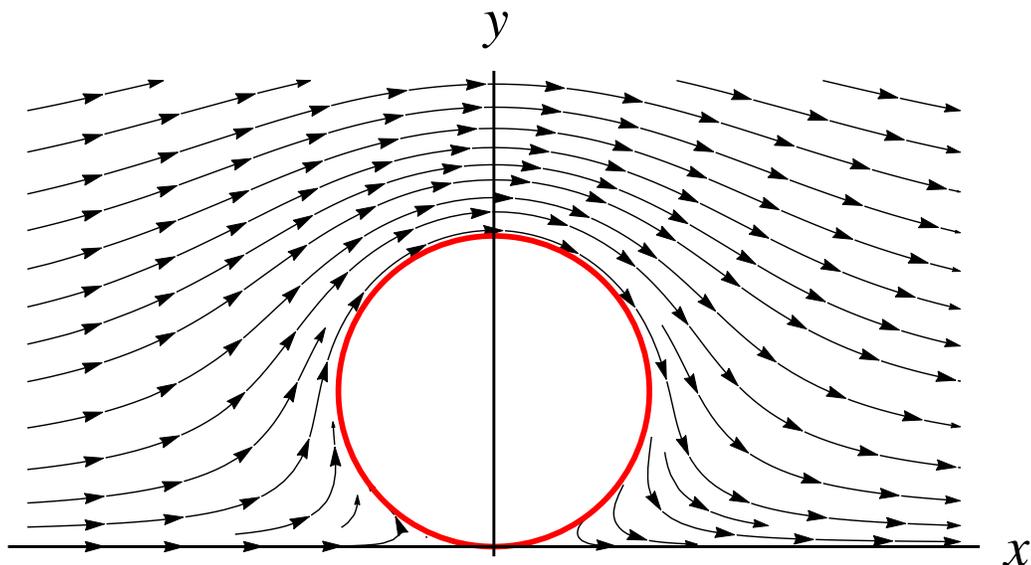


Рис. 18. Линии тока для цилиндра, лежащего на дне

Задание 1

1. Доказать, что линии тока для источника и стока, расположенных в точках z_0 и z_1 соответственно, суть окружности, проходящие через точки z_0 и z_1 .
2. Доказать, что линии тока диполя суть окружности, касающиеся его оси.
3. Доказать, что действительная ось является линией тока для потенциала двух вихрей, расположенных симметрично относительно этой оси и имеющих противоположные, равные по модулю циркуляции.
4. Пусть $z_0 \neq 0$ – точка внутри единичного круга. Доказать, что комбинация вихря в точке z_0 и вихря, расположенного в симметричной относительно единичной окружности точке $1/\bar{z}_0$ и имеющего противоположную, равную по модулю циркуляцию, даёт обтекания вихря внутри окружности.

2 Обтекание кругового цилиндра

2.1 Бесциркуляционное обтекание

Рассмотрим комплексный потенциал следующего вида:

$$w = v_{\infty}z + \frac{m}{2\pi z}.$$

Первое слагаемое – это потенциал равномерного потока, движущегося слева направо, параллельно оси Ox со скоростью v_{∞} . Второе слагаемое – это потенциал диполя с моментом m , направленным в сторону противоположную оси Ox . Пусть $w = \varphi + i\psi$, φ – потенциал скорости, ψ – функция тока. Найдем функцию тока $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned}\psi &= \operatorname{Im} \left[v_{\infty}(x + iy) + \frac{m}{2\pi(x + iy)} \right] = v_{\infty}y + \operatorname{Im} \frac{m(x - iy)}{2\pi(x^2 + y^2)} = \\ &= v_{\infty}y - \frac{my}{2\pi(x^2 + y^2)},\end{aligned}$$

или

$$\psi = y \left[v_{\infty} - \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)} \right].$$

Линия тока со значением $\psi = 0$ будет

$$\psi = 0 \implies y \left[v_{\infty} - \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)} \right] = 0$$

Эта линия распадается на две:

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = \frac{m}{2\pi v_{\infty}}.$$

Если мы положим, что $m = 2\pi v_{\infty} a^2$, то получим линии тока в виде совокупности окружности радиуса a и оси OX .

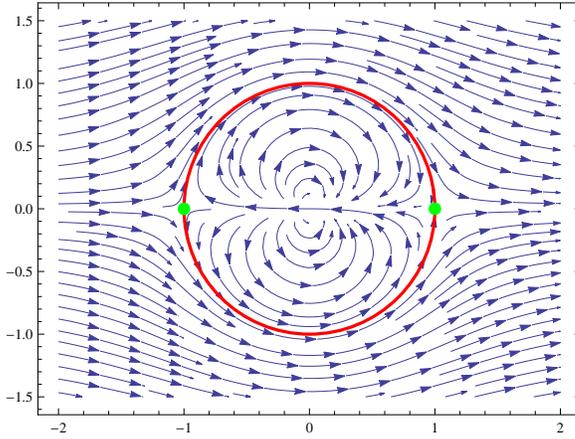


Рис. 19. Течение внутри и вне цилиндра

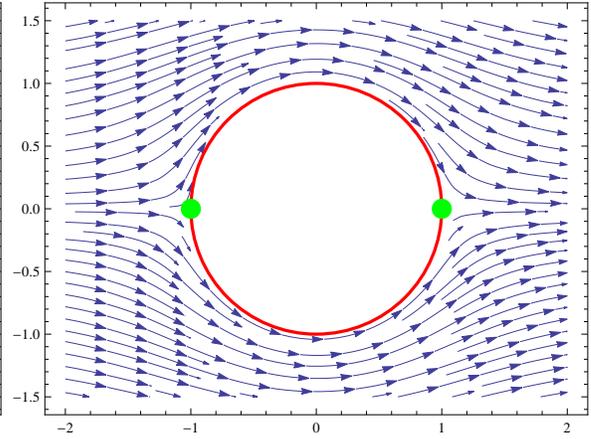


Рис. 20. Течение вне цилиндра

Остальные линии тока можно получить, задав различные константы в уравнении

$$\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) y = C.$$

Картина течения состоит из двух областей – вне и внутри круга (рис. 19). Первую область можно рассматривать как обтекание кругового цилиндра радиуса a со скоростью v_∞ (рис. 20).

Комплексный потенциал такого течения будет

$$w = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z}\right), \quad |z| \geq a.$$

Найдем распределение скоростей на цилиндре. Комплексно-сопряженная скорость будет

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right).$$

На поверхности цилиндра при $z = ae^{i\gamma}$ получим

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty (1 - e^{-2i\gamma}) = v_\infty e^{-i\gamma} (e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}) = 2iv_\infty e^{-i\gamma} \sin \gamma.$$

На цилиндре скорость равна $v(\gamma) = 2v_\infty |\sin \gamma|$. Таким образом, скорость распределена по закону синуса. В точках A ($\gamma = \pi$) и B ($\gamma = 0$) скорость обращается в нуль. Точки A и B называются критическими, они являются точками разветвления потока. Точка A – левая критическая точка, B – правая.

Максимальная скорость достигается при $\gamma = \pm\pi/2$ и максимальное значение $v_{\max} = 2v_{\infty}$.

Найдем коэффициент давления по поверхности цилиндра:

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\rho v_{\infty}^2 / 2} = 1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \gamma.$$

Для рассматриваемого течения комплексный потенциал $w(z)$ является однозначной функцией от z . Поэтому циркуляция по любому замкнутому контуру, охватывающему цилиндр будет равна нулю. Такое обтекание называется бесциркуляционным. Из соображений симметрии вытекает, что при бесциркуляционном обтекании цилиндра результирующая сила \vec{R} равна нулю, т. е. нет ни подъемной силы, ни сопротивления. Отметим, что в идеальной жидкости сила сопротивления $R_x = 0$ всегда (парадокс Даламбера). Подъемная сила R_y , как мы увидим в дальнейшем, зависит от циркуляции.

Укажем также, что если набегающий поток не является горизонтальным, т.е. скорость на бесконечности равна $v_{\infty} e^{i\alpha}$, то потенциал будет таким

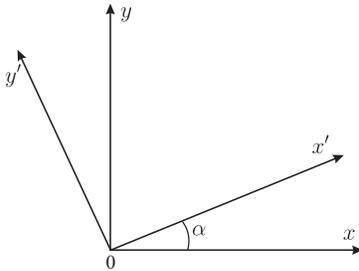


Рис. 21.

$$w(z) = v_{\infty} \left(e^{-i\alpha} z + \frac{e^{i\alpha} a^2}{z} \right).$$

Чтобы доказать этот факт достаточно ввести новую комплексную плоскость z' , у которой ось Ox' наклонена под углом α (рис. 21). Тогда

$$z' = z e^{-i\alpha}, \quad w(z') = v_{\infty} \left(z' + \frac{a^2}{z'} \right),$$

и так как $z' = z e^{-i\alpha}$, получаем требуемый результат.

2.2 Циркуляционное обтекание цилиндра

Возьмём комплексный потенциал в виде

$$w = v_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

К прежнему потенциалу мы добавили комплексный потенциал вихря с циркуляцией Γ :

$$w_{vortex} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Так как все линии тока от вихря – это окружности с центром в начале координат, то ясно, что добавление этого потенциала не нарушит условий непротекания цилиндра.

Найдем

$$\frac{dw}{dz} = v_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

и определим положение критических точек, решив уравнение

$$v_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = 0.$$

Оно сводится к квадратному

$$z^2 - \frac{\Gamma i}{2\pi v_{\infty}} z - a^2 = 0 \implies z_{12} = \frac{\Gamma i}{4\pi v_{\infty}} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2}}.$$

Для определённости считаем, что $\Gamma > 0$ (вихрь закручивает жидкость против часовой стрелки). Возможны три случая.

Случай $\Gamma > 4\pi v_{\infty} a$. Оба корня чисто мнимые и лежат на оси Oy :

$$z_1 = i \left[\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty}} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2} - a^2} \right], \quad z_2 = i \left[\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty}} - \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2} - a^2} \right],$$

$$\text{Im } z_1 > \frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty}} > a, \quad \text{Im } z_2 = \frac{a^2}{\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty}} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2} - a^2}} < \frac{a^2}{\Gamma/(4\pi v_{\infty})} < \frac{a^2}{a} < a.$$

Второй корень находится внутри круга и нас не интересует.

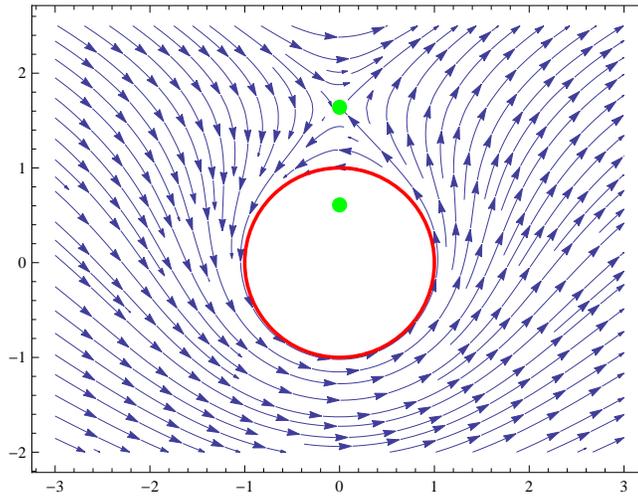


Рис. 22. Случай $\Gamma > 4\pi v_\infty a$

Случай $\Gamma = 4\pi v_\infty a$. Корни – кратные, $z_1 = z_2 = ia$. Корни сливаются между собой и расположены в наивысшей точке цилиндра:

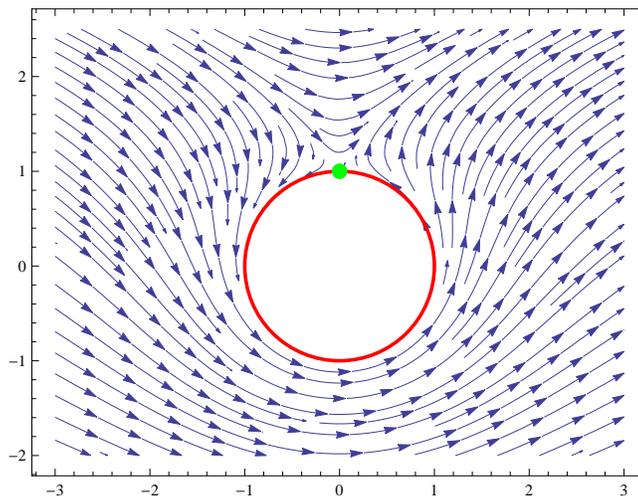


Рис. 23. Случай $\Gamma = 4\pi v_\infty a$

Случай $\Gamma < 4\pi v_\infty a$. Корни комплексные:

$$z_1 = \frac{\Gamma i}{4\pi v_\infty} + \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_\infty^2}}, \quad z_2 = \frac{\Gamma i}{4\pi v_\infty} - \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_\infty^2}}.$$

Корни расположены симметрично относительно оси Oy . Оба корня лежат на окружности, так как $|z_1| = |z_2| = a$.

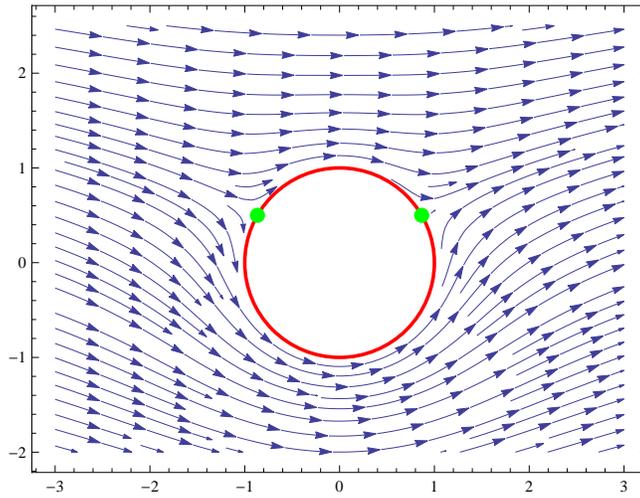


Рис. 24. Случай $\Gamma < 4\pi v_\infty a$

Из соображений симметрии ясно, что $R_x = 0$. Найдем подъемную силу R_y . Имеем

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}, \quad z = ae^{i\gamma},$$

$$\frac{dw}{dz}(\gamma) = v_\infty (1 - e^{-2i\gamma}) + \frac{\Gamma}{2\pi ia} e^{-i\gamma} = e^{-i\gamma} \left[v_\infty (e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}) - \frac{\Gamma i}{2\pi a} \right].$$

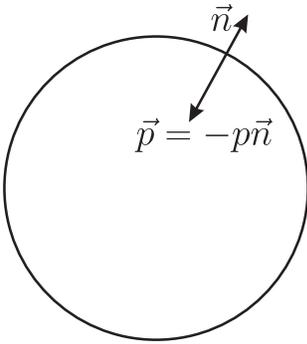


Рис. 25. Направление силы давления p

$$\frac{dw}{dz}(\gamma) = ie^{i\gamma} \left(2v_\infty \sin \gamma - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right),$$

$$v(\gamma) = v_\infty \left| 2 \sin \gamma - \frac{\Gamma}{2\pi a v_\infty} \right|,$$

$$\vec{n} = e^{i\gamma} = \underbrace{\cos \gamma}_{n_x} + i \underbrace{\sin \gamma}_{n_y}.$$

Теперь интегрируем

$$R_y = - \oint p n_y ds = -a \int_0^{2\pi} p \sin \gamma d\gamma.$$

По теореме Бернулли

$$p + \rho v^2/2 = p_\infty + \rho v_\infty^2/2 = C, \quad p = C - \rho v^2/2,$$

$$R_y = \frac{a\rho v_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \gamma - \frac{\Gamma}{2\pi a v_\infty} \right)^2 \sin \gamma d\gamma,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \gamma d\gamma = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma d\gamma = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \gamma d\gamma = 0,$$

$$R_y = \frac{a\rho v_\infty^2}{2} \frac{2\Gamma}{\pi a v_\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma d\gamma = -\rho V_\infty \Gamma, \quad R_x = -\rho V_\infty \Gamma.$$

Отсюда следует, что если $\Gamma > 0$, то подъемная сила направлена вниз. Формула $R_y = -\rho V_\infty \Gamma$ – это теорема Жуковского о подъемной силе, которую мы докажем позднее для общего случая обтекания цилиндра произвольного сечения.

Если скорость на бесконечности равна $v_\infty e^{-i\alpha}$, то комплексный потенциал течения будет

$$w(z) = v_\infty \left(e^{-i\alpha} z + \frac{e^{i\alpha} a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Задание 2

С помощью пакета Математика и команд StreamPlot, RegionFunction, Circle, Disk, Graphics построить рисунки 22–24.

3 Обтекание цилиндра произвольного сечения

Пусть $z = f(t)$ – конформное отображение внешности круга радиуса a на внешность сечения цилиндра, такое что $z(\infty) = \infty$, т.е. бесконечно-удалённая точка переходит в бесконечно удалённую.

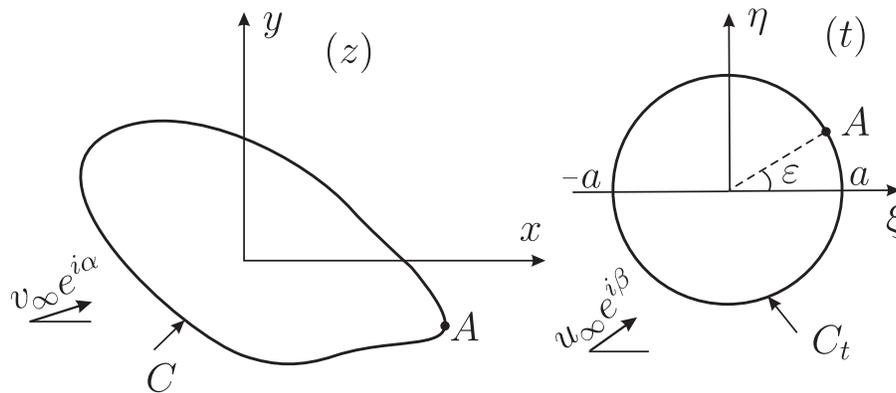


Рис. 26. Сечение цилиндра и параметрическая плоскость

Пусть $w = w(z)$ – комплексный потенциал обтекания в плоскости z . Тогда $w = w[z(t)]$ будет комплексным потенциалом обтекания кругового ци-

линдра в плоскости t . Поэтому потенциал $w(z)$ можно представить в параметрическом виде.

$$w = u_\infty \left(e^{-i\beta} t + \frac{e^{i\beta} a^2}{t} \right) + \frac{\Gamma^*}{2\pi i} \ln t, \quad z = f(t).$$

где $u_\infty e^{i\beta}$ – вектор скорости на бесконечности в плоскости t , Γ^* – циркуляция в плоскости t . Покажем, что $\Gamma = \Gamma^*$, где Γ – циркуляция в плоскости z . В плоскости z имеем

$$\Gamma = \operatorname{Re} \oint_C \frac{dw}{dz} dz = \operatorname{Re} \oint_C dw.$$

Переходим к интегрированию в плоскость t и используем инвариантность дифференциала. Получим

$$\Gamma = \operatorname{Re} \oint_C dw = \operatorname{Re} \oint_{C_t} dw = \operatorname{Re} \oint_{C_t} \frac{dw}{dt} dt = \Gamma^*,$$

где C_t – окружность радиуса a в плоскости t . Таким образом, $\Gamma = \Gamma^*$.

Теперь найдём связь между v_∞, α и u_∞, β . Пусть $f'(\infty) = m_\infty e^{i\theta_\infty}$. Имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{dw}{dt}(\infty)}{\frac{dz}{dt}(\infty)} = \frac{\frac{dw}{dt}(\infty)}{f'(\infty)} = \frac{u_\infty e^{-i\beta}}{m_\infty e^{i\theta}} = \frac{u_\infty}{m_\infty} e^{-i(\beta+\theta_\infty)}.$$

Отсюда следует, что

$$v_\infty e^{-i\alpha} = \frac{u_\infty}{m_\infty} e^{-i(\beta+\theta_\infty)} \implies u_\infty = m_\infty v_\infty, \quad \beta = \alpha - \theta_\infty.$$

Следовательно, параметрические уравнения для комплексного потенциала обтекания будут такими

$$w = u_\infty \left(e^{-i\beta} t + \frac{e^{i\beta} a^2}{t} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t, \quad z = f(t),$$

где

$$u_\infty = m_\infty v_\infty, \quad \beta = \alpha - \theta_\infty.$$

Отметим, что отображение $z = f(t)$, вообще говоря, не является полностью определённым. Дело в том, что любое отображение $\zeta = te^{i\epsilon}$, где ϵ постоянный действительный параметр, переводит внешность круга радиуса a снова

во внешность круга радиуса a . Поэтому все отображения вида $z = f(e^{i\epsilon t})$ будут переводить внешность окружности радиуса a в плоскости t на внешность цилиндра в плоскости z . Чтобы избежать этой неоднозначности в основном применяют два способа.

1) Задают нормировку отображения в виде

$$f(\infty) = \infty, \quad f'(\infty) = m_\infty > 0,$$

при этом $\theta_\infty = 0$.

2) Задают нормировку так: $f(\infty) = \infty$ и некоторая характерная точка A на контуре C в плоскости z переходит в точку $(a, 0)$ в плоскости t . Связь между этими двумя способами очень простая. Пусть при первом способе точка A переходит в точку $ae^{i\epsilon}$ в плоскости t . Тогда функция $z = f(e^{i\epsilon t})$ реализует конформное отображение для второго способа.

Замечание. Отметим очень важное обстоятельство. Циркуляция вокруг цилиндра остаётся неопределённым параметром, и чтобы её найти необходимо привлекать дополнительные гипотезы.

3.1 Обтекание эллипса

Рассмотрим преобразование Жуковского:

$$z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{c^2}{t} \right). \quad (3.1)$$

Его можно записать в более симметричном виде

$$\frac{z - c}{z + c} = \left(\frac{t - c}{t + c} \right)^2.$$

Возьмём окружность радиуса c и покажем, что внешность этой окружности с помощью (3.1) переходит во внешность отрезка $(-c, c)$ в плоскости z . Пусть $t = ce^{i\gamma}$, тогда

$$z = \frac{1}{2} (ce^{i\gamma} + ce^{-i\gamma}) = c \cos \gamma.$$

При обходе окружности по часовой стрелке получаем отрезок, обходимый два раза: сначала справа на лево, затем слева направо.

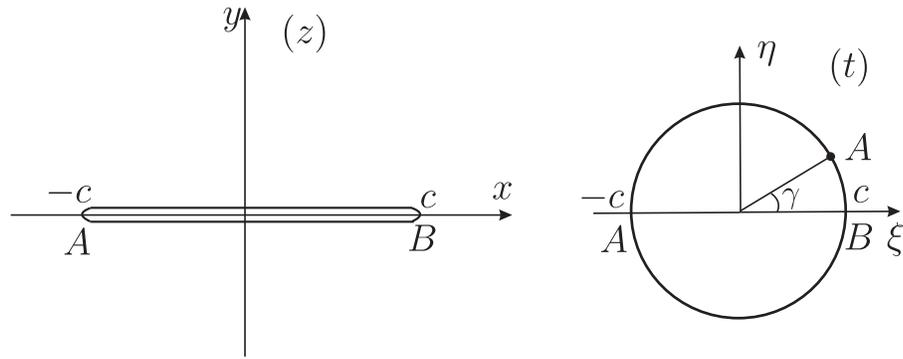


Рис. 27.

Теперь покажем, что окружности радиусов $r > c$ будут переходить в софокусные эллипсы. Пусть $t = re^{i\gamma}$. Имеем

$$z = \frac{1}{2} \left(re^{i\gamma} + \frac{c^2}{r} e^{-i\gamma} \right),$$

$$x = \frac{1}{2} \left(r + \frac{c^2}{r} \right) \cos \gamma, \quad y = \frac{1}{2} \left(r - \frac{c^2}{r} \right) \sin \gamma,$$

$$a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{c^2}{r} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(r - \frac{c^2}{r} \right), \quad (3.2)$$

$$x = a \cos \gamma, \quad y = b \sin \gamma, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получили эллипс с полуосями a, b , причём $a > b$.

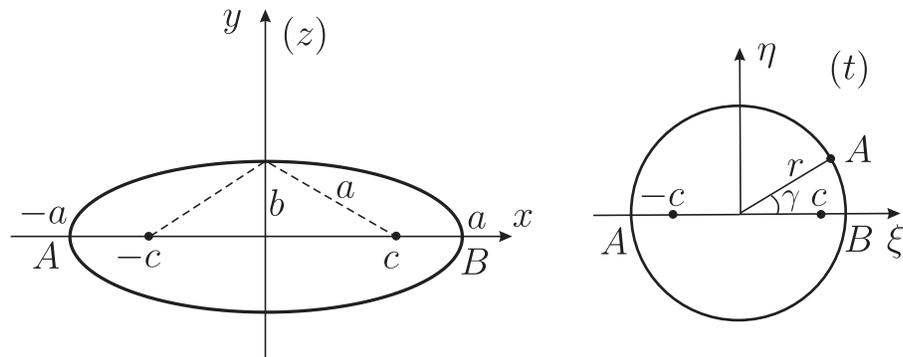


Рис. 28. Эллипс и параметрический круг

Из (3.2) следует, что $c^2 = a^2 - b^2$. Отсюда точки $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ являются фокусами эллипса. Кроме того, из (3.2) найдем, что $r = a + b$. Таким образом,

если в плоскости z задан эллипс с полуосями a, b и $a > b$, то мы можем найти радиус параметрической окружности r и параметр c

$$r = a + b, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

то есть все параметры в преобразовании Жуковского (3.1) будут известны, и это преобразование отображает внешность круга радиуса r на внешность эллипса с полуосями $a \geq b$.

Пусть эллипс обтекается идеальной жидкостью с скоростью $v_\infty e^{i\alpha}$. Для преобразования Жуковского $f'(\infty) = m_\infty = 1/2$. Поэтому $\theta_\infty = 0$, $u_\infty = v_\infty/2$. В параметрическом виде потенциал обтекания эллипса будет таким

$$w = \frac{v_\infty}{2} \left(e^{-i\alpha} t + \frac{e^{i\alpha} r^2}{t} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t, \quad (3.3)$$

$$z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{c^2}{t} \right), \quad (3.4)$$

где $r = a + b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Параметр t может быть исключен из уравнений (3.3), (3.4). Действительно,

$$t^2 - 2zt + c^2 = 0, \quad t = z \pm \sqrt{z^2 - c^2}$$

причём надо брать знак плюс. В самом деле, если взять знак минус, то

$$t = z - \sqrt{z^2 - c^2} = \frac{c^2}{z + \sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Отсюда видно, что при $z \rightarrow \infty$ имеем $t \rightarrow 0$, то есть внешность эллипса перейдет во внутренность круга.

Таким образом, окончательно получаем

$$w = \frac{v_\infty}{2} \left[e^{-i\alpha} \left(z + \sqrt{z^2 - c^2} \right) + \frac{e^{i\alpha} r^2}{z + \sqrt{z^2 - c^2}} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}). \quad (3.5)$$

Замечание. Чтобы при расчётах формула (3.5) давала корректный результат, необходима аналитичность функция $\sqrt{z^2 - c^2}$ во внешности разреза, проведённого по отрезку $[-c, c]$, показанного на рис. 27. Через стандартную

функцию *Sqrt* пакета *Математика* этого можно добиться с помощью формулы

$$\sqrt{z^2 - c^2} = \text{Sqrt}[z - c] \text{Sqrt}[z + c].$$

3.2 Обтекание пластинки

Рассмотрим частный случай задачи об обтекании эллипса – обтекание пластинки. В этом случае $r = c$, и потенциал такого течения будет

$$w = \frac{v_\infty}{2} \left[e^{-i\alpha} \left(z + \sqrt{z^2 - c^2} \right) + \frac{e^{i\alpha} c^2}{z + \sqrt{z^2 - c^2}} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}),$$

$$w = \frac{v_\infty}{2} \left[e^{-i\alpha} \left(z + \sqrt{z^2 - c^2} \right) + e^{i\alpha} \left(z - \sqrt{z^2 - c^2} \right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}),$$

$$w = v_\infty z \cos \alpha - i v_\infty \sin \alpha \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}).$$

Найдем распределение скоростей по пластинке:

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \cos \alpha - i v_\infty \sin \alpha \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}}{z + \sqrt{z^2 - c^2}},$$

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \cos \alpha - i \frac{z v_\infty \sin \alpha + \Gamma / (2\pi)}{\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Если Γ выбрать произвольным образом, то на острых краях пластинки скорости будут бесконечны. Картина обтекания будет такой, как показано на рис. 29:

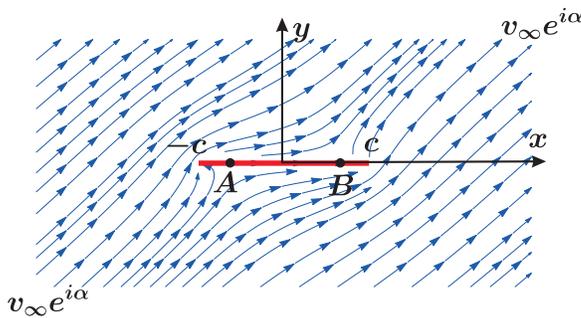


Рис. 29. Постулат Ж-Ч не выполняется

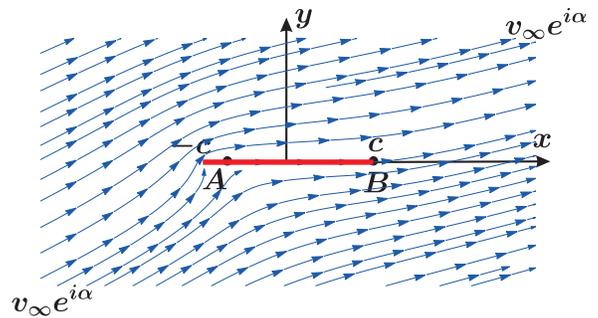


Рис. 30. Постулат Ж-Ч выполняется

Наиболее интересен случай, когда на задней острой кромке скорость конечна. В этом случае

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = -v_{\infty} c \sin \alpha$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz} = v_{\infty} \cos \alpha - i v_{\infty} \sin \alpha \sqrt{\frac{z-c}{z+c}}.$$

Ниже мы увидим, что случай

$$\Gamma = -2\pi v_{\infty} c \sin \alpha$$

соответствует выполнению постулата Жуковского–Чаплыгина. Картина обтекания показана на рис. 30.

Задание 4

С помощью пакета Математика и формулы (3.5) построить линии тока для бесциркуляционного и циркуляционного обтекания эллипса.

4 Постулат Жуковского–Чаплыгина

4.1 Формулировка постулата

С точки зрения математики: крыловой профиль – это замкнутый контур, всюду гладкий за исключением одной угловой точки с внутренним углом $\delta \in [0, \pi)$. Поскольку при внешнем обтекании любого контура циркуляция Γ является неопределённым параметром, можно построить целое семейство течений около контура, каждое из которых характеризуется своей циркуляцией.

Если предположить, что критические точки находятся на контуре профиля, то возможны следующие три типа обтекания, показанные на рис. 31. В случаях а) и в) скорость в острой кромке будет равна ∞ , что соответствует бесконечному разряжению в точке B . Жуковский и Чаплыгин выдвинули следующую гипотезу, называемую гипотезой Ж–Ч.

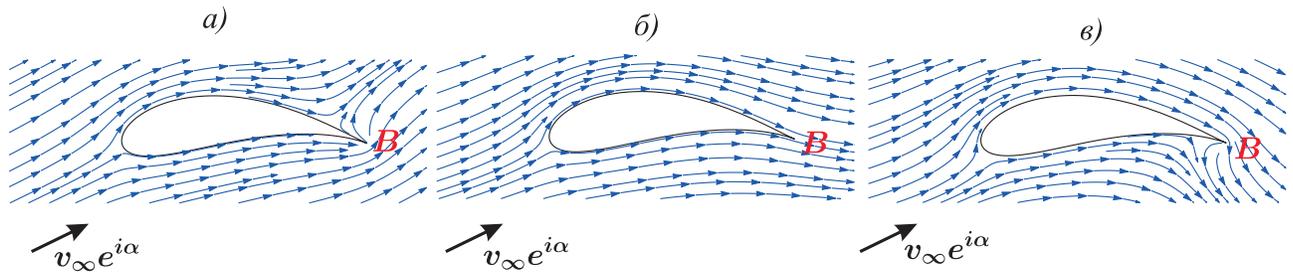


Рис. 31.

Постулат Ж–Ч. Среди бесконечного числа теоретически возможных обтеканий профиля с угловой точкой на задней кромке в действительности осуществляется обтекание с конечной скоростью в этой точке.

4.2 Острая кромка – точка схода потока

Докажем, что этот постулат эквивалентен утверждению, что острая кромка является точкой схода потока, то есть в действительности реализуется случай б).

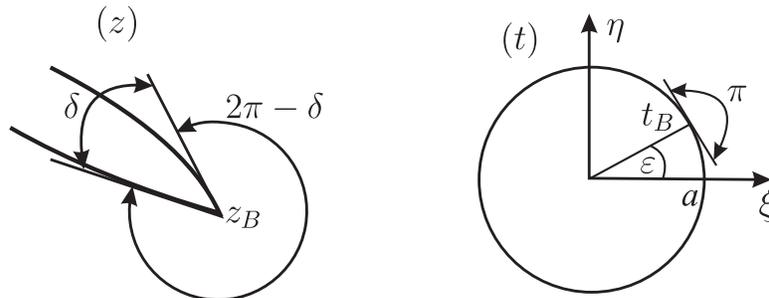


Рис. 32. Острая кромка и её образ

Рассмотрим острую кромку B . Пусть при конформном отображении внешности профиля на внешность круга радиуса a точке B соответствует точка $t_B = a e^{i\epsilon}$. Тогда исходя из локальных свойств конформного отображения

$$z - z_B = M(t - t_B)^{(2\pi - \delta)/\pi}$$

где M – комплексная константа. Эта формула получается из анализа углов при вершинах в точках z_B и t_B : внешний угол в точке t_B равен π в плоскости t , а в плоскости z этот угол равен $2\pi - \delta$.

Согласно постулату Ж–Ч скорость $\frac{dw}{dz}|_{z=z_B}$ конечна. Найдем скорость в точке $t = t_B$ в параметрической плоскости:

$$\frac{dw}{dt}|_{t=t_B} = \frac{dw}{dz}|_{z=z_B} \cdot \frac{dz}{dt}|_{t=t_B} = \frac{dw}{dz}|_{z=z_B} M \frac{2\pi - \delta}{\pi} (t - t_B)^{(2\pi - \delta)/\pi - 1},$$

$$\frac{dw}{dt}|_{t=t_B} = M \frac{2\pi - \delta}{\pi} \frac{dw}{dz}|_{z=z_B} (t - t_B)^{(\pi - \delta)/\pi}.$$

Так как $0 \leq \delta < \pi$ и $\left| \frac{dw}{dz}|_{z=z_B} \right| < \infty$, то получаем, что

$$\frac{dw}{dt}|_{t=t_B} = 0. \quad (4.1)$$

Это означает, что $t = t_B$ – критическая точка в плоскости t , являющаяся точкой схода потока. Значит, соответствующая ей точка в физической плоскости z также будет точкой схода потока, поскольку при конформном отображении топология линий тока сохраняется.

4.3 Формула для определения циркуляции

Условие (4.1) позволяет найти циркуляцию. Действительно, пусть конформное отображение внешности профиля на внешность круга радиуса a реализуется функцией

$$z = f(t), \quad \infty \longleftrightarrow \infty, \quad f'(\infty) = m_\infty > 0.$$

При такой нормировке $\alpha = \beta$, $u_\infty = m_\infty v_\infty$, где $v_\infty e^{i\alpha}$ – скорость на ∞ в плоскости z , а $u_\infty e^{i\beta}$ – скорость на ∞ в плоскости t .

Пусть острой кромке профиля B в плоскости t соответствует точка $t_B = ae^{i\epsilon}$. Тогда

$$w = m_\infty v_\infty \left(e^{-i\alpha} t + \frac{e^{i\alpha} a^2}{t} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t, \quad \frac{dw}{dt} = m_\infty v_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha} a^2}{t^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i t}.$$

Так как $t_B = ae^{i\epsilon}$ – критическая точка, то должно выполняться условие

$$\frac{dw}{dt}|_{t=t_B} = 0.$$

Подставив $t_B = ae^{i\epsilon}$ в выражение для dw/dt , получим следующее соотношение:

$$m_\infty v_\infty (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} e^{-2i\epsilon}) - \frac{\Gamma i}{2\pi a} e^{-i\epsilon} = 0.$$

Величину $ie^{-i\epsilon}$ выносим за скобку и сокращаем. В результате приходим к линейному уравнению относительно неизвестной циркуляции Γ :

$$-2m_\infty v_\infty \sin(\alpha - \epsilon) - \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0 \implies \boxed{\Gamma = -4\pi a m_\infty v_\infty \sin(\alpha - \epsilon)}.$$

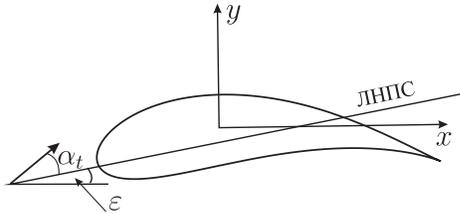


Рис. 33. Профиль и жёстко связанная с ним линия нулевой подъемной силы

Величина $\alpha_t = \alpha - \epsilon$ называется теоретическим углом атаки. Угол наклона вектора скорости набегающего потока $\alpha = \epsilon$ определяет направление скорости, при котором циркуляция Γ вокруг профиля будет равна нулю. Если профиль расположен в потоке таким образом, что его хорда горизонтальна, то $\alpha_t = \epsilon$ будет углом атаки нулевой подъемной силы, так как согласно теореме Жуковского–Чаплыгина подъемная сила пропорциональна циркуляции. Линия, наклонённая под углом $\alpha = \epsilon$, называется линией нулевой подъемной силы (ЛНПС). ЛНПС жёстко связана с профилем и у каждого профиля эта линия своя.

Если профиль расположен в потоке таким образом, что его хорда горизонтальна, то $\alpha_t = \epsilon$ будет углом атаки нулевой подъемной силы, так как согласно теореме Жуковского–Чаплыгина подъемная сила пропорциональна циркуляции. Линия, наклонённая под углом $\alpha = \epsilon$, называется линией нулевой подъемной силы (ЛНПС). ЛНПС жёстко связана с профилем и у каждого профиля эта линия своя.

Задание 5

Эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b,$$

обтекается установившимся потоком идеальной жидкости со скоростью $v_\infty e^{i\alpha}$ на бесконечности. Найти циркуляцию вокруг этого эллипса в предположении, что точка схода потока есть точка с координатами $(a, 0)$. С помощью пакета Математика и формулы (3.5) построить линии тока для такого обтекания.

5 Профили Жуковского

Ранее мы установили, что функция Жуковского

$$z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{c^2}{t} \right)$$

отображает внешность окружности радиуса c в плоскости t на внешность отрезка $(-c, c)$ в плоскости z . Центр окружности совпадает с началом координат, а окружность проходит через точки $A(-c, 0)$ и $B(c, 0)$ в плоскости t .

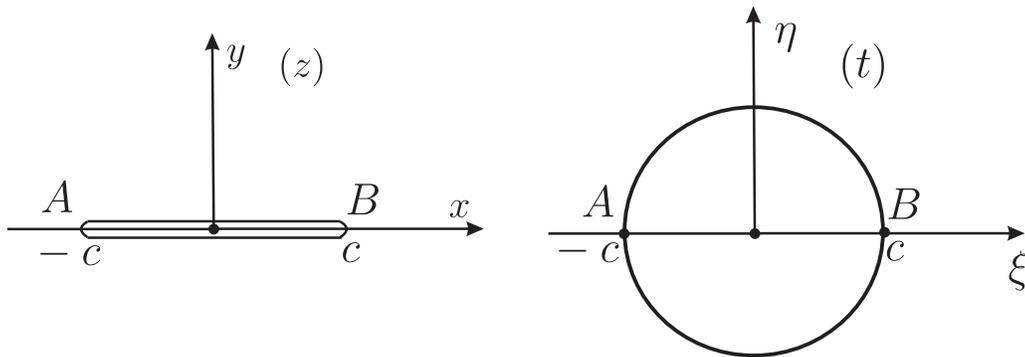


Рис. 34. Внешность отрезка и внешность круга при отображении Жуковского

Рассмотрим новую окружность, проходящую через точки A, B с центром в точке $O_1(0, h)$ и радиусом $a = \sqrt{c^2 + h^2}$. Пусть σ – угол между вектором $\overrightarrow{BO_1}$ и отрицательным направлением оси ξ . Ясно что $\sigma = \arctg(h/a)$. В точке B проведем касательную. Угол наклона этой касательной к оси ξ будет $\pi/2 - \sigma$.

Введем функцию

$$u_1 = \frac{t - c}{t + c} \quad (5.1)$$

и выясним, куда эта функция отображает внешность окружности.

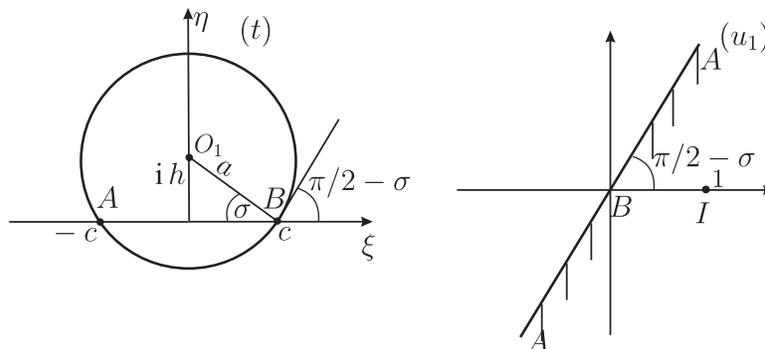


Рис. 35. Иллюстрация к дробно-линейному отображению (5.1)

Отображение (5.1) является дробно-линейным. Поэтому окружность перейдет в прямую, проходящую через начало координат в плоскости u_1 . Эта прямая будет наклонена к оси абсцисс под углом $\pi/2 - \sigma$, так как при конформном отображении сохраняются углы. Бесконечно удалённая точка в плоскости t перейдет в точку $u_1 = 1$. Таким образом, внешность окружности перейдет в полуплоскость, показанную на рисунке 35.

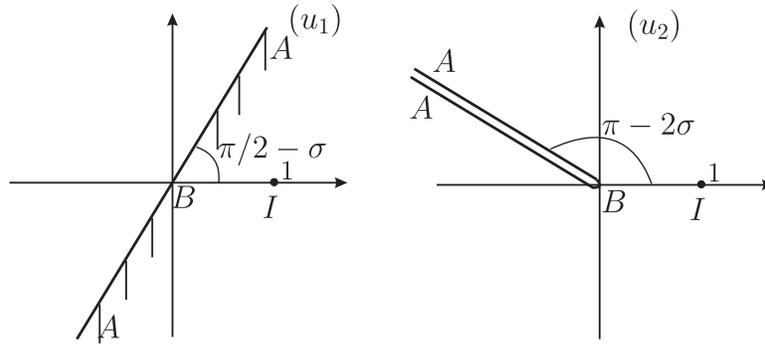


Рис. 36.

Пусть теперь

$$u_2 = u_1^2 = \left(\frac{t - c}{t + c} \right)^2.$$

Областью изменения u_2 будет внешность разреза, наклонённого под углом $\pi - 2\sigma$ к оси абсцисс (см. рис. 36).

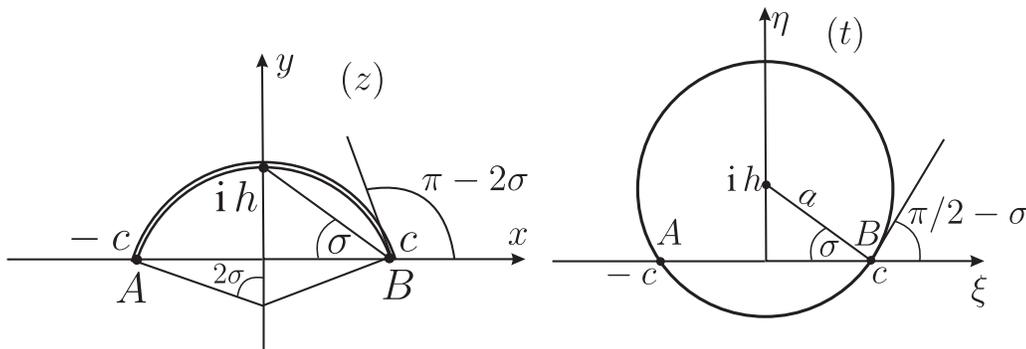


Рис. 37.

В плоскости z рассмотрим разрез, проведённый по окружности, указанной на рисунке 37. Возьмём отображение

$$u_3 = \frac{z - c}{z + c}.$$

Разрез перейдет в область изменения переменной u_2 . Поэтому $u_2 = u_3$, а это означает, что

$$u_2 = u_3 \implies \frac{z - c}{z + c} = \left(\frac{t - c}{t + c} \right)^2 \implies z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{c^2}{t} \right).$$

Таким образом, функция Жуковского

$$z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{c^2}{t} \right)$$

отображает внешность сдвинутой окружности в плоскости t на внешность разреза, проведённого по окружности в плоскости z и показанного на рис. 37.

Сделаем ещё один сдвиг, именно, в плоскости t сдвинем центр окружности O_1 по прямой BO_1 в точку O_2 , находящуюся на расстоянии d от прежнего центра O_1 . Проведем новую окружность радиуса $a = \sqrt{c^2 + h^2} + d$, с центром в точке O_2 , проходящую через точку $(c, 0)$. Функция Жуковского переведет внешность этой окружности во внешность фигуры, похожей на крыловой профиль. Эта фигура и называется профилем Жуковского.

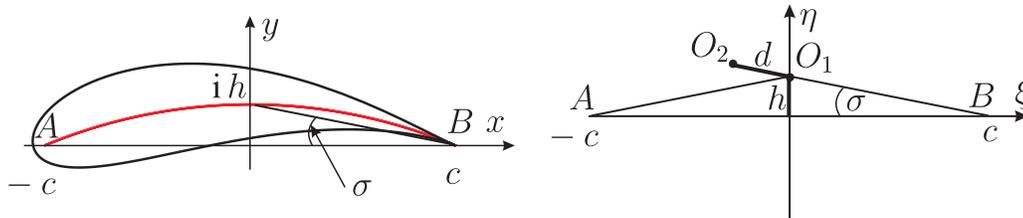


Рис. 38. Профиль Жуковского

Дужка окружности внутри профиля называется скелетом профиля.

- Параметр h отвечает за искривлённость профиля Жуковского.
- Параметр d – за толщину профиля Жуковского.
- Если $d = 0$, то профиль превращается в свой скелет – дужку окружности.

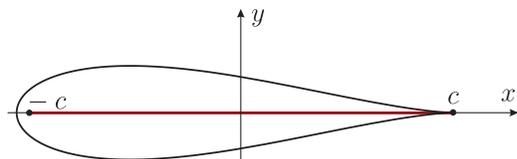


Рис. 39. Руль Жуковского

Если $h = 0$, $d \neq 0$, то профиль становится симметричным и называется рулем Жуковского. Скелетом нуля будет отрезок $(-c, c)$ действительной оси.

5.1 Потенциал обтекания профиля Жуковского

Чтобы получить потенциал обтекания профиля Жуковского, заметим, что точка O_2 в плоскости t в комплексной форме представима так:

$$t_0 = ih + de^{(\pi-\sigma)i}.$$

Введем новую систему координат

$$t' = t - t_0 = \xi' + i\eta' \implies t = t' + t_0.$$

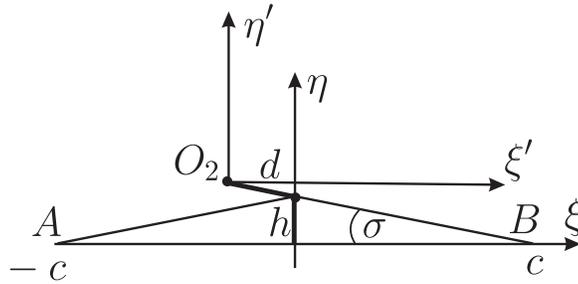


Рис. 40. Система координат (ξ', η') в параметрической плоскости t'

Тогда

$$z = \frac{1}{2} \left(t' + t_0 + \frac{c^2}{t' + t_0} \right) \implies \boxed{z'(\infty) = \frac{1}{2}, \quad m_\infty = \frac{1}{2}},$$

$$w = \frac{1}{2}v_\infty \left(e^{-i\alpha}t' + \frac{e^{i\alpha}a^2}{t'} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t'.$$

Чтобы не писать t' , будем как и ранее писать t .

Решение представляется таким образом:

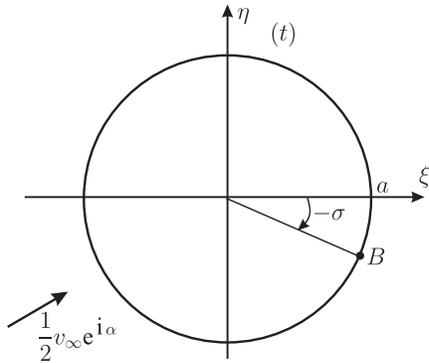


Рис. 41. Параметрическая окружность для профиля Жуковского

$$a = \sqrt{c^2 + h^2} + d, \quad \sigma = \arctg \frac{h}{c},$$

$$t_0 = ih - de^{-i\sigma}, \quad z = \frac{1}{2} \left(t + t_0 + \frac{c^2}{t + t_0} \right),$$

$$w = \frac{1}{2}v_\infty \left(e^{-i\alpha}t + \frac{e^{i\alpha}a^2}{t} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t,$$

$$\epsilon = -\sigma, \quad \Gamma = -2\pi a v_\infty \sin(\alpha + \sigma).$$

Параметры c , h и d – заданы.

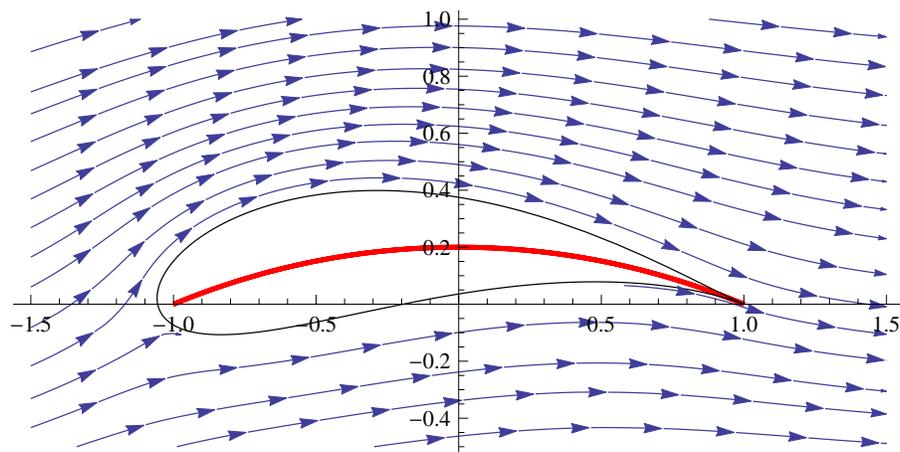


Рис. 42. Линии тока для профиля Жуковского

5.2 Обобщённые профили Жуковского

Угол в острой кромке профиля Жуковского равен нулю, что плохо с точки зрения прочностных характеристик. Поэтому вводятся так называемые обобщённые профили Жуковского с помощью обобщённой функции Жуковского.

$$\underbrace{\frac{z - c}{z + c} = \left(\frac{t - c}{t + c} \right)^2}_{\text{Функция Жуковского}}, \quad \underbrace{\frac{z - c}{z + c} = \left(\frac{t - c}{t + c} \right)^{2-\tau/\pi}}_{\text{Обобщенная ф-ия Жуковского}}.$$

Профили, построенные таким способом, будут в острой кромке иметь угол равный τ :

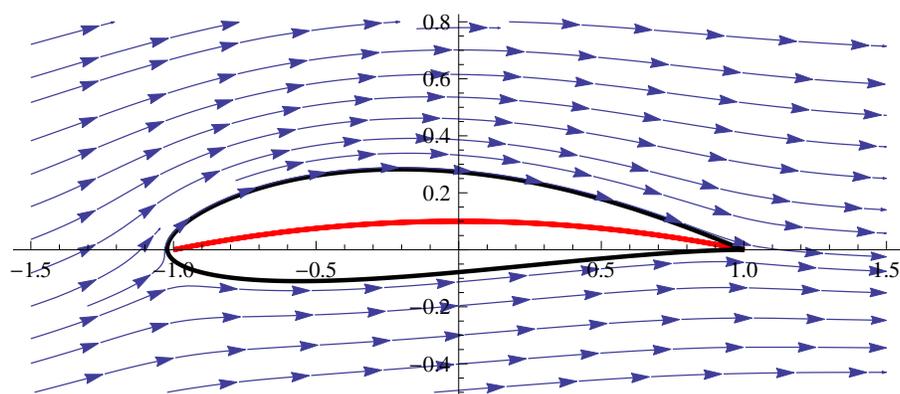


Рис. 43. Линии тока для обобщённого профиля Жуковского. Угол в острой кромке равен 20°

Задание 6

1) С помощью пакета Математика восстановить рисунки 42 и 43.

2) Найти распределение скорости по профилю Жуковского как функцию координаты x .

6 Формулы Чаплыгина

6.1 Интегральные формулы Чаплыгина

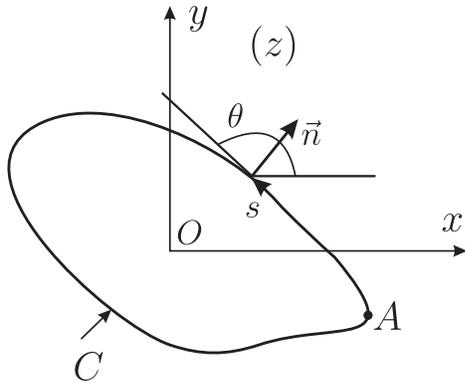


Рис. 44. Произвольный контур в потенциальном потоке

Рассмотрим замкнутый контур C в плоскости $z = x + iy$. Пусть \vec{n} – внешняя нормаль, θ – угол наклона касательной к контуру с оси абсцисс, p – давление, s – длина дуги контура. Тогда на элемент дуги действует сила $-p\vec{n} ds$ и главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M}_0 сил давления будут

$$\vec{R} = - \oint_C p\vec{n} ds, \quad \vec{M}_0 = - \oint_C p(\vec{r} \times \vec{n}) ds,$$

где \vec{r} – радиус вектор точек контура. В плоском случае

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}, \quad \vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + 0 \cdot \vec{k},$$

$$(\vec{r} \times \vec{n}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ n_x & n_y & 0 \end{vmatrix} = (xn_y - yn_x)\vec{k}.$$

Для плоской системы сил вводится так называемый алгебраический момент (скалярное величина, равная проекции вектора момента на ось z). Алгебраический момент будет

$$L_0 = - \oint_C p(xn_y - yn_x) ds.$$

Из уравнения Бернулли $p = C - \rho v^2/2$. Отсюда

$$\vec{R} = \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 \vec{n} ds, \quad L_0 = \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 (xn_y - yn_x) ds.$$

Векторы будем представлять в комплексной форме. Запишем следующие очевидные равенства:

$$\vec{n} = -ie^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} ds, \quad ds = e^{-i\theta} dz,$$

$$xn_y - yn_x = -\operatorname{Im}[(x + iy)(n_x - in_y)] = -\operatorname{Im}[(x + iy)]ie^{-i\theta},$$

$$xn_y - yn_x = -\operatorname{Re}(ze^{-i\theta}).$$

Теперь

$$\vec{R} = \frac{\rho}{2} \oint v^2 (-ie^{i\theta}) ds = -\frac{i\rho}{2} \oint v^2 dz,$$

$$L_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C zv^2 e^{-2i\theta} dz.$$

Замечаем, что

$$v = \pm \frac{dw}{dz} e^{i\theta},$$

причём плюс будет на нижней стороне профиля. Поэтому на нижней стороне $\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}$, а на верхней стороне $\frac{dw}{dz} = -ve^{-i\theta}$. На всем профиле

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = v^2 e^{-2i\theta} \implies v^2 = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 e^{2i\theta}.$$

Пусть

$$\vec{R} = R_x + iR_y.$$

Тогда

$$R_x - iR_y = \frac{i\rho}{2} \oint v^2 \overline{dz} = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 e^{2i\theta} e^{-i\theta} ds,$$

$$\boxed{R_x - iR_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz} \quad \boxed{L_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz}. \quad (6.1)$$

Эти формулы носят название интегральных формул Чаплыгина для главного вектора сил давления и главного алгебраического момента этих сил. Отметим, что формулы (6.1) справедливы для любого тела, обтекаемого идеальной жидкостью при любых условиях обтекания: в канале, под свободной поверхностью, для нескольких тел, и т. д.

6.2 Обтекание одиночного профиля

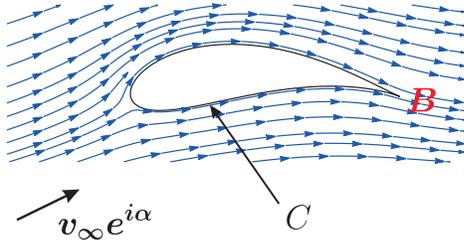


Рис. 45. Одиночный профиль

Рассмотрим обтекание профиля безграничным потоком. В этом случае функцию $\frac{dw}{dz}$ можно разложить в ряд Лорана по отрицательным степеням z :

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \quad (6.2)$$

Ясно, что $a_0 = v_\infty e^{-i\alpha}$. Остальные коэффициенты можно найти по формулам:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{dw}{dz} z^{n-1} dz, \quad (6.3)$$

где интегрирование ведется по любому контуру C' , охватывающему контур C . Эти формулы следуют из соотношений

$$\oint_{C'} z^k dz = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } k = -1, \end{cases} \quad (6.4)$$

где k – любое целое число.

В частности, легко находится коэффициент a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{dw}{dz} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} d\phi = \frac{\Gamma}{2\pi i}$$

Таким образом,

$$a_0 = v_\infty e^{-i\alpha}, \quad a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \quad (6.5)$$

С помощью (6.2) найдем разложение квадрата комплексно-сопряжённой скорости в окрестности бесконечно удалённой точки. При этом учитываем, что нас интересуют только первые три члена разложения, так как в силу формул (6.1) и (6.4) вклад остальных коэффициентов в главный вектор сил давления и главный алгебраический момент этих сил будет нулевым. Имеем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots\right)^2 = a_0^2 + \frac{2a_0a_1}{z} + \frac{a_1^2 + 2a_0a_2}{z^2} + \dots$$

Отсюда и интегральных формул Чаплыгина (6.1) выводим следующие равенства

$$R_x - iR_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2a_0 a_1 2\pi i = -2\pi \rho a_0 a_1,$$

$$L_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} [(a_1^2 + 2a_0 a_2) 2\pi i],$$

$$L_0 = -\rho\pi \operatorname{Re} [(a_1^2 + 2a_0 a_2) i],$$

$$R_x - iR_y = -2\pi \rho v_\infty e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{2\pi i} = \rho v_\infty e^{-i\alpha} i\Gamma.$$

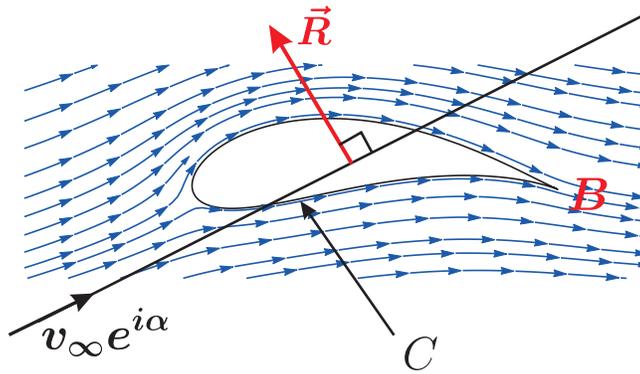


Рис. 46. Иллюстрация к теореме Жуковского

Для сопряжённых величин имеем

$$\boxed{R_x + iR_y = -\rho v_\infty e^{i\alpha} \Gamma i.} \quad (6.6)$$

Получили теорему Жуковского о подъемной силе.

Теорема Жуковского. Сила, действующая на профиль, по величине равна $\rho v_\infty \Gamma$, а по направлению повернута на 90° по отношению к вектору набегающего потока в сторону противоположную циркуляции.

Замечание. Составляющая силы в направлении вектора скорости набегающего потока (сила сопротивления) равна нулю (парадокс Даламбера).

Из теоремы вытекает, что для того, чтобы подъемная сила профиля была положительной необходимо, чтобы циркуляция Γ была отрицательной.

Теперь упростим формулу для главного момента L_0 :

$$L_0 = -\rho\pi \operatorname{Re} [(a_1^2 + 2a_0 a_2) i] = -\rho\pi \operatorname{Re} \left\{ i \left[\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \right)^2 + 2v_\infty e^{-i\alpha} a_2 \right] \right\},$$

$$L_0 = -\rho\pi \operatorname{Re} (2v_\infty e^{-i\alpha} a_2 i) = -2\rho\pi v_\infty \operatorname{Re} (a_2 e^{-i\alpha} i). \quad (6.7)$$

6.3 Обтекание пластинки

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим обтекание пластинки при выполнении постулата Жуковского–Чаплыгина. Ранее мы получили, что для горизонтальной пластинки длины $2c$

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \cos \alpha - iv_\infty \sin \alpha \sqrt{\frac{z-c}{z+c}},$$

а циркуляция вычисляется по формуле $\Gamma = -2\pi v_\infty c \sin \alpha$. Отсюда и (6.6) следует, что

$$R_x + iR_y = -i\rho v_\infty e^{i\alpha} \Gamma = 2\pi\rho v_\infty^2 c \sin \alpha i e^{i\alpha},$$

$$R_x + iR_y = 2\pi\rho v_\infty^2 c \sin \alpha i (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$$R_x = -2\pi\rho v_\infty^2 c \sin^2 \alpha, \quad R_y = 2\pi\rho v_\infty^2 c \sin \alpha \cos \alpha.$$

Для определения момента необходимо найти коэффициент a_2 . Раскладываем функцию $\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}$ в ряд по степеням $1/z$. Имеем

$$\sqrt{\frac{z-c}{z+c}} = \sqrt{\frac{1-c/z}{1+c/z}} = \sqrt{\frac{1-cu}{1+cu}} = d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + \dots, \quad u = 1/z.$$

Отсюда видно, что $a_2 = -iv_\infty \sin \alpha d_2$, где $-d_2$ коэффициент при u^2 в разложении функции $\sqrt{\frac{1-cu}{1+cu}}$ в ряд Маклорена, т.е.

$$d_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{du^2} \left(\sqrt{\frac{1-cu}{1+cu}} \right) \Big|_{u=0}.$$

После вычислений производной получим $d_2 = c^2/2$. Тогда для a_2 получаем формулу

$$a_2 = -\frac{iv_\infty c^2}{2} \sin \alpha.$$

Теперь с помощью (6.7) выводим $L_0 = -2\pi\rho v_\infty \operatorname{Re} [i(-iv_\infty c^2 \sin \alpha) e^{-i\alpha/2}]$, и

$$L_0 = -\pi\rho v_\infty c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$R_x = -2\pi\rho v_\infty^2 c \sin^2 \alpha, \quad R_y = 2\pi\rho v_\infty^2 c \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$L_0 = -\pi\rho v_\infty c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

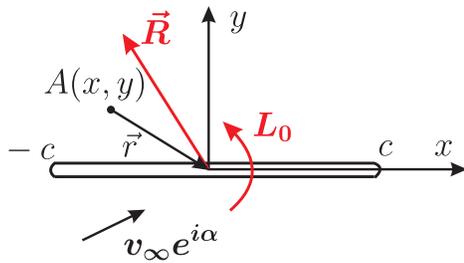


Рис. 47. Сила R , приложенная в центре пластины, и пара с моментом L_0

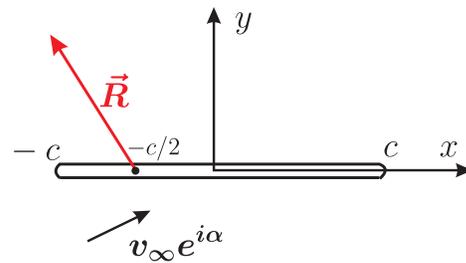


Рис. 48. Сила R , приложенная в центре давлений

Найдем линию действия силы. Если точка $A(x, y)$ лежит на линии действия, то момент относительно этой точки по теореме из теоретической механики будет

$$\vec{M}_A = L_0 \vec{k} + (\vec{r} \times \vec{R}) = 0,$$

$$L_0 \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies L_0 - R_y x + R_x y = 0.$$

Линия действия равнодействующей имеет уравнение $R_y x - R_x y = L_0$:

$$2x \sin \alpha \cos \alpha + 2y \sin^2 \alpha = -c \sin \alpha \cos \alpha \implies x \cos \alpha + y \sin \alpha = -\frac{c \cos \alpha}{2}.$$

Точка C пересечения линии действия с пластинкой называется центром давления. Подставив в уравнение линии действия значение $y = 0$, получим, что $x = -c/2$.

Замечание. Центр давления на пластинку находится на четверти её длины от передней кромки и его положение не зависит ни от скорости потока, ни от угла атаки.

Это свойство справедливо не только для пластины, но и для тонких профилей. Свойство используется при определении оси вращения рулей. Ось вращения, проходящая через центр давления, обеспечивает минимальный момент, необходимый для поворота руля.

Задание 7

Вывести формулу для главного момента сил давления, действующего на профиль Жуковского с параметрами c , h и d . Воспользоваться соотношениями (6.3) – (6.7) и формулами справа от рисунка 41. При определении коэффициента a_2 с помощью (6.3) перейти к интегрированию в параметрической плоскости, показанной на рис. 41.

7 Фокус профиля

7.1 Понятие фокуса профиля

Пусть функция $z = f_0(t)$ реализует конформное отображение внешности круга радиуса a на внешность профиля, такое что $\infty \rightarrow \infty$ $f'_0(\infty) > 0$. При такой нормировке сохраняются углы у скорости набегающего потока в физической и параметрической плоскостях. Пусть острой кромке профиля B отвечает точка $t_B = ae^{i\epsilon}$. Прямая, наклонённая под углом $\alpha = \epsilon$, определяет направление нулевой подъемной силы. Угол $\alpha_t = \alpha - \epsilon$ – это теоретический угол атаки.

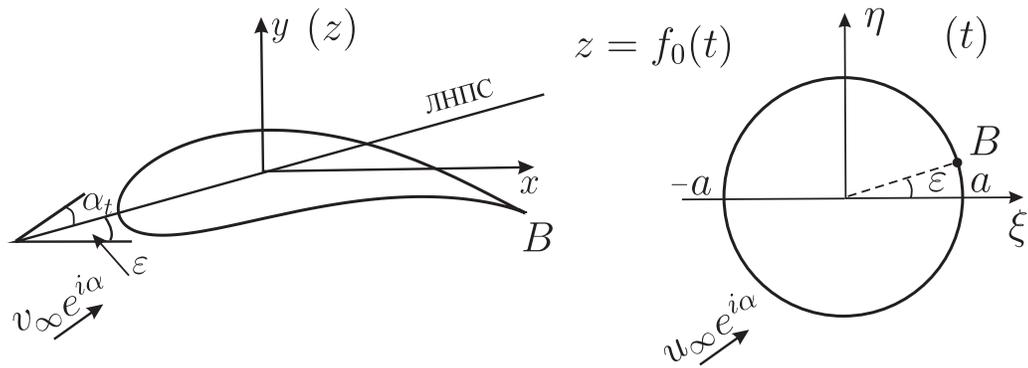


Рис. 49. Профиль, произвольно расположенный в потоке и параметрическая окружность радиуса a

Рассмотрим отображение

$$z = e^{-i\epsilon} f_0(ae^{i\epsilon}t) = f(t)$$

Эта функция отображает внешность окружности единичного радиуса на внешность профиля. При этом $\infty \rightarrow \infty$, $f'(\infty) = m_\infty > 0$, точка $(1, 0)$ является образом острой кромки, а профиль теперь повернут на угол ϵ . При $\alpha = 0$ подъемная сила равна нулю, линия нулевой подъемной силы совпадает с осью x .

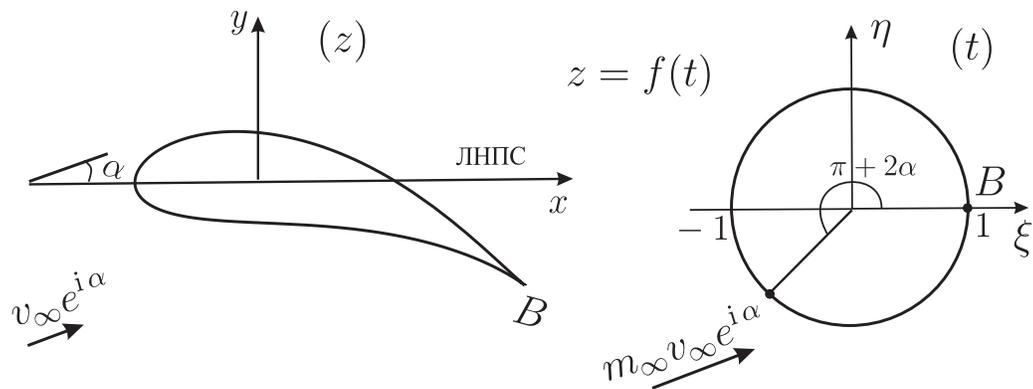


Рис. 50. Профиль, повернутый так, что ЛНПС совпадает с осью x . Параметрическая окружность единичного радиуса

Будем в дальнейшем работать с функцией $z = f(t)$. Рассмотрим разложение

$$z = f(t) = m_\infty t + m_0 + \frac{m_1}{t} + \dots$$

Комплексный потенциал

$$w(t) = m_\infty v_\infty \left(e^{-i\alpha} t + \frac{e^{i\alpha}}{t} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t.$$

Здесь учтено, что $a = 1$, и следовательно, $\Gamma = -4\pi m_\infty v_\infty \sin \alpha$. Поэтому функция комплексного потенциала приобретает вид:

$$w(t) = m_\infty v_\infty \left(e^{-i\alpha} t + \frac{e^{i\alpha}}{t} + 2i \sin \alpha \ln t \right).$$

Найдем производную

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= m_\infty v_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{t^2} + \frac{2i \sin \alpha}{t} \right) = m_\infty v_\infty \left(e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{t} - \frac{e^{i\alpha}}{t^2} \right) = \\ &= m_\infty v_\infty e^{-i\alpha} \left(1 + \frac{e^{2i\alpha} - 1}{t} - \frac{e^{2i\alpha}}{t^2} \right). \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\frac{dw}{dt} = m_\infty v_\infty e^{-i\alpha} \left(1 + \frac{e^{2i\alpha} - 1}{t} - \frac{e^{2i\alpha}}{t^2} \right). \quad (7.1)$$

После приведения к общему знаменателю найдем, что

$$\frac{dw}{dt} = m_\infty v_\infty e^{-i\alpha} \frac{(t-1) [t - e^{(\pi+2\alpha)i}]}{t^2}.$$

Критические точки: $t = 1$ и $t = e^{(\pi+2\alpha)i}$.

Согласно (6.7) момент относительно начала координат будет

$$L_0 = -2\pi \rho v_\infty \operatorname{Re}(ie^{-i\alpha} a_2).$$

Найдем коэффициент a_2 по формуле (6.3):

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{dz} z dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{dw/dt}{dz/dt} f(t) \frac{dz}{dt} dt.$$

Здесь мы перешли от интегрирования в плоскости z по контуру C к интегрированию в плоскости t по контуру C_t (кругу единичного радиуса). Далее,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{dw}{dt} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} m_\infty v_\infty e^{-i\alpha} \left(1 + \frac{e^{2i\alpha} - 1}{t} - \frac{e^{2i\alpha}}{t^2} \right) \times \\ &\quad \times \left(m_\infty t + m_0 + \frac{m_1}{t} \right). \end{aligned}$$

В подынтегральном выражение собираем коэффициент при $1/t$. С помощью формулы (6.4) предыдущего раздела выводим

$$a_2 = m_\infty v_\infty e^{-i\alpha} [m_1 + m_0 (e^{2i\alpha} - 1) - m_\infty e^{2i\alpha}].$$

Отсюда

$$L_0 = -2\pi\rho v_\infty^2 m_\infty \operatorname{Re} [ie^{-2i\alpha} (m_1 - m_0 + m_0 e^{2i\alpha} - m_\infty e^{2i\alpha})].$$

Величина m_∞ – действительная, поэтому $\operatorname{Re}(im_\infty) = 0$. Значит,

$$L_0 = -2\pi\rho v_\infty^2 m_\infty \operatorname{Re} [i(m_1 - m_0)e^{-2i\alpha} + im_0].$$

Рассмотрим точку $z_F = m_0 - m_1$ и перенесем начало координат в точку F с комплексной координатой z_F , сохранив направление осей. Таким образом, мы вводим новую систему координат $z_1 = z - z_F$. Для этой новой системы координат отображение будет

$$z_1 = f(t) - z_F = m_\infty t + m_0 - z_F + \frac{m_1}{t} \dots$$

Или

$$z_1 = m_\infty t + m_1 + \frac{m_1}{t} \dots$$

Следовательно, для новой системы координат $m_0 = m_1$. Значит момент относительно точки F

$$L_F = -2\pi\rho v_\infty^2 m_\infty \operatorname{Re} [im_0] = 2\pi\rho v_\infty^2 m_\infty \operatorname{Im} m_1,$$

и этот момент не зависит от угла атаки.

Определение. Точка F с комплексной координатой

$$z_F = m_0 - m_1,$$

момент относительно которой не зависит от угла атаки, называется фокусом профиля.

Из приведённых выше рассуждений следует, что точка F существует для

любого профиля. Это даёт возможность сформулировать теорему Чаплыгина.

Теорема Чаплыгина. Систему сил давления, действующих на профиль, можно привести к силе \vec{R} , равной

$$R_x + iR_y = -i\rho v_\infty e^{i\alpha} \Gamma$$

(модуль силы зависит от угла атаки, так как $\Gamma = -4\pi v_\infty m_\infty \sin \alpha$), приложенной в фокусе профиля F , и паре, момент которой от угла атаки не зависит и равен

$$L_F = 2\pi\rho v_\infty^2 m_\infty \operatorname{Im} m_1.$$

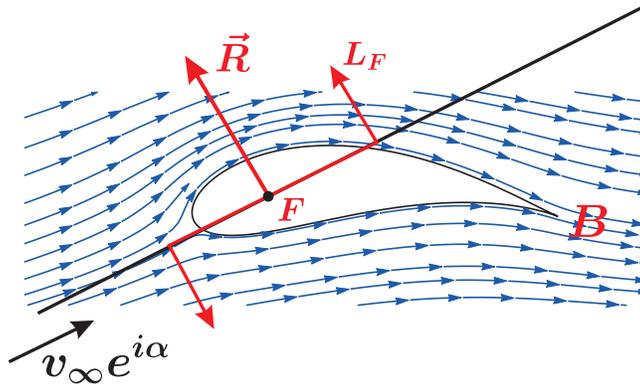


Рис. 51. Иллюстрация к теореме Чаплыгина

7.2 Линия действия результирующей силы

Обозначим $\operatorname{Im}(m_1/2) = \delta$. Тогда $L_F = 4\pi\rho v_\infty^2 m_\infty \delta$. Поместим начало координат в точку F и снова проведем ось Ox_1 в направлении линии нулевой подъемной силы. По теореме Жуковского

$$R_x + iR_y = -i\rho v_\infty e^{i\alpha} \Gamma,$$

где

$$\Gamma = -4\pi v_\infty m_\infty \sin \alpha = -4\pi v_\infty m_\infty \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

Тогда

$$R_x + iR_y = 2\pi v_\infty^2 m_\infty (e^{2i\alpha} - 1).$$

Отделяя действительную и мнимую части в последней формуле, находим

$$R_x = 2\pi v_\infty^2 m_\infty (\cos 2\alpha - 1), \quad R_y = 2\pi v_\infty^2 m_\infty \sin 2\alpha$$

Ранее мы установили, что уравнение линии действия имеет вид $x_1 R_y - y_1 R_x = L_F$. Отсюда следует, что

$$x_1 \sin 2\alpha + y_1(1 - \cos 2\alpha) = 2\delta.$$

Получили семейство прямых, для которого угол атаки α – параметр.

Найдем огибающую прямых этого семейства. Из аналитической геометрии известно, что если $F(x, y, \alpha) = 0$ – семейство кривых, то уравнение огибающей имеет вид

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases}$$

и параметр α необходимо исключить из этой системы. В нашем случае система будет

$$\begin{cases} x_1 \sin 2\alpha + y_1(1 - \cos 2\alpha) = 2\delta, \\ x_1 \cos 2\alpha + y_1 \sin 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} x_1 \sin 2\alpha - y_1 \cos 2\alpha = 2\delta - y_1, \\ x_1 \cos 2\alpha + y_1 \sin 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Чтобы исключить α , каждое уравнение возводим в квадрат и складываем. Получаем

$$x_1^2 + y_1^2 = (2\delta - y_1)^2 = 4\delta^2 - 4\delta y_1 + y_1^2.$$

Огибающая является параболой с уравнением

$$x_1^2 = -4\delta(y_1 - \delta). \tag{7.2}$$

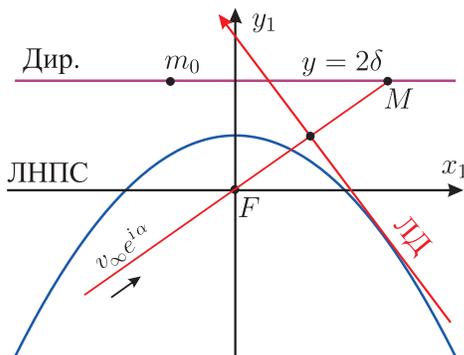


Рис. 52. Парабола устойчивости

Предположим, что $\delta > 0$. Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$, где p – параметр параболы. Фокус параболы расположен в точке $F(p/2, 0)$, а директриса – вертикальная прямая $x = -p/2$. В нашем случае в системе координат $Ox_1 y_1$ ветви параболы направлены вниз, параметр $p = 2\delta$, вершина расположена в точ-

ке $(0, \delta)$, фокус – в точке $F(0, 0)$ и совпадает с фокусом профиля, а уравнение директрисы будет $y_1 = 2\delta$.

Определение. *Парабола (7.2) геометрически жёстко связана с профилем и называется параболой устойчивости или параболой метацентров.*

Отметим, что $z_F = m_0 - m_1$, а $z_1 = z - z_F$. Отсюда следует, что в системе координат Oxy

$$\boxed{\operatorname{Im}(z - z_F) = 2\delta = \operatorname{Im} m_1} \implies \boxed{\operatorname{Im}(z - m_0 + m_1) = \operatorname{Im} m_1} \implies \\ \implies \boxed{\operatorname{Im}(z - m_0) = 0.}$$

Это означает, что точка m_0 лежит на директрисе.

Из аналитической геометрии известно, что *любая парабола – это огибающая срединных перпендикуляров отрезков, соединяющих фокус с точкой, лежащей на директрисе.* Это свойство параболы позволяет свести отыскание линии действия к чисто геометрическим построениям. В самом деле, мы знаем, что линия действия обязательно касается параболы метацентров.

Чтобы найти линию действия надо знать m_0 , z_F и направление линии нулевой подъемной силы, причём эти характеристики зависят только от формы профиля, то есть являются чисто геометрическими. Из точки m_0 проводим прямую, параллельную линии нулевой подъемной силы – это будет директриса (рис. 51). Из фокуса F профиля проводим прямую, параллельную направлению вектора скорости до пересечения с директрисой в точке M . Отрезок FM делим пополам и восстанавливаем из него перпендикуляр. Это и будет линия действия (ЛД).

Замечание. *Интересен случай, когда $\operatorname{Im} m_1 = 0 \implies \delta = 0$. В этом случае парабола вырождается в точку – фокус профиля. Момент относительно этого фокуса равен нулю. Все линии действия пересекаются в фокусе.*

7.3 О параболе устойчивости

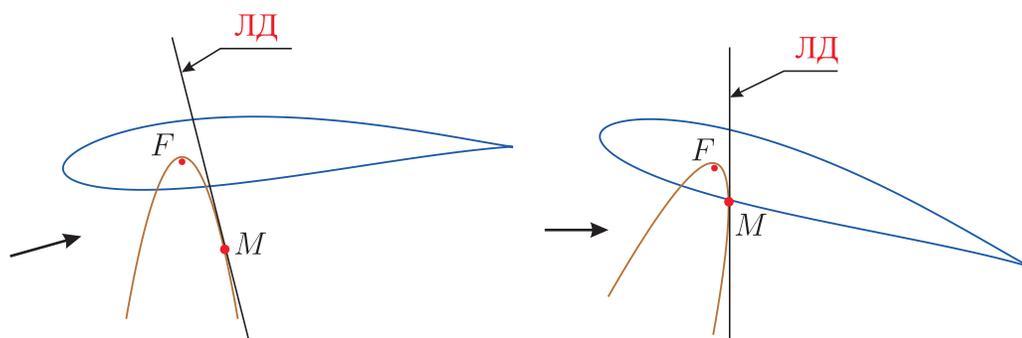


Рис. 53. Парабола устойчивости жёстко связана с профилем

Определение. Точка M на огибающей линии действия (параболе устойчивости) называется метacentром, если линия действия касается параболы в этой точке.

Замечание. Отметим, что парабола устойчивости жёстко связана с профилем и при изменении положения последнего в пространстве поворачивается вместе с профилем.

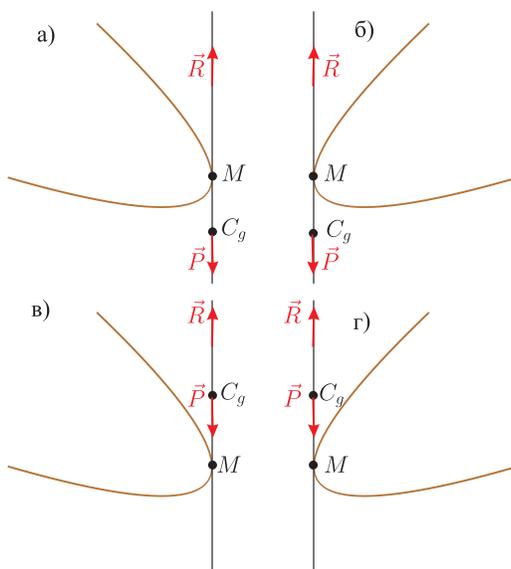


Рис. 54. Возможные расположения метacentра M и центра тяжести C_g

Рассмотрим профиль крыла в полете в положении равновесия. Рисуем только параболу устойчивости. Обозначим через C_g центр тяжести крыла, через \vec{P} – его вес, через \vec{R} – подъемную силу. Ясно, что в положении равновесия $\vec{R} = \vec{P}$. Возможны четыре случая взаимного расположения параболы устойчивости, метacentра M и центра тяжести C_g (рис. 54).

Случаи б) и г) являются зеркальным отражением случаев а) и в). Поскольку при зеркальном отражении физические закономерности остаются неизменными, достаточно рассмотреть случаи а) и в).

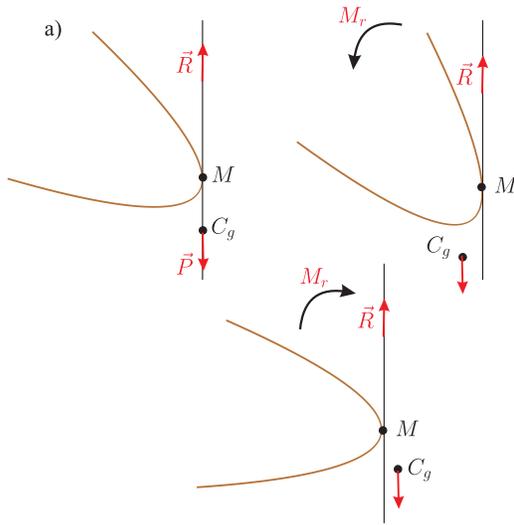


Рис. 55. Метацентр выше центра тяжести

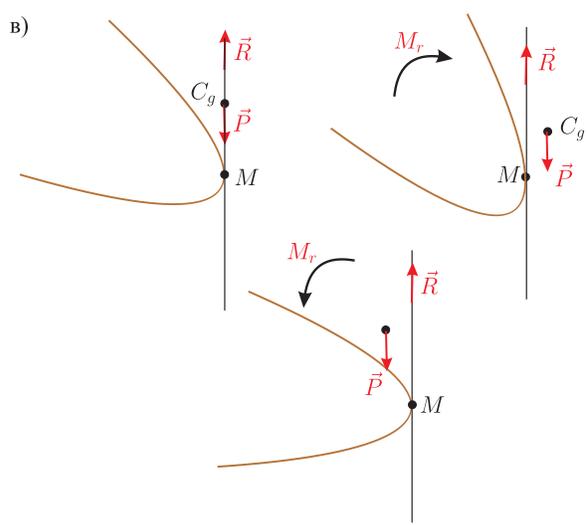


Рис. 56. Метацентр ниже центра тяжести

Рассмотрим случай а). Пусть в результате некоторого возмущения профиль изменил свое положение в пространстве, повернувшись на некоторый угол по часовой стрелке. При этом центр тяжести также повернется по часовой стрелке на тот же угол. Метацентр сместится по параболе, и в результате появится пара с моментом M_r , стремящаяся повернуть профиль в направлении по часовой стрелке, противоположном изначальному повороту. Аналогичная ситуация будет, если в результате возмущения профиль повернется по часовой стрелке. Появится пара с моментом M_r , стремящаяся повернуть профиль в направлении против часовой стрелки, противоположном изначальному повороту.

Вывод: положение а) – устойчиво, момент M_r – возвращающий.

В случае в) все будет наоборот. При повороте профиля по часовой стрелке, появится пара с моментом M_r , стремящаяся повернуть профиль в направлении также по часовой стрелке, а при повороте профиля против часовой стрелки, появится пара с моментом M_r , стремящаяся повернуть профиль в том же направлении.

Вывод: положение в) – неустойчиво, момент M_r – опрокидывающий.

Общий вывод. Если в положении равновесия центр тяжести лежит ниже метацентра, то положение устойчиво, если выше – неустойчиво.

Задание 8

С помощью пакета Математика построить параболу устойчивости для профиля Жуковского с параметрами c , h и d .

Литература

1. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: «Наука», 1979. 536 с.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть I. М: ГИТТЛ, 1955. 560 с.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: «Наука», 1973. 736 с.
4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: «Наука», 1987. 840 с.
5. *Мизес Р.* Теория полёта. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 687 с.
6. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: «Мир», 1964. 655 с.
7. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды по механики и математики. М.: ГИТТЛ, 1954. 567 с.