КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Б.А. Кац, Г.Д. Луговая, Г.Ш. Скворцова

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ - 2020

УДК 517

Печатается по решению Редакционно-издательского совета

ФГАОУ ВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет
учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Протокол № от 2020 г.,
заседания кафедры математического анализа
Протокол №5 от 3 марта 2020 г.

Авторы-составители: Б.А. Кац, Г.Д. Луговая, Г.Ш. Скворцова
доктор физ.– мат. наук, профессор Кац Б.А.,
канд. физ.– мат. наук, доцент Луговая Г.Д.,
канд. физ.– мат. наук Скворцова Г.Ш.
Рецензенты
кандидат физико-математических наук, доцент Гумеров Р.Н.

[**Интегралы,зависящие от параметра.**]: Учебно-методическое пособие./ Кац Б.А., Луговая Г.Д., Скворцова Г.Ш. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2020. – 26 с.

Данное учебное пособие предназначено для проведения занятий по курсу математического анализа со студентами, обучающимся по всем специальностям механико-математического факультета.

ВВЕДЕНИЕ

Материал данного пособия является важной частью раздела "Интегралы, зависящие от параметра"курса "Математический анализ"(4 семестр) для всех напрвлений подготовки Института математики и механики. На его изучение (на лабораторных занятиях или в рамках индивидуальной работы) выделяется до 20 часов учебного времени. В разделе "Предварительные сведения"приведены теоремы, которые предполагается использовать при выполнении заданий. Доказательства этих теорем обычно проводят на лекциях. Остальные разделы посвящены вычислению интегралов Фруллани, Дирихле, Эйлера - Пуассона, Френеля, а также изучению свойств Г–функции,В–функции и интеграла Фурье. Приведенные в пособии доказательства не являются полными, в них только обозначены основные идеи. Студент должен восстановить детали. Особо важные утверждения выделенны в отдельными пунктами. Начало доказательства обозначается значком ■, конец – ► . Кроме того, в конце каждого параграфа имеются вычислительные упражнения, при выполнении которых используется пройденный материал.

ПРОГРАММА

Интегралы Фруллани. Интеграл Дирихле. Интеграл Эйлера-Пуассона. Интегралы Френеля. Интегралы Лапласа. Г–функция. В–функция. Интеграл Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1.Тер-Крикоров А.М. , Шабунин М.И. , Курс математического анализа. - М.: Наука, 1998. - 816 С.
2.Фихтенгольц Г.М. , Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, -М.: Наука, 1970.- 800 С.
3.Шерстнев А.Н. , Конспект лекций по математическому анализу. - Казань: изд-во Казанск. ун-та 1993.- 302 С.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a, c \leq y \leq d$ и интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Теорема 2. Если для функции $f(x,y)(x \geqslant a, c \leqslant y \leqslant d)$ при каждом фиксированном $x \in [a,+\infty)$ существует непрерывная частная производная $f'_y(x,y)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно, то допустимо дифференцирование по параметру y под знаком интеграла:

$$\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

Теорема 3. Если выполнены условия:
1) функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a, c \leq y \leq d$,
2) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно параметра y на любом отрезке $[c_1, C] \subset [c, +\infty]$,
3)интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно параметра x на любом отрезке $[a_1, A] \subset [a, +\infty]$,
4) сходится один из интегралов $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|dy$ или $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$, то

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy.$$

1. ИНТЕГРАЛЫ ФРУЛЛАНИ.

Рассмотрим вопрос о существовании и вычислении интегралов вида

$$J(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx(a,b>0),$$

называемых *интегралами Фруллани.* Обозначим $f(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$, если этот предел существует и конечный.

Утверждение 1.1.
Если функция $f(x)(x \geqslant 0)$ непрерывна и существует $f(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$, то

$$J(a,b) = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}.$$

■ Для $0 < \delta < \Delta < +\infty$ имеем

$$\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}dx = \int\limits_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}dz =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}dz = f(\xi)\ln\frac{b}{a} - f(\eta)\ln\frac{b}{a}, \text{ где } a\delta \leqslant \xi \leqslant b\delta, a\Delta \leqslant \eta \leqslant b\Delta.$$

В последнем равенстве используем теорему о среднем.
Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}dz - \lim_{\Delta\to+\infty}\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}dz =$$

$$= \lim_{\xi\to 0} \ln\frac{b}{a} - \lim_{\eta\to+\infty} \ln\frac{b}{a} = [f(0) - f(+\infty)] \ln\frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Утверждение 1.2.

Если функция $f(x),(x \geqslant 0)$ непрерывна, $f(+\infty)$ не существует, но существует $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ для каждого $A > 0$, то

$$J(a,b) = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

■ По аналогии с 1.1 для $0 < \delta < \Delta < +\infty$ имеем:

$$\int\limits_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(\xi) \ln \frac{b}{a} - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz =$$

$$= f(\xi) \ln \frac{b}{a} - \int\limits_{A}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz + \int\limits_{A}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\xi \to 0} f(\xi) \ln \frac{b}{a} - \lim_{\Delta \to +\infty} \left[\int\limits_{A}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{A}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz \right] = f(0) \ln \frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Утверждение 1.3.

Если функция $f(x), (x > 0)$ непрерывна, $f(+\infty)$ существует и существует $\int\limits_{0}^{A} \frac{f(x)}{x} dx$ для каждого $A > 0$, то

$$J(a, b) = f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

■ Приводится 1.2 подстановкой $x = \frac{1}{t}$. ▶

1.4. Упражнения.

Вычислить при $a, b > 0$.

1.4.1.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx.$$

1.4.2.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

1.4.3.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx.$$

1.4.4.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx.$$

1.4.5.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx.$$

2. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ.

Интегралом Дирихле называется интеграл, зависящий от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

Утверждение 2.1.

Интеграл Дирихле сходится и при $\alpha > 0$ не зависит от значения α.

Теорема 2.2. Интеграл Дирихле

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{2} \mathrm{sign} \alpha.$$

■ Для $\alpha, k > 0$ рассмотрим интеграл

$$J(\alpha, k) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

2.2.1 Допустимо дифференцирование по параметру α под знаком интеграла:

$$J'_\alpha(\alpha, k) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx = Re \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} e^{i\alpha x} dx = \frac{k}{k^2 + \alpha^2}$$

2.2.2 Тогда $J(\alpha, k) = \mathrm{arctg} \frac{\alpha}{k}$

2.2.3 Функция $J(\alpha, k)$ непрерывна по k.
Следовательно,

$$J(\alpha) = J(\alpha, 0) = \lim_{k \to 0+} J(\alpha, k) = \frac{\pi}{2}.$$

При $\alpha < 0$:

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(-\alpha x)}{x} dx = \frac{-\pi}{2}; J(0) = 0.$$

Таким образом,
$$J(\alpha) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sign}\alpha. \blacktriangleright$$

2.3. Упражнения.

Вычислить интегралы:

2.3.1.
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx.$$

2.2.2.
$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 .dx$$

2.3.3.
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$$

2.3.4.
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx.$$

2.2.5.
$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 .dx$$

2.3.6.
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2} dx.$$

2.3.7.
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx.$$

2.3.8.
$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx.$$

3. ИНТЕГРАЛ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА.

Интеграл вида $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$, называется *интегралом Эйлера-Пуассона.*

Утверждение 3.1. Интеграл $I(\alpha)$ сходится при любом $\alpha > 0$.

Утверждение 3.2. Интеграл

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

■ Так как

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

то достаточно посчитать только

$$I(1) = I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Сделаем замену переменной $x = ty (y > 0) : I = y \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2 y^2} dt$. Умножим это равенство на e^{-y^2} и проинтегрируем по y в пределах от 0 до $+\infty$:

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} I e^{-y^2} dy = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+t^2)} dt.$$

Возможно изменение порядка интегрирования.
Тогда

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+t^2)} dy = \frac{\pi}{4}$$

и $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ►

3.3. Упражнения.

Вычислить интегралы:

3.3.1.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

3.3.2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} ch(bx)dx (a > 0).$$

3.3.3.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})} ch(bx)dx (a > 0).$$

3.3.4.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx (a > 0, b > 0).$$

3.3.5.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx (a > 0).$$

3.3.6.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx (a > 0).$$

4. ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ.

Интегралы вида

$$C(t) = \int\limits_0^t \sin(x^2)dx,$$

$$S(t) = \int\limits_0^t \cos(x^2)dx$$

называются *интегралами Френеля.*
Вычислим интегралы вида

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx,$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)dx.$$

Утверждение 4.1. Интегралы I_1 и I_2 сходятся.

Утверждение 4.2. Интеграл

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

■ Сделаем замену переменной $y = x^2$. Тогда

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy.$$

4.2.1 Так как предельный переход под знаком интеграла возможен, то

$$I_1 = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-hy}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy.$$

Если в интеграле Эйлера-Пуассона сделать замену $t = x\sqrt{y}$, то получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y}e^{-x^2 y}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Тогда для $y > 0$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-x^2 y} dx.$$

Подставим выражение $\frac{1}{\sqrt{y}}$ в формулу для I_1. Получим

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(h+x^2)} \sin y dx.$$

4.2.2 Так как изменение порядка интегрирования возможно, то

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(h+x^2)} \sin y dy.$$

4.2.3 Учитывая равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt = \mathtt{Im} \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\iota t} dt = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

получаем

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(h+x^2)^2}.$$

4.2.4 Так как предельный переход под знаком интеграла допустим, то

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

Утверждение 4.3.

$$I_2 = I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

$\blacksquare$ Аналогично 4.2

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(h+x^2)} \cos y dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{h+x^2}{1+(h+x^2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \ \blacktriangleright$$

Утверждение 4.4. Интегралы Френеля можно разложить в степенной ряд

$$C(t) = \int\limits_0^t \sin(x^2) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-1)^k t^{4k+3}}{(4k+3)(2k+1)!},$$

$$S(t) = \int\limits_0^t \cos(x^2) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-1)^k t^{4k+1}}{(4k+1)(2k)!}.$$

Функции $x = C(t)$ и $y = S(t)$ определяют кривую, называемую *спиралью Корню.*

Утверждение 4.5. Об графиках функций $x = C(t), y = S(t)$ и спирали Корню (см. рис. 1 и 2):
1) Графики функций $x = C(t), y = S(t)$ имеют горизонтальные ассимптоты при $t \longrightarrow \infty$.
2) Графики функций $x = C(t), y = S(t)$ имеют бесконечное число точек экстремума.
3) Длина касательного вектора к спирали Корню равна 1.

4.6. Упражнения.

Вычислить интегралы:

4.6.1.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx.$$

4.6.2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2\alpha x dx.$$

4.6.2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cos 2\alpha x dx.$$

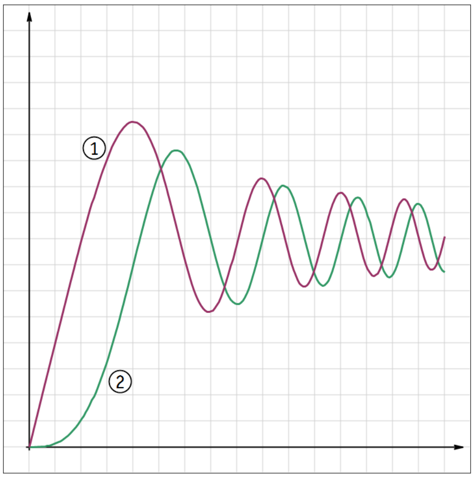

Рис. 1: График функций $x = C(t), y = S(t)$.

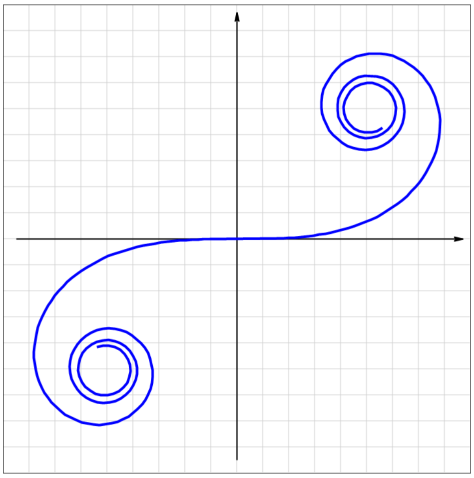

Рис. 2: Спираль Корню.

5. ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА.

Интегралами Лапласа называются интегралы вида

$$I_1(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx,$$

$$I_2(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx.$$

Утверждение 5.1. Интегралы $I_1(y)$ и $I_2(y)$ сходятся при любом $y \in \mathbb{R}$.

Утверждение 5.2. Интегралы

$$I_1(y) = \frac{\pi}{2} e^{-|y|},$$

$$I_2(y) = \frac{\pi}{2} e^{-|y|} \mathrm{sign} y.$$

■ Заметим, что

$$I_2(y) = \int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x(1+x^2)}\right] \sin xy dx = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{(x(1+x^2)} dx.$$

5.2.1 При $y \geq \delta > 0$ возможно дифференцирование интегралов $I_1(y)$ и $I_2(y)$ по y:

$$I_1'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = -I_2(y),$$

$$I_2'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = -I_1(y).$$

Получаем

$$I_1'(y) = -I_2(y), I_2'(y) = -I_1(y),$$
$$I_1''(y) - I_1(y) = 0.$$

5.2.2 Решение последнего дифференциального уравнения при $y \geq \delta$:

$$I_1(y) = C_1 e^{-y} + C_2 e^y.$$

Покажем, что $C_2 = 0$. Действительно:

$$|I_1(y)| = \left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \right| \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $I_1(y)$ - ограниченная функция. Так как функция e^y не ограничена при $y \geq \delta$, то $C_2 = 0$. Итак, при $y \geq \delta$

$$I_1(y) = C_1 e^{-y}, I_2(y) = -I_1'(y) = C_1 e^{-y}.$$

В силу произвольности δ можно считать, что при $y > 0$

$$I_1(y) = I_2(y) = C_1 e^{-y}.$$

Функции определены на всей числовой прямой, причем $I_1(y)$ - четная, а $I_2(y)$ - нечетная. Следовательно,

$$I_1(y) = C_1 e^{-|y|}, I_2(y) = C_1 e^{-|y|} \mathrm{sign} y.$$

5.2.3 Функция $I_1(y)$ - непрерывна.

5.2.4 Следовательно,

$$I_1(0) = \lim_{y \to 0+} I_1(y) = \lim_{y \to 0+} C_1 e^{-|y|} = C_1.$$

С другой стороны

$$I_1(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Т.е. $C_1 = \frac{\pi}{2}$. Осталось заметить, что формулы

$$I_1(y) = \frac{\pi}{2} e^{-|y|},$$

$$I_2(y) = \frac{\pi}{2} e^{-|y|} \mathrm{sign} y$$

верны и при $y = 0$. ▶

5.3. Упражнения.

Вычислить интегралы:

5.3.1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

5.3.2.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx$$

5.3.3.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c} dx.$$

6. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ(Г-функция).

Г -*функцией* называется несобственный интеграл, зависящий от параметра x, $(x > 0)$

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Утверждение 6.1. При $x > 0$ интеграл $\Gamma(x)$ сходится.

Утверждение 6.2. При $x > 0$ функция $\Gamma(x)$ непрерывна. ■ Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

сходится равномерно на любом отрезке $[a, A] \subset (0, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса. Подынтегральная функция непрерывна при $x > 0$. Значит функция $\Gamma(x)$ непрерывна на отрезке $[a, A]$, следовательно, в силу произвольности a, A функция $\Gamma(x)$ непрерывна при $x > 0$. ▶

Утверждение 6.3. Функция $\Gamma(x)$ имеет производные любого порядка:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^{(n)} tdt.$$

■ Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln tdt$$

сходится равномерно на любом отрезке $[a, A] \subset (0, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса. По теореме 2 функция $\Gamma(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, A]$, следовательно, в силу произвольности a, A функция $\Gamma(x)$ дифференцируема при $x > 0$ и

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln tdt.$$

Формула для больших степеней доказывается аналогично.▶

Утверждение 6.4. Имеют место формулы:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), (x > 0)$$

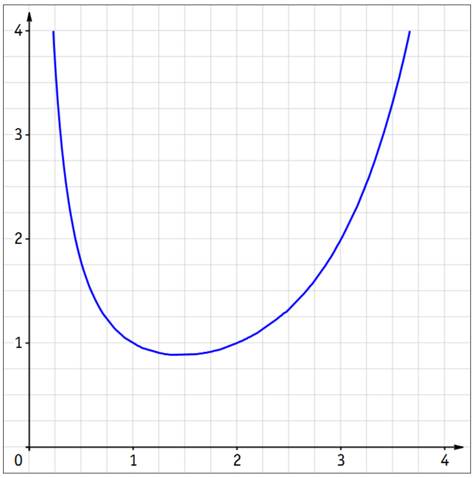

Рис. 3: График $\Gamma(x)$-функции .

$$\Gamma(n+1) = n!, (n \in \mathbb{N}).$$

■ Первая формула получается интегрированием по частям $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}|_0^{+\infty} + x \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Вторая формула следует из первой. ▶

Утверждение 6.5. Об графике $\Gamma(x)$-функции:

$$1) \lim_{x \to 0+} \Gamma(x) = +\infty,$$

2) существует точка $x_0 \in (1,2)$, в которой $\Gamma(x)$ имеет локальный минимум,
3) график $\Gamma(x)$-функции является выпуклым вниз.
■

$$1) \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x}, (x \to 0+).$$

2) Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, то по теореме Ролля существует точка $x_0 \in (1,2)$, в которой $\Gamma'(x_0) = 0$. Вторая производная $\Gamma''(x_0) > 0$, следовательно, в точке x_0 локальный минимум.

3) Из утверждения 6.3. следует, что вторая производная $\Gamma''(x) > 0$ при всех $x > 0$. Значит график $\Gamma(x)$-функции является выпуклым вниз. ▶

7. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ(B-функция).

B-функцией называется несобственный интеграл, зависящий от параметров x и y $(x > 0, y > 0)$

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Утверждение 7.1. При $x > 0, y > 0$ интеграл $B(x,y)$ сходится.

Утверждение 7.2.

$$B(x,y) = B(y,x).$$

Утверждение 7.3. B-функцию можно также представить в виде:

$$B(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$$

■ Сделаем замену $t = \frac{u}{1+u}$. Получим:

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$$

Во втором интеграле сделаем замену $t = \frac{u}{1+u}$

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt + \int\limits_0^1 \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt. \blacktriangleright$$

Утверждение 7.4. Для B-функции при $x > 1, y > 1$ верны следующие соотношения:

$$B(x,y) = \frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1) = \frac{x-1}{x+y-1}B(x-1,y).$$

■ Применим формулу интегрирования по частям:

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=(1-t)^{y-1}\frac{t^x}{x}|_0^{+\infty}+\frac{y-1}{x}\int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-2}dt=$$

$$=\frac{y-1}{x}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}dt-\frac{y-1}{x}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{y-1}{x}B(x,y-1)-\frac{y-1}{x}B(x,y).$$

Последнее равенство получено с применением формулы

$$t^x=t^{x-1}-t^{x-1}(1-t).$$

То есть,

$$B(x,y)=\frac{y-1}{x}B(x,y-1)-\frac{y-1}{x}B(x,y).$$

Откуда получаем первое из доказываемых соотношений. Второе равенство верно в силу симметрии $B(x,y)$. ▶

Утверждение 7.5. При $n,m\in\mathbb{N}$

$$B(n,m)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Утверждение 7.6. При $x>0,y>0$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

■ В функции $\Gamma(x+y)$ сделаем замену переменной $t=u(1+v)$:

$$\Gamma(x+y)=\int\limits_0^{+\infty}(1+v)^{x+y}u^{x+y-1}e^{-u(1+v)}du.$$

Тогда

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+v)^{x+y}}=\int\limits_0^{+\infty}u^{x+y-1}e^{-u(1+v)}du.$$

Умножим это равенство на v^{x-1} и проинтегрируем по v в пределах от 0 до $+\infty$:

$$B(x,y)\Gamma(x+y)=\int\limits_0^{+\infty}v^{x-1}dv\int\limits_0^{+\infty}u^{x+y-1}e^{-u(1+v)}du.$$

Так как изменение порядка интегрирования возможно, то

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} v^{x-1}u^{x+y-1}e^{-u(1+v)}dv.$$

Делая замену переменных $v = \frac{t}{u}$ в последнем интеграле получаем

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}u^{y-1}e^{-u}e^{-t}dt = \Gamma(x)\Gamma(y). \blacktriangleright$$

Утверждение 7.7. При $0 < x < 1$

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

◼ Используем тождество

$$\frac{1}{t+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

Тогда

$$B(x, 1-x) = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{(1+t)} dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x+1} \right) + (-1)^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{t^{n+1}(t^{x-1} + t^{-x})}{(1+t)} dt.$$

Оценим последний интеграл:

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{t^{n+1}(t^{x-1} + t^{-x})}{(1+t)} dt \le \int\limits_0^1 (t^{n+x} + t^{n-x+1}) dt = \frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{n+2-x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 \frac{t^{n+1}(t^{x-1} + t^{-x})}{(1+t)} dt = 0.$$

И, переходя к пределу по $n \to +\infty$ получаем

$$B(x, 1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x+1} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Последнее равенство следует из разложения в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции

$$\cos ax = \frac{\sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k-a+1} \right) \cos kx \right),$$

вычисленного при $x = 0$. ▶

Утверждение 7.8. Имеют место формулы:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, (0 < x < 1),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi,$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, (n \in \mathbb{N}).$$

■ Первые две формулы следуют из 7.7. Из 6.4 следует, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+x) = (n+x-1)(n+x-2)\dots(n+x-1)(x+1)\Gamma(x).$$

При $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})\dots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

7.9. Упражнения.

Вычислить интегралы:

7.9.1.

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx.$$

7.9.2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}, (n > 1).$$

7.9.3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}.$$

7.9.4.

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx, (n \in \mathbb{N}).$$

7.9.5.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

7.9.6.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx.$$

7.9.7.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx.$$

7.9.8.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x)^n}dx.$$

7.9.9.

$$\int\limits_a^{b} \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(c+x)^{m+n+1}}dx.$$

7.9.10.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}dx.$$

7.9.11.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx.$$

7.9.12.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^m}dx.$$

7.9.13.

$$\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx.$$

7.9.14.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}\ln x}{1+x}dx.$$

7.9.15.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^2}dx.$$

7.9.16.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}-x^{m-1}}{(1+x)\ln x}dx.$$