КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
имени Н.И. Лобачевского
Кафедра математического анализа

Р.Н.Гумеров, С.Р. Насыров, Г.Ш.Скворцова

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Казань — 2019

УДК 517
ББК 22.161

Принято на заседании кафедры математического анализа
Протокол № 5 от 6 февраля 2019 года
Принято на заседании учебно - методической комиссии
ИМиМ имени Н.И.Лобачевского
Протокол № 5 от 11 апреля 2019 года

Научный редактор:
доктор физ. - мат. наук, проф. С.Р. Насыров

Гумеров Р.Н., Насыров С.Р., Скворцова Г.Ш.
Пределы и непрерывность отображений в евклидовых пространствах
учебно-методическое пособие/ Р.Н. Гумеров, С.Р. Насыров, Г.Ш. Скворцова. — Казань: КФУ, 2019. — 18 с.

В пособие включены задания для индивидуальной работы студентов Института математики и механики КФУ по курсу "Математический анализ", второй семестр.

1. Евклидовы пространства

Как обычно, через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначаются соответственно множество натуральных чисел и поле действительных чисел. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbb{R}^n$ обозначается множество, элементами которого являются упорядоченные наборы действительных чисел $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, которые мы будем называть *векторами.* Для произвольных $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ определим *сумму векторов*

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$$

и *произведение вектора на скаляр*

$$\lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n).$$

Нормой вектора $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2}.$$

Множество $\mathbb{R}^n$ с указанными выше операциями сложения, умножения на скаляр и нормой называется *n-мерным евклидовым пространством. Евклидовой метрикой* называется функция $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, задаваемая равенством: $d(x, y) = \|x - y\|$.

1.1. Множество $\mathbb{R}^n$ с операцией сложения является коммутативной группой. Единицей группы является элемент $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

1.2. Для произвольных $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верны следующие равенства:

1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

4. $1 \cdot x = x$.

1.3. Норма в $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.4. Евклидова метрика инвариантна относительно сдвига, то есть, для любых векторов $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ верно равенство $d(x, y) = d(x + z, y + z)$.

1.5. Метрика в $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, где $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

1.6. В евклидовом пространстве равенство $\lambda x = \theta$ справедливо тогда и только тогда, когда $x = \theta$ или $\lambda = 0$.

2. Внутренность, замыкание и граница множеств из $\mathbb{R}^n$

Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x\| < r\}.$$

Шар $B_r(x_0)$ называется также r *-окрестностью*, или просто *окрестностью*, точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, а множество $\check{B}_r(x_0) = B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ — *проколотой* r *-окрестностью* точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Замкнутым шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x\| \leq r\}.$$

2.1. Шары в $\mathbb{R}^n$ обладают свойствами:

1. $x \in B_r(x)$,
2. $0 < \epsilon < \delta \Rightarrow B_\epsilon(x) \subset \overline{B}_\epsilon(x) \subset B_\delta(x)$,

3. Если $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $x \neq y$, то существует $r > 0$ такое, что $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x \in A$ называется *внутренней точкой* множества A, если существует $r > 0$ такое, что $B_r(x) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества* A и обозначается A^0, то есть,

$$A^0 = \{x \in A : \exists r > 0 \, (B_r(x) \subset A)\} .$$

Точка $x \in A$ называется *изолированной точкой* множества A, если существует её окрестность,которая не содержит ни одной точки из множества A, за исключением x:

$$\exists r > 0 \quad (B_r(x) \cap A = \{x\}).$$

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *точкой прикосновения* множества A, если каждая её окрестность содержит хотя бы одну точку из A. Множество всех точек прикосновения множества A называется *замыканием множества* A и обозначается символом $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \quad (B_r(x) \cap A \neq \emptyset)\} .$$

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества A, если каждая её окрестность содержит хотя бы одну точку из A, отличную от x:

$$\forall r > 0 \quad (B_r(x) \cap (A \backslash \{x\} \neq \emptyset).$$

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой* множества A, если каждая её окрестность содержит точки как из A, так и точки не принадлежащие A. Множество всех граничных точек множества A называется *границей множества* A и обозначается $A^г$:

$$A^г = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \quad (B_r(x) \cap A \neq \emptyset, B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset)\} .$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Для множеств $A^0, \overline{A}, A^г$ верны следующие свойства:

2.2. $A^0 \subset A \subset \overline{A}$.

2.3. $A \subset A \subset D \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{D}, A^0 \subset D^0$.

2.4. $A^{0c} = \overline{A^c}$.

2.5. $A^{c0} = \overline{A}^c$.

2.6. $A^{г} = \overline{A} \backslash A^0$.

2.7. $\mathbb{R}^n = A^{г} \bigcup A^0 \bigcup A^{c0}$, причем слагаемые попарно не пересекаются.

2.8. $A^{г} = A^{cг}$.

2.9. Граница $A^{г}$ любого множества A есть замкнутое множество.

2.10. Множество открыто тогда и только тогда, когда оно не содержит своих граничных точек, то есть $A \bigcap A^{г} = \emptyset$.

2.11. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^{г} \subset A$.

Найдите множества $A^0, \overline{A}, A^{г}$ для следующих множеств A :

2.12.

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \subset \mathbb{R}.$$

2.13.

$$A = \{x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}.$$

2.14.

$$A = \{(x,0) : x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

2.15. Замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ является замыканием открытого шара радиуса r с центром в точке x.

3. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

Подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка внутренняя. Подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$ называется *замкнутым* если оно содержит все свои точки прикосновения.

3.1. Пустое множество и множество $\mathbb{R}^n$ являются одновременно и открытыми и замкнутыми множествами.

3.2. Шар $B_r(x)$ есть открытое множество.(Указание: доказать, что если $y \in B_r(x)$, то $B_\epsilon(y) \subset B_r(x)$ для $\epsilon = r - \|x-y\|$).)

3.3. Замкнутый шар $\overline{B}_r(x)$ есть замкнутое множество.

3.4. Дополнение открытого множества замкнуто.

3.5. Множество A открыто тогда и только тогда, когда $A = A^0$.

3.6. Внутренность любого множества есть открытое множество, то есть верно $A^{00} = A^0$.

3.7. Множество A^0 есть наибольшее открытое множество, содержащееся в множестве A.

3.8. Дополнение замкнутого множества открыто.

3.9. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{A} = A$.

3.10. Замыкание любого множества есть замкнутое множество, то есть верно $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

3.11. Множество $\overline{A}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество A.

3.12. Если множества $A_1, A_2 \dots A_n$ открыты, то пересечение $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ — открытое множество.

3.13. Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

3.14. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

3.15. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

Выясните, являются ли следующие множества открытыми или замкнутыми в соответствующих пространствах :

3.16.

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \subset \mathbb{R}.$$

3.17.

$$A = \{x \in (0, 1]\} \subset \mathbb{R}.$$

3.18.

$$A = \{x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}.$$

3.19.

$$A = \{x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}.$$

3.20.

$$A = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

4. Векторные последовательности

Векторной последовательностью, или последовательностью, в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n : m \longmapsto x_m.$$

Вектор x_m называется m *-ым членом* рассматриваемой последовательности. При этом используется обозначение $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Пусть m -ый член заданной последовательности имеет следующие координаты:

$$x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n). \tag{1}$$

Тогда задание векторной последовательности $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ равносильно заданию n числовых последовательностей

$$(x_m^k)_{m\in\mathbb{N}}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Говорят, что векторная последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *сходится* к вектору x в пространстве $\mathbb{R}^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, такое, что для каждого натурального числа m, превосходящего N, выполняется неравенство

$$\|x_m - x\| < \varepsilon.$$

Иными словами, какую бы окрестность точки x ни взять, все члены последовательности $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторого, попадут в эту окрестность. В этом случае используют обозначения:

$$x = \lim_{m\to+\infty} x_m \qquad \text{или} \qquad x_m \longrightarrow x \quad \text{при} \quad m \longrightarrow +\infty.$$

В следующих упражнениях содержатся некоторые элементарные свойства предела последовательности.

4.1. $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) \longrightarrow x = (x^1, \dots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$ при $m \longrightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, \dots, n$ числовая последовательность x_m^k сходится к x^k в $\mathbb{R}$ при $m \longrightarrow +\infty$.

4.2. Предел последовательности единствен.

4.3. Если $x_m \longrightarrow x$ и $y_m \longrightarrow y$ в $\mathbb{R}^n$, то $x_m + y_m \longrightarrow x + y$.

4.4. Если $x_m \longrightarrow x$ в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda_m \longrightarrow \lambda$ в $\mathbb{R}$, то $\lambda_m x_m \longrightarrow \lambda x$.

Векторная последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех натуральных чисел m и l, превосходящих N, выполняется неравенство

$$\|x_m - x_l\| < \varepsilon.$$

4.5. Векторная последовательность (1) фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальна каждая числовая последовательность (2).

4.6. Векторная последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она сходится.

Рассмотрим произвольное подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$.

4.7. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности (x_k) точек множества A ее предел принадлежит A.

4.8. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является точкой прикосновения множества A тогда и только тогда, когда найдется последовательность точек множества A, сходящаяся к x.

4.9. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда найдется последовательность точек $a_k \in A$, $a_k \neq x$, такая, что $a_k \to x$.

4.10. Вектор $a \in A$ является изолированной точкой множества A тогда и только тогда, когда для любой последовательность точек $a_k \in A$, сходящейся к a, все члены этой последовательности, начиная с некоторого, совпадают с a, то есть, существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant N$ выполняется равенство $a_k = a$.

Скалярным произведением векторов $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ в $\mathbb{R}^n$ называется действительное число

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k.$$

Отметим, что $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

4.11. Скалярное произведение является непрерывной функцией двух переменных. Иными словами, если последовательности векторов (x_k) и (y_k) в $\mathbb{R}^n$

сходятся соответственно к x и y, то числовая последовательность $\langle x_k, y_k \rangle$ сходится к $\langle x, y \rangle$.

4.12. Норма является непрерывной функцией. Иными словами, если последовательность векторов (x_k) в $\mathbb{R}^n$ сходится к x, то числовая последовательность $\|x_k\|$ сходится к $\|x\|$.

4.13. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Найдите $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\right) x$.

4.14. Пусть последовательность векторов (x_k) пространства $\mathbb{R}^n$ сходится к ненулевому вектору $x \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что существует положительное число δ, такое, что для всех членов данной последовательности, начиная с некоторого, справедлива оценка

$$\|x_k\| > \delta.$$

5. Предел отображения

Будем рассматривать отображения вида $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где область определения Ω является подмножеством в пространстве $\mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Значение f на векторе $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega$ записывают в виде

$$f(x) = f(x^1, \ldots, x^n).$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются *независимыми переменными*, а f — *функцией n переменных.*

В частном случае, когда $m = 1$, то есть, если отображение f принимает вещественные значения, то оно называется *вещественной функцией n переменных.* На практических занятиях по математическому анализу независимые переменные вещественной функции двух переменных обычно обозначаются буквами x и y, а трех переменных — x,y и z.

При $n = 1$ и $m \geqslant 2$ отображение f часто называют *вектор - функцией.*

В общем случае задание отображения $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ равносильно заданию m вещественных функций n переменных. Действительно, записывая вектор $f(x)$ в координатах

$$f(x) = \left((f(x))^1, (f(x))^2, \ldots, (f(x))^m\right),$$

где $x = (x^1, \dots, x^n) \in \Omega$, мы имеем m функций

$$f^i(x) = (f(x))^i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

каждая из которых является вещественной функцией n переменных $x^1, \dots, x^n$. Функции f^i называются *координатными функциями* отображения f и пишут

$$f = \left(f^1, f^2, \dots, f^m\right).$$

Определение Гейне. Пусть x_0 – предельная точка области определения Ω отображения f. Вектор $y_0 \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом отображения* f *в точке* x_0, если для любой последовательности точек $x_k \in \Omega$, $x_k \neq x_0$, сходящейся к x_0, последовательность значений $f(x_k)$ сходится к y_0 при $k \longrightarrow +\infty$.

Таким образом, чтобы доказать, что отображение f не имеет предела в точке x_0, достаточно указать две последовательности точек $x_k \in \Omega$ и $x'_k \in \Omega$, $x_k \neq x_0$, $x'_k \neq x_0$, сходящиеся к x_0, такие, что

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) \neq \lim_{k \to +\infty} f(x'_k).$$

Определение Коши. Пусть x_0 – предельная точка области определения Ω отображения f. Вектор $y_0 \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом отображения* f *в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию $0 < \|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$\|f(x) - y_0\| < \varepsilon.$$

5.1. Доказать, что определения Гейне и Коши равносильны.

Если вектор $y_0 \in \mathbb{R}^m$ является пределом отображения f в точке x_0, то пишут

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{или} \qquad f(x) \longrightarrow y_0 \quad \text{при} \quad x \longrightarrow x_0.$$

Для обозначения предела функции $f(x, y)$ двух переменных в точке (x_0, y_0) используют записи

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) \qquad \text{или} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

5.2. Пусть $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 — предельная точка множества Ω, $y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^m) \in \mathbb{R}^m$, $f = \big(f^1, f^2, \ldots, f^m\big)$. Следующие условия эквивалентны:

1. $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$.
2. для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ выполняется равенство $y_0^k = \lim_{x\to x_0} f^k(x)$.
3. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $f(\check{B}_\delta(x_0) \cap \Omega) \subset B_\varepsilon(y_0)$.

5.3. Свойства предела. Пусть $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка множества Ω. При этом пусть существуют пределы $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = z$ и $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lambda_0$. Тогда справедливы следующие равенства:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = y_0 \pm z_0$.
2. $\lim_{x\to x_0}(\alpha(x)f(x)) = \lambda_0 y_0$.
3. $\lim_{x\to x_0} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle y_0, z_0\rangle; \qquad \lim_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|y_0\|$.
4. Если $y_0 \neq \theta$, то существует $\delta > 0$, такое, что для каждой точки $x \in \check{B}_\delta(x_0) \cap \Omega$ выполняется неравенство
$$\|f(x)\| > \frac{1}{2}\|y_0\|.$$

5.4. Критерий Коши. Пусть $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и x_0 — предельная точка области определения Ω. Предел отображения f в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для любых точек $a, b \in \check{B}_\delta(x_0) \cap \Omega$ справедливо неравенство
$$\|f(a) - f(b)\| < \varepsilon.$$

Для евклидового пространства удобно ввести в рассмотрение несобственную точку, которая называется *бесконечностью* и обозначается символом ∞. Проколотой окрестностью точки ∞ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество вида
$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > R \,\},$$
где R — положительное действительное число.

Далее сформулируем определения предела отображения f, в которых фигурирует бесконечность. Выражение

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

означает по определению, что x_0 — предельная точка области определения Ω отображения f и для любого числа $R > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для каждой точки $x \in \check{B}_\delta(x_0) \cap \Omega$ справедлива оценка $\|f(x)\| > R$. Формула

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y,$$

где $y \in \mathbb{R}^m$, означает по определению, что множество Ω неограничено и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $R > 0$, такое, что для каждой точки $x \in \Omega$, удовлетворяющей условию $\|x\| > R$ выполняется неравенство

$$\|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

Выражение

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

означает по определению, что множество Ω неограничено и для любого числа $R > 0$ существует число $S > 0$, такое, что для каждой точки $x \in \Omega$, удовлетворяющей условию $\|x\| > S$ выполняется неравенство

$$\|f(x)\| > R.$$

5.5. Найдите пределы функций.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2 + y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2) e^{-x-y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,5)} \frac{\sin(xy)}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \|x\|^{\langle x,a \rangle} \quad (x, a \in \mathbb{R}^n)$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

6. Предел по направлению

Зафиксируем вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и вектор $y \in \mathbb{R}^n$, такой, что $\|y\| = 1$. Множество в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$l(x_0, y) = \{x_0 + ty \mid t \geqslant 0\}$$

называется *лучом, выходящим из точки x_0 в направлении вектора y*.

Пусть задано отображение $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что x_0 является предельной точкой пересечения множеств

$$l(x_0, y) \cap \Omega.$$

Введем в рассмотрение множество действительных чисел

$$l_\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 0, x_0 + ty \in \Omega\}$$

и определим на нем вектор-функцию $f_l : l_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ формулой

$$f_l(t) = f(x_0 + ty).$$

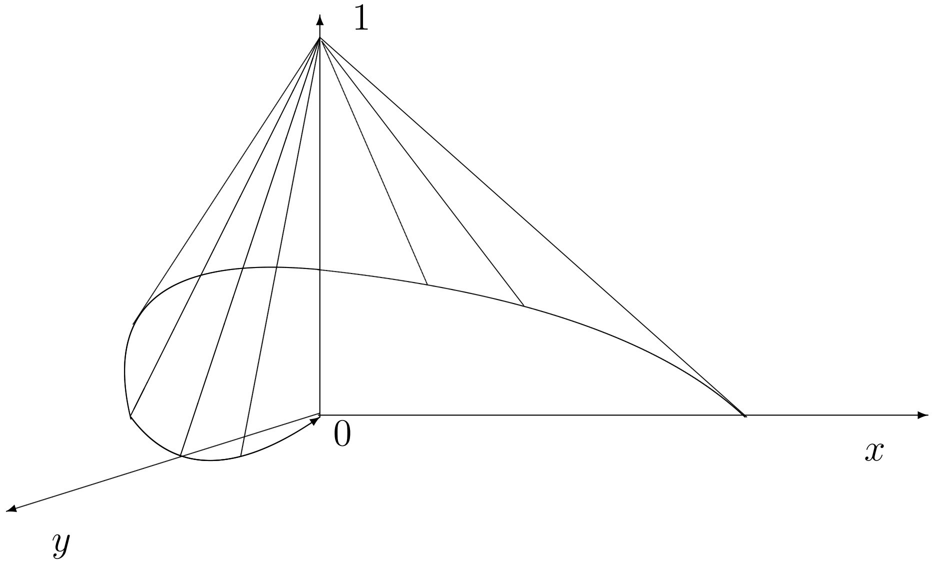
Вектор $z \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом функции f в точке x_0 по направлению вектора y*, если $z = \lim_{t\to 0+} f_l(t)$. При этом используется следующая запись:

$$z = \lim_{x\to x_0(y)} f(x). \tag{3}$$

6.1. Пусть существует $z = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Тогда для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$, такого, что вектор x_0 является предельной точкой множества $l(x_0, y) \cap \Omega$, предел функции f в точке x_0 по направлению вектора y существует и равен z, то есть, выполняется равенство (3).

Обратное утверждение неверно. А именно, может существовать один и тот же предел функции в точке по любому направлению, но предела у такой функции в указанной точке может и не быть. Об этом свидетельствует пример следующего пункта.

6.2. В плоскости (x, y) рассмотрим часть спирали Архимеда, задаваемую формулой $\|(x,y)\| = \varphi$, где $0 < \varphi \leqslant 2\pi$. Определим функцию $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\theta\} \longrightarrow \mathbb{R}$ в соответствии с рисунком:



Здесь подразумевается, что верна формула

$$f((x,y)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|(x,y)\| \geqslant \varphi; \\ \text{линейна}, & \text{если } \|(x,y)\| < \varphi. \end{cases}$$

Тогда для любого вектора $z \in \mathbb{R}^2$ единичной длины справедливо равенство

$$\lim_{(x,y)\to\theta(z)} f((x,y)) = 1.$$

При этом предел функции f в начале координат $(0,0)$ не существует.

7. Непрерывные отображения

Этот раздел мы начнем с определения непрерывного отображения, определенного на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Отображения $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *непрерывным в точке* $a \in \Omega$, если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\|x-a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon) \tag{4}$$

Отображение $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывное в каждой точки области определения Ω называется *непрерывным (на Ω)*.

7.1. Если $a \in \Omega$ является предельной точкой множества Ω, то выражение (4) эквивалентно условию

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

7.2. Отображение f непрерывно в любой изолированной точке своей области определения Ω.

7.3. Отображение f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда выполняется следующее свойство:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(B_\delta(a) \cap \Omega \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f^{-1}(a)))\right).$$

7.4. Отображение $f = \left(f^1, f^2, \ldots, f^m\right) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $a \in \Omega$ тогда и только тогда, когда в точке a непрерывны все координатные функции $f^i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

7.5. Сформулируйте определение непрерывности отображения в точке на языке последовательностей и докажите его эквивалентность условию (4).

7.6. Пусть каждое из отображений $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно в точке a. Тогда в точке a непрерывны следующие отображения:

1. $f \pm g$;
2. $\alpha \cdot f$;
3. $\frac{1}{\alpha} \cdot f$ при $\alpha(a) \neq 0$;
4. $\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \langle f(x), g(x) \rangle$;
5. $\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \|f(x)\|$.

7.7. Пусть отображение $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, а отображение $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывно в точке $f(a) \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$ и $f(\Omega) \subset \Delta$. Тогда композиция отображений $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна в точке a.

7.8. Докажите непрерывность следующих отображений:

1. вложения $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} : (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$;

2. проекции на k-ую координату $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto x^k, k = 1, 2, \ldots, n$;

3. отображения $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto \sum_{k=1}^n x^k$;

4. отображения $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto \max\{|x^k| \mid k = 1, 2, \ldots n\}$;

5. отображения $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, которое удовлетворяет условию Липшица, то есть, неравенству

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x - y\| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \Omega,$$

где C — фиксированное положительное действительное число.

7.9. Исследовать на непрерывность следующие функции двух и трех действительных переменных:

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}, (x \neq y).$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$
3. $f(x,y) = \operatorname{sgn}(1 - |x| - 2|y|).$
4. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2y}{y^2+z^2}, & \text{если } y^2+z^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } y^2+z^2 = 0. \end{cases}$

Задача, приводимая ниже, весьма нетривиальна и может быть предложена студентам в качестве курсовой работы.

7.10. Пусть задана функция двух переменных $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, обладающая следующим свойством. Для каждого $x \in [0,1]$ и каждого $y \in [0,1]$ функции f_x и f_y одного аргумента, задаваемые формулами

$$f_x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto f(x,y); \qquad f_y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x,y),$$

непрерывны на отрезке $[0,1]$. Доказать, что в квадрате $[0,1] \times [0,1]$ найдется точка, в которой непрерывна функция двух переменных f.

Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: АСТ, 2007.

2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д.Кудрявцева. — 2 - е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

3. Насыров С.Р., Шерстнев А.Н. Пределы и непрерывность отображений в евклидовых пространствах. — Казань: КГУ, 1994.

4. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. — Казань: КГУ, 2005.