*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2019. Том 60, № 6*

*УДК 517.98*

# МЕТРИКИ НА ПРОЕКТОРАХ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СЛЕДОВЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

**А. М. Бикчентаев**

**Аннотация.** Пусть $\varphi$ — положительный функционал на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathscr{A}$. Для всех $P, Q$ из $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ положим $\rho_\varphi(P,Q) = \varphi(|P-Q|)$ и $d_\varphi(P,Q) = \varphi(P \vee Q - P \wedge Q)$. Тогда $\rho_\varphi(P,Q) \leq d_\varphi(P,Q)$ для всех $P, Q$ из $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ и $\rho_\varphi(P,Q) = d_\varphi(P,Q)$ при $PQ = QP$. Отображение $\rho_\varphi$ (или $d_\varphi$) удовлетворяет неравенству треугольника тогда и только тогда, когда функционал $\varphi$ следовый. Для точного следового функционала $\tau$ отображения $\rho_\tau$ и $d_\tau$ являются метриками на $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Если, кроме того, функционал $\tau$ нормален, то $(\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}, \rho_\tau)$ и $(\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}, d_\tau)$ являются полными метрическими пространствами. Сходимости в метриках $\rho_\tau$ и $d_\tau$ эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра $\mathscr{A}$ абелева, при этом $\rho_\tau = d_\tau$. В терминах неравенств установлен еще один критерий абелевости алгебры $\mathscr{A}$.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.603

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, линейный ограниченный оператор, алгебра фон Неймана, проектор, перестановочность, нормальный функционал, состояние, след.

## 1. Определения и обозначения

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ — $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Пусть $\mathrm{pr}(X)$ — проектор на замыкание области значений оператора $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $I$ — тождественный оператор в $\mathscr{H}$. Если $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, то $P^\perp = I - P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathscr{H} = P\mathscr{H} \cap Q\mathscr{H}$, а $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp$ проектирует на $\overline{\mathrm{lin}(P\mathscr{H} \cup Q\mathscr{H})}$. *Коммутантом множества* $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется множество

$$\mathscr{X}' = \{Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : XY = YX \text{ для всех } X \in \mathscr{X}\}.$$

*Алгеброй фон Неймана*, действующей в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, называется $*$-подалгебра $\mathscr{A}$ алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, для которой $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$. Для алгебры фон Неймана $\mathscr{A}$ через $\mathscr{A}^+$ и $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее подмножества положительных элементов и решетку проекторов соответственно.

Для $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ пишем $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея — Дж. фон Неймана), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ для некоторого $U \in \mathscr{A}$. Проекторы $P, Q \in \mathscr{A}$ называются *изоклинными* (с углом $\theta \in (0, \pi/2)$, пишем $P \overset{\theta}{\approx} Q$),

Работа выполнена за счет субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

если $PQP = \cos^2\theta\, P$ и $QPQ = \cos^2\theta\, Q$. Если $A \in \mathscr{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathscr{A}^+$ и проектор $\mathrm{pr}(A)$ на замыкание области значений оператора $A$ лежит в $\mathscr{A}$. Положительный функционал $\varphi$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ называется *точным*, если $\varphi(A) = 0$ $(A \in \mathscr{A}^+) \Rightarrow A = 0$; *следовым*, если $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathscr{A}$; *нормальным*, если $A_i \nearrow A$ $(A_i, A \in \mathscr{A}^+) \Rightarrow \varphi(A) = \sup_i \varphi(A_i)$; *состоянием*, если $\varphi(I) = 1$.

## 2. Метрики на $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, ассоциированные со следовым состоянием

**Лемма 1** [1, предложение 4.4]. *Вещественная функция $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ операторно монотонна на $\mathbb{R}^+$.*

Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана. Для $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ положим

$$P \circ Q = 2^{-1}(PQ + QP), \quad P \ominus Q = P \vee Q - P \wedge Q.$$

Имеем $P \circ Q \in \mathscr{A}^+ \Leftrightarrow PQ = QP$ (см. лемму в [2]). Если $U \in \mathscr{A}$ унитарен, то

$$U(P \circ Q)U^* = (UPU^*) \circ (UQU^*), \quad U(P \ominus Q)U^* = (UPU^*) \ominus (UQU^*).$$

**Лемма 2.** *Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана и $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Тогда*
(i) $|P \circ Q|^2 \le 4^{-1}(P+Q)^2$;
(ii) $P \wedge Q \le |P \circ Q| \le 2^{-1}(P+Q) \le P \vee Q$;
(iii) $P \ominus Q = Q \ominus P = \mathrm{pr}(|P-Q|)$;
(iv) $P \ominus Q = P^{\perp} \ominus Q^{\perp}$;
(v) $|P-Q|^a \le P \ominus Q$ *для всех* $a > 0$;
(vi) $I \ominus P = P^{\perp}$, $0 \ominus P = P$, $P \ominus P^{\perp} = I$, $P \ominus P = 0$;
(vii) *если* $PQ = QP$, *то* $P \ominus Q = |P-Q|$.

Доказательство. Неравенство $P \wedge Q \le |P \circ Q|$ и утверждение (i) достаточно проверить для одномерных проекторов $P, Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (см. доказательство теоремы 1 в [3] или теоремы 1 в [4]). Не ограничивая общности, положим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} t & \delta\sqrt{t(1-t)} \\ \bar{\delta}\sqrt{t(1-t)} & 1-t \end{pmatrix}$$

для $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$ и $0 \le t \le 1$. Теперь неравенство $P \wedge Q \le |P \circ Q|$ очевидно и

$$(PQ + QP)^2 = t(P+Q)^2 \le (P+Q)^2. \tag{1}$$

В силу леммы 1 из (1) получаем $|P \circ Q| \le 2^{-1}(P+Q) \le P \vee Q$.

Утверждения (iii) и (v) установлены в теореме 2 из [5]. Поскольку $P - Q = Q^{\perp} - P^{\perp}$, (iv) следует из (iii). Утверждение (vii) установлено в п. (iii) предложения 1 из [5]. Лемма доказана. $\square$

Замечание 1. Приведем простое доказательство неравенства $|P \circ Q| \le P \vee Q$. Имеем $(P \pm Q)^2 \ge 0$ и $-2\, P \vee Q \le -P - Q \le PQ + QP \le P + Q \le 2\, P \vee Q$, т. е. $P \vee Q \le P \circ Q \le P \vee Q$. Тогда $|P \circ Q| \le P \vee Q$ в силу теоремы 2.4 из [6].

Определение. Для положительного функционала $\varphi$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ введем отображения $\rho_\varphi, d_\varphi : \mathscr{A}^{\mathrm{pr}} \times \mathscr{A}^{\mathrm{pr}} \to \mathbb{R}^+$ по формулам

$$\rho_\varphi(P, Q) = \varphi(|P - Q|) \quad \text{и} \quad d_\varphi(P, Q) = \varphi(P \ominus Q) \quad \text{для всех } P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}.$$

**Предложение 1.** *Справедливы следующие утверждения:*
(i) $\rho_\varphi(P,Q) \le d_\varphi(P,Q)$ *для всех* $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$*;*
(ii) $d_\varphi(P,Q) \le \sin^{-2}\theta\, \rho_\varphi(P,Q)$ *для всех* $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ *с* $P \overset{\theta}{\approx} Q$*;*
(iii) *если* $PQ = QP$*, то* $\rho_\varphi(P,Q) = d_\varphi(P,Q)$*;*
(iv) $\rho_\varphi(Q,P) = \rho_\varphi(P,Q) = \rho_\varphi(P^\perp,Q^\perp)$ *для всех* $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$*;*
(v) $d_\varphi(Q,P) = d_\varphi(P,Q) = d_\varphi(P^\perp,Q^\perp)$ *для всех* $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$*;*
(vi) $\rho_\varphi(P,0) = d_\varphi(P,0) = \varphi(P)$ *для всех* $P \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$*;*
(vii) $\rho_\varphi(P,Q) = d_\varphi(P,Q) = \varphi(P+Q)$ *для всех* $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ *с* $PQ = 0$*;*
(viii) $\varphi(||P \circ Q| - P \wedge Q|) \le d_\varphi(P,Q)$ *для всех* $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$*;*
(ix) $\rho_\varphi(P,Q) + \rho_\varphi(Q,R) = \rho_\varphi(P,R)$ *для всех* $P,Q,R \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ *с* $P \le Q \le R$*;*
(x) $d_\varphi(P,Q) + d_\varphi(Q,R) = d_\varphi(P,R)$ *для всех* $P,Q,R \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ *с* $P \le Q \le R$*.*

Доказательство. Утверждения (i), (iii) и (iv) вытекают из п. (v), (vii) и (iv) леммы 2 соответственно. В частности, если алгебра $\mathscr{A}$ абелева, то $\rho_\varphi(P,Q) = d_\varphi(P,Q)$ для всех $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.

Покажем (ii). Для $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ с $P \overset{\theta}{\approx} Q$ в силу п. (iii) теоремы 10.5 из [1] имеем $P \wedge Q = 0$ и $P \vee Q = \sin^{-2}\theta\,(P-Q)^2$. Поскольку $\|P-Q\| \le 1$ для всех $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, имеем $(P-Q)^2 \le \sqrt{(P-Q)^2} = |P-Q|$.

Из п. (ii) леммы 2 для всех $P,Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ получаем $0 \le |P \circ Q| - P \wedge Q \le P \ominus Q$, что влечет (viii). Предложение доказано. $\square$

**Теорема 1.** *Пусть* $\tau$ *— точный следовый функционал на алгебре фон Неймана* $\mathscr{A}$*. Тогда* $\rho_\tau$ *и* $d_\tau$ *являются метриками на* $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$*.*

Доказательство. Пусть $P,Q,R \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Для каждой пары операторов $X,Y \in \mathscr{A}$ существуют такие частичные изометрии $U,V \in \mathscr{A}$, что $|X+Y| \le U|X|U^* + V|Y|V^*$ [7, теорема 2.2]. Взяв $X = P - R$ и $Y = R - Q$, получаем неравенство треугольника для $\rho_\tau$.

Из п. (iii) леммы 2 следует, что $d_\tau(P,Q) = d_\tau(Q,P)$ и $d_\tau(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$. Если $A,B \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, то $A \vee B - B \sim B - A \wedge B$ [8, гл. III, теорема 1.1.3]. Следовательно,

$$\tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B). \tag{2}$$

Докажем неравенство треугольника для $d_\tau$, т. е.

$$\tau(P \vee Q) - \tau(P \wedge Q) \le \tau(P \vee R) - \tau(P \wedge R) + \tau(R \vee Q) - \tau(R \wedge Q). \tag{3}$$

Из (2) имеем $\tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \vee B)$, поэтому (3) перепишется в виде

$$\tau(P \vee Q) \le \tau(P \vee R) + \tau(R \vee Q) - \tau(R). \tag{4}$$

Положив $A = P \vee R$, $B = R \vee Q$ в (2), имеем

$$\tau(P \vee R) + \tau(R \vee Q) = \tau(P \vee Q \vee R) + \tau((P \vee R) \wedge (R \vee Q)). \tag{5}$$

Перепишем (4) с учетом (5):

$$\tau(P \vee Q) \le \tau(P \vee Q \vee R) + \tau((P \vee R) \wedge (R \vee Q)) - \tau(R). \tag{6}$$

Поскольку $P \vee Q \vee R \ge P \vee Q$ и $(P \vee R) \wedge (R \vee Q) \ge R$, в силу монотонности следового функционала $\tau$ на $\mathscr{A}^+$ неравенство (6) выполнено. Следовательно, (3) также выполнено. Теорема доказана. $\square$

**Теорема 2.** *Если в условиях теоремы 1 функционал $\tau$ нормален, то $(\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}, \rho_\tau)$ и $(\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}, d_\tau)$ являются полными метрическими пространствами.*

Доказательство. В алгебре $\mathscr{A}$ вводится топология $t_\tau$ сходимости по мере [9], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon,\delta)=\{X\in\mathscr{A} : \exists P\in\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}\ (\|XP\|\le\varepsilon \text{ и } \tau(P^{\perp})\le\delta)\},\quad \varepsilon>0,\ \delta>0.$$

Известно, что $\langle\mathscr{A},\ t_\tau\rangle$ является метризуемой топологической $*$-алгеброй. Определим $L_1$-норму на $\mathscr{A}$, положив $\|X\|_1=\tau(|X|)$ для всех $X\in\mathscr{A}$. Пусть $\mathscr{A}_1=\{X\in\mathscr{A} : \|X\|\le 1\}$.

Для $(\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}, \rho_\tau)$ утверждение теоремы следует из $\|\cdot\|_1$-полноты пространства $(\mathscr{A}_1, \|\cdot\|_1)$, непрерывности вложения $(\mathscr{A}_1, \|\cdot\|_1)$ в топологическую $*$-алгебру $(\mathscr{A}, t_\tau)$ и $t_\tau$-замкнутости решетки $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.

Для $(\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}, d_\tau)$ утверждение теоремы следует из совпадения метрики $d_\tau$ с сужением известной метрики $d_{s,\tau}(A,B)=\tau(\mathrm{pr}(|A-B|))$, $A,B\in\mathscr{A}$, на $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, непрерывности вложения $(\mathscr{A}, d_{s,\tau})$ в $(\mathscr{A}, t_\tau)$ (см. [10, 11]) и $t_\tau$-замкнутости решетки $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Теорема доказана. $\square$

**Теорема 3.** *Пусть $\tau$ — точный следовый функционал на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$. Сходимости в метриках $\rho_\tau$ и $d_\tau$ эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра $\mathscr{A}$ абелева.*

Доказательство. Если алгебра $\mathscr{A}$ абелева, то $\rho_\tau(P,Q)=d_\tau(P,Q)$ для всех $P,Q\in\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ в силу п. (iii) предложения 1.

Если алгебра фон Неймана $\mathscr{A}$ не абелева, то она содержит $*$-подалгебру, $*$-изоморфную полной матричной алгебре $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Рассмотрим в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ последовательность одномерных проекторов

$$P_n=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \sqrt{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\ \sqrt{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)} & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда $P_n\to\mathrm{diag}(0,1)$ при $n\to\infty$ в метрике $\rho_\tau$, но $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ не фундаментальна в метрике $d_\tau$: имеем $P_n\vee P_m=I$ и $P_n\wedge P_m=0$ при $n\ne m$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Теорема доказана. $\square$

## 3. Характеризация следовых функционалов

Покажем, что отображение $\rho_\varphi$ (или $d_\varphi$) удовлетворяет неравенству треугольника тогда и только тогда, когда функционал $\varphi$ следовый. Пусть $P,Q,R\in\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Неравенство треугольника для $\rho_\varphi$ и $d_\varphi$ при $R=0$ приобретает вид $\rho_\varphi(P,Q)\le\varphi(P+Q)$ и $d_\varphi(P,Q)\le\varphi(P+Q)$ соответственно.

**Теорема 4.** *Для положительного нормального функционала $\varphi$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\varphi$ следовый;*

(ii) *$\rho_\varphi(P,Q)\le\varphi(P+Q)$ для всех $P,Q\in\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$;*

(iii) *$d_\varphi(P,Q)\le\varphi(P+Q)$ для всех $P,Q\in\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Установлено в доказательстве теоремы 1.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Следует из (2).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Установлено в п. (v) теоремы 3.4 из [12].

Ниже показывается, что аналогично тому, как было проделано в ряде других подобных случаев (см. [13] или [14]), доказательство импликации (iii) $\Longrightarrow$ (i) для произвольной алгебры фон Неймана сводится к случаю алгебры $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Известно [13], что положительный нормальный функционал $\varphi$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(P) = \varphi(Q)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ с $PQ = 0$ и $P \sim Q$ (см. также [14, лемма 2]). Пусть $*$-алгебра $\mathscr{B}$ в редуцированной алгебре $(P+Q)\mathscr{A}(P+Q)$ порождена частичной изометрией $V \in \mathscr{A}$, реализующей эквивалентность $P$ и $Q$. Тогда $\mathscr{B}$ $*$-изоморфна $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, а неравенство в (ii) остается справедливым для операторов из $\mathscr{B}$ и ограничения функционала $\varphi|\mathscr{B}$. Покажем, что такое ограничение является следовым функционалом на $\mathscr{B}$, поэтому $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

Известно, что каждый линейный функционал $\varphi$ на $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ может быть представлен в виде $\varphi(\cdot) = \mathrm{tr}(S_\varphi\,\cdot)$. Матрица $S_\varphi \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ называется *матрицей плотности* для $\varphi$. Следуя доказательству теоремы 4 из [15], предположим, что $S_\varphi$ имеет два собственных значения $\lambda$ и $\mu$, и пусть $u$ и $v$ — соответствующие взаимно ортогональные собственные векторы. Пусть $P_w$ — ортогональный проектор на прямую $\mathbb{C}w$, число $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем линейно независимые векторы $x$ и $y$ так, что $|\varphi(P_x - P_v)| < \varepsilon$, $|\varphi(P_y - P_v)| < \varepsilon$. Заметим, что $P_x \vee P_y = I$ и $P_x \wedge P_y = 0$. Поскольку

$$\lambda + \mu = \mathrm{tr}(S_\varphi) = \varphi(I) = \varphi(P_x \vee P_y - P_x \wedge P_y) \leq \varphi(P_x) + \varphi(P_y) \\ \leq 2\varphi(P_v) + 2\varepsilon = 2\mu + 2\varepsilon,$$

имеем $\lambda \leq \mu + 2\varepsilon$. Так как число $\varepsilon$ произвольное и $\lambda$, $\mu$ можно поменять ролями, получаем $\lambda = \mu$. Теорема доказана. $\square$

О других характеризациях следа см. [16–18] и библиографию в них.

Замечание 2. Известно, что неравенство $d_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P+Q)$ выполнено для каждого положительного нормального функционала $\varphi$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ и каждой пары перестановочных проекторов $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ [19, с. 168]. В силу п. (iii) предложения 1 неравенство $\rho_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P+Q)$ также выполнено для каждого положительного нормального функционала $\varphi$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ и каждой пары перестановочных проекторов $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Теорема 4 показывает, что любое из этих неравенств выполняется для всех пар $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ следовый.

**Следствие.** *Для алгебры фон Неймана $\mathscr{A}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *алгебра $\mathscr{A}$ абелева;*

(ii) $\rho_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P+Q)$ *для всех нормальных состояний $\varphi$ на $\mathscr{A}$ и $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$;*

(iii) $d_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P+Q)$ *для всех нормальных состояний $\varphi$ на $\mathscr{A}$ и $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 каждое нормальное состояние на $\mathscr{A}$ следовое. Множество нормальных состояний на $\mathscr{A}$ разделяет точки $\mathscr{A}$ [8, гл. III, теорема 2.4.5], поэтому алгебра $\mathscr{A}$ коммутативна. $\square$

Автор благодарит рецензента за ценные советы.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Шерстнев А. Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008.
2. *Uchiyama M.* Commutativity of selfadjoint operators // Pac. J. Math. 1993. V. 161, N 2. P. 385–392.

3. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. II // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 483–494.
4. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность операторов и характеризация следа на $C^*$-алгебрах // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 5. С. 506–509.
5. *Бикчентаев А. М.* Разности идемпотентов в $C^*$-алгебрах // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 243–250.
6. *Bikchentaev A. M.* On hermitian operators $X$ and $Y$ meeting the condition $-Y \leq X \leq Y$ // Lobachevskii J. Math. 2013. V. 34, N 3. P. 227–233.
7. *Akemann C. A., Anderson J., Pedersen G. K.* Triangle inequalities in operator algebras // Lin. Multilin. Algebra. 1982. V. 11, N 2. P. 167–178.
8. *Blackadar B.* Operator algebras. Theory of $C^*$-algebras and von Neumann algebras. Operator algebras and non-commutative geometry. III. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Encycl. Math. Sci.; V. 122).
9. *Nelson E.* Notes on non-commutative integration // J. Funct. Anal. 1974. V. 15, N 2. P. 103–116.
10. *Ciach L. J.* Linear-topological spaces of operators affiliated with a von Neumann algebra // Bull. Acad. Pol. Sci. Math. 1983. V. 31, N 3–4. P. 161–166.
11. *Бикчентаев А. М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
12. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1228–1236.
13. *Gardner L. T.* An inequality characterizes the trace // Can. J. Math. 1979. V. 31, N 6. P. 1322–1328.
14. *Tikhonov O. E.* Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals // Positivity. 2005. V. 9, N 2. P. 259–264.
15. *Petz D., Zemánek J.* Characterizations of the trace // Linear Algebra Appl. 1988. V. 111. P. 43–52.
16. *Bikchentaev A. M.* Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras. III // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54, N 12. P. 4482–4493.
17. *Бикчентаев А. М.* Неравенство для следа на унитальной $C^*$-алгебре // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 4. С. 483–488.
18. *Бикчентаев А. М.* След и разности идемпотентов в $C^*$-алгебрах // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 647–655.
19. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the theory of operator algebras. V. I. Elementary theory. New York; London: Acad. Press, 1983. (Pure Appl. Math.; V. 100).


*Поступила в редакцию 6 апреля 2018 г.*
*После доработки 19 декабря 2018 г.*
*Принята к публикации 24 июля 2019 г.*

Бикчентаев Айрат Мидхатович
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru