УДК: 530.1

ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В КОМПЛЕКСНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕДАХ, ВКЛЮЧАЯ АТМОСФЕРУ, ГИДРОСФЕРУ И КОСМИЧЕСКУЮ ПЛАЗМУ

Белашов В. Ю.[1], Белашова Е. С.[2], Харшиладзе О. А.[3]
([1]*Казанский федеральный университет, Россия;* [2]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Россия;* [3]*Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Грузия*)

В настоящей работе представлены основные результаты по теоретическому и численному исследованию, а также приложениям в реальных физических средах динамики 2D и 3D нелинейных волновых структур солитонного и вихревого типов, описываемой обобщенными уравнениями класса КП (GKP), уравнениями типа 3-DNLS и системой дифференциальных уравнений эйлерового типа.

Рассматривая классы нелинейных GKP- и DNLS-моделей, в качестве исходной, будем использовать систему уравнений гидродинамики с граничными условиями [1]:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} + (c^2/\rho)\nabla\rho = 0, \quad \partial_t\rho + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0;$$

$$\partial_t\Phi + \tfrac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{c^2(\rho-\rho_0)}{2\rho} + \frac{c^2 z}{\rho} = 0, \quad \Delta\Phi = 0; \tag{1}$$

$$\partial_t\eta + \partial_x\eta\,\partial_x\Phi + \partial_y\eta\,\partial_y\Phi - \partial_z\Phi = 0, \quad \partial_t\Phi + \tfrac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + (c^2/\rho)\,\eta = 0;$$

$$z = \eta(x,y,t), \qquad \partial_z\Phi\big|_{z=-\rho_0} = 0,$$

где введены понятия обобщенных плотности ρ и скорости «звука» $c(\rho)$ в пренебрежении дисперсией. Система (1), в зависимости от смысла входящих в нее функций и переменных, описывает: волны на поверхности жидкости; ионно-звуковые волны в плазме; быстрые магнитозвуковые (БМЗ) волны в замагниченной плазме. Первые два уравнения – уравнения движения и непрерывности для обобщенных скорости и плотности соответственно. Для волн на «мелкой» воде $\mathbf{v}$ – скорость частиц («массовая» скорость), для ионно-звуковых волн – скорость ионного «звука», для МЗ волн $\mathbf{v} \equiv \mathbf{h} = \mathbf{H}_\sim/\mathbf{H}_0$ – безразмерное магнитное поле ($\mathbf{H}_\sim$ – поле волны). Следующие два уравнения – уравнения для потенциала ($\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\Phi$), последние четыре соотношения – граничные условия. Изучая обобщенные уравнения, мы осуществляем общий подход, отвлекаясь от конкретного вида среды. Используя разложение по степеням малых параметров, как это сделано в [1, 2], можно получить уравнение:

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta\partial_x^3 u = \Re, \tag{2}$$

в котором, например, для волн на поверхности жидкости

$$\alpha = 3c_0/2H,\ c_0 = (gH)^{1/2};\ \Re = -(c_0/2)\nabla_\perp w,\ \partial_x w = \nabla_\perp u;\ \ \beta = \frac{c_0}{6}\left(\frac{3\sigma}{\rho g} - H^2\right).$$

Если $H \to (3\sigma/\rho g)^{1/2}$, в $\Re[u]$ появляется высшая дисперсионная поправка $-\gamma\partial_x^5 u$, где $\gamma = (c_0/6)[H^2(\tfrac{2}{5}H^2 - \sigma/\rho g) - \tfrac{1}{12}(3\sigma/\rho g - H^2)^2]$.

Для БМЗ-волн в замагниченной плазме дисперсионный коэффициент имеет вид $\beta = v_A\,(c^2/2\omega_{0i}^2)(\cot^2\theta - m_e/m_i)$, и когда угол между вектором $\mathbf{k}$ и полем $\mathbf{B}$ $\theta \to \arctan(m_i/m_e)^{1/2}$, функционал $\Re[u]$ в (2) должен быть дополнен дисперсионным членом $-\gamma\partial_x^5 u$, с коэффициентом дисперсии $\gamma = v_A(c^4/8\omega_{0i}^4)\left[3\left(m_e/m_i - \cot^2\theta\right)^2 - 4\cot^4\theta\left(1+\cot^2\theta\right)\right]$. При учете диссипативных эффектов в среде в правой части (2) появляется член $\Re[u] = \nu\partial_x^2 u$, где, например, для ионно-звуковых волн в плазме $\nu = (\rho_0/2\rho)(c_\infty^2 - c_0^2)\,\tau\int_0^\infty \xi\varphi(\xi)d\xi$ имеет смысл коэффициента релаксационного затухания «звуковых» колебаний; функция $\varphi(t,\tau)$ определяет релаксационный процесс. С учетом всех рассмотренных эффектов можно записать обобщенное уравнение (Belashov-Karpman (BK) equation):

$$\partial_t u + \hat{A}(t,u)u = f, \quad f = \kappa\int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp u \, dx, \quad \Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2 ,$$

где при $\hat{A}(t,u) = \alpha u \partial_x - \partial_x^2(\nu - \beta\partial_x - \gamma\partial_x^3)$ будем иметь обобщенные уравнения класса GKP, а при $\hat{A}(t,u) = 3s|p|^2 u^2 \partial_x - \partial_x^2(i\lambda + \nu)$ – уравнения класса DNLS, где $u = h = (B_y + iB_z)/2B_0|1-\beta|^{1/2}$, $\mathbf{h} = \mathbf{B}_\perp / B_0$, $p = (1+ie)$: $\partial_t h + s\partial_x\left(|h|^2 h\right) - i\lambda\partial_x^2 h - \nu\partial_x^2 h = \sigma\int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp h \, dx$.

Обе модели не являются в математическом смысле полностью интегрируемыми, аналитически мы можем только выполнить анализ устойчивости решений – на основе метода исследования трансформационных свойств гамильтониана системы [2], и качественный и асимптотический анализ решений: построить классификацию решений в многомерном фазовом пространстве и по характеру асимптотик [4].

Для исследования устойчивости решений запишем уравнение GKP в гамильтоновском виде: $\partial_t u = \partial_x(\delta H/\delta u)$ с гамильтонианом $H = \int \left[-(\varepsilon/2)(\partial_x u)^2 + (\lambda/2)(\partial_x^2 u)^2 + (\nabla_\perp \partial_x v)^2/2 - u^3\right] d\mathbf{r}$, имеющим смысл энергии системы. Рассмотрим вариационную задачу: $\delta(H + \upsilon P_x) = 0$, $P_x = \frac{1}{2}\int u^2 \, d\mathbf{r}$. Такая запись означает, что все финитные решения есть стационарные точки гамильтониана H при фиксированной проекции импульса P_x. Задача устойчивости состоит в том, что, в соответствии с теоремой Ляпунова, в динамической системе точки, которые отвечают минимуму или максимуму H, являются абсолютно устойчивыми. Рассмотрим деформации H, сохраняющие проекцию импульса P_x: $u(x, r_\perp) \to \zeta^{-1/2}\eta^{(1-d)/2} u(x/\zeta, \mathbf{r}_\perp/\eta)$. Гамильтониан уравнения GKP, как функция деформационных переменных, приобретает вид $H(\zeta,\eta) = a\zeta^{-2} + b\zeta^2\eta^{-2} - c\zeta^{-1/2}\eta^{(1-d)/-2} + e\zeta^{-4}$, где коэффициенты $a = -(\varepsilon/2)\int(\partial_x u)^2 d\mathbf{r}$, $b = (1/2)\int(\nabla_\perp\partial_x v)^2 d\mathbf{r}$, $c = \int u^3 \, d\mathbf{r}$, $e = (\lambda/2)\int(\partial_x^2 u)^2 d\mathbf{r}$. Необходимое условие экстремума: $\partial_\zeta H = 0$, $\partial_\eta H = 0$. Достаточное условие минимума гамильтониана:

$$\begin{vmatrix} \partial_\zeta^2 H(\zeta,\eta) & \partial_{\zeta\eta}^2 H(\zeta,\eta) \\ \partial_{\eta\zeta}^2 H(\zeta,\eta) & \partial_\eta^2 H(\zeta,\eta) \end{vmatrix} > 0, \qquad \partial_\zeta^2 H(\zeta,\eta) > 0.$$

Совместное решение этих уравнений и неравенств позволяет доказать возможность существования в GKP модели абсолютно и локально устойчивых решений, условия устойчивости 2D- и 3D-солитонных решений представлены в [2].

Для исследования устойчивости решений уравнения 3-DNLS оно также записывается в виде [3, 4]: $\partial_t h = \partial_x(\delta H/\delta h)$ с гамильтонианом $H = \int\left[\frac{1}{2}|h|^4 + \lambda s h h^* \partial_x\varphi + \frac{1}{2}\sigma(\nabla_\perp\partial_x w)^2\right] d\mathbf{r}$, $\partial_x^2 w = h$, $\varphi = \arg(h)$. Вариационная задача формулируется следующим образом: $\delta(H + \upsilon P_x) = 0$, $P_x = \frac{1}{2}\int|h|^2 \, d\mathbf{r}$. Решая задачу устойчивости, рассмотрим деформации H, сохраняющие проекцию импульса P_x: $u(x, r_\perp) \to \zeta^{-1/2}\eta^{-1} h(x/\zeta, \mathbf{r}_\perp/\eta)$, $\zeta, \eta \in C$. Гамильтониан уравнения 3-DNLS приобретает вид $H(\zeta,\eta) = a\zeta^{-1}\eta^{-2} + b\zeta^{-1} - c\zeta^2\eta^{-2}$, где $a = (1/2)\int|h|^4 d\mathbf{r}$, $b = \lambda s\int h h^* \partial_x\varphi \, d\mathbf{r}$, $c = (\sigma/2)\int(\nabla_\perp\partial_x w)^2 d\mathbf{r}$.

Анализ ограниченности гамильтониана H выполнялся аналогично случаю уравнения GKP. В итоге, мы доказали возможность существования в модели 3-DNLS абсолютно и локально устойчивых 3D-решений и получили условия их устойчивости (т. е. области значений коэффициентов уравнения 3-DNLS) [4].

Асимптотики решений уравнений GKP-класса были подробно исследованы в работе [5] для функции $w = u(\zeta,\eta,t)/V$. При этом было получено

– для случаев $V > 0$, $\gamma = -1$ и $V < 0$, $\gamma = -1$: $w = A_1 \exp\left\{(2\gamma)^{-1/2}\left[C^2 + \sqrt{C^4 \pm 4\gamma}\right]^{1/2}\chi\right\}$, т. е. решения экспоненциально затухают на $\pm\infty$;

– для $V<0,\ \gamma=1$: $w=A_2\exp\left\{(2C^{-1}\gamma^{-1/2})^{-1}(2C^{-2}\gamma^{1/2}-1)^{1/2}\chi\right\}\cos\left\{(2C^{-1}\gamma^{-1/2})^{-1}(2C^{-2}\gamma^{1/2}+1)\chi+\Theta\right\}$,

где A_1, A_2 и Θ – произвольные постоянные, $C=|V|^{-1/4}$, $\chi=[\eta\pm\zeta+(\kappa-V)t]$, т. е. асимптотики являются затухающими осцилляторными.

Таким образом, было установлено, что в зависимости от знаков V и β уравнение GKP может иметь 2D-солитонные решения с монотонными и осциллирующими асимптотиками (рис. 1).

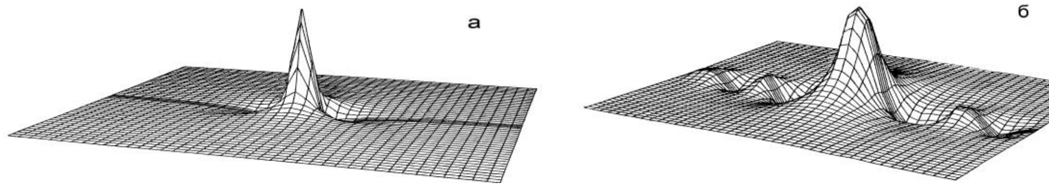

Рис. 1. Общий вид 2D-решений уравнения GKP: $\gamma=1$, $\beta=-0.8$ ($t=0.2$) (*а*); $\gamma=1$, $\beta=3.16$ ($t=0.5$) (*б*)

При исследовании взаимодействия 2D-солитонов уравнения GKP использовались специально развитые методы численного интегрирования, основанные на конечно-разностных и спектральных подходах [1, 2]. При этом, в частности, было установлено, что могут наблюдаться как тривиальные, аналогичные 2D-солитонам уравнения КП, случаи взаимодействия; так и совершенно нетривиальный (и невозможный в «классической» модели КП) случай формирования устойчивых солитонных пар (связанных состояний) – так называемых bi-солитонов [1, 2] (рис. 2). Диссипация в системе непосредственно влияет на структуру 2D-солитонов. При этом наблюдается эффект удлинения солитонного «хвоста», а также уменьшение частоты осцилляций и гашение колебаний позади главного максимума.

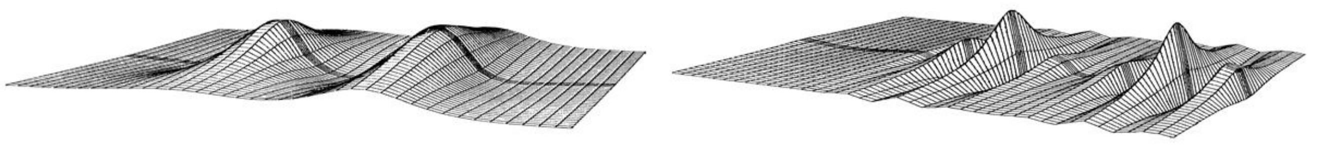

Рис. 2. Формирование 2D-бисолитона при $u_1(0)=1.35$, $u_2(0)=1.3$, $\Delta x(0)=6$: $t=0.2$; $t=1.2$

В работах [2-5] нами были исследованы многочисленные приложения модели уравнений класса GKP в физике реальных сред с дисперсией, в частности: динамика ионно-звуковых и быстрых магнитозвуковых волн в плазме (ионосфера и магнитосфера Земли, астрофизика); динамика солитонов на поверхности «мелкой» жидкости (гравитационные и гравитационно-капиллярные волны, цунами); возмущения в атмосфере и ионосфере, генерируемые импульсными источниками (сейсмические процессы, солнечное затмение и терминатор, мощные искусственные взрывы); эволюция в средах с переменной дисперсией (волны в жидкости, волны в плазме). Результаты сравнения полученных при этом результатов с известными экспериментальными говорят об адекватности модели GKP для описания нелинейных волновых процессов в реальных физических средах с дисперсией.

Для исследования динамики вихревых структур в качестве исходных рассматриваются уравнения Эйлера, от которых для исследования вихревого движения мы переходим к уравнению переноса для плотности ρ и уравнению Пуассона для функции тока ψ [6]:

$$\partial_t\rho+(\mathbf{v}\nabla)\rho=\nu\nabla^2\rho,\quad \Delta\psi-f=-\rho,\quad \mathbf{v}=B^{-1}[\nabla,\psi\mathbf{e}_z],\quad \mathbf{e}_z=\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y.$$

Здесь ν – кинематическая вязкость. Эти уравнения описывают сплошную среду или квазичастицы (заряженные нити, вытянутые вдоль однородного поля **B**) с кулоновским взаимодействием [6]. Смысл переменных зависит от типа среды. Для моделирования нами использовался модифицированный метод КД, развитый в [7, 8].

На рис. 3 и 4 показаны примеры моделирования таких систем, как синоптический вихрь (в сравнении с реальной циклонической системой) и вихревые образования в жидкости, когда результатом взаимодействия является образование комплексной структуры с межвихревыми пеленами, соединяющими вихри системы.

Таким образом, используя полученные в работах [6-8] результаты, мы можем эффективно моделировать (а, следовательно, и прогнозировать) эволюцию реальных вихревых систем.

В работах [6, 8-10] представлены результаты для ряда других вихревых систем: эволюция торнадо с поперечными возмущениями его оси; взаимодействие потоков заряженных частиц в плазме магнитосферы и ионосферы, формирование завихренностей и вихревых цепочек при обтекании тел потоками газа и жидкости; образование и эволюция вихревых структур в астрофизике (спиральная структура галактик, солнечная вспышечная активность – магнитные петли и трубки в солнечной короне); проблема магнитного удержания и УТС; вихревые движения в плазме, относящиеся к плазменным технологиям.

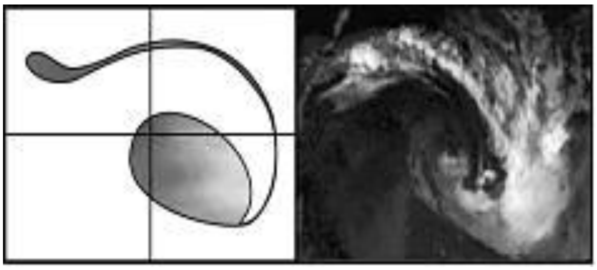

Рис. 3. Моделирование эволюции синоптических вихрей циклонического типа (численный эксперимент и спутниковая фотография)

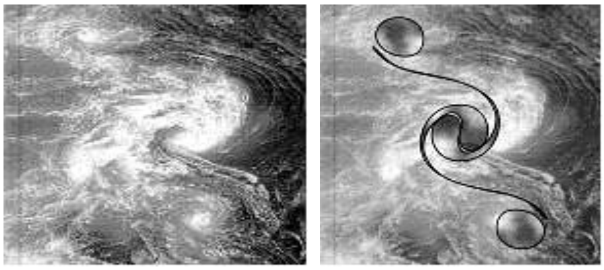

Рис. 4. Моделирование 4-вихревого взаимодействия в канале Naruto (Япония) (численный эксперимент и аэрофотосъемка)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белашов В.Ю. Уравнение КП и его обобщения. Теория, Приложения. – Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1997. – 162 с.
2. Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. – Springer-Verlag GmbH & Co. KG, 2005. – 303 p.
3. Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Nonlinear Wave Structures of the Soliton and Vortex Types in Complex Continuous Media: Theory, Simulation, Applications // Lecture Notes of TICMI. V. 18 / Ed. G. Jaiani. – Tbilisi: Tbilisi University Press, 2018. – 90 p.
4. Белашов В.Ю., Белашова Е.С. Солитоны. Теория, моделирование, приложения. – Казань: РИЦ «Школа», 2016. – 273 с.
5. Белашова Е.С., Белашов В.Ю. Солитоны как математические и физические объекты. – Казань: КГЭУ, 2006. – 205 с.
6. Belashov V.Yu. Interaction of *N*-vortex structures in a continuum, including atmosphere, hydrosphere and plasma // Adv. Space Res. – 2017. – V. 60. – P. 1878-1890.
7. Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А. Модифицированный метод контурной динамики и моделирование вихревых структур // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. –2019. – Т. 161, кн. 1. С. 5-23 с.
8. Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A. The Modified Method of Contour Dynamics for Modeling of Vortical Structures // 2019 Russ. Open Conf. on Radio Wave Prop. (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University. Proceedings. IEEE Xplore Dig. Lib., pp. 523-526. Date Added to IEEE Xplore: 26 August 2019.
9. Belashov V.Yu. Modeling of Dynamics of Vortex Structures in Continuous Media // J. Astrophys. Aerospace Techn. – 2016. – V. 4, iss. 3. – P. 28.
10. Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A. Numerical modeling of interaction of vortex structures in fluids and plasmas // VIII Annual Meeting of the Georgian Mechanical Union. Tbilisi, 25-29.09.2017. –Tbilisi: Tbilisi University Press, 2017. – P. 31-32.

WAVE STRUCTURES IN COMPLEX CONTINUOUS MEDIA INCLUDING ATMOSPHERE, HYDROSPHERE AND SPACE PLASMA

Belashov V. Yu.[1]***, Belashova E. S.***[2]***, Kharshiladze O. A.***[3]

([1]*Kazan Federal Univ., Russia;* [2]*Kazan Nation. Res. Tech. Univ., Russia;*
[3]*Iv. Javaxishvilis Tbilisi State Univ., Georgia*)

The results of theoretical and numerical study of the structure and dynamics of 2D and 3D solitons and nonlinear waves described by the generalized equations of the Belashov-Karpman (BK) system (such as the Kadomtsev-Petviashvili and the 3-DNLS classes of equations), and also the vortical systems described by Euler-type equations are presented. The generalizations (relevant to various complex physical media) accounting for high-order dispersion corrections, and dissipation are considered. To study the stability of multidimensional solutions of the equations the method of investigation of the Hamiltonian's boundness with its deformation conserving momentum of a system by solving the corresponding variation problem is used. As a result, the conditions of existence of the 2D and 3D soliton solutions in the BK system in dependence on values of the equations' coefficients, i.e. on the parameters of both the medium and the propagating wave have been obtained. Stability of the 2D and 3D vortical systems is studied on the basis of the stability criterions obtained earlier. The evolution and interaction of multidimensional solitons and vortical systems is studied numerically. Special attention is paid to the applications of the theory in different fields of modern physics including plasma physics (FMS, IA and Alfvén waves in space plasma), hydrodynamics (surface waves on "shallow" fluid and the oceanic vortices), and physics of atmosphere (internal gravity waves at heights of the ionosphere F layer, vortices of the cyclonic type and tornados in the Earth atmosphere etc.).

Keywords: multidimensional solitons, nonlinear waves, structure, dynamics, complex continuous media, Kadomtsev-Petviashvili class of equation, 3-DNLS class of equations, Belashov-Karpman equation, vortex systems, Euler type equations, theory, applications, atmosphere, hydrosphere, space plasma

ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В КОМПЛЕКСНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕДАХ, ВКЛЮЧАЯ АТМОСФЕРУ, ГИДРОСФЕРУ И КОСМИЧЕСКУЮ ПЛАЗМУ

Белашов В.Ю.[1]***, Белашова Е.С.***[2]***, Харшиладзе О.А.***[3]

([1]*Казанский федеральный университет, Россия;* [2]*Казанский национальный исследовательский технический университет, Россия;* [3]*Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили, Грузия*)

Представлены результаты теоретического и численного изучения структуры и динамики 2- и 3-мерных солитонов и нелинейных волн, описываемых обобщенными уравнениями системы Белашова-Карпмана (ВК) (такими как классы уравнений Кадомцева-Петвиашвили и 3-DNLS), а также вихревых систем, описываемых уравнениями эйлерового типа. Рассматриваются обобщения (относящиеся к различным комплексным физическим средам), учитывающие дисперсионные поправки высокого порядка и диссипацию. При изучении устойчивости неодномерных решений этих уравнений используется метод исследования ограниченности гамильтониана при его деформациях, сохраняющих импульс системы, путем решения соответствующей вариационной задачи. В результате, получены условия существования 2- и 3-мерных солитонных решений в системе ВК в зависимости от значений коэффициентов уравнений, т.е. от параметров среды и распространяющейся волны. Устойчивость 2- и 3-мерных вихревых систем изучается на основе критериев устойчивости, полученных ранее. Эволюция и взаимодействие неодномерных солитонов и вихревых систем изучается численно. Отдельное внимание уделяется приложениям теории в различных областях современной физики, включая физику плазмы (БМЗ, ИЗ и альфвеновские волны в космической плазме), гидродинамику (поверхностные волны на «мелкой» жидкости и океанические вихри) и физику атмосферы (внутренние гравитационные волны на высотах F слоя ионосферы, вихри циклонического типа и торнадо в земной атмосфере и т.д.).

Ключевые слова: неодномерные солитоны, нелинейные волны, структура, динамика, комплексные сплошные среды, класс уравнений Кадомцева-Петвиашвили, класс уравнений 3-DNLS, уравнение Белашова-Карпмана, вихревые системы, уравнения Эйлерового типа, теория, приложения, атмосфера, гидросфера, космическая плазма

Авторы:

Белашов Василий Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, гл. научн. сотрудник НИЛ Исследований ближнего космоса Института физики Казанского (Приволжского) федерального университета. Область научных интересов: неодномерные нелинейные волновые структуры солитонного и вихревого типов в комплексных сплошных средах, включая плазму ионосферы и магнитосферы, атмосферу и гидросферу; теория, моделирование. E-mail: vybelashov@yahoo.com.

Белашова Елена Семеновна, к.ф.-м.н., доцент Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КНИТУ-КАИ. Область научных интересов: неодномерные нелинейные волновые структуры солитонного типа в комплексных сплошных средах, включая приложения в плазме ионосферы и магнитосферы, атмосфере и гидросфере; компьютерное моделирование. E-mail: bel_lena@mail.ru.

Харшиладзе Олег Автандилович, к.ф.-м.н., профессор Тбилисского государственного университета им. Ив. Джавахишвили, Грузия. Область научных интересов: неодномерные нелинейные волновые структуры солитонного и вихревого типов в комплексных сплошных средах, включая приложения в плазме ионосферы и магнитосферы, атмосфере и гидросфере; компьютерное моделирование. E-mail: oleg.kharshiladze@tsu.ge.