КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра компьютерной математики и информатики

Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Математический анализ» с применением программы Maxima

для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика»

Учебно-методическое пособие

Казань – 2019

УДК 330.4

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»
методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол №4 от 21 февраля 2019 г.
заседания кафедры компьютерной математики и информатики
Протокол №4 от 18 января 2019 г.

Рецензенты:

к.ф.-м..н., доц ККИ РУК А.Т. Шляхов,
к.ф.-м..н., доц. КФУ А.Ю. Хасанова

Воронцова Валерия Леонидовна,
Махмутова Диана Ильдаровна,
Опокина Надежда Анатольевна

Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Математический анализ» с применением программы Maxima для студентов, обучающихся по специальности «Экономика». Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2019 г. – 151 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.05.01 «Экономическая безопасность».
Пособие включает необходимые теоретические сведения, используемые при решении задач, подробно разобранные решения типовых задач как традиционными методами, так и с помощью компьютерной программы Maxima, а также профессионально ориентированные практические задания, которые могут быть использованы в качестве аудиторной и внеаудиторной работы студентов.
Для усвоения материала данного пособия достаточно владения основными понятиями дисциплины «Математический анализ». Данное пособие будет полезно всем желающим овладеть методикой решения задач математического анализа с экономическим содержанием.

Содержание

Введение

Одна из основных задач профильного обучения заключается в подготовке студентов к успешной профессиональной деятельности. Применение математического инструментария является важной частью профессиональной компетентности будущего специалиста.

Учебно-методическое пособие «Профессионально ориентированные задания по дисциплине «Математический анализ» с применением программы Maxima» направлено на изучение прикладных вопросов математического анализа в экономической области и выработку у обучающихся опыта применения методов и моделей математического анализа к решению такого типа задач.

Каждый параграф данного учебно-методического пособия содержит краткие теоретические сведения, примеры к изложенному теоретическому материалу, примеры приложения рассматриваемой темы в экономике, задания для самостоятельной работы. Решение задач с экономическим содержанием предложено несколькими способами, а именно традиционным способом, а также с помощью программы Maxima. Эти примеры призваны сформировать у студентов понимание значимости математического анализа в будущей профессиональной деятельности, а также навыки математического моделирования и использования информационных технологий. В конце пособия приводится контрольная работа, содержащая 10 вариантов.

Для работы с компьютерным пакетом Maxima авторы рекомендуют ознакомиться с главой 2 «Работа в программе Maxima» учебно-методического пособия «Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima для студентов, обучающихся по специальности «социология»» авторы Абзалилов Д.Ф., Малакаев М.С., Широкова Е.А.

Набор предлагаемых задач можно использовать в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных работ, собеседований и экзаменов. Учебно-методическое пособие предназначается для студентов экономических специальностей университета.

1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ФУНКЦИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ЭКОНОМИКЕ

Краткие теоретические сведения

Определение. Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, 3, ..., n поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1.1)$$

называется – ***числовой последовательностью*** или просто последовательностью. Числа x_1, x_2, x_3, ..., x_n,... называются ***элементами*** или ***членами последовательности*** (1.1), символ x_n – ***общим элементом*** или ***членом последовательности***, а число n - его ***номером***. Сокращенно последовательность (1.1) будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Определение. Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1.2)$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***. Если последовательность имеет своим пределом число a, то это записывается так: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой выражается формулой

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

В курсе математического анализа доказывается, что эта последовательность монотонно возрастает и имеет предел. Этот предел называют числом e. Следовательно, по определению

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Определение. Пусть X и $У$ – некоторые числовые множества и пусть каждому элементу $x \in X$ по какому-либо закону f поставлен в соответствие один элемент $y \in У$. Тогда будем говорить, что определена ***функциональная зависимость*** y от x по закону $y = f(x)$. При этом x называют ***независимой переменной*** (или ***аргументом***), y – ***зависимой переменной***, множество X – ***областью определения*** (существования) функции, множество $У$ – ***областью значений (изменения) функции***.

Определение. Число a называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа a.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ или } f(x) \underset{x\to x_0}{\to} a.$$

Определение. Число *a* (или *b*) называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если для всех достаточно больших положительных значений или достаточно малых отрицательных значений х соответствующие значения функции $y=f(x)$ как угодно мало отличаются от числа *a* (или *b*). И записывают так:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \text{ или } \lim_{x\to -\infty} f(x) = b.$$

Если при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция стремится к одному и тому же числу *a*, то для всех значений *x*, достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа *a*.

И записывают так: $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

Определение. Производственной функцией называется экономико-математическое выражение, связывающее результаты производственной деятельности с влияющими на эти результаты показателями.

Определение. Для функции $y = f(x)$, имеющей экономическое содержание, область определения $(x \geq 0, y \geq 0)$ называется **экономически обусловленной областью определения**.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость спроса на данный товар от его цены, называется **функцией спроса** и обозначается $D = f(p)$.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость цены товара от спроса на данный товар, называется **функцией цен спроса** и обозначает $p = g(D)$.

Приведенная зависимость определяет функцию цены в зависимости от спроса на товар.

Определение. Зависимость предложения *S* какого-либо товара от его цены *p* называют **функцией предложения** $S = f(p)$.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость цены товара от предложения на данный товар называют **функцией цен предложения** $p = g(S)$.

Применение в экономике

Пример 1. Формула сложных процентов имеет вид

$$Q = Q_0(1+\frac{p}{100})^n, \tag{1.3}$$

где Q_0 - первоначальная сумма вклада в банк, p – процент начисления за определенный период времени (месяц, год), n – количество периодов времени хранения вклада, Q – сумма вклада по истечении n периодов времени. Формулы типа (1.3) используются также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта). Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под p= 100% годовых, тогда через год сумма депозита составит $2Q_0$. Предположим, что через полгода счет закроется с результатом $Q_1 = Q_0 (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}Q_0$ и эта сумма будет вновь помещена в качестве депозита в том же банке. В конце года депозит будет составлять $Q_2 = Q_0 (1 + \frac{1}{2})^2 =$ $= 2{,}25Q_0$. Будем уменьшать срок размещения депозита в банке при условии его последующего размещения после изъятия. При ежеквартальном повторении этих операций депозит в конце года составит $Q_4 = Q_0 (1 + \frac{1}{4})^4 = 2{,}44Q_0$. Если повторять операцию изъятие-размещение в течение года сколько угодно раз, то при ежемесячном манипулировании сумма за год составит $Q_{12} = Q_0 (1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2{,}61Q_0$; при ежедневном посещении банка $Q_{365} = Q_0 (1+ \frac{1}{365})^{365} \approx 2{,}714Q_0$; при ежечасном $Q_{8720} = Q_0 (1+ \frac{1}{8720})^{8720} \approx 2{,}718Q_0$ и т.д. Нетрудно видеть, что последовательность значений возрастания первоначального вклада $\{q_n\}$ $= \{Qn/Q_0\}$ как раз совпадает с последовательностью, пределом которой является число e при $n \to \infty$ согласно (1.2). Таким образом, доход, который можно получить при непрерывном начислении процентов, может составить за год не более чем

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n - Q_0) \cdot 100\% / Q_0 = (e-1)100\% \approx 172\%.$$

В общем случае, если p – процент начисления и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита достигнет величины

$$Q = Q_0(1+\frac{r}{n})^{nt},$$

где $r = p/100$. Это выражение можно преобразовать:

$$Q=Q_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}.$$

Мы можем ввести новую переменную $m = \frac{n}{r}$ при $n \to \infty$ получим $m \to \infty$, или

$$Q = Q_0 lim_{n\to\infty} Q_n = lim_{m\to\infty} Q_0 \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}.$$

Расчеты, выполненные по этой формуле, называют ***вычислениями по непрерывным процентам.***

Пример 2. Пусть темп инфляции составляет 1% в день. Насколько уменьшится покупательная способность первоначальной суммы через полгода?

Решение. Применение формулы сложных процентов дает

$$Q=Q_0(1-\frac{1}{100})^{182},$$

где Q_0 – первоначальная сумма, 182 – число дней в полугодии. Преобразуя это выражение, получаем

$$Q = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-182/100} \approx Q_0/e^{1,82},$$

т.е. инфляция уменьшит покупательную способность первоначальной суммы примерно в 6 раз.

Пример 3. Кривые спроса и предложения. Точка равновесия. Рассмотрим зависимость спроса D и предложения S от цены на товар P. Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательской способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей кривой:

$$D = P^a+c, \tag{1.4}$$

где $a < 0$. В свою очередь предложение растет с увеличением цены на товар, и потому зависимость S от P имеет вид:

$$S = P^b+d, \tag{1.5}$$

где $b \geq 0$. В формулах (1.4) и (1.5) c и d – так называемые ***экзогенные величины***; они зависят от внешних причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Вполне понятно, что переменные, входящие в формулы (1.4) и (1.5), положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению; это условие дается уравнением

$$D(P) = S(P) \tag{1.6}$$

и соответствует точке пересечения кривых D и S – это так называемая ***точка равновесия*** (рис.1). Цена P_0, при которой выполнено условие (1.6), называется ***равновесной***.

При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c в формуле (1.4), точка равновесия смещается вправо, так как кривая D поднимается вверх; при этом равновесная цена на товар возрастает при неизменной кривой предложения S.

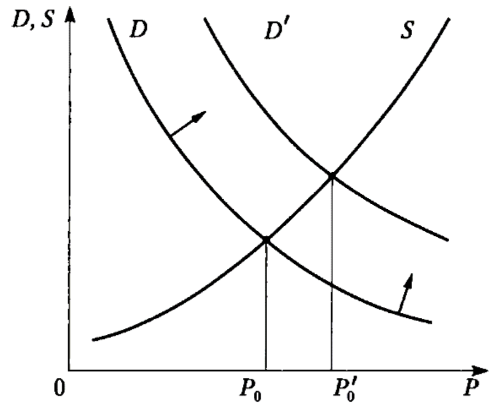

Рис.1

Пример 4. Паутинная модель рынка. Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных проблем рынка, означающая фактически торг между производителем и покупателем (рис. 2).

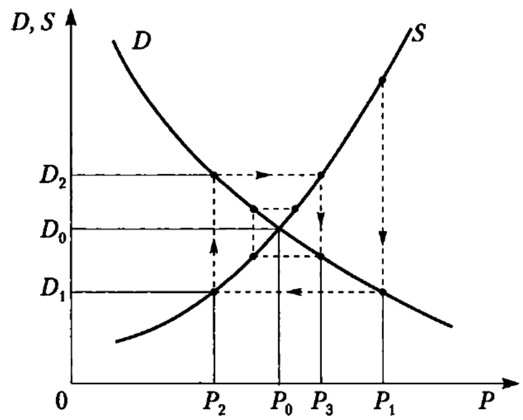

Рис. 2

Пусть сначала цену P_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 на самом деле выше равновесной (естественно, всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену P_2, при которой этот спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь производитель оценивает спрос D_2, соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к ***"скручиванию"*** спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0: $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$.

Задания для самостоятельной работы

1.1. Зависимость уровня потребления некоторого товара первой необходимости от доходов семьи выражается формулой:

$$y = 22{,}4 - \frac{169}{x+15}.$$

Установите уровень насыщения при потреблении указанного товара с неограниченным ростом доходов. (О насыщении потребности говорят, если потребление данного товара перестает увеличиваться при любом увеличении дохода. Достигнутый предел называется ***уровнем*** или ***точкой насыщения***.)

1.2. Исследовать поведение функции спроса $D(p) = \frac{100}{3p+5}$ при увеличении цены.

1.3. Имея сумму 50000 руб., вкладчик обратился в банк, выплачивающий 5,8% годовых при непрерывном начислении процентов. Найти размер вклада через 5 лет.

1.4. Найти асимптоты функции Кобба – Дугласа $y = K_0^{\alpha} L^{1-\alpha}$. Дать экономическую интерпретацию (подробнее про функцию Кобба – Дугласа см. в §4).

1.5. Найти асимптоты для функции с постоянной эластичностью замены (см. §4) при фиксированном $K = K_0$:

$$y = \left(\frac{a}{K_0{}^{\rho}} + \frac{b}{L^{\rho}} \right)^{-\frac{1}{\rho}},$$

где $a, b, \rho > 0$, $K_0, L > 0$.

1.6. Даны функции спроса на некоторые товары в зависимости от дохода:

1) $y = \frac{3x}{x+4}$;

2) $y = \frac{12x^2 - 6x}{x+1}$;

3) $y = \frac{8x^2 + 16x}{x^2 + 2}$;

4) $y = \frac{2x-4}{x+3}$.

Найти асимптоты этих функций. Указать точки насыщения и группы, к которым принадлежат товары (товары первой, второй необходимости, предметы роскоши).

1.7. Неустановившаяся и равновесная цена определяется функцией:

1) $P(t) = 4 + ae^{-2t} + be^{-t}$;

2) $P(t) = 4 + e^{-2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$.

Установившаяся равновесная цена равна 4. Определить, является ли рынок стабильным. (В динамической модели рынка значение равновесной цены P меняется в зависимости от времени t и потому называется ***неустановившейся***. По поведению неустановившейся равновесной цены $P(t)$ по отношению к установившейся равновесной цене P можно судить о состоянии рынка: стабильном или неустойчивом. Если $\lim\limits_{t\to\infty}|P(t) - P|$ существует и равен нулю или не существует, но $|P(t) - P|$ – периодическая функция, то состояние рынка стабильное, если предел бесконечен или не существует и $|P(t) - P|$ не является периодической, то состояние паники).

1.8. Пусть рыночная цена ежегодно изменяется по закону: 1) $p_{n+1} = 600 + \frac{2}{3}p_n$; 2) $p_{n+1} = 5000 - 3p_n$, причем в начальный год $p_0 = 1200$. Найти равновесную цену и общую формулу изменения цены по годам. Выписать несколько первых членов последовательности $\{p_n\}$.

1.9. В паутинной модели рынка даны функции спроса, предложения и начальная цена:

1) $D = 40 - 5p,\ S = p - 2,\ p_0 = 3$;

2) $D = 10 - \frac{1}{2}p,\ S = 2p - \frac{5}{2},\ p_0 = 7$.

Построить графики этих функций, найти координаты точки рыночного равновесия и несколько первых узлов ломаной $\{(q_n, p_n), (q_{n+1}, p_{n+1})\}$, где q_n – равновесный объем спроса и предложения, соответствующий цене p_n. Получить общую формулу для $p_n,\ n = 0,1,2,...$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

1.10. При спросе, определяемом формулой $D = \frac{150}{p+4}$, исследовать поведение выручки при неограниченном росте цены на товар.

1.11. Функция полных издержек производителя имеет вид: $TC(q) = q^3 - 18q^2 + 120q + 64$, где q – объем производимой продукции. Весь товар реализуется по фиксированной цене 8 у.е. найти функцию прибыли производителя.

1.12. Функция спроса на товар имеет вид:

1) $D(p)=\frac{7-p}{2}$;

2) $D(p)=\frac{100}{p+8}-3$;

3) $D(p)=5p^{-2}+10$;

4) $D(p)=20e^{-3p^2}$.

Изобразить области определения этих функций.

1.13. Даны функции спроса и предложения:

1) $D=1100-2p,\quad S=400+8p$;

2) $D=\frac{p+13}{p+2},\quad S=0,5p+2,75$;

3) $D=500-50\sqrt{p},\quad S=p+36$;

4) $D=10-p+2\sqrt{p},\quad S=4p-6$.

Найти точку рыночного равновесия.

1.14. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями $D=24-3p,\quad S=4+2p$. Найти: а) точку рыночного равновесия; б) точку равновесия после введения налога, равного 10%; в) субсидию, которая приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?

1.15. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями $D=22-3p,\quad S=10+5p$. Найти как изменится равновесная цена при уменьшении предложения на рынке на 20%.

1.16. Пусть имеется запас некоторого сырья, составляющий 30 тонн, которого должно хватить на 20 дней. Расход материала должен быть равномерным, т. е. ежедневно расходуется одинаковое количество сырья. Составить уравнение, выражающее зависимость неизрасходованного сырья y от количества прошедших дней x.

1.17. Издержки на изготовление партии деталей (годовой программы) определяются по формуле $C(q)=aq+b$, где q – объем партии. Причем параметры a и b различны для двух вариантов технологического процесса: для первого варианта $C(q)=1{,}5q+25$, а для второго варианта при q = 100 (дет), C = 155 (руб), при q = 300 (дет), C = 315 (руб). Требуется: 1) провести оценку двух вариантов, т. е. определить, какой из них выгоднее в зависимости от объема партии; 2) построить графики; 3) найти себестоимость продукции для обоих вариантов при $q = 200$ (дет).

1.18. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями $C = 125x + 40$ и $C = 25x + 600$, где x – расстояние в сотнях километров; C – транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

1.19. Постоянные издержки при производстве некоторого продукта составляют 18 тыс. руб. в месяц, а переменные – 600 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1100 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить: а) точку безубыточности; б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 182 тыс. руб. в месяц.

1.20. Оборудование было куплено за 6000 руб. Амортизация начисляется линейно и составляет 12% в год от первоначальной стоимости. Найти: а) стоимость оборудования через t лет; б) стоимость оборудования через 6 лет после начала эксплуатации; в) срок службы этого оборудования.

1.21. Зависимость объема выпуска Y от количества используемых трудовых ресурсов L определяется функцией $Y = f(L)$ как

$$Y = f(L) = \begin{cases} 0, \quad L = 0, \\ 30, \quad L = 1, \\ 30 + \dfrac{3}{5} f(L-1), \; L > 1. \end{cases}$$

Найти: а) формулу для вычисления объема выпуска при $L = n$; б) какой величины не превзойдет объем выпуска.

1.22. Компания сдает в аренду 80 квартир. При ренте в 110 у.е. в месяц все квартиры заняты. Статистика показывает, что каждое повышение стоимости ренты на 3 у.е. приводит к освобождению одной квартиры. Стоимость обслуживания сдаваемой квартиры равна 32 у.е. в месяц. Найти: а) прибыль компании, если компания сдает квартиры за 140 у.е. в месяц; 2) аналитические выражения дохода, издержек и прибыли компании в зависимости от x – количества свободных квартир.

2. ПРОИЗВОДНАЯ

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $S = S(t)$ описывает закон неравномерного движения точки *M* по прямой, где *t* – время (рис.3)

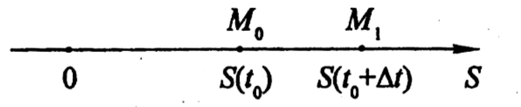

Рис. 3

Мгновенная скорость движения точки в момент времени t_0 есть производная S по времени t:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = V_{мгн}.$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении $\Delta x \to 0$, то этот предел называется ***производной функции в точке*** x_0 и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Механический смысл производной: производная функции в точке x_0 есть ***скорость изменения функции в точке*** x_0.

Так как при различных значениях аргумента х скорость изменения функции различна, то производная функции является функцией от *x*: $y' = f'(x)$.

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, а операция нахождения производной называется ***дифференцированием*** функции.

Геометрический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Производная функции в точке x_0 имеет вполне определенный геометрический смысл: значение производной функции в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис.4).

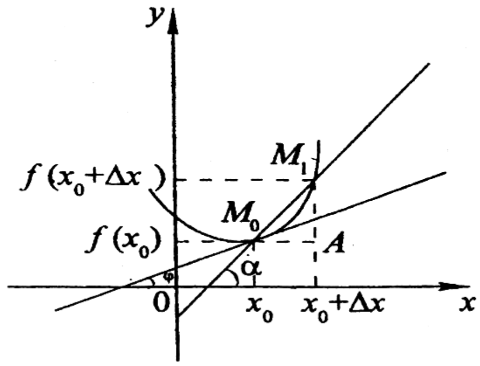

Рис.4

Правила и формулы дифференцирования

$$1.(C)' = 0;$$
$$2.(x)' = 1;$$
$$3.(u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$4.(Cu)' = Cu';$$
$$5.(uv)' = u'v + uv';$$
$$6.\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$$
$$7.\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Эта теорема не имеет обратной. Это означает, что непрерывность функции в точке является лишь необходимым условием дифференцируемости ее в этой точке, но не достаточным. То есть функция может быть **непрерывна в точке**, но **не иметь в ней производную**.

Необходимое и достаточное условия возрастания, убывания функции

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале (a; b). Для того, чтобы функция была возрастающей в интервале (a; b), необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (a; b)$ производная ее была положительна:

$$f'(x) > 0.$$

Для того, чтобы функция была убывающей в интервале (a; b), необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (a;b)$ производная ее была отрицательна:

$$f'(x) < 0.$$

Определение. Точка x_1 называется точкой ***локального (максимума)*** функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ ($f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$). Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума*** функции, а максимумы и минимумы функции – ее ***экстремальными*** значениями.

Необходимое условие существования экстремума функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором промежутке ($a;b$), а x_0 – внутренняя точка этого промежутка. Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то производная ее в этой точке:

1) $f'(x_0) = 0$

или

2) $f'(x_0)$ *не существует* .

Точки, в которых для функции выполняется необходимое условие существования экстремума, называются ***критическими точками*** на экстремум.

Для отыскания экстремумов функции находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Достаточные условия существования экстремума

Теорема (**первый достаточный признак локального экстремума**).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ данная функция имеет ***максимум***. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет ***минимум***.

Теорема (второй достаточный признак локального экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке

$x = x_0$ функция имеет ***локальный максимум***, если $f''(x_0) < 0$ и ***локальный минимум,*** если $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, точка $x = x_0$ может и не быть экстремальной.

Определение. Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется ***выпуклой*** в интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной в этом интервале, и ***вогнутой*** в интервале (a,b), если все ее точки лежат выше любой ее касательной в этом интервале.

Определение. Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется ***точкой перегиба*** кривой. Предполагается, что в точке M существует касательная.

Теорема (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то кривая в этом интервале ***выпукла (вогнута).***

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции **изменяет свой знак**, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема (достаточный признак перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ – точка перегиба.

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале (a,b), x_0 – внутренняя точка (a,b). Если точка x_0 является точкой перегиба графика $f(x)$, то в этой точке:

либо 1) $f'(x_0) = \infty$ (точка перегиба с вертикальной касательной);

либо 2) $f''(x_0) = 0$ (точка перегиба с наклонной касательной).

Необходимые условия существования точки перегиба с горизонтальной касательной:

1) $f'(x_0) = 0$;

2) $f''(x_0) = 0$.

Схема полного исследования функции и построение ее графика

I. 1. Область определения функции

2. Четность или нечетность, симметрия графика

3. Точки разрыва функции, интервалы непрерывности.

4. Асимптоты графика: вертикальные, наклонные, горизонтальные.

5. Точки пересечения графика с осями координат.

II. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

Ш. Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

IV. Построение графика.

По знакам первой и второй производной функции можно определить темпы возрастания и убывания, то есть возрастает или убывает функция все быстрее или все медленнее. Говорят, что функция $y=f(x)$ ***возрастает все медленнее*** в некотором интервале, если $f'(x)>0$, $f''(x)<0$. Функция $y=f(x)$ ***возрастает все быстрее*** в некотором интервале, если $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. Функция $y=f(x)$ ***убывает все медленнее*** в некотором интервале, если $f'(x)<0$, $f''(x)>0$. Функция $y=f(x)$ ***убывает все быстрее*** в некотором интервале, если $f'(x)<0$, $f''(x)<0$.

2.1. Применение производной в исследованиях производственных функций

Определение. Функция, определяющая зависимость между издержками производства определенного товара и объемом производства, называется функцией **полных издержек (затрат)**. Если через TC обозначить полные издержки производства x единиц продукции, то функцию полных издержек можно записать в виде: $TC = f(x)$, $x \in [0;+\infty)$.

Определение. Средние затраты (или издержки на единицу продукции) определяются как

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Определение. Средний прирост издержек производства $\frac{\Delta TC}{\Delta x}$ означает прирост издержек производства в расчете на единицу прироста количества продукции.

Определение. Предельными издержками производства называется

$$MC = TC' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta x}.$$

Предельные издержки производства MC показывают дополнительные или добавочные издержки, связанные с производством еще одной единицы продукции.

Если количество проданного товара D умножить на его цену p, получим **суммарную (полную) выручку** продавца или же суммарные расходы покупателя $TR = D \cdot p = D \cdot g(D)$. Суммарная выручка есть функция спроса и цены.

Определение. Предел $\lim_{\Delta D \to 0} \frac{\Delta TR}{\Delta D} = TR'(D) = MR$ называется **предельной выручкой** от продажи D единиц товара. Предельная выручка MR показывает дополнительную выручку от продажи еще одной единицы товара.

Определение. Прибыль предприятия $\Pi(q)$ определяется как разность между полной выручкой $TR(q)$, полученной от реализации произведенной продукции, и полными издержками $TC(q)$ на производство этой продукции (q – количество произведенной продукции): $\Pi(q) = \left(TR(q) - TC(q)\right)$.

Условие получения прибыли: $TR(q) > TC(q)$.

Пусть дана непрерывная и дифференцируемая в некотором интервале функция $y = f(x)$. Дадим приращение Δx фиксированному значению из аргумента из этого интервала, так чтобы значение $x + \Delta x$ тоже принадлежало этому интервалу. Тогда $\frac{\Delta x}{x}$ есть **относительное приращение аргумента** в точке x. При этом функция тоже получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Выражение $\frac{\Delta y}{y}$ назовем **относительным приращением функции** в точке x, соответствующим относительному приращению аргумента.

Определение. Эластичностью функции $y = f(x)$ относительно x называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ и обозначается $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$.

Эластичность функции показывает относительное изменение функции в процентах, соответствующее относительному приращению аргумента x на 1 процент.

Определение. Эластичность функции – это мера реакции функции на относительное изменение аргумента на 1 процент.

Свойства эластичности функции.

1) Если $|E_x(y)| > 1$, то есть если изменению аргумента на 1 процент соответствует изменение функции более чем на 1 процент, то говорят, что функция эластична.

2) Если $0 < |E_x(y)| < 1$, то есть если изменению аргумента на 1 процент соответствует изменение функции менее чем на 1 процент, то говорят, что функция неэластична.

3) Если $|E_x(y)| = 1$, то есть если изменению аргумента на 1 процент соответствует изменение функции на 1 процент, то говорят, что функция нейтральна.

4) Если $E_x(y) = 0$, то функция $y = f(x)$ абсолютно неэластична.

5) Если $E_x(y) = \infty$, то функция $y = f(x)$ абсолютно эластична.

6) Если в некоторых случаях коэффициент эластичности оказывается **величиной отрицательной**, то это означает, что эластичность определяется при значении x, принадлежащем интервалу, где функция является убывающей. На знак минус перед полученным числом не обращают внимания, рассматривая его по абсолютной величине.

7) Эластичность произведения двух функций u и v равна сумме эластичностей сомножителей, то есть

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v).$$

8) Эластичность частного двух функции равна разности эластичностей делимого и делителя, то есть

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

Введем понятие ***эластичности спроса относительно цены;*** другими словами, определим изменение спроса, вызываемое определенным изменением цены.

Функция спроса есть убывающая функция цены, то есть $D'_p < 0$, так как с увеличением цены на товар спрос на него понижается. Поэтому в формуле эластичности спроса впереди ставится знак минус:

$$E_p(D) = -\frac{p}{D} \cdot D'_p = -\frac{p}{D} \cdot \frac{dD}{dp}. \qquad (2.1)$$

Эластичность спроса относительно цены показывает изменение спроса на данный товар, если его цена возрастет на 1 процент.

Если $\left|E_p(D)\right| > 1$, то спрос эластичен;

если $\left|E_p(D)\right| = 1$, то спрос нейтрален;

если $\left|E_p(D)\right| < 1$, то спрос неэластичен.

Если $\left|E_p(D)\right| = \infty$, то говорят что спрос абсолютно эластичен.

Если $\left|E_p(D)\right| = 0$, то говорят что спрос абсолютно неэластичен.

Так как функция предложения $S=f(p)$ – возрастающая относительно цены функция, то формула эластичности предложения относительно цены имеет вид:

$$E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot S'_p .$$

Исследование динамики полной выручки в зависимости от эластичности спроса.

Предположим, что функция спроса на товар есть $D=f(p)$. Выручка от продажи данного товара составляет $TR = D \cdot p$. Тогда предельная выручка будет равняться:

$$MR = TR'_p = \left(D \cdot p\right)'_p = D'_p \cdot p + D = D \cdot \left(\frac{p}{D} \cdot D'_p + 1\right).$$

С учетом формулы (2.1) получим

$$MR = D \cdot (1 - E_p(D)) . \qquad (2.2)$$

Это выражение определяет зависимость между выручкой от продажи товара и спросом. Из уравнения (2.2) можно сделать следующие выводы:

1) Если $\left|E_p(D)\right| > 1$, то $MR < 0$, то есть если спрос эластичен, то с повышением цены товара выручка от его продажи снижается. Следовательно, при **эластичном** спросе на данный товар цены повышать **нецелесообразно**.

2) Если $\left|E_p(D)\right| = 1$, то $MR = 0$, то есть TR – постоянная; это означает, что при нейтральном спросе выручка от продажи данного товара не зависит от изменения цены. Значение цены, при котором спрос нейтрален является критической точкой полной выручки на экстремум, причем полная выручка достигает при этом значении максимума, так как знак производной MR меняется с плюса на минус. Для коммерсанта оптимальным является такое значение

цены на данный товар, при котором **спрос нейтрален**, так как при этом значении цены полная выручка от продажи этого товара будет максимальной.

3) Если $0 < \left| E_p(D) \right| < 1$, то $MR > 0$, то есть если спрос неэластичен, то с повышением цены выручка возрастает.

Исследование динамики функции предполагает определение:

1) области определения (для производственных функций – экономически обусловленной области определения), точек разрыва и интервалов непрерывности;

2) интервалов возрастания и убывания, точек экстремума;

3) интервалов выпуклости и вогнутости, точек перегиба;

4) темпов возрастания и убывания.

Пример. Дана функция полных издержек $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 20x + 15$.

1. Исследовать динамику полных издержек и построить кривую;

2. При каком объеме производства «*x*» предельные издержки минимальны? Построить кривую предельных издержек.

3. При каком объеме производства «*x*» переменные средние издержки минимальны? Построить кривую переменных средних издержек.

4. Провести экономический анализ.

Решение. Полные издержки производства «*x*» единиц продукции равны сумме переменных издержек $K_{пер}(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 20x$ и постоянных издержек $K_{пост}(x) = 15$.

1. Исследуем динамику полных издержек и построим кривую.

1) Экономически обусловленная область определения функции полных издержек:

$\begin{cases} x \geq 0; \\ K(x) \geq 0. \end{cases}$ Функция непрерывна при всех $x \geq 0$.

2) Найдем интервалы возрастания и убывания, точки экстремума функции $K(x)$.

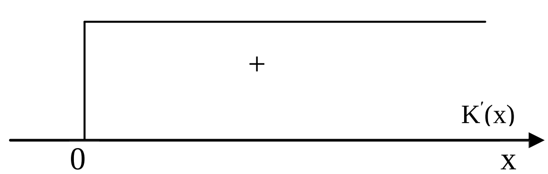

Рис.5

Для этого находим $K'(x) = x^2 - 8x + 20$. Из $K'(x) = 0$ имеем $x^2 - 8x + 20 = 0$. Так как дискриминант $D < 0$, то действительных корней нет, нет критических точек на точки экстремума, а значит, нет и точек экстремума, проверив знак $K'(x)$ в какой-либо точке из промежутка $x > 0$, убеждаемся, что $K'(x) > 0$ при всех $x > 0$ (рис.5). Таким образом, функция полных издержек при всех $x > 0$ возрастает, точек экстремума нет.

3) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Для этого находим: $K''(x) = 2x - 8$. Из $K''(x) = 0$ имеем $x = 4$ – критическая точка на точку перегиба. При $x < 4$ кривая выпуклая $(K''(x) < 0)$; при $x > 4$ кривая вогнутая $(K''(x) > 0)$, $x = 4$ – точка перегиба: $K_{перег} = K(4) = 52\frac{1}{3}$ (рис.6).

4) Определим темпы изменения функции $K(x)$. Для этого интервалы возрастания и убывания, выпуклости и вогнутости наложим на числовую прямую. На промежутке (0; 4) функция $K(x)$ возрастает все медленнее; на $(4;+\infty)$ возрастает все быстрее.

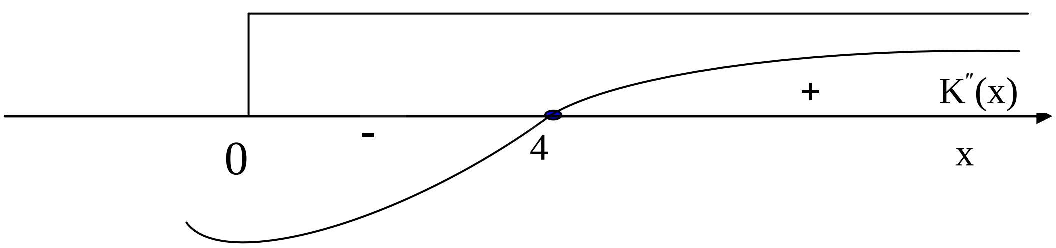

Рис 6.

5) При $x = 0$, $K(0) = 15$. С осью абсцисс кривая не пересекается при $x>0$. Итак, на рисунке 7 указаны темпы возрастания и убывания функции.

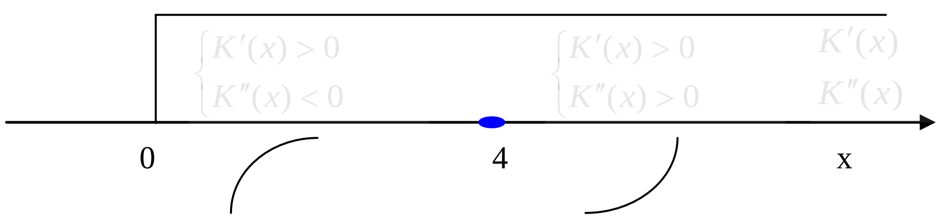

Рис.7

График функции полных издержек представлен на рисунке 8.

2. Определим, при каком объеме производства «x» предельные издержки $K'(x) = x^2 - 8x + 20$ будут минимальны. Для этого находим $K''(x) = 2x - 8$ и приравняем нулю: $K''(x) = 0$; $x = 4$. Легко проверить, что при $x \in (0;4)$, $K''(x) < 0$ ($K'(x)$ убывает), а

при всех $x \in (4;+\infty), K''(x) > 0$ ($K'(x)$ возрастает). Значит, при x = 4 предельные издержки $K'(x)$ минимальны: $K'_{\min} = K'(4) = 4$. Кривой предельных издержек $K'(x)$ будет парабола (рис. 8).

3. Определим, при каком объеме производства «x» переменные средние издержки $K_{пер\,ср}(x) = \dfrac{K_{пер}(x)}{x} = \dfrac{1}{3}x^2 - 4x + 20$ будут минимальны. Для этого найдем $K'_{пер\,ср}(x) = \dfrac{2}{3}x - 4$. Из $K'_{пер\,ср}(x) = 0$ имеем $\dfrac{2}{3}x - 4 = 0;\ x = 6$. Легко убедиться, что при всех $x \in (0;6)\ K'_{пер\,ср}(x) < 0$ (переменные средние издержки убывают), а при всех $x \in (6;+\infty)\ K'_{пер\,ср}(x) > 0$ (переменные средние издержки возрастают). Значит, при x = 6 переменные средние издержки $K_{пер\,ср}(x)$ минимальны: $K_{пер\,ср\,\min} = K_{пер\,ср}(6) = 8$. Кривой переменных средних издержек будет парабола (рис. 8).

4. Экономический анализ.

1) Так как при изменении объема производства от 0 до 4 ед. полные издержки растут медленно, а после 4 ед. начинают расти быстро, то объем производства выгодно наращивать до 4 ед.

2) Тогда, при объеме производства до 4 ед. предельные издержки снижаются от 20 ед. до 4ед.; дальнейшее увеличение объема выпускаемой продукции приводит к росту предельных издержек.

3) При изменении объема производства от 0 до 6 ед. переменные средние издержки снижаются от 20 ед. до 8 ед., а при дальнейшем увеличении объема производства переменные средние издержки начинают расти.

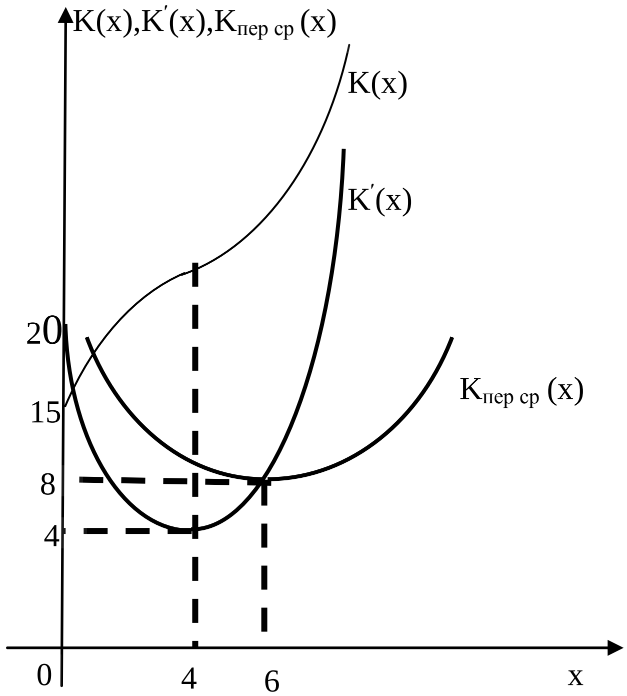

Рис.8

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

1. Построим график функции полных издержек. Для этого используем команду **plot2d()** (рис.9)

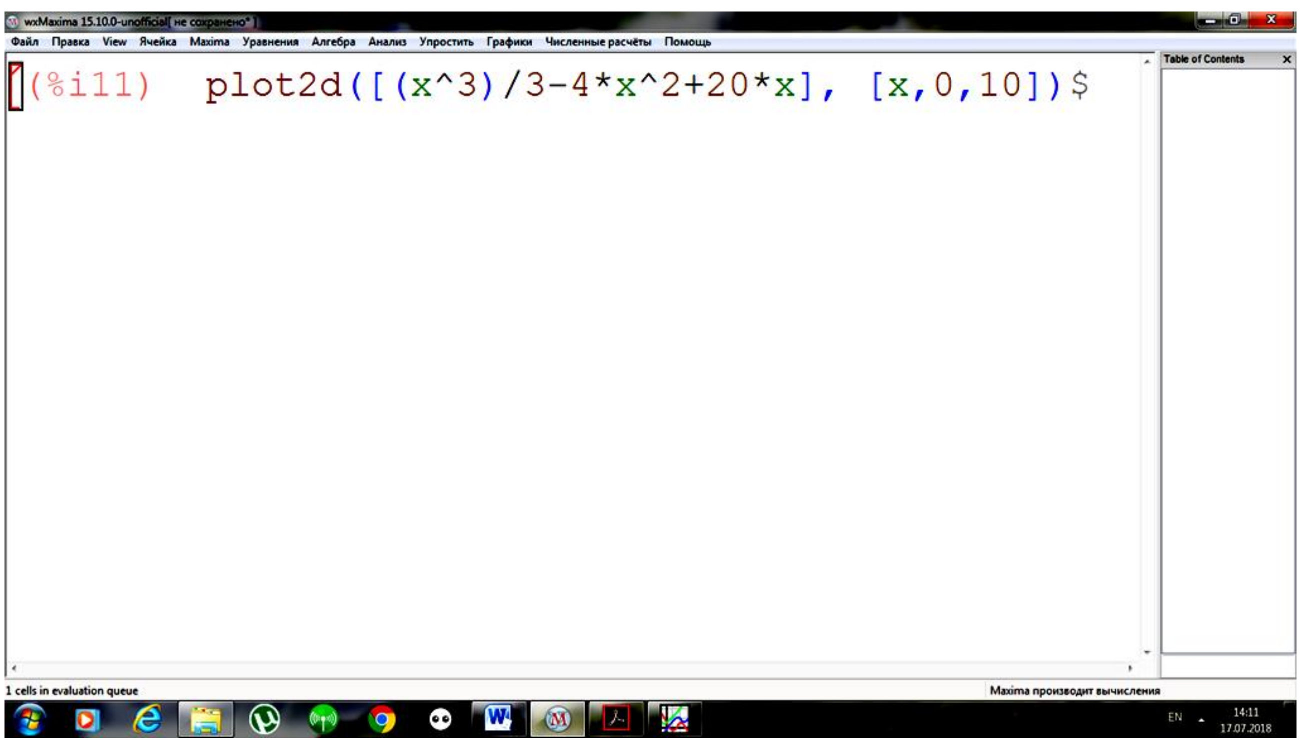

Рис. 9

Получили график, представленный на рисунке 10, из которого видно что при $x \geq 0$ существует точка перегиба. В ней изменяется темп возрастания полных издержек.

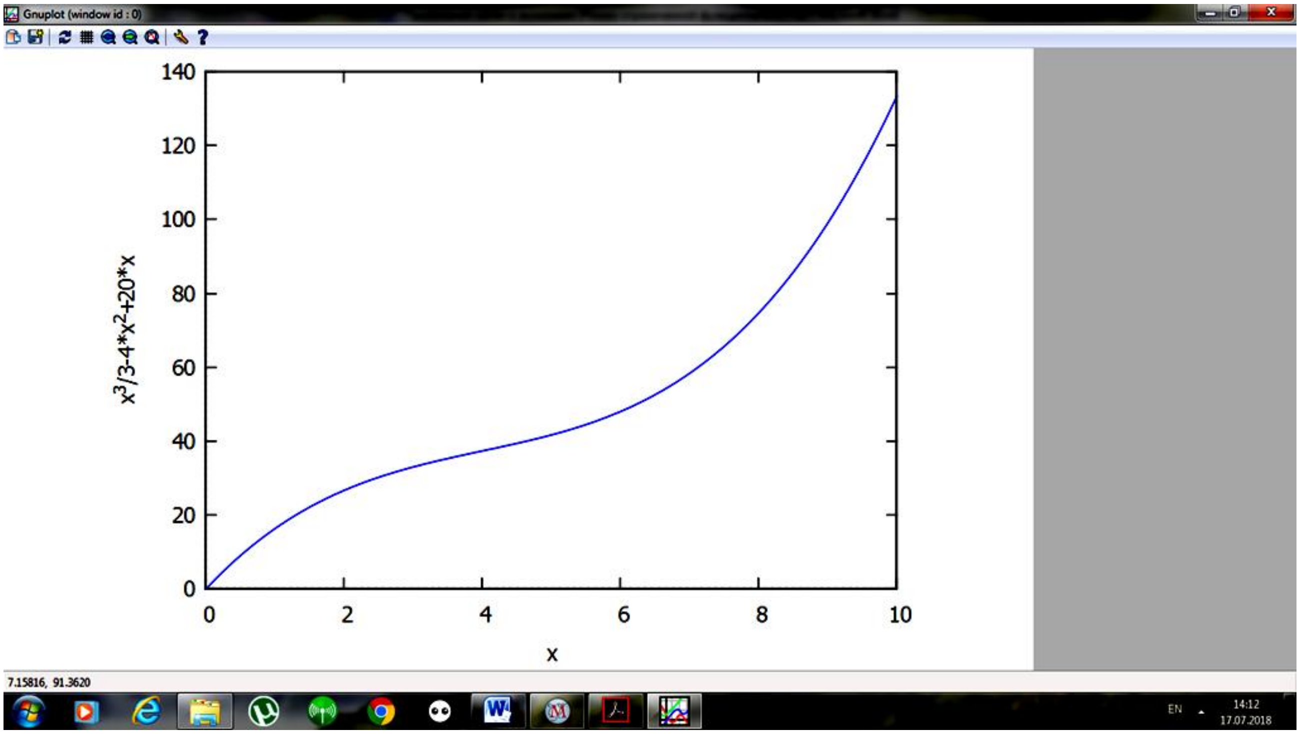

Рис.10

Найдем точку перегиба. Для этого функцию полных издержек необходимо дважды продифференцировать. Выберем вкладку **Анализ -> Дифференцировать**. В строке **Выражение** записываем функцию, **Переменные**-*x* **,Порядок производной** -2 (рис.11).

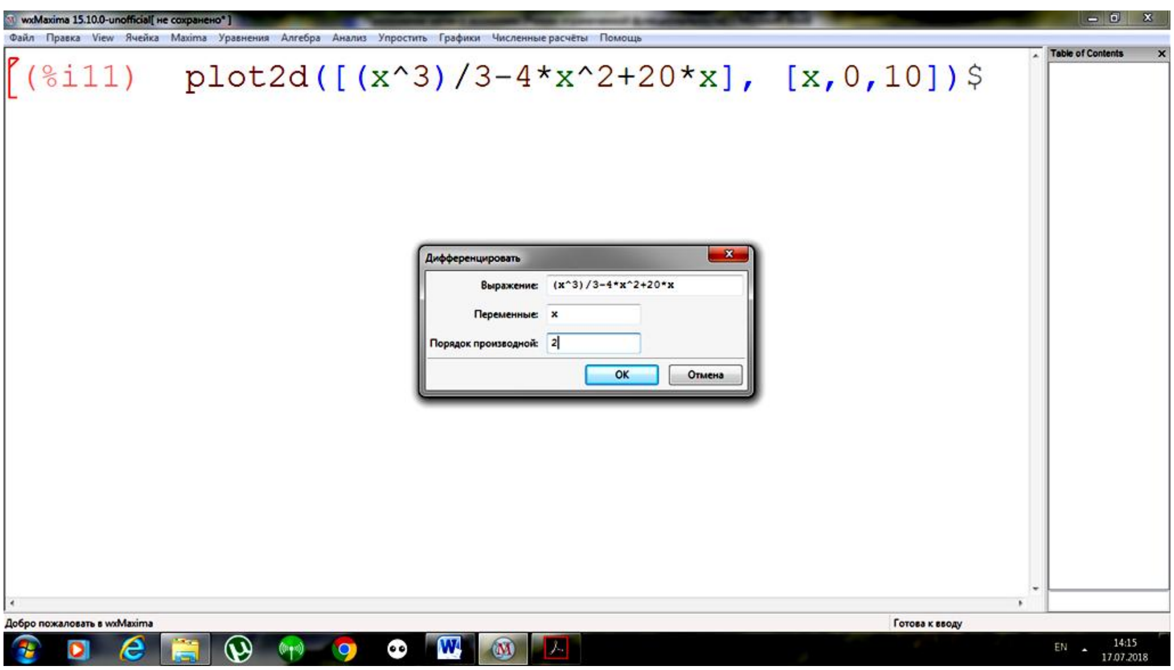

Рис.11

Результат дифференцирования представлен на рисунке 12.

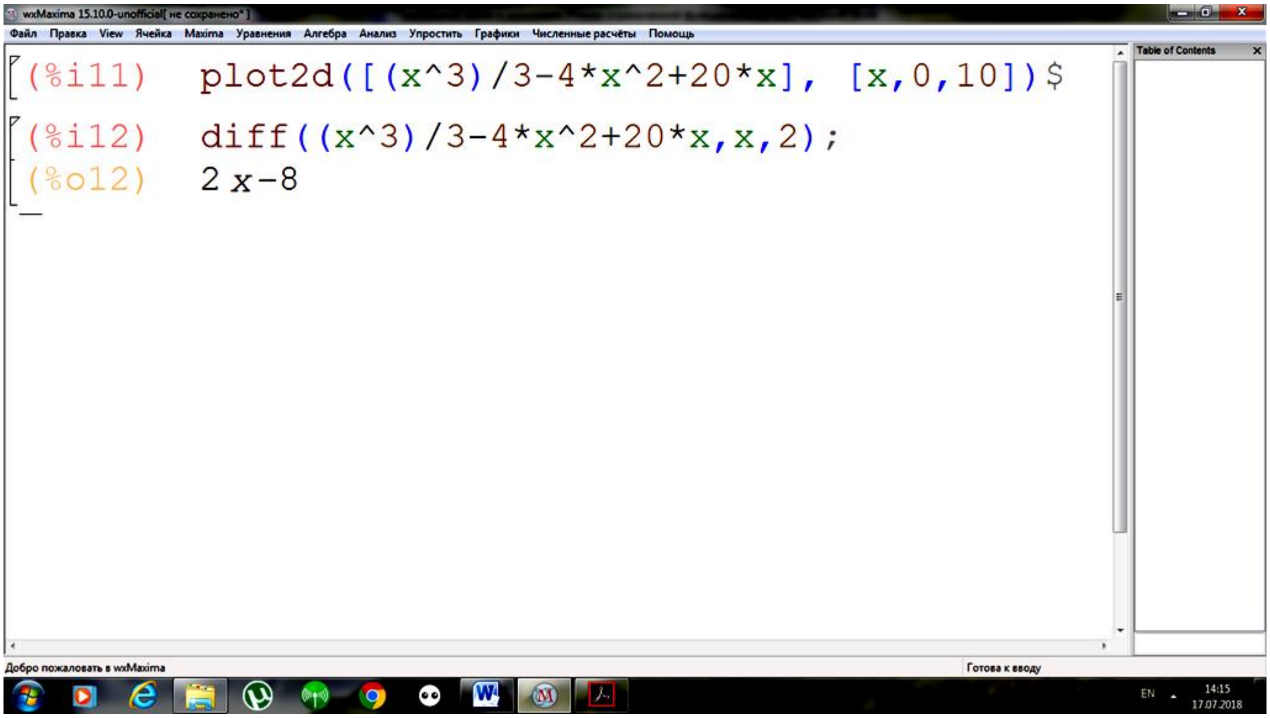

Рис.12

Приравниваем найденное выражение к 0 и решаем уравнение. Выберем вкладку **Уравнения -> Решить** (рис.13).

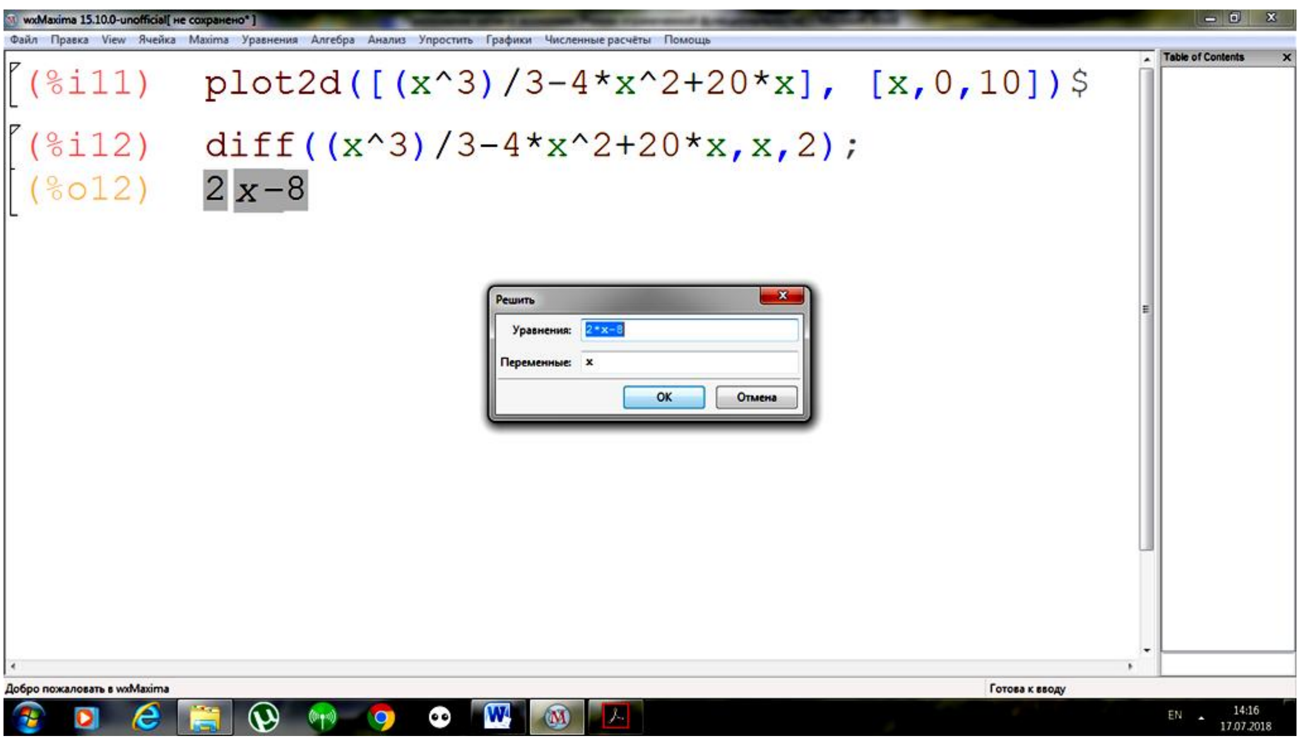

Рис.13

Точка перегиба – $x = 4$ (рис.14).

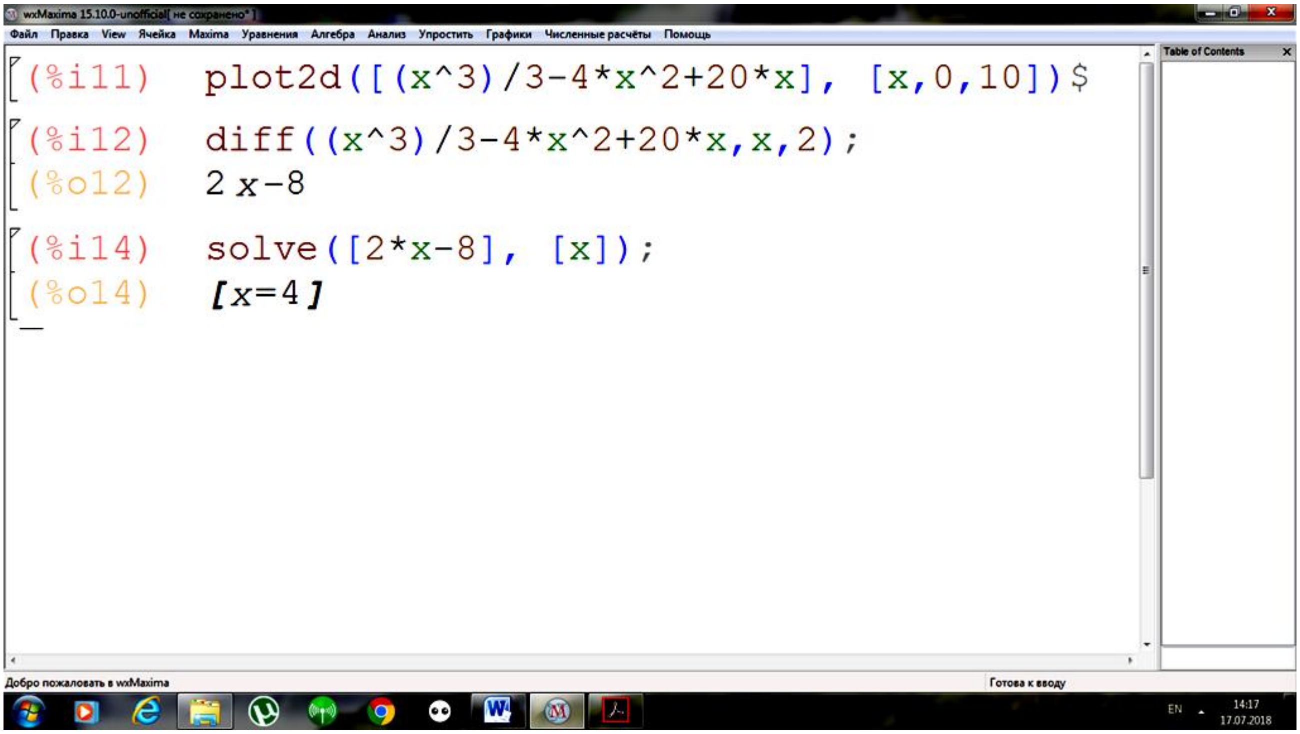

Рис.14

Подставляем найденное значение в функцию полных издержек с помощью вкладки **Упростить -> Подставить** (рис.15)**.**

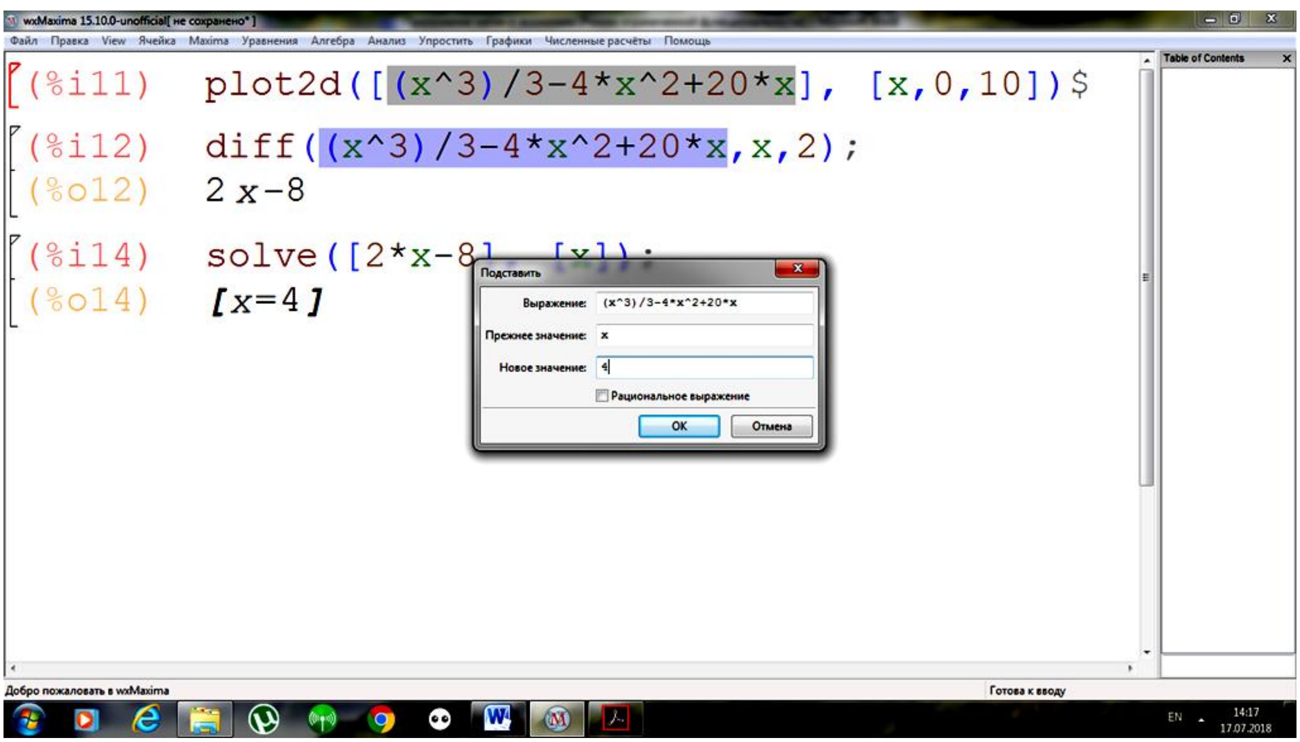

Рис.15

Получим значение функции полных издержек в точке перегиба (рис.16).

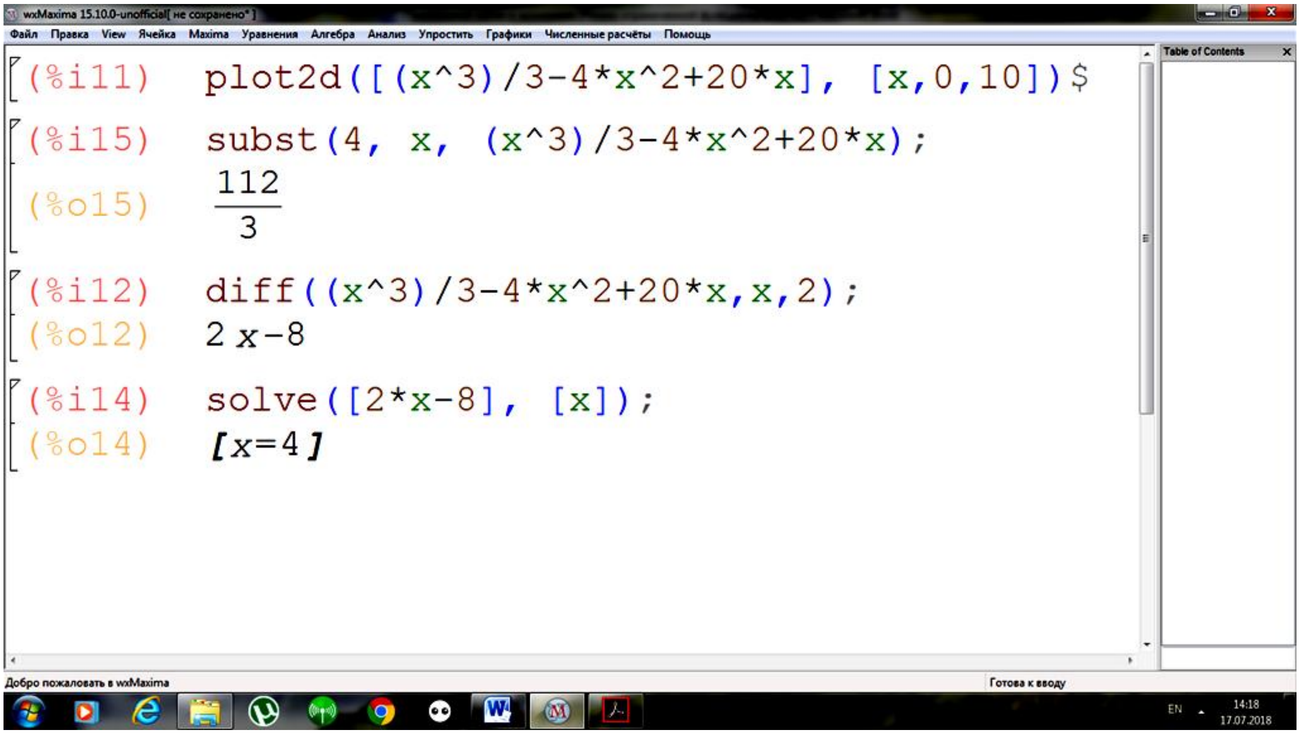

Рис.16

2. Найдем функцию предельных издержек. Выберем вкладку **Анализ -> Дифференцировать** (рис. 17).

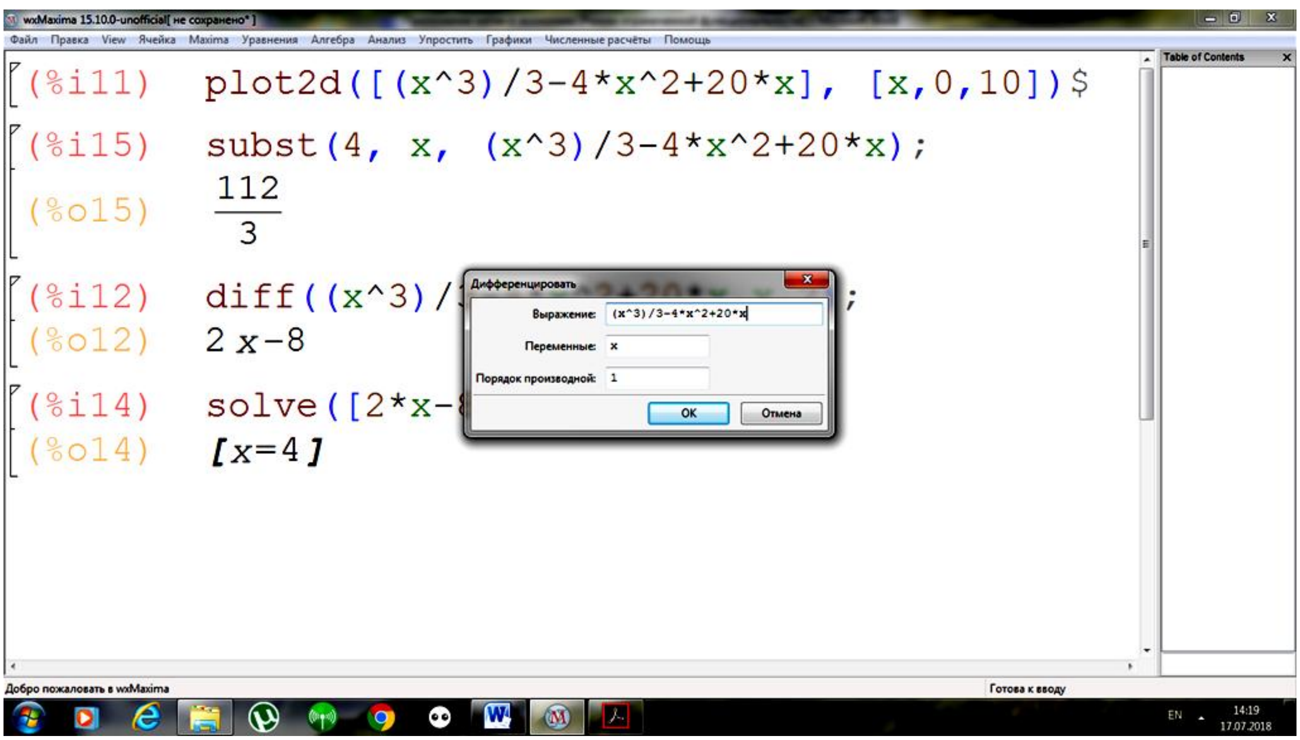

Рис.17

Получим функцию предельных издержек, которую обозначим, как $k1$ (рис.18).

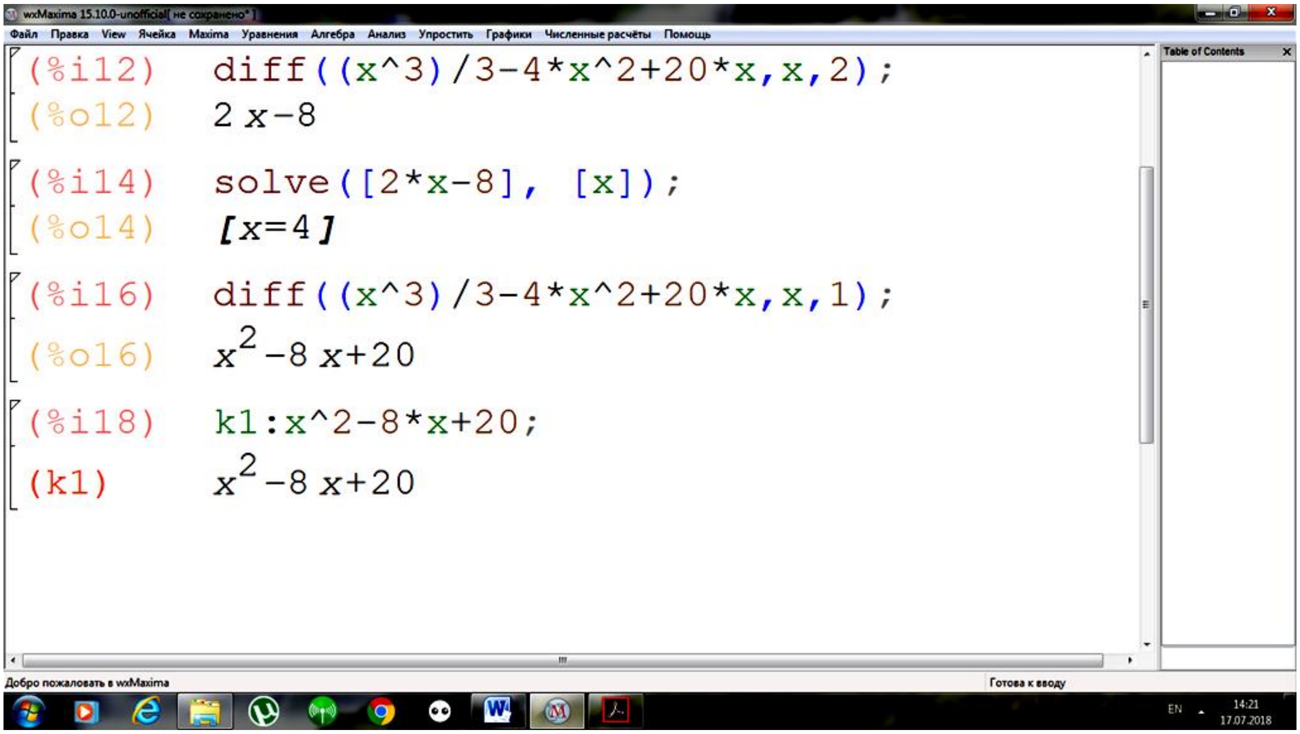

Рис.18

Построим график функции предельных издержек (рис.19).

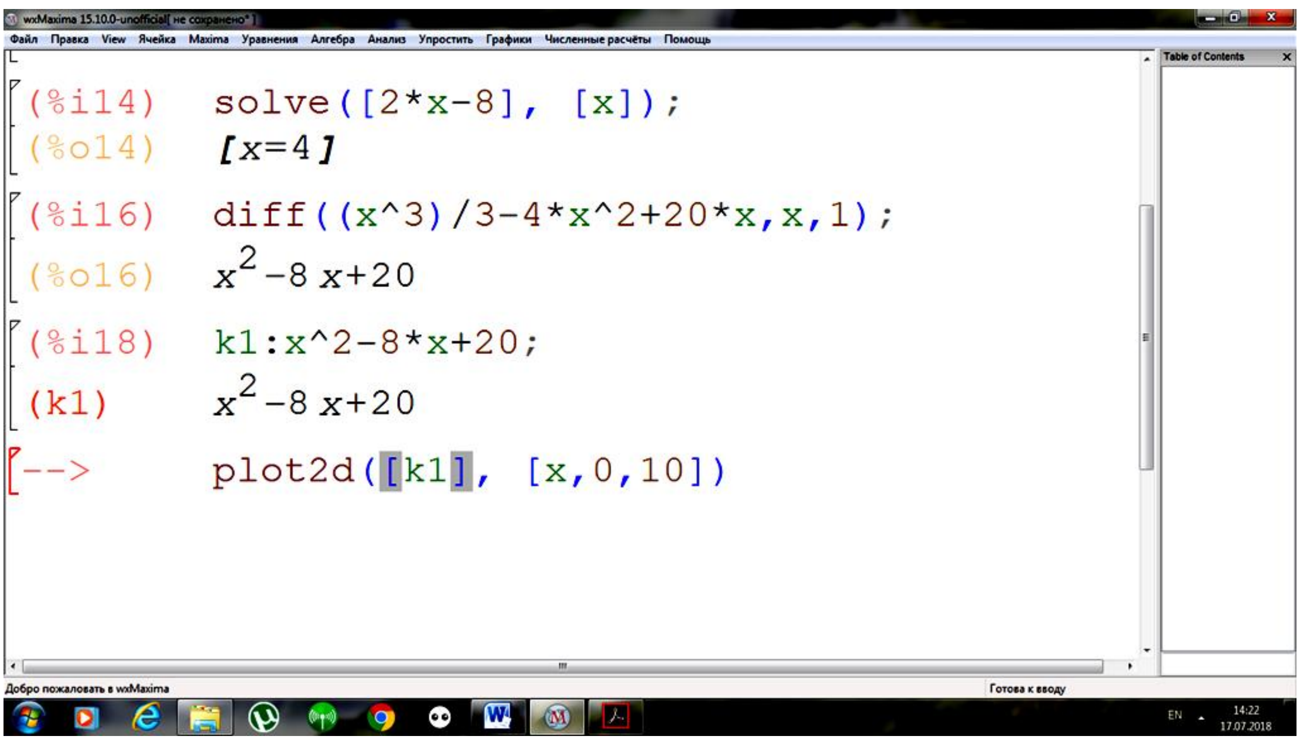

Рис.19

На рисунке 20 мы можем увидеть график функции предельных издержек, из которого видно, что для предельных издержек существует точка минимума.

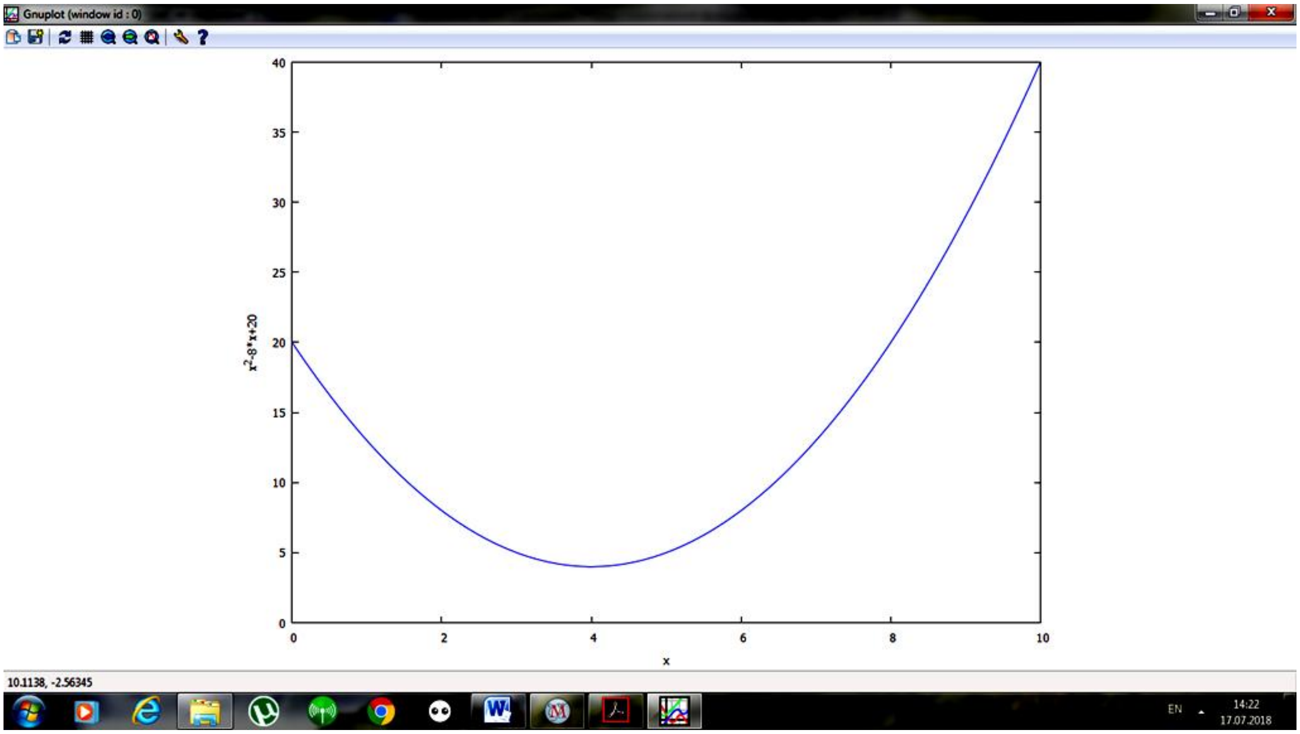

Рис.20

Найдем точку, в которой предельные издержки минимальны. Продифференцируем функцию предельных издержек (рис.21-22).

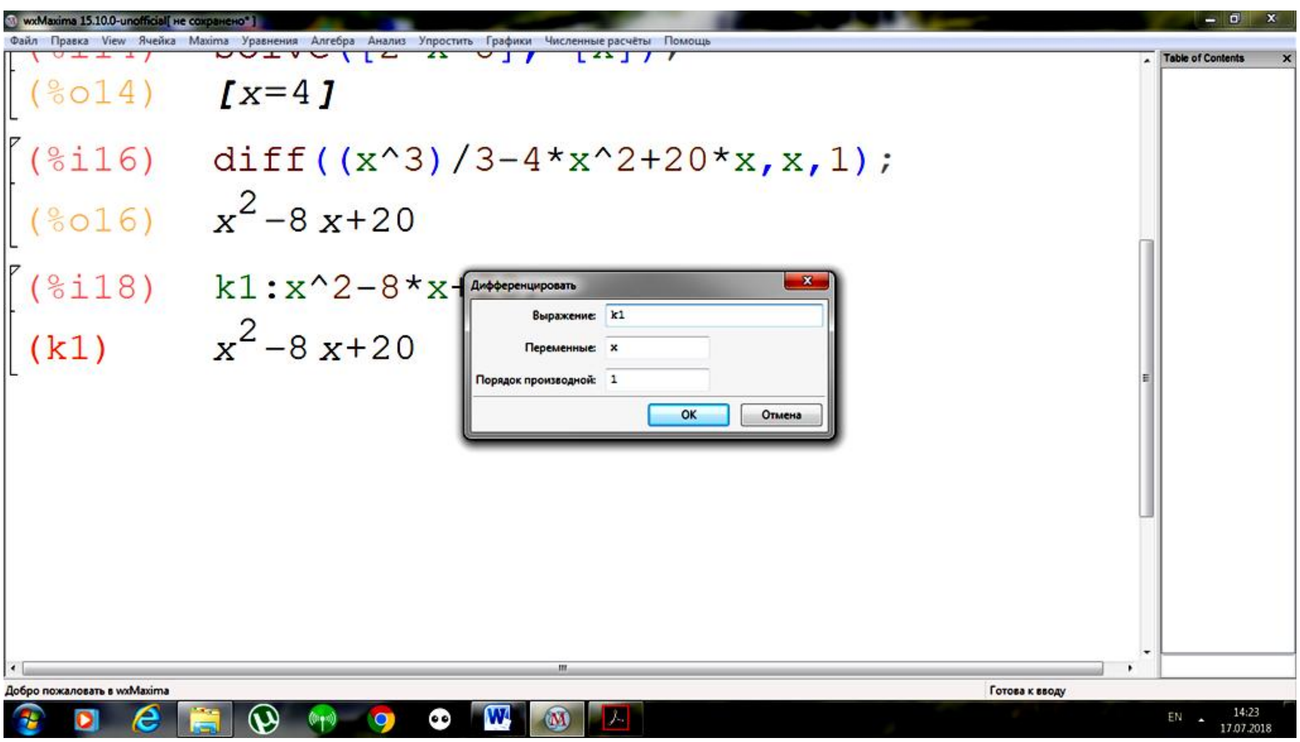

Рис.21

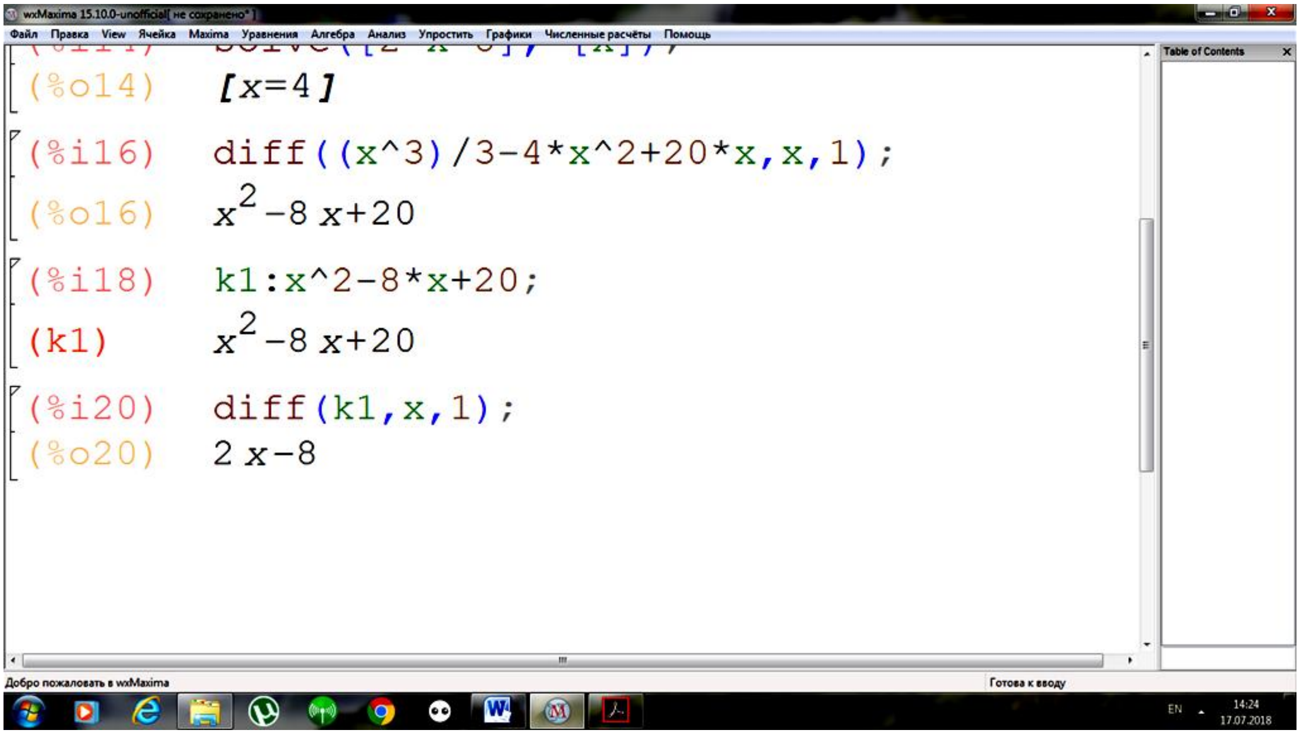

Рис.22

Найдем нули полученного выражения. Для этого в командной строке выберем **Уравнения-> Решить** (рис.23).

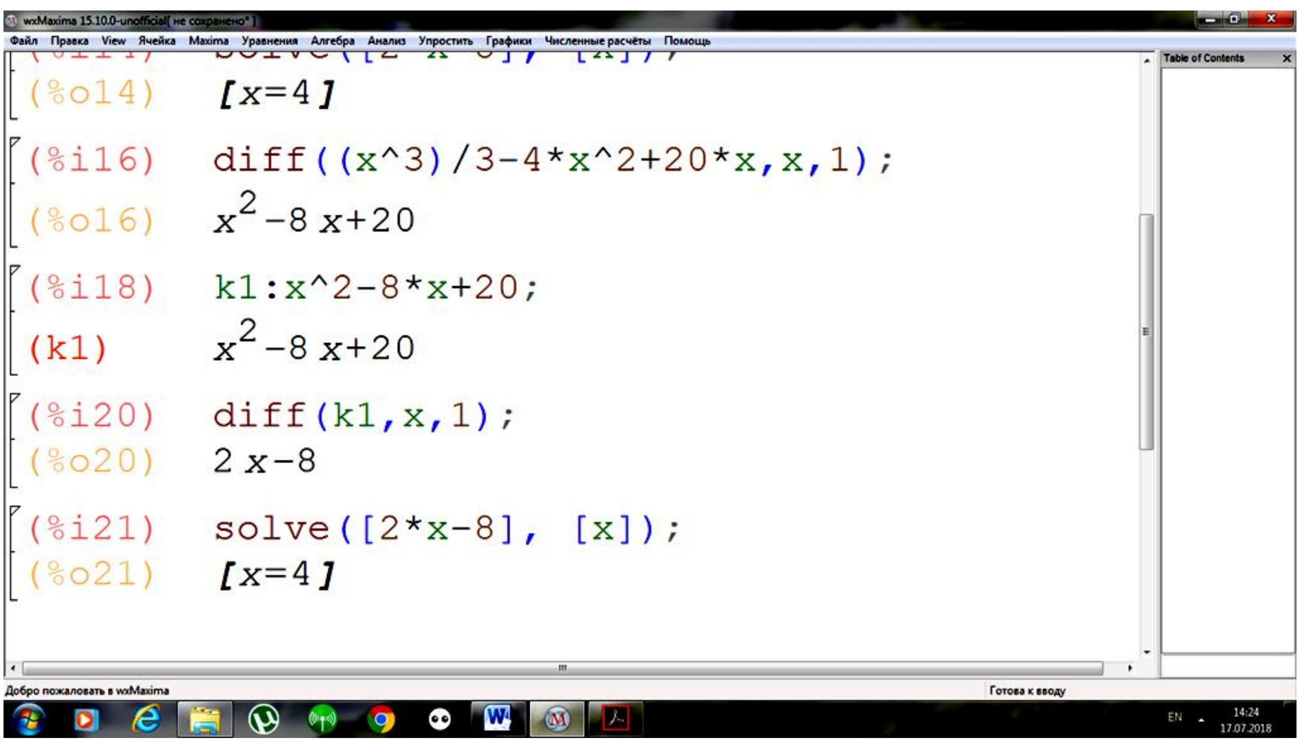

Рис.23

Полученное решение подставим в функцию предельных издержек с помощью командной строки **Упростить -> Подставить** (рис.24).

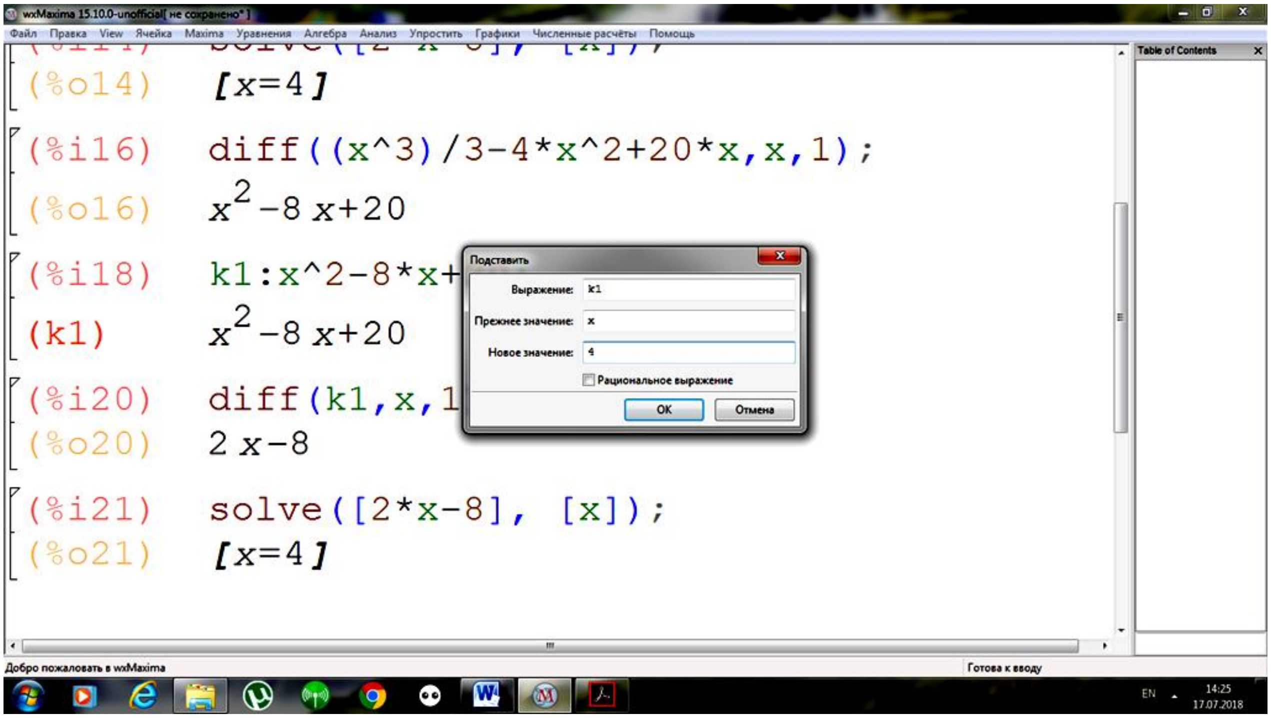

Рис.24

Минимальные предельные издержки равны 4 (рис.25).

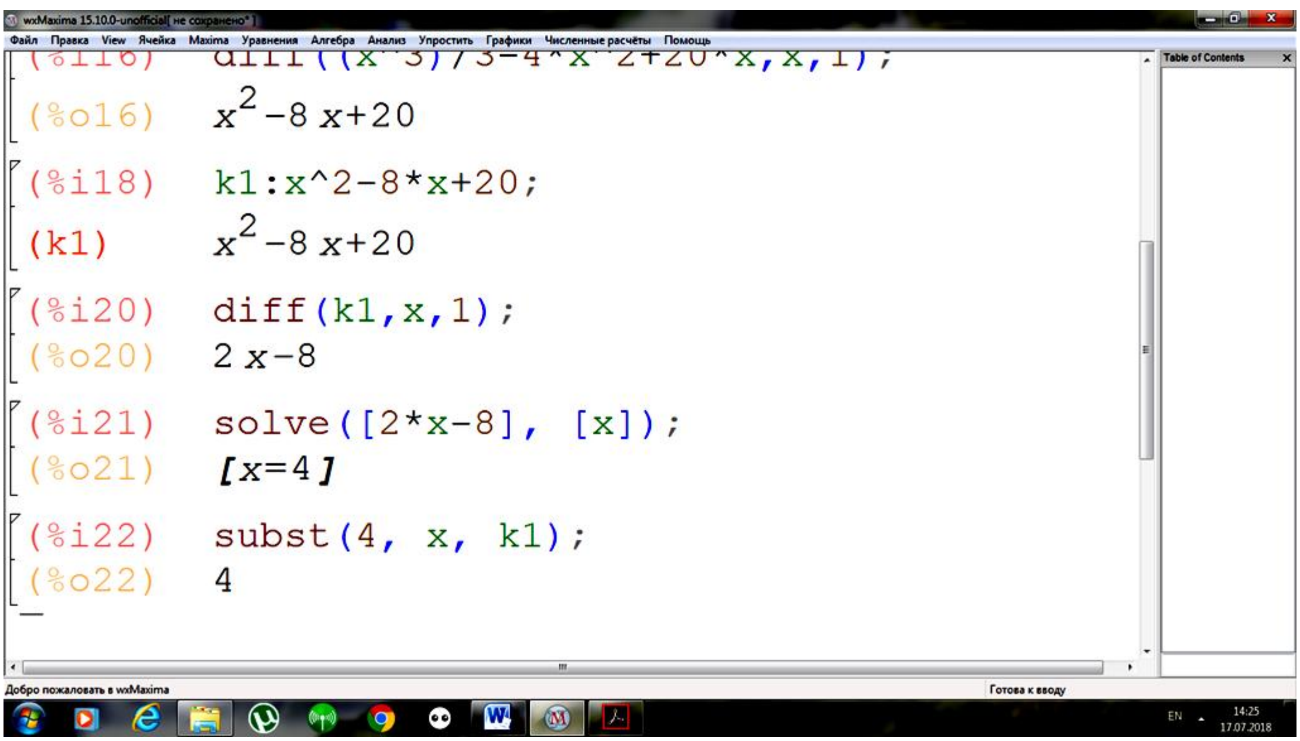

Рис.25

3. Найдем функцию средних издержек. Для этого введем ее (рис.26).

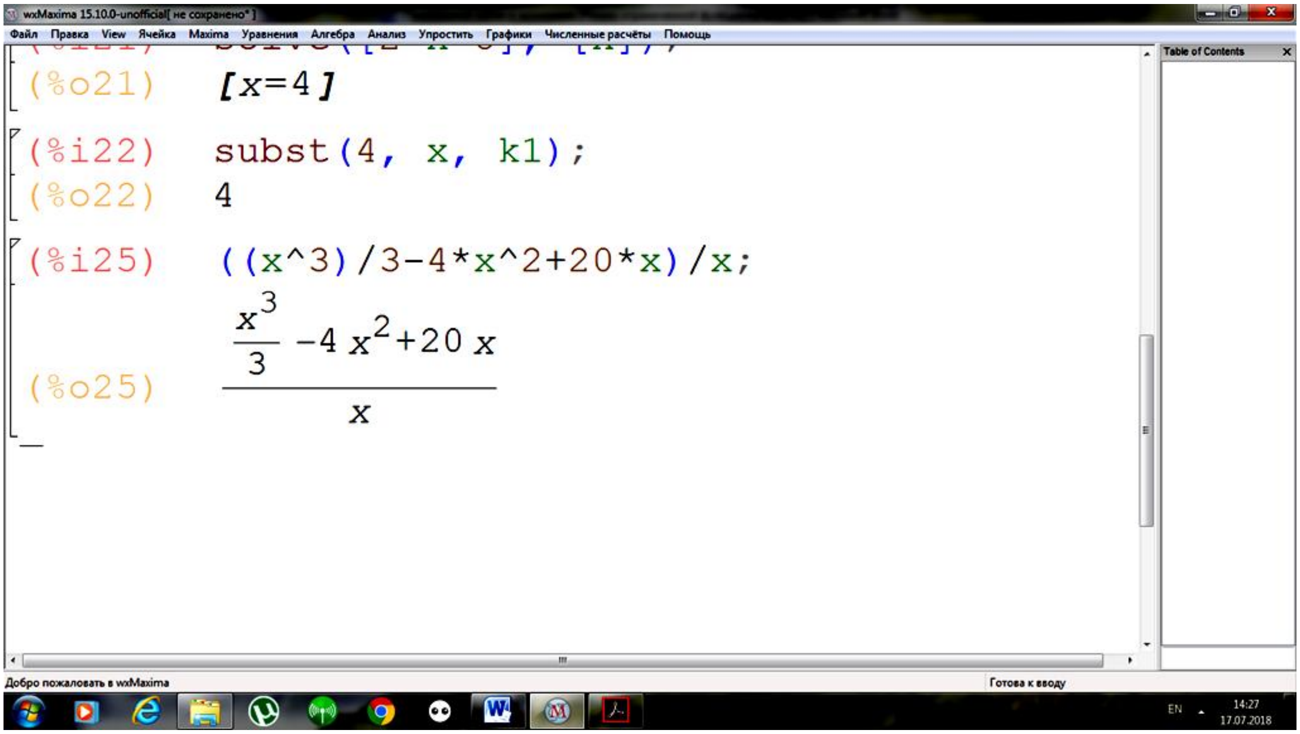

Рис.26

Упростим полученное выражение. Для этого в командной строке выберем **Упростить-> Упростить выражение** (рис.27).

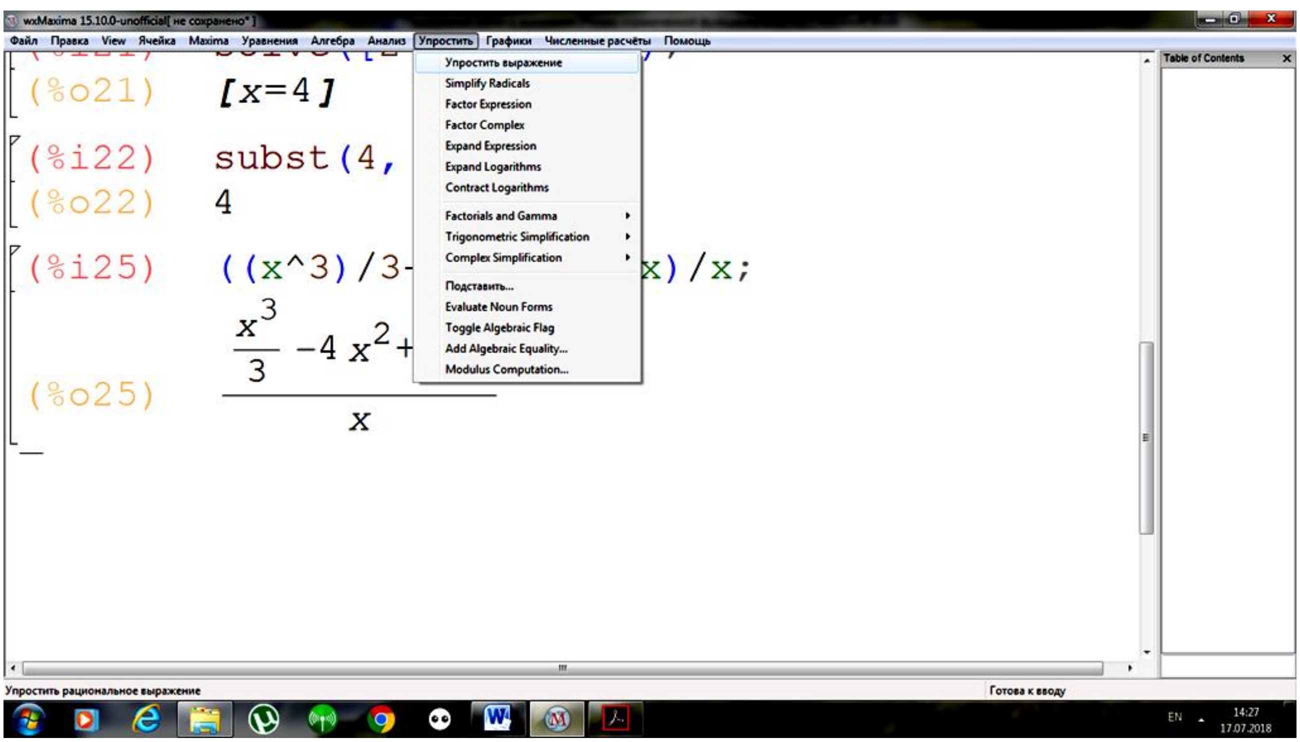

Рис.27

Функция средних издержек представлена на рисунке 28.

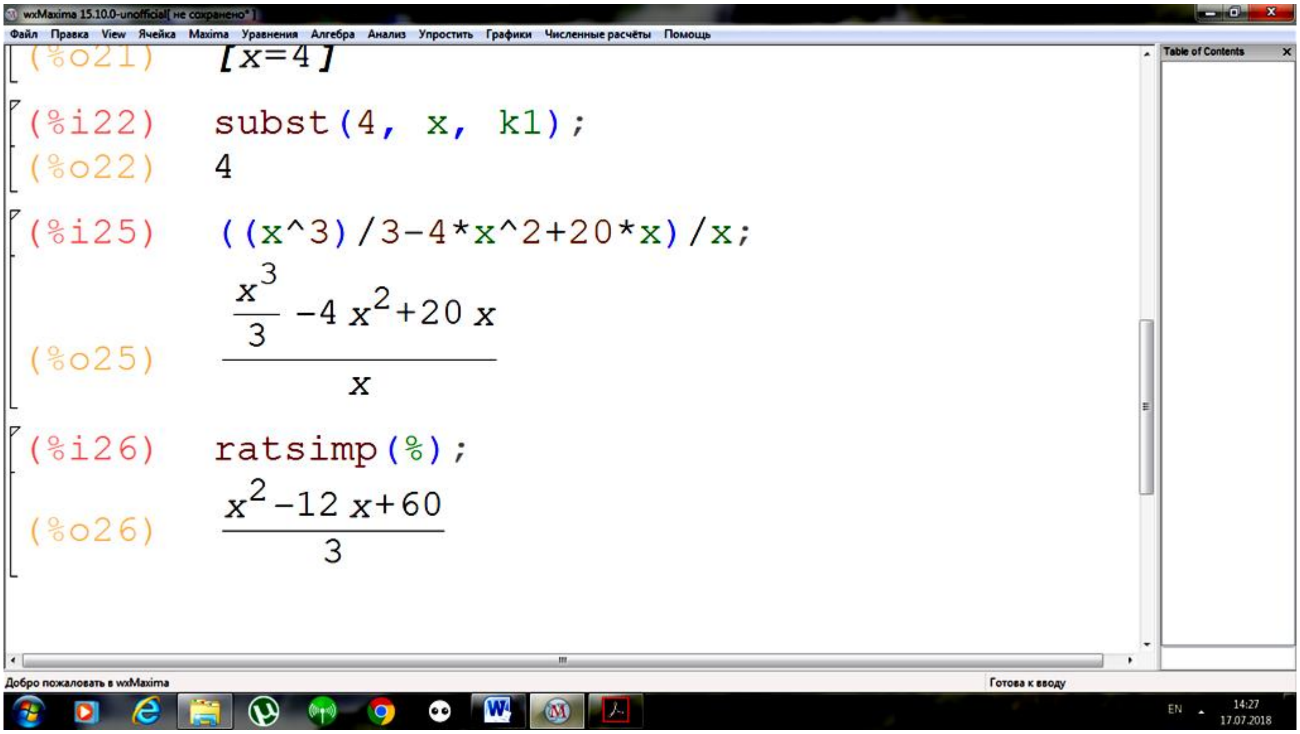

Рис.28

Построим ее график (рис.29).

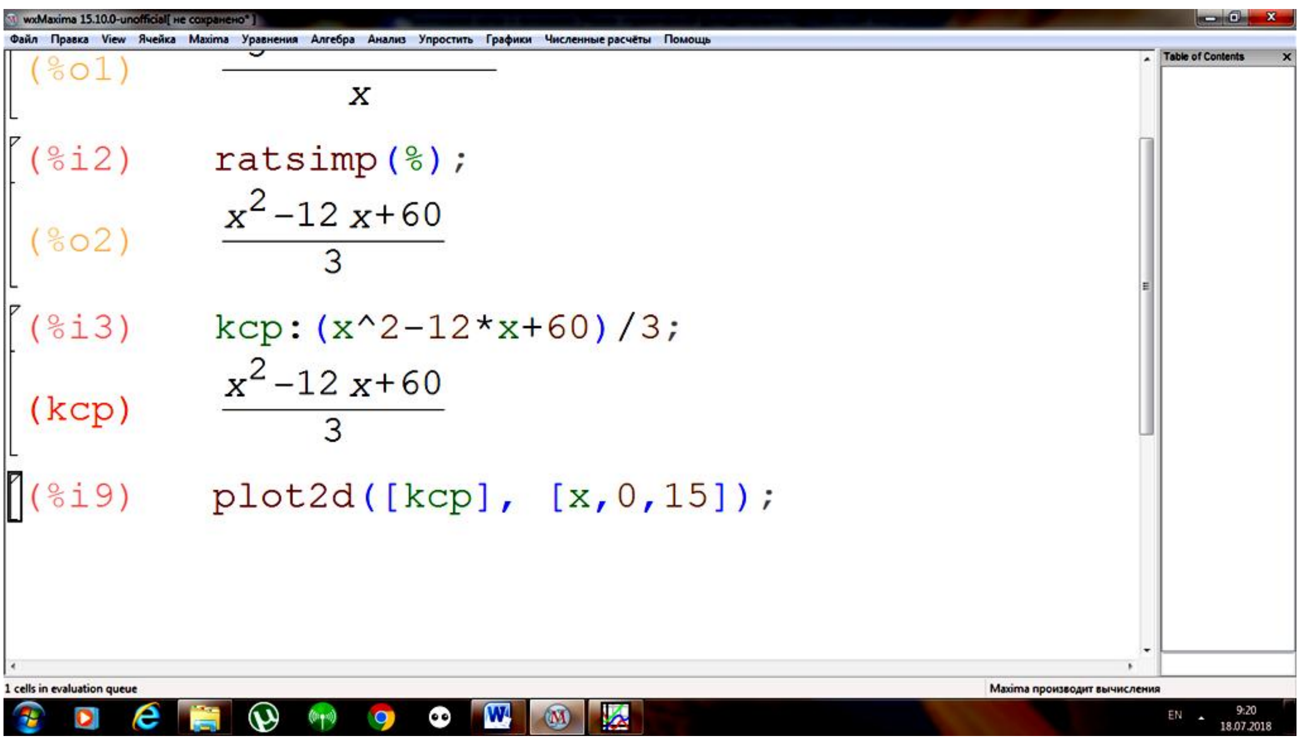

Рис.29

Из графика видно, что существует точка, в которой средние издержки минимальны (рис.30).

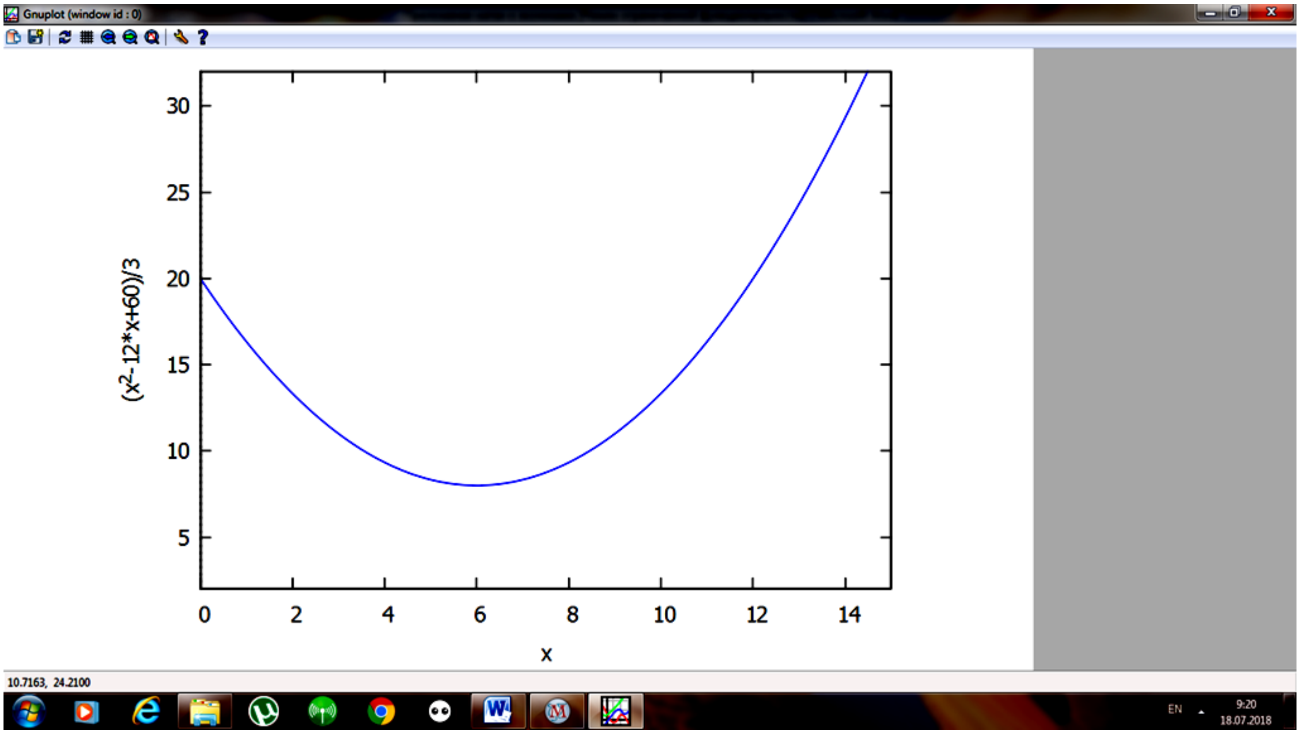

Рис.30

Найдем точку минимума функции средних издержек. Для этого продифференцируем ее (рис.31-32).

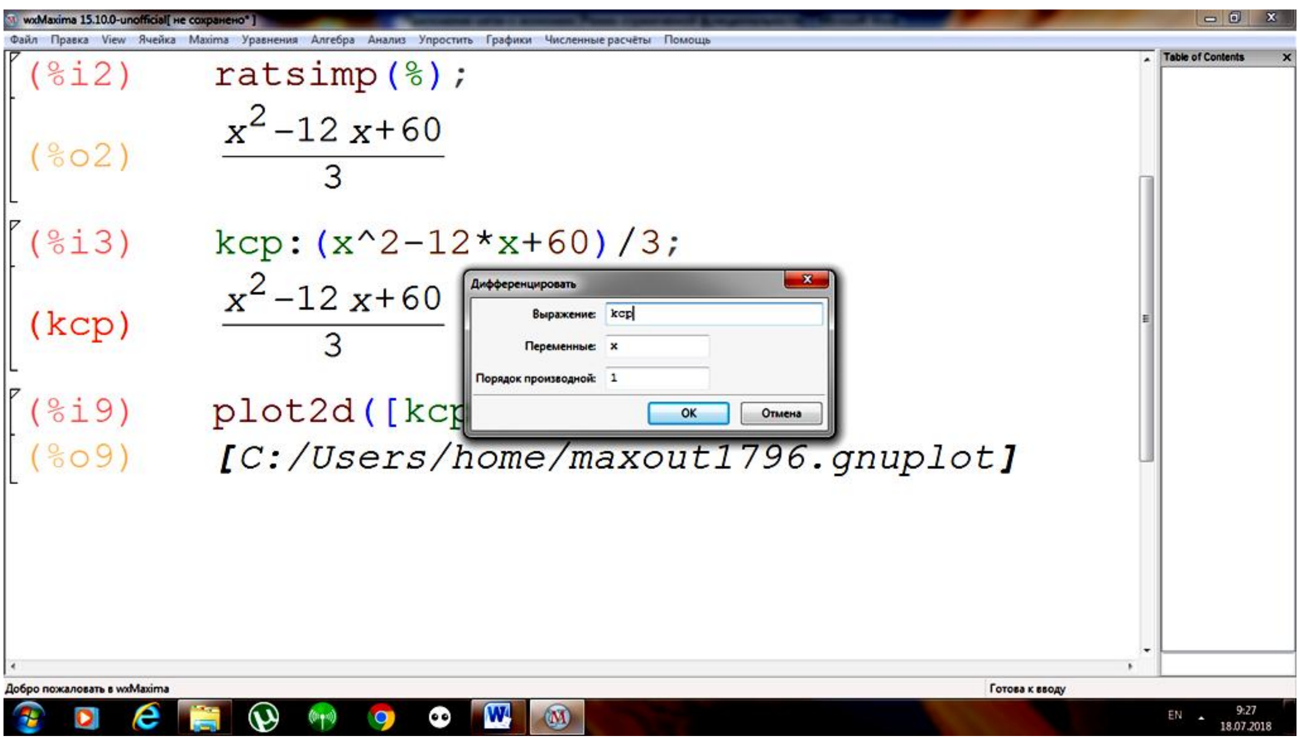

Рис.31

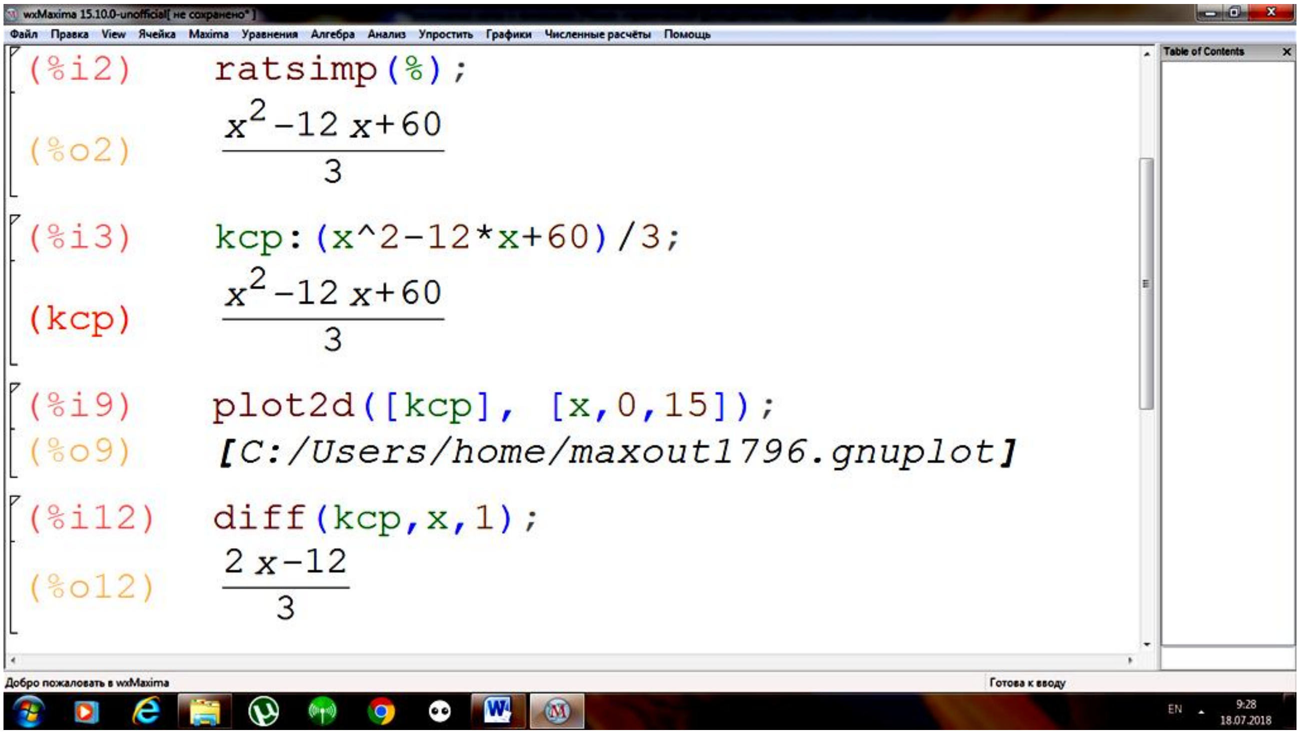

Рис.32

Приравнивая полученное выражение к нулю, находим точку минимума для средних издержек (рис.33).

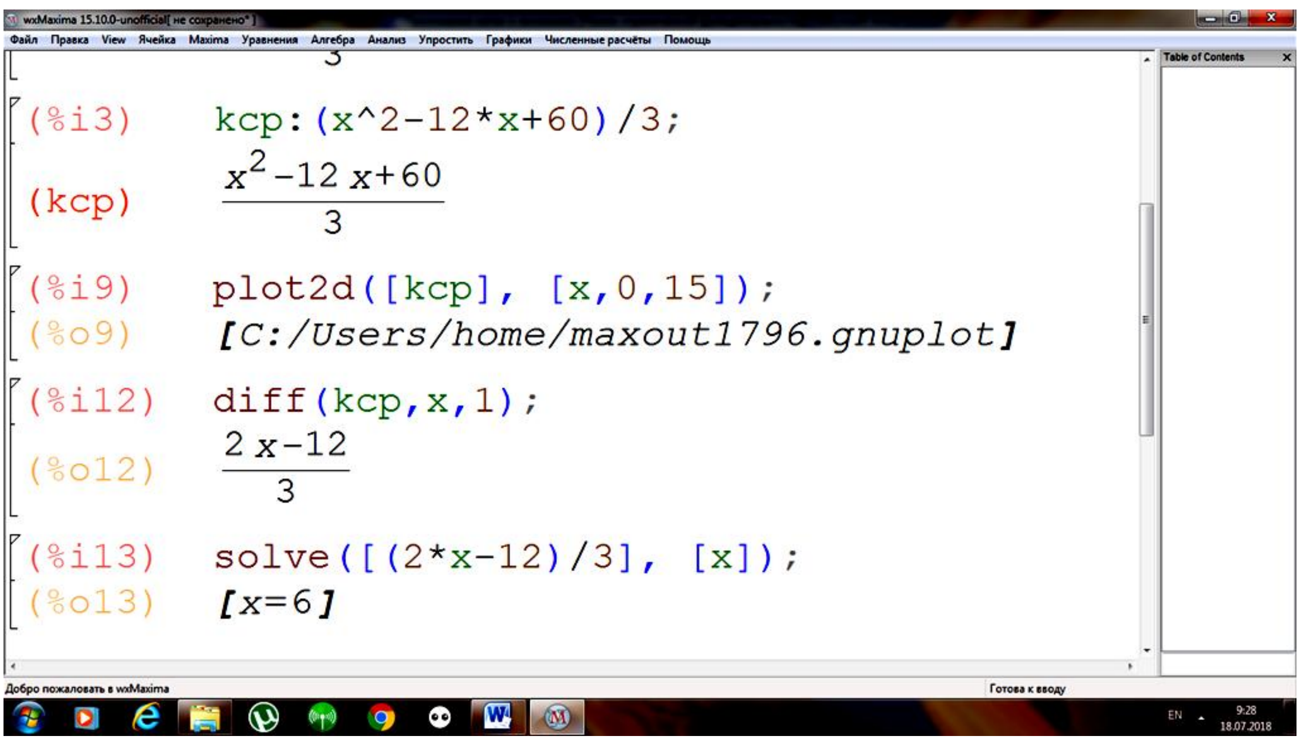

Рис.33

Подставляем найденное значение в функцию средних издержек (рис.34).

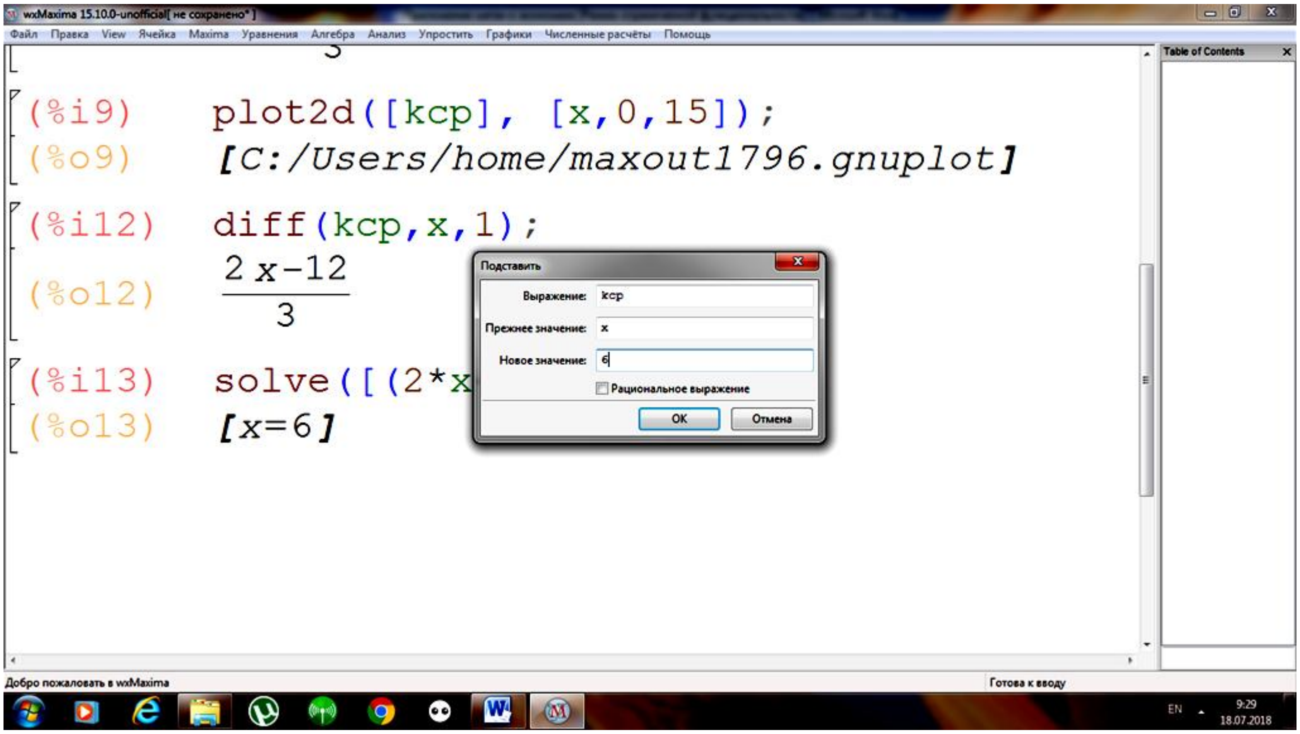

Рис.34

Получаем минимальные средние издержки (рис.35).

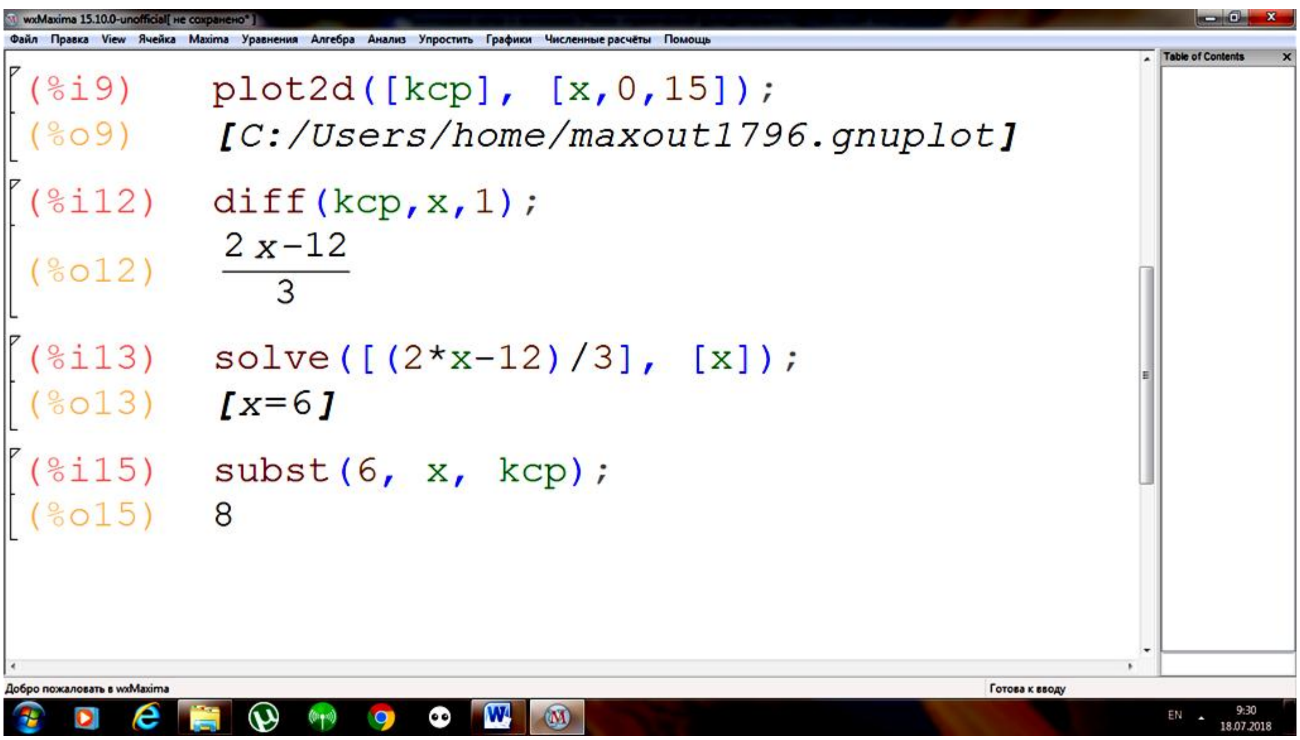

Рис.35

2.2. Условия получения максимальной прибыли

Предположим, что предприятие производит q единиц некоторой продукции и собирается реализовать ее на рынке с максимальной прибылью. Тогда цена спроса q единиц товара определяется функцией $p = p(q)$. Суммарные издержки производства q единиц продукции составляют $TC(q)$, а выручка от реализации произведенного товара по цене p: $TR(q) = q \cdot p(q)$. Тогда прибыль предприятия определяется функцией

$$\Pi(q) = \left(TR(q) - TC(q)\right) = q \cdot p - TC(q).$$

Условие получения прибыли:

$$TR(q) > TC(q).$$

Но нам нужно получить максимальную прибыль, поэтому, используя необходимое условие существования экстремума функции одной переменной, получаем:

$$\Pi'(q) = \left(TR'(q) - TC'(q)\right) = 0,$$

$$\text{или} \quad TR'(q) = TC'(q) \quad (MR(q) = MC(q)).$$

Итак, если предприятие при некотором объеме производства x получает максимальную прибыль, то предельная выручка равна предельным издержкам (или скорость изменения полных издержек должна равняться скорости изменения полной выручки).

Используя второй достаточный признак существования экстремума функции одной переменной, имеем:

$$\Pi''(x) = \left(TR'(q) - TC'(q)\right)' = TR''(q) - TC''(q) < 0,$$

$$\text{или } TR''(q) < TC''(q).$$

Итак, если темп роста суммарной выручки меньше темпа роста суммарных (полных) издержек, то при таком объеме производства q прибыль предприятия будет **максимальной**. Для достижения **максимальной прибыли** предприятие должно производить такое количество продукции q_0, при котором выполнялась бы система:

$$\begin{cases} TR(q_0) > TC(q_0), \\ TR'(q_0) = TC'(q_0), \\ TR''(q_0) < TC''(q_0). \end{cases}$$

Пример. Завод производит x единиц продукции в месяц, суммарные издержки производства которого составляют $K(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 3$. Полная выручка от реализации этой продукции $V(x) = 6x$. При каком объеме производства *x* завод получит максимальную прибыль?

Решение. Экономически обусловленная область определения: $\begin{cases} x \ge 0, \\ K(x) \ge 0, \\ V(x) \ge 0. \end{cases}$

В силу условия $V(x) > K(x)$, получим:

$$6x > \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 3 \Rightarrow -\frac{x^3}{3} + x^2 + x - 3 > 0;$$

$$-x^3+3x^2+3x-9 > 0.$$

Методом подбора найдем один корень x=3, разделим

$$\begin{array}{l|l} -x^3+3x^2+3x-9 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 & -x^2+3 \\ \qquad\qquad \underline{\underline{3x-9}} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Раскладывая левую часть неравенства на линейные множители, получим:

$$(x-3)(-x^2+3) = (x-3)\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right) > 0$$

И решая последнее неравенство, находим с учетом условия $x \ge 0$: $x \in \left(\sqrt{3};3\right)$. Таким образом, при $x \in \left(\sqrt{3};3\right)$ предприятие будет иметь прибыль, определяемую равенством

$$Z(x) = V(x) - K(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + x - 3.$$

Найдем предельную выручку $V'(x) = 6$ и предельные издержки $K'(x) = x^2 - 2x + 5$. Если прибыль максимальная, то $V'(x) = K'(x)$, то есть $6 = x^2 - 2x + 5$, отсюда $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ (второй корень отрицательный). Так как при всех $x \ge 0$ $V'(x) > 0$ *и* $K'(x) > 0$, то при увеличении количества произведенной продукции х как полные издержки, так и полная выручка возрастают. Найдем $V''(x) = 0$ и $K''(x) = 2x - 2$. При $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ $V''(1+\sqrt{2}) = 0$ *и* $K''(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, значит, $V''(1+\sqrt{2}) < K''(1+\sqrt{2})$. Итак, все условия системы (4) выполнены при $x_0 = 1+\sqrt{2}$. Следовательно, при объеме производства $x = 1+\sqrt{2}$ у.е. прибыль предприятия Z(x) максимальна и составляет

$$Z_{\max}(1+\sqrt{2}) = -\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}{3} - \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 5\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) + 3 \approx 0{,}55 \text{ у.е.}$$

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

Сначала графически изобразим экономически обусловленную область. Функцию издержек и функцию выручки изобразим на одной плоскости. Для этого используем вкладку **Графики ->Двумерный график**. В **Выражении** вводим две функции через запятую (рис. 36). Получили график, изображенный на рисунке 37. Из полученного графика видно, что при $x \geq 0$ имеется интервал, при котором $V(x) > K(x)$. Для того чтобы найти этот интервал необходимо найти точки пересечения функций, а именно, решить уравнение $V(x) = K(x)$. Выберем вкладку **Уравнения -> Решить** и введем уравнение (рис.38). Проанализировав полученные результаты (рис.39), получаем, что при $x \in \left(\sqrt{3};3\right)$ $V(x)>K(x)$.

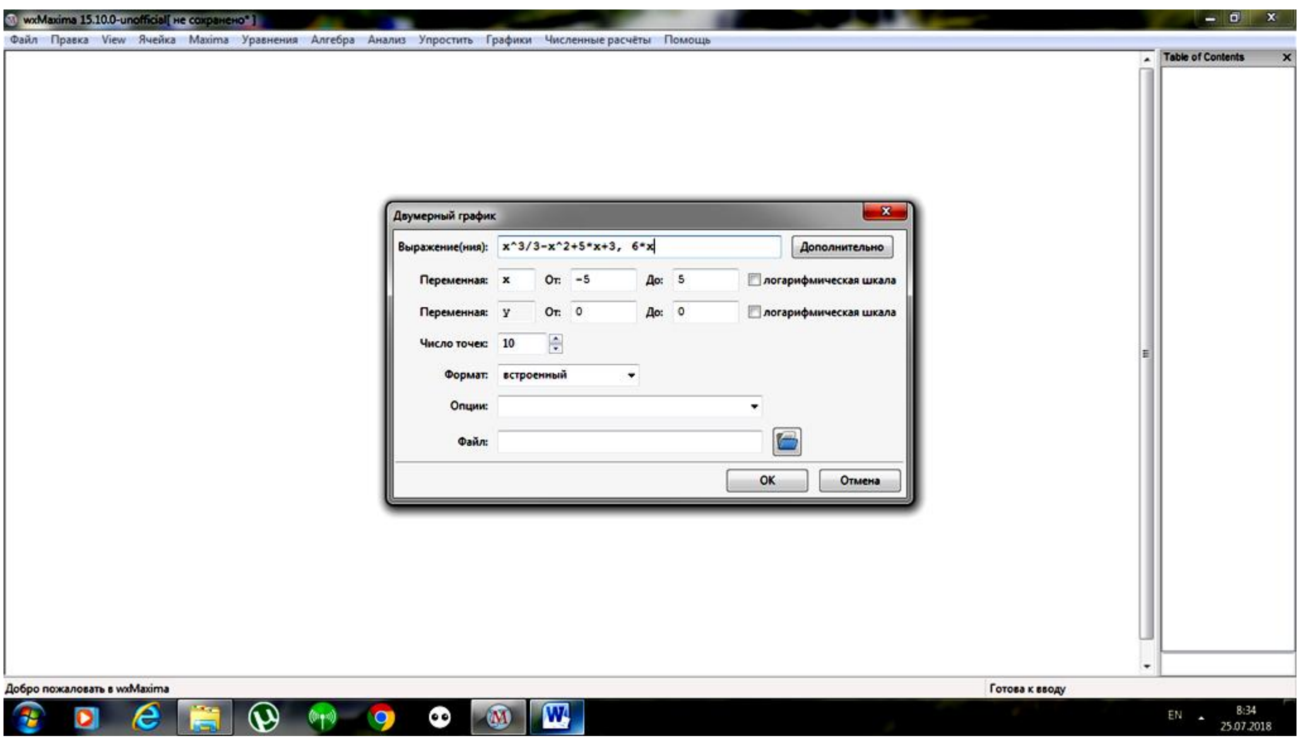

Рис. 36

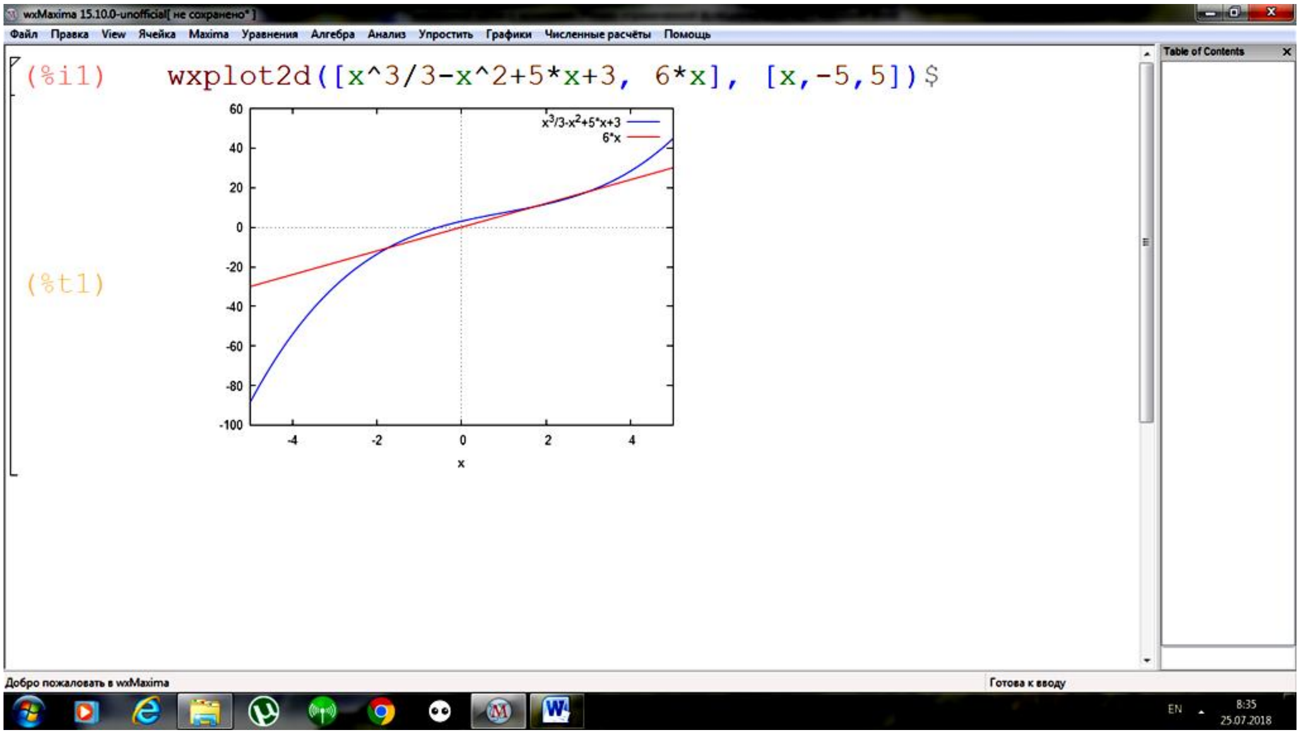
wxMaxima 15.10.0-unofficial[не сохранено*]
Файл Правка View Ячейка Maxima Уравнения Алгебра Анализ Упростить Графики Численные расчёты Помощь
(%i1) wxplot2d([x^3/3-x^2+5*x+3, 6*x], [x,-5,5])$
(%t1)
Table of Contents
Добро пожаловать в wxMaxima
Готова к вводу

Рис. 37

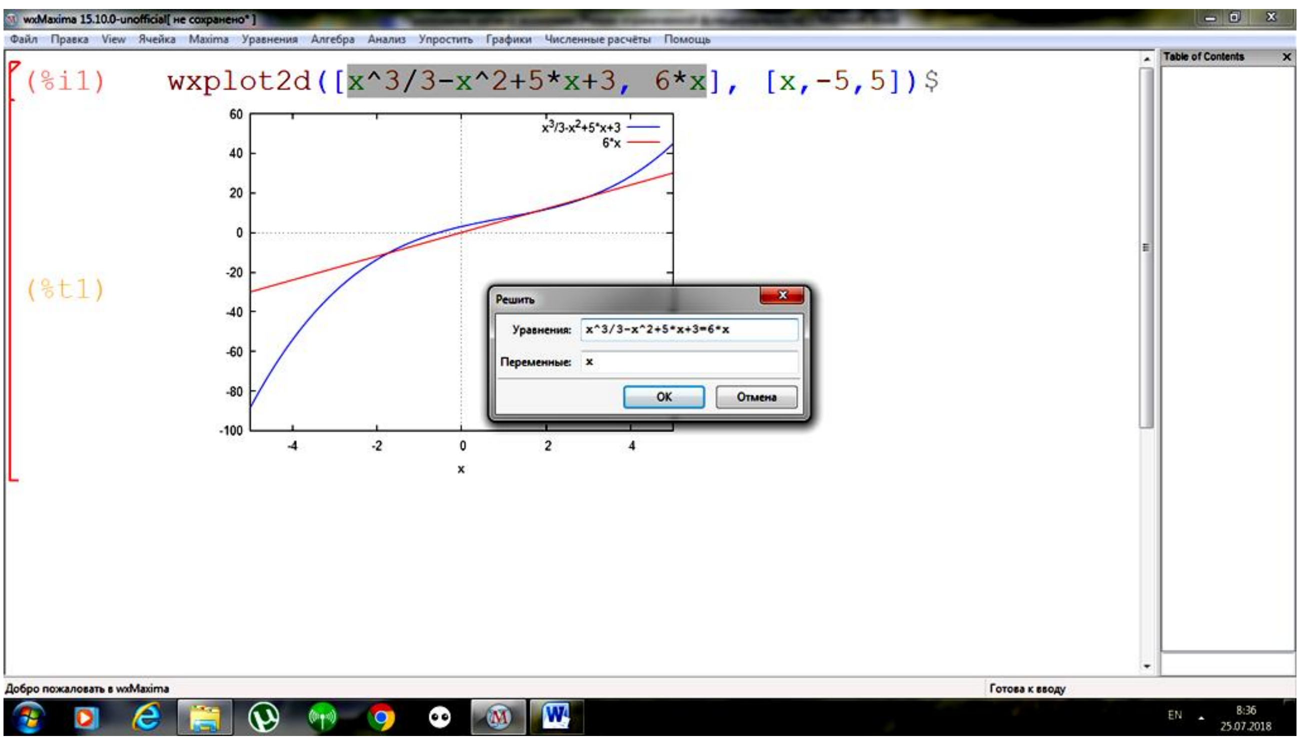
wxMaxima 15.10.0-unofficial[не сохранено*]
Файл Правка View Ячейка Maxima Уравнения Алгебра Анализ Упростить Графики Численные расчёты Помощь
(%i1) wxplot2d([x^3/3-x^2+5*x+3, 6*x], [x,-5,5])$
(%t1)
Решить
Уравнения: x^3/3-x^2+5*x+3=6*x
Переменные: x
OK
Отмена
Table of Contents
Добро пожаловать в wxMaxima
Готова к вводу

Рис. 38

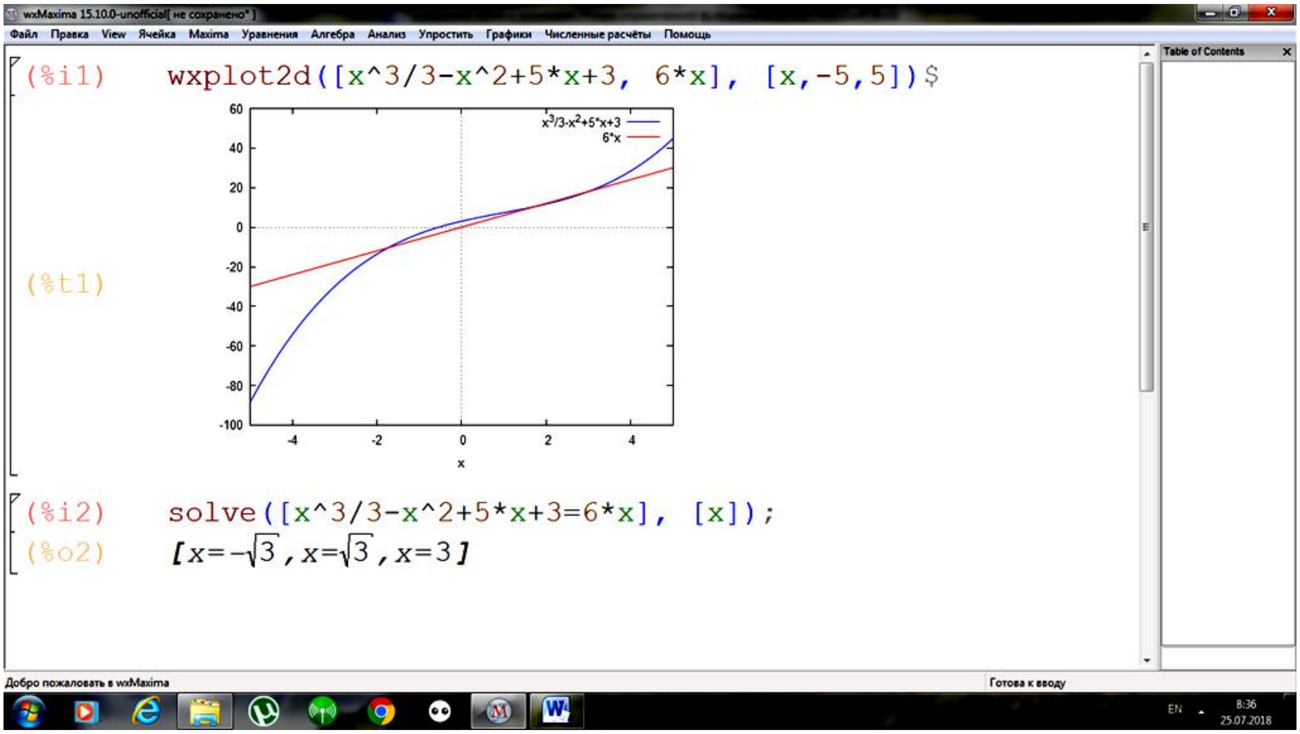

Рис. 39

Введем функцию прибыли (рис. 40).

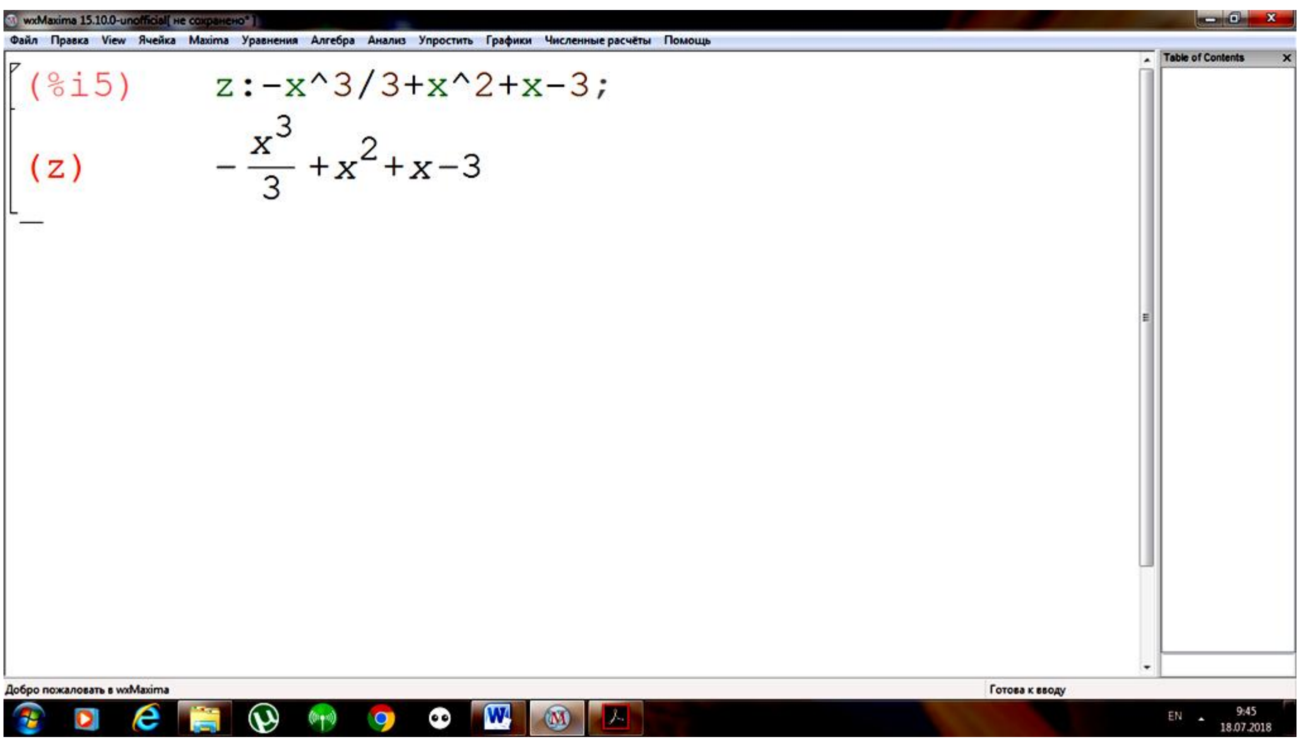

Рис. 40

Построим график этой функции (рис. 41).

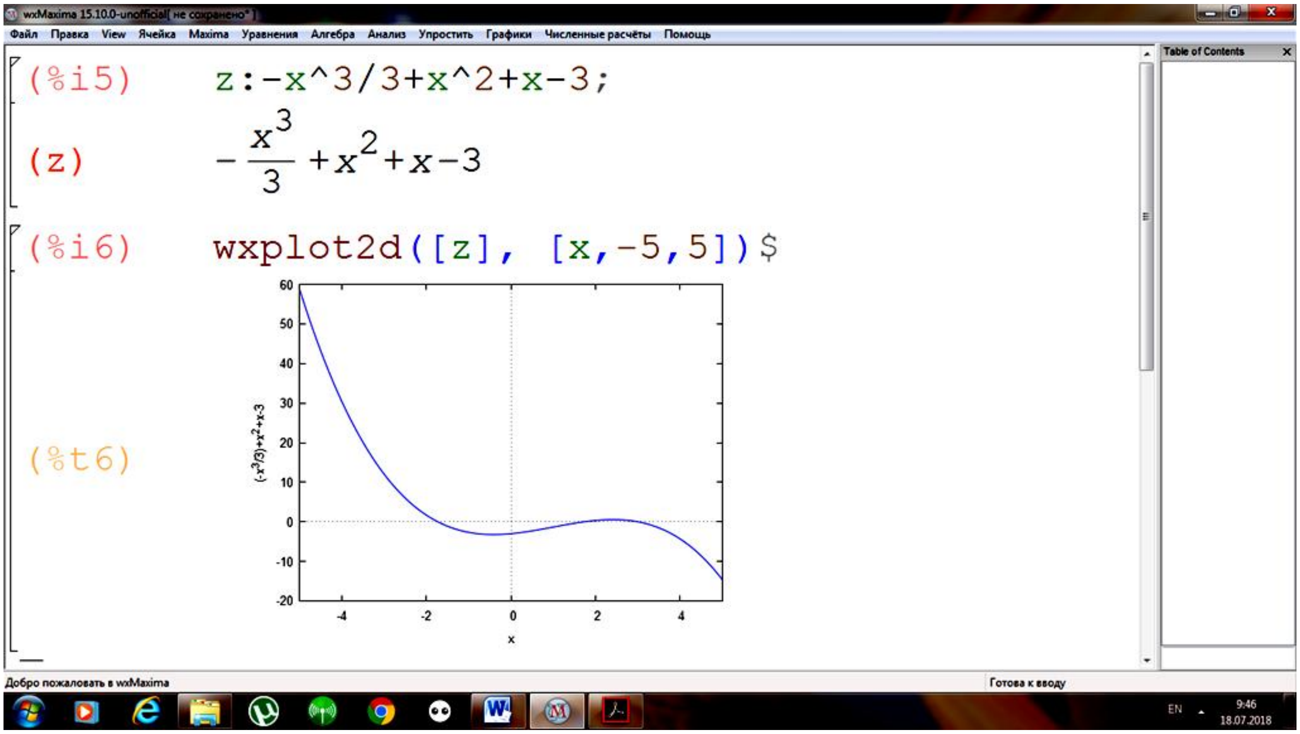

Рис. 41

Данная функция имеет максимум на экономически обусловленной области определения. Найдем его. Для этого продифференцируем функцию прибыли (рис. 42).

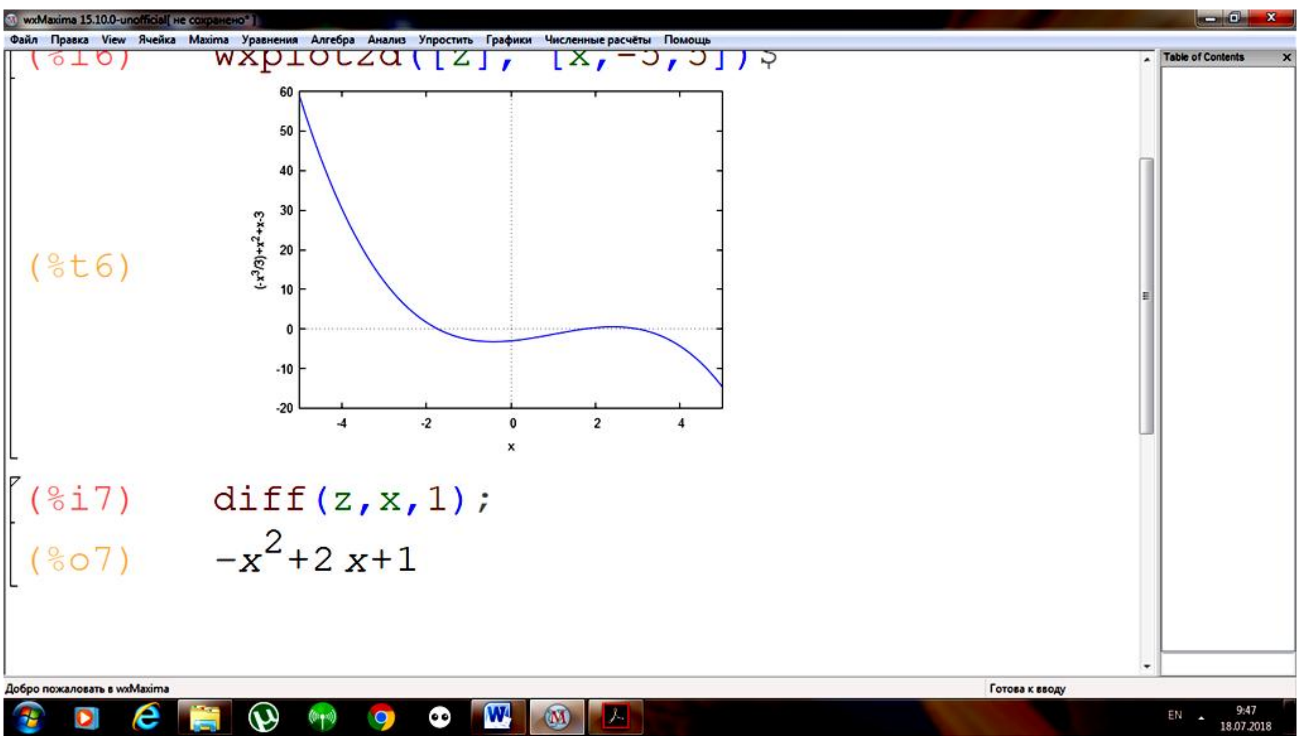

Рис. 42

Найдем корни этого выражения (рис. 43).

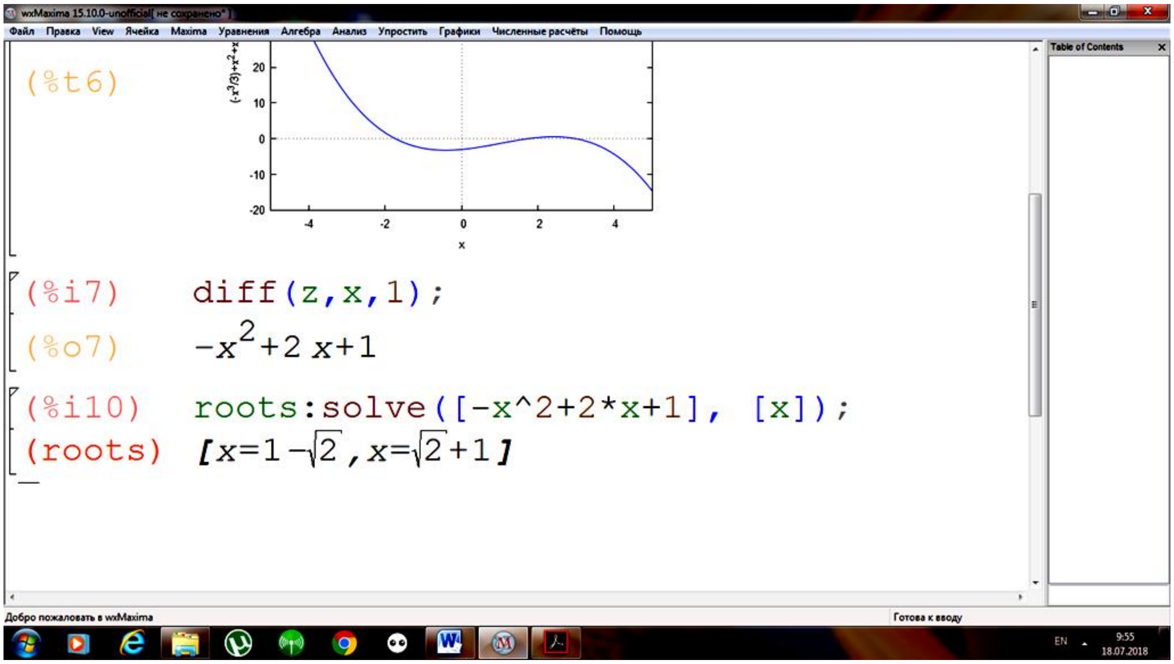

Рис. 43

Эти корни записаны в виде выражения. Если для дальнейших расчетов нам требуется лишь его числовое значение (то есть лишь правая часть выражения, после знака =), то для этого используется команда **rhs().** Кроме того мы должны выбрать только второй корень, т.к. первый не удовлетворяет экономически обусловленной области определения, поэтому мы используем команду **roots[2]** (рис. 44).

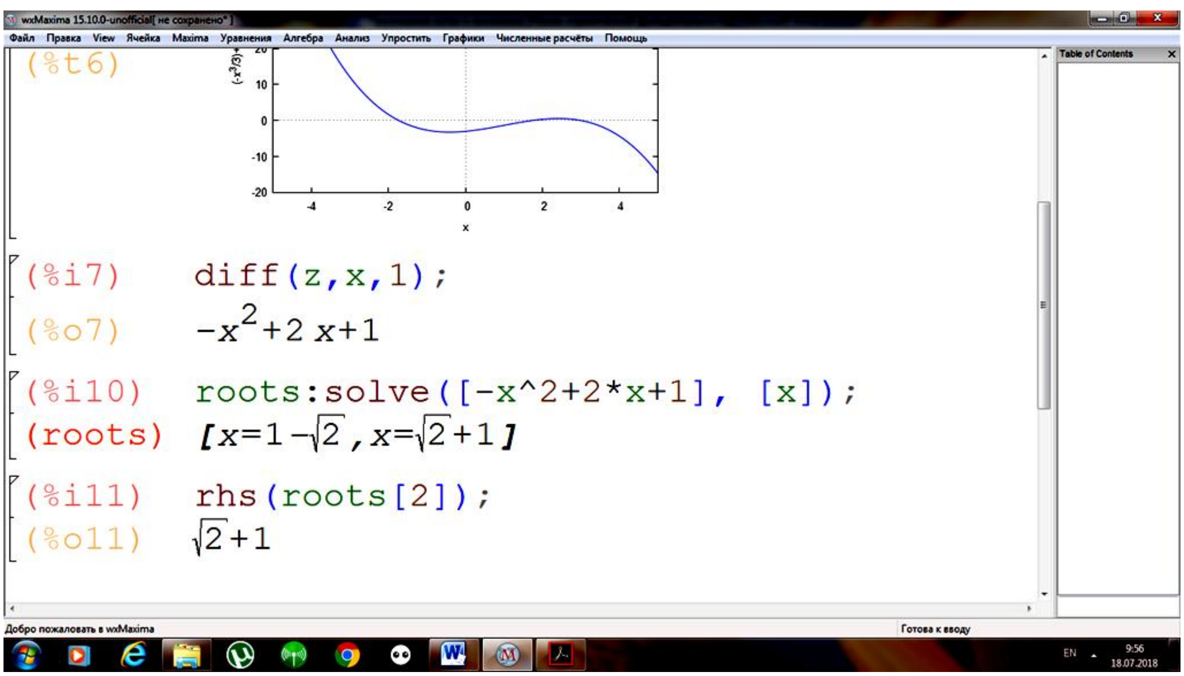

Рис. 44

Подставляем этот корень в функцию прибыли и найдем приближенное значение (рис. 45).

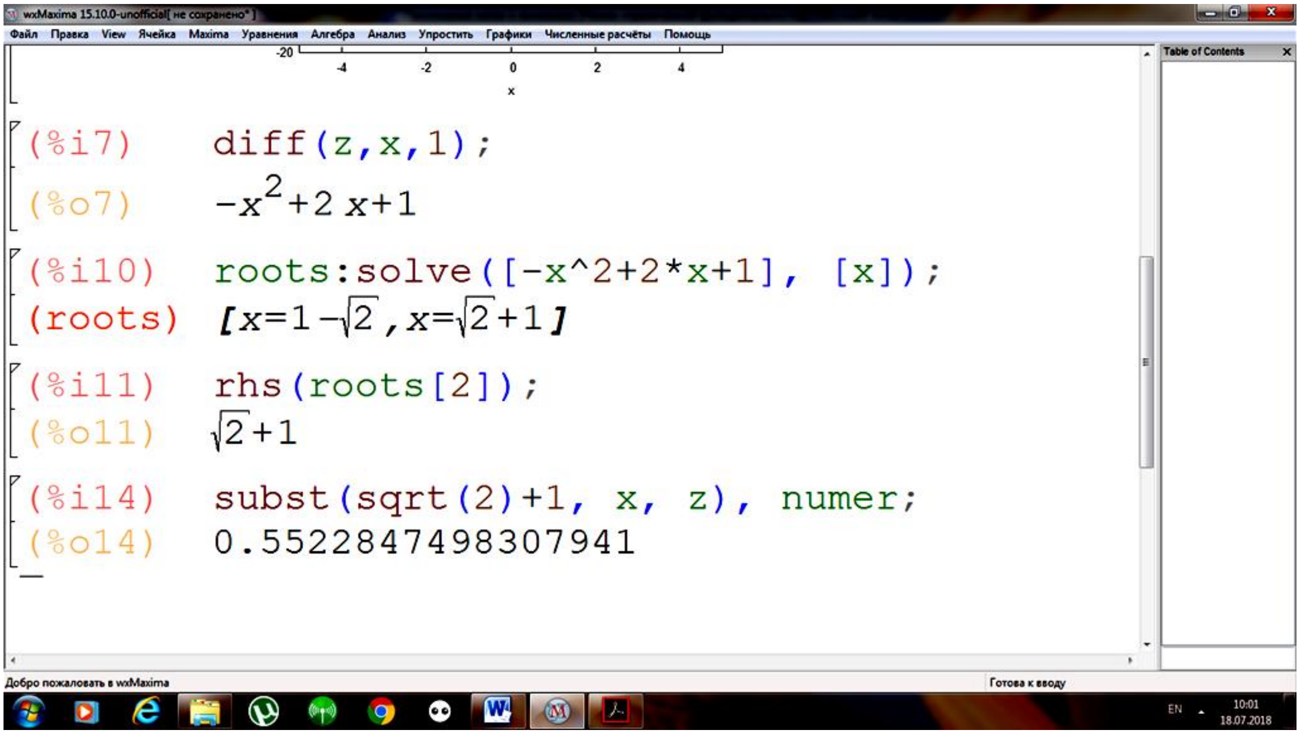

Рис. 45

2.3. Закон убывающей эффективности производства

Этот закон утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства, например, капитальных затрат *K*, прирост производства начиная с некоторого значения *K* является убывающей функцией. Иными словами, объем произведенной продукции *V*, как функция от *K*, описывается графиком со сменой выпуклости вниз на выпуклость вверх.

Пример. Пусть эта функция дается уравнением

$$V(K) = V_{lim}/(1 + e^{-bK+c}), \tag{2.3}$$

где b и c – известные положительные числа (они определяются прежде всего структурой организации производства), а V_{lim} – предельно возможный объем выпускаемой продукции. Нетрудно подсчитать, что вторая производная функции (2.3) имеет вид

$$\frac{d^2V(K)}{dK^2} = V_{lim}b^2e^{-bK+c} \cdot \frac{e^{-bK+c}-1}{(1+e^{-bK+c})^3}.$$

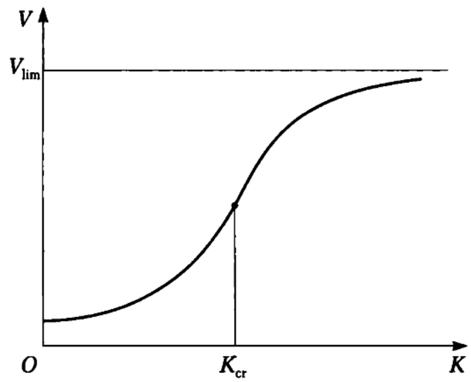

Рис. 46

Критическая точка находится из условия $V''(K) = 0$, откуда

$$K_{cr} = c/b. \qquad (2.4)$$

График функции (2.3) приведен на рисунке 46. В точке перегиба (2.4) выпуклость графика функции вниз меняется на выпуклость вверх. До этой точки увеличение капитальных затрат приводит к интенсивному росту объема продукции: темп прироста объема продукции (аналог первой производной) возрастает, т.е. $V''(K) > 0$. При $K > K_{cr}$ темп прироста объема выпускаемой продукции снижается, т.е. $V''(K) < 0$, и эффективность увеличения капитальных затрат падает.

Таким образом, в стратегии капиталовложений оказывается очень важным моментом определение критического объема затрат, сверх которого дополнительные затраты будут приводить все к меньшей отдаче при данной структуре организации производства. Зная этот прогноз, можно пытаться совершенствовать и менять структуру организации производства: "улучшать" показатели b, c и V_{lirn} в сторону повышения эффективности капиталовложений.

Задания для самостоятельной работы

2.1. Пусть зависимость полных издержек производства от объема производимой продукции выражается формулой

1) $TC = 5000 + 240q - 4{,}5q^2 + 0{,}5q^3$;

2) $TC = 5q^2 + \ln(q^2 + 3q + 5) + 75$;

3) $TC = 30e^{1{,}8q} + 6q + 550$;

4) $TC = 8q + \dfrac{48}{q^2} + 225$.

Найти постоянные, переменные, средние издержки.

2.2. Функция полных издержек производства некоторого товара имеет вид:

1) $TC = 1200 + 80q - 0{,}03q^3, \quad q_1 = 10, \quad q_2 = 11;$

2) $TC = 25 \cdot 2^q - 20q + 45, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3;$

3) $TC = \dfrac{4000}{q+1} + q^2, \quad q_1 = 19, \quad q_2 = 20.$

Написать соответствующие значения *TFC*, *TVC*, *AC*, *AFC*, *AVC*.

2.3. Зависимость переменных издержек от объема произведенной продукции задается функцией:

1) $TVC = 40q + 5q^2 + 7q^3;$

2) $TVC = 15q + \ln(q^2 + 2);$

3) $TVC = 25(q + 44)^{\frac{3}{2}} - 80q.$

Найти средние переменные издержки производства при объеме выпуска продукции q = 20 единиц.

2.4. Пусть зависимость полных издержек производства от объема производимой продукции выражается формулой

1) $TC = 5000 + 240q - 4{,}5q^2 + 0{,}5q^3;$

2) $TC = 5q^2 + \ln(q^2 + 3q + 5) + 75;$

3) $TC = 30e^{1{,}8q} + 6q + 550;$

4) $TC = 8q + \dfrac{48}{q^2} + 225.$

Найти предельные издержки.

2.5. Функция полных издержек производства некоторого товара имеет вид:

1) $TC = 1200 + 80q - 0{,}03q^3, \quad q_1 = 10, \quad q_2 = 11, \quad q_3 = 500, \quad q_4 = 501;$

2) $TC = 25 \cdot 2^q - 20q + 45, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3;$

3) $TC = \dfrac{4000}{q+1} + q^2, \quad q_1 = 19, \quad q_2 = 20.$

Найти средние и предельные издержки для заданного объема производства. Прокомментировать ситуацию.

2.6. Известны функции полных издержек при производстве товара:

1) $TC = 200 + 90q - 0{,}04q^3$;

2) $TC = 4q^2 - \ln(2q+5)$;

3) $TC = \dfrac{700}{q+4} + 3{,}5q^2$.

Найти предельные средние издержки.

2.7. Функция средних затрат имеет вид $AC = 2q^2 + 30q + 850$. Найти предельные затраты при выпуске 3 единиц продукции.

2.8. Средние затраты предприятия при производстве продукции в зависимости от объема выпуска определяются формулой:

1) $AC = 3e^q + 2q$;

2) $AC = \ln(q^2 + 3) + 4q$;

3) $AC = 0{,}6q^2 - 27q + 625$.

Определить скорость изменения средних затрат и предельные затраты производства при объеме выпуска продукции $q = 2$ ед.

2.9. Фирма-монополист может продать 50 единиц товара по цене 25 рублей за единицу товара. Продажа 51 единицы товара вызывает снижение цены до 24 рублей. Найти предельную выручку.

2.10. Спрос на прохладительные напитки в летнее время описывается формулой $D(p) = 3p^3 + 0{,}5p^2 + 4$. Найти предельную выручку.

2.11. Выручка от реализации цветных карандашей задается функцией $R(q) = 450q - q^2$. Вычислить предельную выручку, если реализовано 40 карандашей.

2.12. Известна функция спроса на некоторый товар:

1) $D(p) = 1{,}5p^3 - 3, \quad p_1 = 1, \quad p = 2$;

2) $D(p) = \dfrac{200}{p^2 + 6}, \quad p_1 = 2, \quad p = 3$;

3) $D(p) = \dfrac{p^2}{p+5}, \quad p_1 = 2, \quad p = 3$.

Найти предельную выручку, получаемую при реализации товара по указанной цене.

2.13. Производственная функция, связывающая объем выпуска данного товара с размером основных производственных фондов, имеет вид $f(x)=5x^2$. Определить предельную производительность основных производственных фондов.

2.14. Зависимость полных издержек производства от объема производимого продукта имеет вид:

1) $TC=500+24q+0,5q^2$;

2) $TC=0,2q^{\frac{7}{2}}+0,3q^{\frac{13}{3}}+70$;

3) $TC=0,06\cdot 7^{0,5q^2}+900$.

Найти предельную прибыль, если цена на данный товар равна 64 ден. ед.

2.15. Дана производственная функция, выражающая зависимость объема выпускаемой продукции от затрат некоторого ресурса x:

1) $f(x)=180x-5x^2,\quad x_1=2,\quad x_2=5$;

2) $f(x)=60x+\dfrac{32}{x},\quad x_1=1,\quad x_2=2$;

3) $f(x)=e^{3x}-1,\quad x_1=2,\quad x_2=3$.

Найти предельную производительность для заданных значений ресурса.

2.16. Зависимость между спросом и ценой на некоторую продукцию задается равенствами:

1) $p+2Q=95,\quad Q_1=3,\quad Q_2=10$;

2) $p+Q^{\frac{5}{2}}-200=0,\quad Q_1=1,\quad Q_2=4$;

3) $\ln(Q+2)+4p=15,\quad Q_1=1,\quad Q_2=3$.

Найти функцию предельной выручки, получаемой при реализации данной продукции и вычислить ее значения для указанных объемов спроса. Привести примеры соответствующих товаров.

2.17. Указать предельную производительность труда при производстве шоколадных конфет, если зависимость дневного объема выпуска продукции от численности рабочих имеет вид $f(L)=250\sqrt{L}$.

2.18. Потребление каждого человека зависит от имеющегося дохода. Пусть функция потребления имеет вид $C(y)=400+0,7y$. Определить предельную склонность к потреблению (*MPC*) и предельную склонность к сбережению (*MPS*). (Указание: доход представляется как сумма потребления и сбережения.)

2.19. Зависимость прибыли некоторой фирмы от себестоимости выпускаемой продукции выражается формулой $\Pi(x) = \frac{80x+3}{x^2}$. Найти скорость изменения прибыли.

2.20. Себестоимость производства некоторого товара описывается функцией $y(x) = 0{,}3x^2 - 1{,}5x + 21$ при $10 \le x \le 100$, где x – объем выпускаемой за месяц продукции (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 25 тыс. ед. и 60 тыс. ед. продукции.

2.21. Функция полезности потребления пирожков для студента имеет вид:

$$U(x) = 18x - 0{,}75x^2.$$

Начиная с какого момента полезность потребления пирожков будет уменьшаться?

2.22. Функция совокупного спроса на деньги как имущество задается формулой $L(i) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{i+14}{30}$, где i – величина ставки банковского процента. Исследовать поведение этой функции в зависимости от величины ставки процента и построить ее график.

2.23. Финансовые затраты предприятия в зависимости от произведенной продукции выражаются формулой $f(x) = -0{,}01x^3 + 600x + 1000$. Исследовать функцию затрат и объяснить экономическую ситуацию.

2.24. Функция спроса на товар в модели изолированного однопродуктового конкурентного рынка имеет вид:

1) $D(p) = \frac{7-p}{2}$;

2) $D(p) = \frac{100}{p+8} - 3$;

3) $D(p) = 5p^{-2} + 10$;

4) $D(p) = 20e^{-3p}$.

Исследовать на монотонность.

2.25. Производительность труда рабочих некоторой фирмы определяется функцией $f(t) = 11{,}3te^{-0{,}4t}$. Исследовать функцию производительности труда в течение рабочего дня, $t \in [0;8]$.

2.26. Функция полезности от потребления блага х некоторым потребителем имеет вид $U(x)=18x^2-0{,}75x^4$. Определить оптимальный объем потребления данного блага.

2.27. Найти предельную производительность ресурса, если функция выпуска имеет вид $f(r)=10r-r^2+22$, а затраты ресурсов составляют: а) 3 усл. ед.; б) 7 усл. ед. Укажите, начиная с какого момента увеличение затрат данного ресурса становится экономически невыгодным.

2.28. Зависимость объема выпуска продукции от капитальных затрат определяется формулой $V=\frac{1}{2}\ln(2+x^2)$. Найти интервал значений *x*, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

2.29. В краткосрочном периоде производственная функция фирмы зависит только от численности персонала и имеет вид $f(L)=9L^2-0{,}4L^3$. Определить численность персонала, при которой выпуск продукции достигает максимального значения.

2.30. Функция средних издержек при производстве некоторого товара имеет вид $AC=108-q^3$. Исследовать поведение функции полных издержек в зависимости от объема выпускаемого товара. Построить график функции. Прокомментировать ситуацию.

2.31. Используя свойства эластичности, найти эластичность следующих функций:

1) $f(x)=x^4e^x$;

2) $f(x)=x^2\ln x$;

3) $f(x)=x^5e^{-2x}$;

4) $f(x)=3^x\ln x$.

2.32. Найти эластичность функции $y=x^3\sqrt{100-x^2}$ в точке *x*=6.

2.33. Докажите, что эластичность степенной функции постоянна и равна показателю степени.

2.34. Обратная функция спроса имеет вид $p(x)=600-2x$.Выразите функцию эластичности спроса х по цене. При какой цене на товар ценовая эластичность равна 1 %?

2.35. Эластичность спроса по цене равна 0,6 при цене товара 100 ден. ед. и объеме спроса 10. Кривая спроса линейна. Какой цене соответствует эластичность спроса, равная 1 %?

2.36. Зависимость между объемом спроса и ценой на некоторый товар задается функцией $D(p)=-2p+3$. При каких ценах спрос эластичен, неэластичен, абсолютно эластичен, абсолютно неэластичен, нейтрален?

2.37. Вычислить эластичность следующих функций предложения по цене при заданном значении цены на товар:

1) $S(p) = p^3 - 3p^2 + 30p, \quad p_1 = 3,\ p_2 = 4,\ p_3 = 10$;

2) $S(p) = \dfrac{p^2 + 3}{p + 4}, \quad p_1 = 1,\ p_2 = 3,\ p_3 = 10$.

2.38. Объем спроса на некоторый товар можно задать формулой $D(p) = \dfrac{p}{200 + p^2}$. Используя эластичность, охарактеризовать реакцию производителя и потребителя на изменение цены.

2.39. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями $D = 26 - 3p, \quad S = 10 + 5p$. Найти эластичность спроса и предложения в точке равновесной цены. Как изменится эластичность при уменьшении предложения на рынке на 20%? Как изменится доход (в процентах) при увеличении цены на 8%?

2.40. Дана зависимость спроса *D* от цены *p*: $D = 90 - 3p$. Найти цену, при которой выручка максимальна и саму эту максимальную выручку.

2.41. Зависимость потребления *y*(*x*) от дохода *x* задается функцией $y = \dfrac{ax}{x + 10}$. Показать, что коэффициент эластичности потребления от дохода не зависит от параметра *a* и стремится к нулю при неограниченном возрастании дохода.

2.42. Задана функция $TC = f(q)$ полных затрат предприятия на производство *q* единиц продукции. Как связаны между собой коэффициенты эластичности полных и средних затрат?

2.43. Пусть $A(t)$ – стоимость некоторого актива *A* в момент времени *t*, *r* – доходность от вложения денег в другие активы. Для простоты будем считать, что *r* не зависит от времени. Когда выгодно покупать или продавать актив *A*? Для этого необходимо найти интервал времени, в течение которого мгновенная доходность актива *A* будет больше *r*. Так как мгновенная доходность актива *A* совпадает с логарифмической производной стоимости актива, то искомый интервал времени задается неравенством $(\ln A(t))' > r$. Если данное неравенство задает интервал (t_1, t_2), то актив *A* следует купить в момент t_1 и продать в момент t_2.

Пусть *r* = 20% годовых, $A(t) = 94{,}5e^{-x^3 + 18x^2 - 59{,}8x + 3{,}4}$. В какой момент времени выгоднее купить (продать) актив *A*?

2.44. Функция полезности потребления товара x некоторым индивидом выражается формулой:

1) $U(x) = 4\sqrt{x}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 25;$

2) $U(x) = -2x^2 + 28x + 45, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 8;$

3) $U(x) = \ln(x-4)^2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4;$

4) $U(x) = 100x^{\frac{2}{3}}, \quad x_1 = 27, \quad x_2 = 125.$

Найти предельную полезность товара для указанных объемов потребления. Проверить выполнение первого закона Госсена и прокомментировать ситуацию.

2.45. Общие издержки при производстве цифровых фотоаппаратов описываются формулой $TC = q^4 - 2000q + 12000$. Найти оптимальный для производителя объем выпускаемой продукции и соответствующую прибыль, если на рынке цена одного фотоаппарата равна 30 000 рублей.

2.46. Функция издержек имеет вид $TC = 10 + \dfrac{x^2}{10}$. На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки AC. В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 4 ден. ед. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск?

2.47. В целях улучшения качества товара стратегия фирмы в краткосрочном периоде описывается формулами $p(q) = 0{,}5q^2 - 12, \quad TC = 15q^2 - 300q + 16$. Исследовать поведение функции прибыли. Дать экономическое объяснение.

2.48. Функция издержек при изготовлении продукции имеет вид $TC = \dfrac{1}{3}q^3 + 1{,}5q^2 + 100$. Производственные мощности позволяют производить не более 10 000 единиц продукции. Каков оптимальный объем выпуска фирмы, если рыночная цена установилась на уровне 20 ден. ед.? В результате неполадок возможность выпуска снизилась до 4 000 единиц. Каков объем выпускаемой продукции фирмой в этом случае?

2.49. Зависимость дохода и издержек от объема производства продукции задается функциями следующего вида: $R(q) = q^2 + 20q, \quad TC = q^3 - 35q^2 + 260q$. Производственные мощности позволяют производить до 25 единиц продукции. При каком объеме производства прибыль будет максимальна? Как изменится оптимальный объем производства, если максимальная загрузка производственных мощностей составит 18 единиц продукции?

2.50. Средние совокупные издержки производства изменяются в зависимости от объема годового выпуска (в тоннах) по следующему закону $AC = \dfrac{4q+700}{q+120}$. Связь между годовым объемом продаж и ценой продукта (в тыс. руб. за тонну) описывается формулой $Q(p) = \dfrac{2400-120p}{p+2}$. Реализовав по фиксированной цене всю произведенную за год продукцию, фирма получила максимально возможную прибыль. Какова была при этом выручка фирмы?

2.51. Доход от реализации x единиц товара некоторой фирмы выражается следующей формулой $R(x) = 176 + 44x - x^2$. В свою очередь затраты на производство товара определяются формулой $TC = x^2 + 4$. Определить прибыль и оптимальный уровень выпуска товара данной фирмы. Государство устанавливает налог на каждую единицу реализованного товара. Определить оптимальный уровень налоговой ставки и прибыль, получаемую фирмой в этих условиях. Проанализировать ситуацию.

2.52. Функция издержек имеет вид:

$$TC = \begin{cases} 3q, & q \le 50, \\ 150 + \alpha^2 (q-50)^3, & q > 50. \end{cases}$$

В настоящий момент уровень выпуска продукции q=100. При каком условии на параметр α фирме выгодно уменьшить выпуск продукции, если доход от реализации единицы продукции равен 75?

2.53. Доход от производства продукции с использованием x единиц ресурсов составляет величину $R(x) = 50\sqrt{x} + 35$. Стоимость единицы ресурсов – 5 ден. ед. Какое количество ресурсов следует приобрести, чтобы прибыль была наибольшей?

2.54. Найти функцию предложений конкурентной фирмы $S(p)$, если ее функция издержек имеет вид $C(q) = q^2 + 8q + 9$. Проанализировать положение фирмы при цене $p = 12$.

3. ИНТЕГРАЛЫ

Краткие теоретические сведения

Определение. Пусть на интервале ($a;$ b) задана функция $f(x)$. Если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$, где $x \in (a;b)$, то функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$ на интервале ($a;$ b).

Геометрический смысл – неопределенный интеграл есть семейство интегральных кривых, получаемых при непрерывном параллельном переносе одной из них вдоль оси Oy.

Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную величину C.

Определение. Совокупность первообразных $F(x) + C$ (где C – произвольная постоянная) функции $f(x)$, $x \in (a;b)$, называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \cdot$$

Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением.*** Нахождение неопределенного интеграла называется ***интегрированием*** функции. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** в интервале, если в этом интервале для нее существует $\int f(x)dx$.

Основные правила интегрирования

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)dx = d\left(F(x) + C\right) = f(x)dx$;

3) $\int dz(x) = z(x) + C$;

4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ (a = const)$;

5) $\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$

Таблица формул интегрирования

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = -arcctg(x) + C.$

3. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C.$

4. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x) + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -ctg(x) + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + C.$

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

12. $\int e^x dx = e^x + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Теорема (об инвариантности формул интегрирования)

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, то есть, если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ и $u = \varphi(x)$ - любая дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Методы интегрирования

1) Метод разложения. Основан на 4 и 5 свойствах неопределенного интеграла.

Пример. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1\right)dx = 4\int x^3dx - 2\int x^{\frac{2}{3}}dx + 2\int x^{-3}dx + \int dx =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{(-2)} + x + C = x^4 - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C.$$

Произвольную постоянную следует прибавлять сразу, как только найден последний из интегралов.

2) Подведение под знак дифференциала. Этот метод основан на свойствах дифференциала и инвариантности формул интегрирования. Приведем примеры подведения функции под знак дифференциала. Так, например, для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем

$$1)\ dx = d(x+C) = \frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}d(ax+b);$$

$$2)\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Пример. Найти $\int \frac{x - arctgx}{1+x^2}dx$.

$$\int \frac{x - arctgx}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \int arctgx\, d(arctgx) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}arctg^2 x + C.$$

3) Интегрирование заменой переменной (подстановка). Если функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Затем найти интеграл из правой части формулы (если это возможно) и вернуться к исходной переменной x. Такой способ нахождения интеграла называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки***.

Отметим, что при замене $x = \varphi(t)$ должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями D_t и D_x определения функций $\varphi(t)$ и $f(x)$, такое, чтобы функция $\varphi(t)$ принимала все значения $x \in D_x$ (оно обозначается $D_t \leftrightarrow D_x$).

Пример. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$.

Введем новую переменную t по формуле

$$t = \sqrt{x-1}; x = t^2+1; dt = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow$$
$$2tdt = dx; D_t : 0 \le t < \infty, D_x : 1 \le x < \infty, D_t \leftrightarrow D_x$$

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2+1)t \cdot 2tdt = 2\int (t^4+t^2)dt = 2\int t^4dt + 2\int t^2dt =$$
$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

4) Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы

$$\int u dv = uv - \int v du \quad , \tag{3.1}$$

где $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Формула (3.1) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Пример. Найти $\int x \cdot arctg(x) dx.$

$$\int x \cdot arctg(x) dx = \left| \begin{matrix} u = arctg(x), du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg(x) - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} arctg(x) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arctg(x) + C.$$

Предположим, что функция $f(x)$ – произвольная, ограниченная на отрезке $[a;\, b]$ (то есть положительная или отрицательная, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва 1-го рода).

1. Разобьем отрезок $[a;\, b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$.

2. Длины отрезков, на которые разбивается отрезок $[a;b]$, обозначим через $\Delta x_k : \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

3. На каждом из полученных отрезков Δx_k возьмем произвольную точку t_k, $x_k \le t_k \le x_{k+1}$ и подсчитаем значение функции $f(t_k)$ в этих точках.

4. Составим сумму произведений значений функции $f(t_k)$ на длины соответствующих частичных отрезков Δx_k. Обозначим ее через

$$S_n = f(t_0)\Delta x_0 + f(t_1)\Delta x_1 + \dots + f(t_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k .$$

Определение. Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k$ называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

5. Рассмотрим множество интегральных сумм S_n для данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$. Обозначим длину наибольшего из отрезков разбиения $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ через $\lambda = max \Delta x_k$ и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$.

Определение. Если существует такое число J, что при любых способах разбиения и при любом выборе точек t_k величина S_n стремится к числу J при $\lambda \to 0$, то это число называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается:

$$J=\int_a^b f(x)dx.$$

где a – нижняя граница (нижний предел) интегрирования; b – верхняя граница (верхний предел) интегрирования. Итак,

$$J=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k.$$

Таким образом, определенный интеграл есть предел интегральных сумм и его значение зависит от отрезка интегрирования и подынтегральной функции.

Геометрическое истолкование определенного интеграла: определенный интеграл представляет собой **площадь криволинейной трапеции**, то есть

$$S_{aABb}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

Функция интегрируема, если:

1) она непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ или

2) ограничена на отрезке $[a;\, b]$ и имеет конечное число точек разрыва 1-го рода.

Формула Ньютона – Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Эта формула устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралами**.** Формула Ньютона – Лейбница является основной формулой интегрального исчисления и читается так: определенный интеграл некоторой функции на отрезке $[a;\, b]$ равен разности значений любой первообразной этой функции при $x = b$ и при $x = a$. Порядок вычисления определенного интеграла принято записывать так:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

где символ $F(x)\Big|_a^b$ читается: двойная подстановка от a до b в функции $F(x)$.

Пример. $\int_1^2 3(x-1)^2\,dx=(x-1)^3\Big|_1^2=(2-1)^3-(1-1)^3=1.$

Методы вычисления определенного интеграла.

1. Интегрирование по частям. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции независимой переменной x, непрерывные на отрезке $[a;\, b]$ вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$.

Тогда

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример.

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x\,dx, v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. Замена переменной в определенном интеграле.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $x' = \varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b$, и при изменении t на отрезке $[\alpha;\beta]$ значения $x = \varphi(t)$ не выходят за пределы промежутка $[a;\, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Замечание. При замене переменной в определенном интеграле к старой переменной возвращаться не надо, так как пределы интегрирования изменены при подстановке и относятся к новой переменной t.

Пример. Вычислить $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Сделаем замену переменной по формуле $\sqrt{1+x} = t$. Тогда $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$. При $x = 3$ получим $t = 2 = \alpha$ $(t > 0)$, а при $x = 8$ $t = 3 = \beta$ $(t > 0)$. Следовательно,

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2t\,dt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$

Применение в экономике

Вообще говоря, в экономических задачах переменные меняются дискретно. Для использования определенного интеграла нужно составить некоторую идеализированную модель, предполагающую непрерывное изменение зависимых переменных (функций) и независимых переменных (аргумента).

I. Пусть функция $z = f(t)$ описывает ***изменение производительности*** некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции *u*, произведенной за промежуток времени [0; *T*]. Тогда объем *u* выпускаемой продукции за промежуток времени [0; *T*]:

$$u = \int_0^T f(t)dt.$$

II. Если считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то производственная функция Кобба – Дугласа принимает вид: $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за *T* лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt. \qquad (3.2)$$

Пример. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $g(t) = (1+t)e^{3t}$.

Решение. По формуле (4.2) объем произведенной продукции равен

$$Q = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u=t+1$, $dv=e^{3t}dt$. Тогда $du=dt$, $v = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t}$.

Следовательно,

$$Q = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5.$$

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

Выберем вкладку **Анализ->Интегрировать**. В **Выражение** запишем подынтегральную функцию, отмечаем «галочкой» **Определенное интегрирование** и заполняем пределы интегрирования **От** 0 **До** 4 (рис. 47).

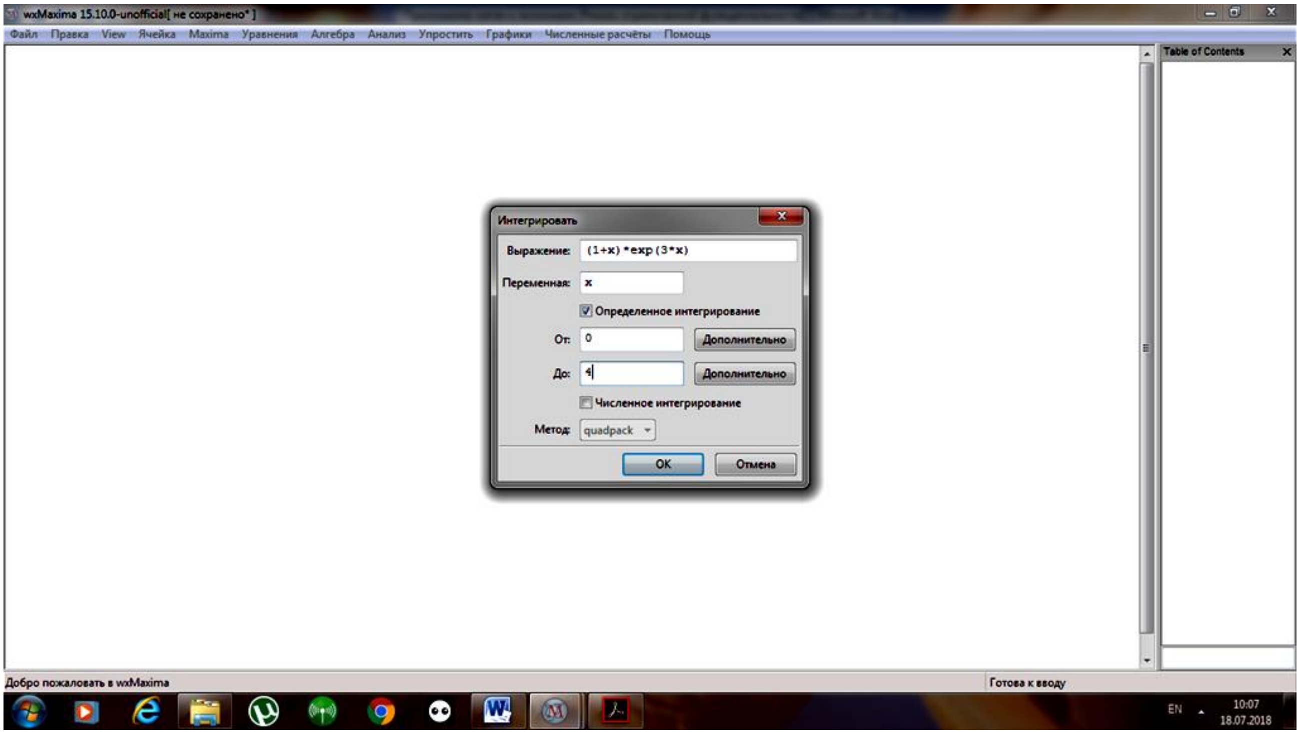

Рис.47

Результат интегрирования представлен на рисунке 48.

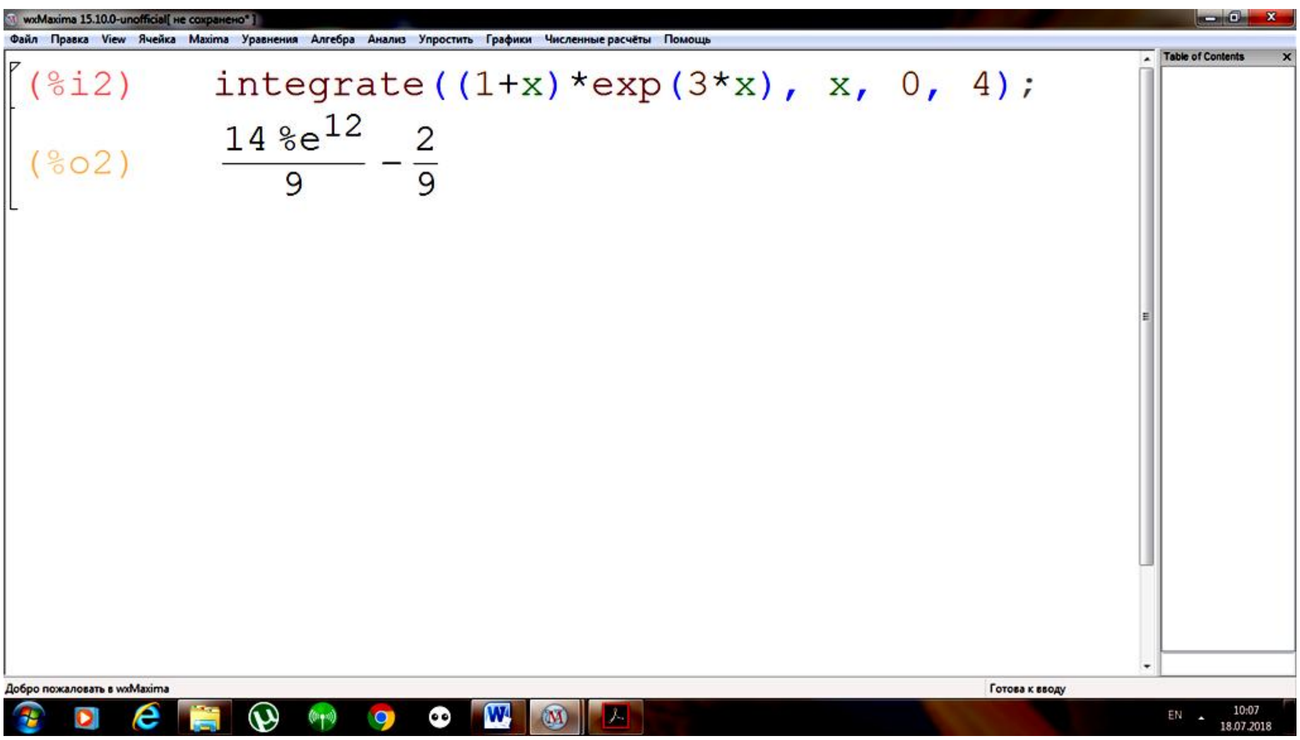

Рис. 48

Найдем приближенное значение объема произведенной продукции (рис. 49).

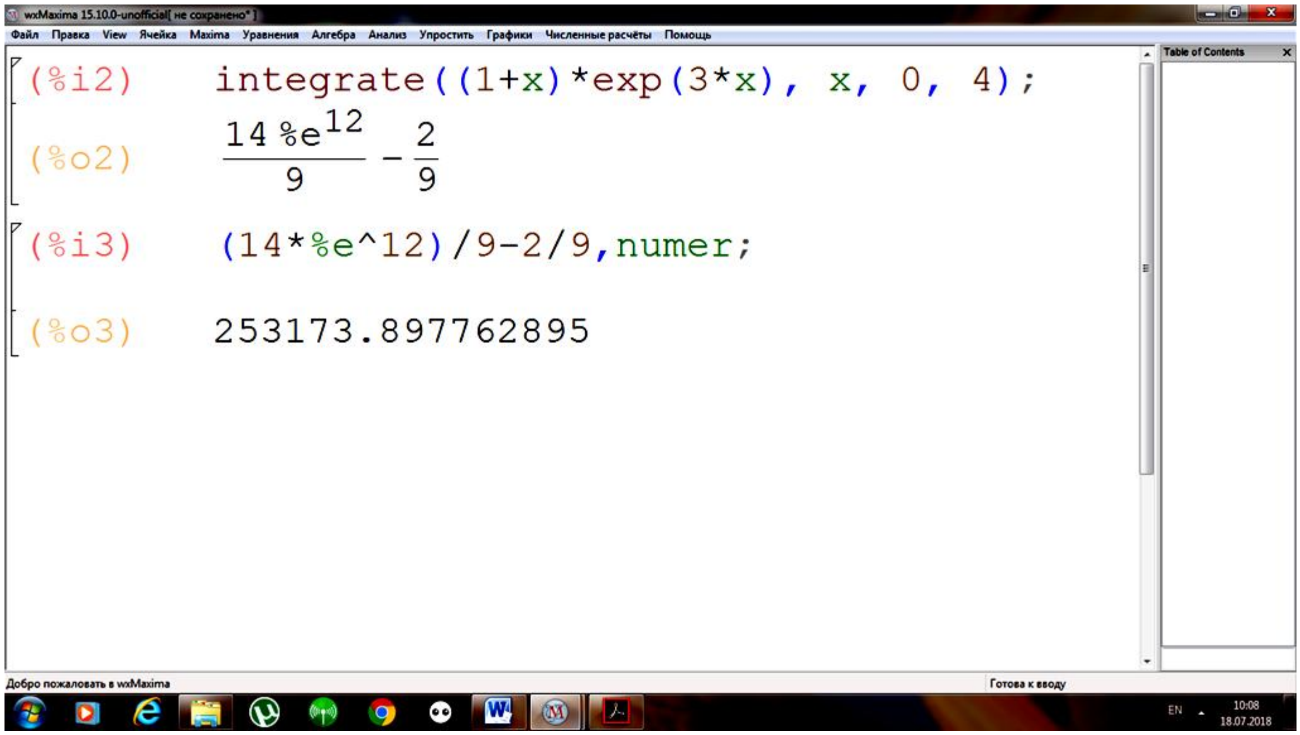

Рис. 49

III. Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется ***дисконтированием***. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t – конечная сумма, полученная за t лет, и K – дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$, где $i = p/100$ – удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1+it)$. В случае сложных процентов: $K_t = K(1+i)^t$ и поэтому $K = K_t/(1+i)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt\,. \qquad (3.3)$$

Пример. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн. руб.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10+1\cdot t = 10+t$. Тогда по формуле (3.3) дисконтированная сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0{,}08t}dt.$$

Интегрируя, получим K=30,5 млн. руб.

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

Используем команду **integrate()**. Так как нужно приближенное значение, то после запятой дописываем команду **numer** (рис. 50).

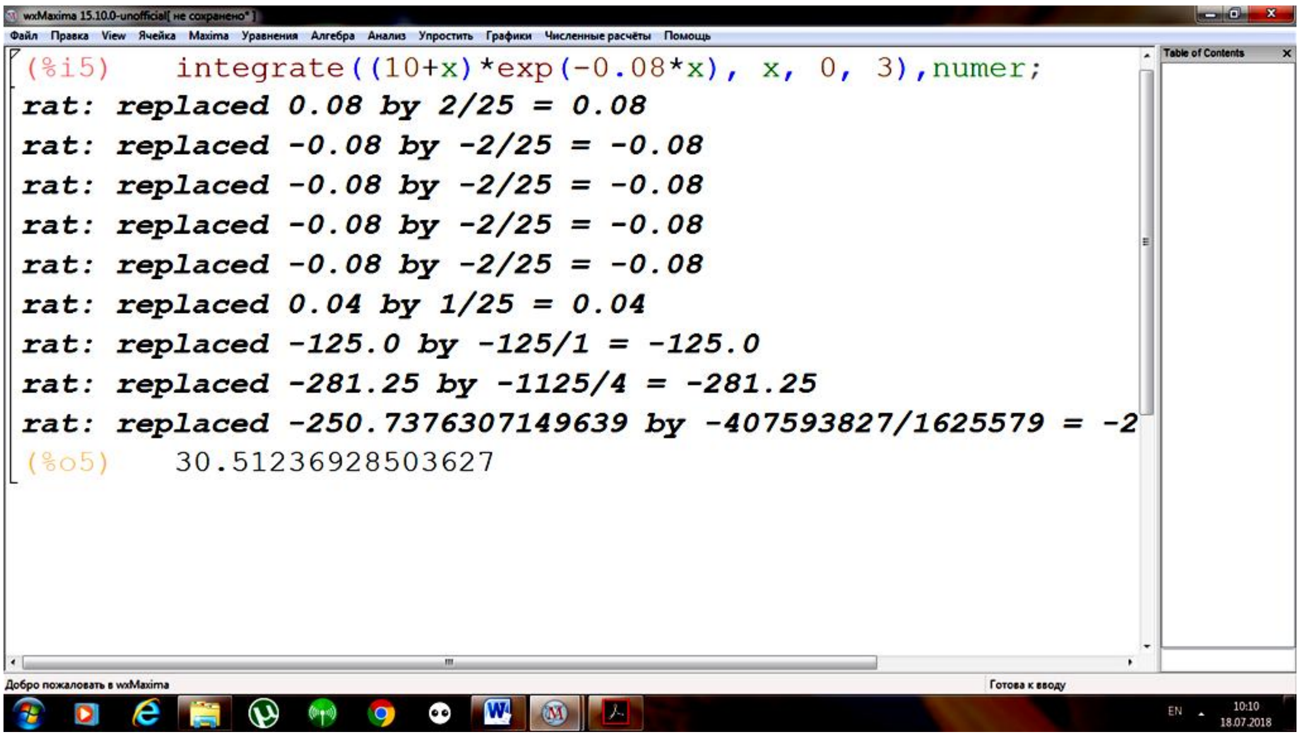

Рис. 50

IV. Дневная выработка

Пример. Найти дневную выработку P за рабочий день продолжительностью восемь часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле

$$p = f(t) = p_0(-0{,}2t^2/t_0^2 + 1{,}6t\,/\,t_0 + 3),$$

где t – время в часах, p_0 – размерность производительности (объем продукции в час), t_0 – размерность времени (ч). Эта формула вполне отражает реальный процесс работы (рис. 51): производительность сначала растет, достигая максимума в середине рабочего дня при t = 4 ч, а затем падает.

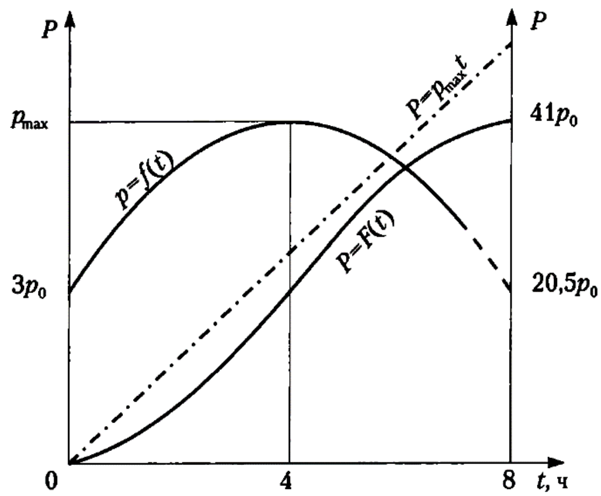

Рис. 51

Решение. Полагая, что производительность меняется в течение дня непрерывно, т.е. p является непрерывной функцией аргумента t на отрезке [0, 8], дневную выработку P можно выразить определенным интегралом:

$$P = p_0 \int_0^8 \left(-\frac{0{,}2t^2}{t_0^2} + \frac{1{,}6t}{t_0} + 3 \right) dt = p_0 \left(-\frac{0{,}2t^3}{3t_0^2} + \frac{1{,}6t^2}{2t_0} + 3t \right) \Big|_0^8 = 41{,}06 p_0 t_0 = 41{,}06 a_{0,}$$

где a_0 - множитель, имеющий размерность единицы продукции. Если бы в течение всего дня работа велась ритмично и с максимальной производительностью p_{max} = 6,2p_0, то дневная выработка составила бы P_{max} = 49,6a_0, или примерно на 21% больше. Рисунок 54 иллюстрирует решение задачи: дневная выработка численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $f(t)$; вторая кривая показывает рост выпуска продукции во времени (график первообразной $F(t)$ соответствует правой оси ординат P). Значение T = 4 ч соответствует точке перегиба кривой $F(t)$: в первой половине рабочего дня интенсивность выработки продукции выше, чем во второй. Штрихпунктирная прямая $P = p_{max} \cdot t$ соответствует выпуску продукции с равномерной производительностью p_{max}.

V. Выпуск оборудования при постоянном темпе роста. Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{\Delta y \cdot 1}{\Delta t \cdot y}$$

где Δy – прирост выпуска этого оборудования за промежуток времени Δt, а y – уровень его производства за единицу времени на момент времени t. Найти общее количество оборудования, произведенного к моменту времени t, полагая, что K – известная постоянная величина, единицей времени является год, а в начальный момент времени $t = 0$ уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0.

Решение. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, полагая, что он существует. Будем также полагать, что y является непрерывной функцией от времени t. Согласно определению производной функции

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y 1}{\Delta t y} = \frac{y'}{y} = (\ln y)'.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до t, получаем

$$\ln y|_{y_0}^{y} = Kt|_0^t = Kt \text{ или } \ln \frac{y}{y_0} = Kt,$$

откуда $y = y_0\, e^{Kt}$.

Суммарное количество оборудования, выпущенного за промежуток времени t, дается определенным интегралом

$$Y(t) = \int_0^t y(t)dt = \int_0^t y_0 e^{Kt} dt = \frac{1}{K} y_0 e^{Kt}\,|_0^t = \frac{1}{K} y_0 (e^{Kt} - 1).$$

Например, при $K = 0{,}05$ (5% ежегодного темпа роста) общее количество оборудования, выпущенного за 10 лет, составит

$$Y(10) = 20y_0(e^{0,5} - 1) \approx 13\, y_0,$$

причем уровень производства за указанный период времени увеличится почти на 65%.

Задания для самостоятельной работы

3.1. Известна скорость изменения объема продаж некоторого товара с течением времени:

1) $Q'(t) = 14t - 4t^3$; 2) $Q'(t) = -240t + 480$.

Определить функцию объема продаж, если в начальный момент времени было реализовано 800 единиц товара.

3.2. Скорость изменения полезности потребления верхней одежды с течением времени описывается формулой $U'(t) = -\dfrac{100}{(t+2)^2}$. Найти функцию полезности, если в момент покупки полезность верхней одежды равнялась 40 единицам.

3.3. Скорость изменения полезности приобретенной компьютерной техники в зависимости от времени задается формулой $U'(t) = -6(x-4)^2$. Какой вид имеет функция полезности, если в момент покупки полезность компьютерной техники оценивалась покупателем в 120 единиц?

3.4. Можно ли определить функцию общих издержек производства некоторого товара, если известна только функция предельных издержек?

3.5. Известно, что постоянные затраты фирмы равны 55 ден. ед., а функция предельных затрат имеет вид:

1) $MC = 6 - 4q + 3q^2$; 2) $MC = 150 - 18q + 0{,}3q^2$; 3) $MC = \dfrac{q}{q+4}$.

Написать функцию общих затрат фирмы.

3.6. Зависимость предельного дохода фирмы от объема реализованной за месяц продукции задается формулой $MR = 100 + q$. Найти общий доход фирмы за месяц.

3.7. Предельная выручка от реализации некоторого товара записывается формулой:

1) $MR = 12p^2 + 4$; 2) $MR = \dfrac{400p}{p^2 + 16}$.

Написать уравнение функции спроса на данный товар.

3.8. Предельная склонность к потреблению описывается формулой $MC(Y) = 0{,}1 + \dfrac{0{,}4}{\sqrt{Y}}$, где Y – величина национального дохода. Определить совокупное потребление, если при национальном доходе 64 ден. ед. потребление составляет 50 ден. ед.

3.9. Предельная производительность труда при производстве школьных тетрадей задается формулой $ML = \dfrac{250}{\sqrt{L}}$. Найти функцию, описывающую объем выпуска школьных тетрадей, если девять рабочих могут выпустить 1 400 тетрадей.

3.10. Известна предельная выручка при реализации некоторого товара $MR = 6q^2$. Найти общую выручку, если известно, что при реализации одной единицы товара она составляет 5 рублей.

3.11. Предельная полезность потребления некоторого товара задается формулой

$$MU = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Известно, что полезность потребления двух единиц товара равна пяти. Написать функцию полезности потребления данного товара.

3.12. Функция предельной полезности потребления минеральной воды имеет вид $MU = \frac{1}{x+6}$. Найти функцию общей полезности потребления минеральной воды, если потребление трех литров воды дает полезность, равную ln 3.

3.13. Скорость изменения спроса на некоторый товар выражается формулой

$$v = 2 + \sqrt{t} + \frac{25}{(t+1)\ln 5}.$$

Найти объем товара реализованного за 4 дня.

3.14. Темп изменения производительности труда прямо пропорционален величине $\sqrt{t}$ с коэффициентом пропорциональности *k*, $k < 0$. Найти закон изменения производительности труда, если при $t = 0$ производительность составляла 2 у.е.

3.15. В соответствии с проведенными исследованиями распределения доходов в одной из стран кривая Лоренца задается уравнением $y = x^2$, где *x* – доля населения, *y* – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

3.16. Изучение распределения общего объема денежных доходов населения некоторой страны показало, что кривая Лоренца задается уравнением $y^3 - x^5 = 0$. Здесь *x* – доля населения, *y* – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

3.17. В тридевятом царстве, в тридесятом государстве кривая Лоренца, описывающая зависимость процента доходов от процентов имеющего их населения, задается уравнением $y^6 - x^7 = 0$. Здесь *x* – доля населения, *y* – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини и прокомментировать ситуацию.

3.18. Пусть $p = f(x)$ – функция спроса на некоторый товар и $p = g(x)$ – кривая предложения, где *p* – цена на товар, *x* – величина спроса. Обозначим (x_0, y_0) точку рыночного равновесия. Доход от реализации количества товара x_0 по равновесной цене p_0 равен произведению x_0p_0. Если предполагать непрерывное снижение цены от максимальной до равновесной p_0 по мере удовлетворения спроса, то доход составит $\int_0^{x_0} f(x)dx$.

Величина денежных средств $C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0x_0$ сберегается потребителем, если предполагать продажу товара по равновесной цене p_0, поэтому *C* называется выигрышем потребителя. Аналогично величина $P = p_0 x_0 - \int\limits_0^{x_0} g(x)dx$ называется выигрышем поставщиков.

Найти выигрыш потребителей и поставщиков в предположении рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид:

1) $p = 186 - x^2$, $p = 20 + \frac{11}{6}x$;

2) $p = 250 - x^2$, $p = 20 + \frac{1}{3}x$;

3) $p = 240 - x^2$, $p = x^2 + 2x + 20$.

3.19. Функция изменения затрат времени на изготовление автомобилей имеет вид

$$t(x) = 500x^{-\frac{1}{3}}.$$

Найти среднее время, затраченное на освоение одного автомобиля в период освоения от 27 до 125 машин.

3.20. Объем выпуска кондитерских изделий с течением времени изменяется по формуле $S(t) = 15t^4 - 9t^2 + 10$. Найти средний выпуск кондитерских изделий, соответствующий периоду с третьего по пятый год работы.

3.21. Найти объем продукции, произведенной за 4 дня, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $f(t) = (2t+3)e^t$.

3.22. Объем продукции, выпускаемой фирмой в зависимости от времени, описывается формулой $Q = (1+t)e^{2t}$. Найти объем продукции, произведенной фирмой за 6 лет.

3.23. Под строительство больничного комплекса задан непрерывный денежный поток со скоростью $I(t) = -t^2 + 10t + 4$ (млрд. руб/год) в течение 8 лет с годовой процентной ставкой p = 7,5%. Найти дисконтированную стоимость этого потока.

3.24. Производительность труда в течение дня изменяется по эмпирической формуле $p(t) = -0{,}6t^2 + 8t + 4$. Найти объем продукции, произведенной за 5 часов.

3.25. Найти дневную выработку за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $p(t) = -0{,}3t^2 + 0{,}8t + 10$.

3.26. Производительность труда рабочего описывается формулой $y = -\frac{x^2}{300} - \frac{x}{12} + 21$, где x – выпуск продукции за один час. Вычислить объем выпуска продукции рабочим за год.

4. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Краткие теоретические сведения

Определение. Множество точек называется ***плоским***, если все его точки принадлежат одной плоскости.

Функции многих переменных будем изучать на примере функций двух переменных. Рассмотрим некоторое плоское множество E и подмножество Z множества действительных чисел R. Каждая точка плоского множества $M(x;\ y)$ имеет две координаты: абсциссу и ординату.

Определение. Если каждой точке $M(x;\ y)$ плоского множества E по некоторому закону можно поставить в соответствие вполне определенное число z из множества Z, то z называется ***функцией двух независимых переменных x и y***

$$z = f(x;\ y). \qquad (4.1)$$

Областью определения функции двух переменных называется множество всех допустимых упорядоченных пар чисел x и y, при которых функция z принимает действительные значения.

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0\,(x_0;\ y_0)$, кроме, быть может, самой точки M_0. В окрестности точки $M_0\ (x_0;\ y_0)$ выберем произвольную последовательность точек $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2\,(x_2;\ y_2)$,…, $M_n\,(x_n;y_n)$,..., сходящуюся к точке $M_0\,(x_0;\ y_0)$. В каждой точке этой последовательности вычислим соответствующие значения функции: $f(x_1;\ y_1)$, $f(x_2;\ y_2)$, ..., $f(x_n;\ y_n)$, ...

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, если для любой последовательности точек $\{M_n(x_n;y_n)\}$, сходящейся к точке $M_0\ (x_0;\ y_0)$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n;y_n)\}$сходится к числу A. Предел функции $f(x;\ y)$ в точке $M_0\,(x_0;\ y_0)$ обозначается так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = A\,.$$

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в точке $M_0\,(x_0;\ y_0)$ и в ее окрестности.

Определение. Функция $z = f(x;\ y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0\ (x_0;\ y_0)$, если существует предел функции в точке $M_0\,(x_0;\ y_0)$, равный ее значению в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Если хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке $M_0\,(x_0;\ y_0)$ не выполняется, то точка $M_0\,(x_0;\ y_0)$ называется ***точкой разрыва*** функции $f(x;\ y)$.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$, определенную на плоском множестве E и внутреннюю точку M_0 $(x_0; y_0)$ этого множества. Вычислим значение функции в точке $M_0(x_0;y_0)$. Если аргумент y оставить без изменения, а аргументу x дать приращение Δx, так чтобы новая точка $M_1(x_0 + \Delta x; y_0)$ также была внутренней точкой множества E, то функция $z = f(x;y)$ получит ***частное приращение по x***:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0).$$

Если, оставив аргумент x без изменения, аргументу y дать приращение Δy, то функция $z = f(x; y)$ получит ***частное приращение по y***:

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Пусть теперь оба аргумента x и y получат соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция z получит ***полное приращение***:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Отметим, что, вообще говоря, полное приращение Δz не равно сумме частных приращений:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Теперь определение ***непрерывности функции*** двух переменных в точке можно сформулировать так: функция $z = f(x; y)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0 $(x_0; y_0)$, если бесконечно малым приращениям независимых переменных Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в точке M_0 $(x_0; y_0)$, аргументу x дадим приращение Δx, а y оставим без изменения. Вычислим частное приращение функции

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0).$$

Определение. Если существует конечный предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к приращению Δx, когда последнее стремится к 0, то этот предел называется ***частной производной*** функции $z = f(x; y)$ ***по переменной x*** и обозначается одним из символов z_x', $f_x'(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$f'_x(x_0;y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)}{\Delta x}.$$

Из определения вытекает ***правило дифференцирования функции двух переменных*** $z = f(x; y)$ ***по переменной x***: чтобы найти частную производную функции двух переменных по переменной x, надо другую переменную y считать постоянной величиной и дифференцировать $f(x; y)$ по x как функцию одной переменной.

Теперь аргумент x оставим без изменения, а аргументу y дадим приращение Δy и вычислим частное приращение функции

$$\Delta_y z = f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0).$$

Определение. Если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то этот предел называется ***частной производной*** функции $z = f(x; y)$ по ***переменной y*** и обозначается одним из символов z_y', $f_y'(x; y)$, $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$f'_y(x_0;y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)}{\Delta y}.$$

Правило дифференцирования по переменной y: чтобы найти частную производную функции двух переменных по переменной y, надо другую переменную x считать величиной постоянной и дифференцировать $f(x; y)$ по y как функцию одной переменной.

Сформулированные определения и правила можно распространить и на функции многих переменных.

Теорема. Если в точке $M_0\,(x_0; y_0)$ существуют непрерывные частные производные $f_x'(x; y)$ и $f_y'(x; y)$, то функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке M_0, и полное приращение ее представимо в виде:

$$\Delta z = f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y+\alpha(\Delta x)\Delta x+\beta(\Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x)$ и $\beta(\Delta y)$ – бесконечно малые функции в точке $M_0\,(x_0; y_0)$.

Определение. Главная линейная часть полного приращения дифференцируемой функции двух переменных называется ее ***полным дифференциалом*** и обозначается dz.

$$dz = f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy \text{ или } dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то есть в этой точке существуют непрерывные частные производные $z_x' = f_x'(x; y)$, $z_y'=f_y'(x; y)$.

Определение. Частная производная по x от z'_x и частная производная по y от z'_y называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x; y)$ и обозначаются:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(f_x'(x;y)\right)'_x = f_{xx}''(x;y);$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(f_y'(x;y)\right)'_y = f_{yy}''(x;y).$$

Определение. Частная производная по y от z'_x и частная производная по x от z'_y называются ***смешанными производными функции второго порядка*** и обозначаются:

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(f_x'(x;y)\right)'_y = f_{xy}''(x;y),$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(f_y'(x;y)\right)'_x = f_{yx}''(x;y).$$

Смешанные производные второго порядка z_{xy}'' и z_{yx}'' равны между собой: $z_{xy}''= z_{yx}''$. Следовательно, функция двух переменных имеет три различных частных производных второго порядка: $z''_{xx}; z''_{yy}; z''_{xy}$.

Определение. Полный дифференциал от полного дифференциала функции двух переменных называется ***полным дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

Пример. Найти все частные производные и полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2yx^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Полный дифференциал второго порядка:

$$d^2z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + (6y + 2x^2)dy^2.$$

Многие экономические функции являются функциями многих переменных, поэтому не исключено, что их уравнения и графики представляют собой поверхности второго порядка.

Экстремум функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x; y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0; y_0)$ и в ее δ-окрестности $U(M_0; \delta)$.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ ***максимум*** (сокращенно «max») (рис. 52), если для всех точек $M(x; y)$ окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$:

$$f(x;y) \le f(x_0;y_0) \text{ или } \Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0. \qquad (4.2)$$

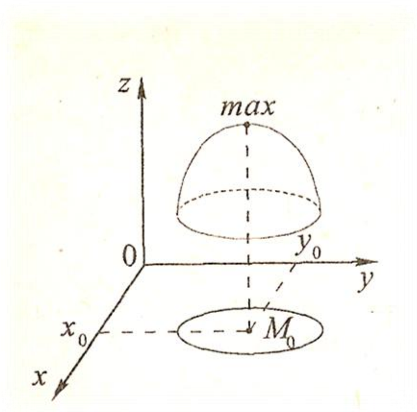

Рис.52.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ ***минимум*** (сокращенно «min») (рис.53), если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ $f(x;y) \ge f(x_0;y_0)$ или

$$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \ge 0. \qquad (4.3)$$

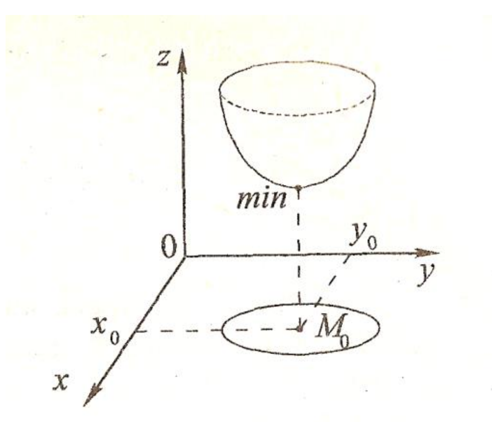

Рис.53.

Максимум и минимум функции двух переменных называются ее ***экстремумами*** и являются локальными понятиями, то есть связанными с конкретной точкой и ее сколь угодно малой окрестностью.

Таким образом, если в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z=f(x; y)$ имеет экстремум, то в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ полное приращение Δz имеет постоянный знак, причем

$\Delta z \le 0$, если в точке M_0 функция имеет максимум;

$\Delta z \ge 0$, если в точке M_0 функция имеет минимум.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x; y)$ непрерывна в области E и $M_0(x_0; y_0)$ – внутренняя точка области E.

Теорема. Если функция $z=f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то обе частные производные ее в точке M_0 равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0; y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Определение. Точки, в которых выполняются условия (4.4), называются ***критическими точками*** функции.

Замечание. Отметим, что критическими точками на экстремум функции $f(x; y)$ являются также точки, в которых частные производные $f'_x(x; y), f'_y(x; y)$ не существуют.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных можно сформулировать так:

если функция $z=f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке частные производные по x и y функции $f(x; y)$ равны нулю или не существуют.

Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x; y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то есть существуют непрерывные частные производные первого порядка $f'_x(x; y), f'_y(x; y)$, и все производные второго порядка $f''_{xx}(x; y), f''_{xy}(x; y), f''_{yy}(x; y)$, а $M_0(x_0; y_0)$- критическая точка функции, в которой $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$

Если в окрестности критической точки $M_0(x_0;\ y_0)$ дифференциал второго порядка $d^2f(x_0;\ y_0)$ имеет постоянный знак, то в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция имеет экстремум, причем при $d^2f(x_0;y_0)<0$ – максимум; при $d^2f(x_0;\ y_0)>0$ – минимум.

Введем обозначения:

$f''_{xx}(x_0;y_0)=A;\ f''_{xy}(x_0;y_0)=B;\ f''_{yy}(x_0;y_0)=C$.

Если $D = B^2 - AC < 0$, то:

при $A<0$ в точке M_0 функция имеет **максимум**,

при $A>0$ в точке M_0 функция имеет **минимум**.

Если $D = B^2 - AC > 0$, то в этом случае экстремума в критической точке $M_0(x_0;\ y_0)$ не существует.

Если $D = B^2 - AC = 0$, то необходимы дополнительные исследования либо непосредственно по условиям

$$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0, \tag{4.5}$$

$$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \ge 0, \tag{4.6}$$

либо с помощью дифференциала третьего порядка $d^3f(x_0,y_0)$.

Замечание. Если в критической точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $z=f(x;\ y)$ недифференцируема, то есть частные производные ее $f_x'(x_0;\ y_0)$ и $f_y'(x_0;\ y_0)$ не существуют, то, в этой точке не существует и дифференциал второго порядка $d^2f(x_0;\ y_0)$. Поэтому для недифференцируемой функции применять достаточные условия существования экстремума нельзя. В этом случае следует воспользоваться непосредственно условиями (4.5) и (4.6).

Пример

Найти экстремумы функции $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

1. Областью определения данной функции является вся координатная плоскость Oxy.
2. Находим частные производные

$z'_x = 3x^2+3y^2-15;$
$z'_y = 6xy-12.$

Критические точки функции находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-15=0; \\ 6xy-12=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)^2+3y^2-15=0; \\ x=\dfrac{2}{y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{y^2}+3y^2-15=0; \\ x=\dfrac{2}{y}. \end{cases}$$

$12+3y^4-15y^2=0;\ y^2=v;$

$3v^2-15v+12=0;$

$v^2-5v+4=0;$

$D=25-16=9;\ v_1=\dfrac{5+3}{2}=4;\ v_2=\dfrac{5-3}{2}=1.$

$y_1=2;\ y_2=-2;\ y_3=-1;\ y_4=1;$

$x=\dfrac{2}{y};\ x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=-2;\ x_4=2.$

Получаем четыре критические точки: $M_1(1;2)$; $M_2(-1;-2)$; $M_3(-2;-1)$; $M_4(2;1)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$A=z''_{xx}=6x;$

$B=z''_{xy}=6y;$

$C=z''_{yy}=6x.$

$$\Delta=B^2-A\cdot C=36y^2-36x^2=36(y^2-x^2).$$

В точке M_1 $\Delta=36(2^2-1^2)>0$, значит, локального экстремума нет,

в точке M_2 $\Delta=36((-2)^2-(-1)^2)>0$, значит, локального экстремума нет,

в точке M_3 $\Delta=36((-1)^2-(-2)^2)<0$, значит, существует локальный экстремум, и так как A=-12<0, то в точке M_3 функция имеет максимум,

в точке M_4 $\Delta=36((1)^2-(2)^2)<0$, значит, существует локальный экстремум, и т.к. A=12>0, то в точке M_4 функция имеет минимум.

Условный экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x;\ y)$ определена в области D и в некоторой точке области D имеет экстремум. Если независимые переменные x и y при этом не связаны между собой никакими соотношениями, то этот экстремум называется ***безусловным экстремумом***.

Предположим теперь, что в области D дана линия Γ, уравнение которой

$$\varphi(x;y)=0, \tag{4.7}$$

и требуется найти только те экстремумы, которые достигаются в точках, принадлежащих линии Г. Такие экстремумы называются ***условными экстремумами функции*** $z=f(x;\ y)$ на линии Г.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ ***условный максимум***, если для всех точек $M(x; y)$ из окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y) \leq f(x_0;y_0)$ при условии, что $\varphi(x;y) = 0$.

Определение. Функция $z=f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ ***условный минимум***, если для всех точек $M(x; y)$ из окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y) \geq f(x_0;y_0)$ при условии, что $\varphi(x;y) = 0$.

Уравнение (4.7) определяет y как неявную функцию от x и называется ***уравнением связи***. Оно показывает, что x и y теперь не являются независимыми переменными, а связаны условием (4.7).

Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума.

Условия

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x;y) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

совпадают с необходимыми условиями существования безусловного экстремума функции трех независимых переменных, которая называется ***функцией Лагранжа***:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y), \tag{4.9}$$

Решая систему (4.8) относительно x, y и λ, определяют координаты критической точки на экстремум x_0, y_0 и значение неизвестного множителя Лагранжа λ_0. Подставляя найденное значение λ_0 в функцию (4.9), получим функцию двух независимых переменных x и y:

$$L(x;y) = f(x;y) + \lambda_0\varphi(x;y) \tag{4.10}$$

Достаточным условием существования безусловного экстремума функции (4.10) является постоянство знака дифференциала второго порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$d^2L(x_0;y_0) = L''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0;y_0)dy^2 =$$

$$= dx^2\left[L''_{xx}(x_0;y_0) + 2L''_{xy}(x_0;y_0)\frac{dy}{dx} + L''_{yy}(x_0;y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Значение $\dfrac{dy}{dx} = y'(x_0; y_0)$ вычисляется как значение производной неявной функции, определяемой уравнением связи (4.7). Так как $dx^2 > 0$, то знак $d^2L(x_0; y_0)$ совпадает со знаком выражения в квадратных скобках.

Если $d^2L(x_0; y_0)<0$, то функция Лагранжа $L(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум, а функция $z=f(x; y)$ – условный максимум.

Если $d^2L(x_0; y_0)>0$, то функция $L(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ минимум, а функция $f(x; y)$ – условный минимум.

Определив точки условного экстремума, вычисляют значения функции в этих точках, то есть $z_{\min\,усл}$ и $z_{\max\,усл}$.

Пример. Найти экстремум функции $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа.

$$L(x; y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Находим все частные производные функции $L(x; y; \lambda)$ и приравниваем их нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x; \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 2 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}; \\ y = -\dfrac{1}{\lambda}; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x}; \\ y = 2x; \\ x^2 + 4x^2 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x}; \\ y = 2x; \\ 5x^2 = 5. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = \mp\dfrac{1}{2}; \\ y_{1,2} = \pm 2; \\ x_{1,2} = \pm 1. \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2x}; y = -\frac{1}{\lambda} = -1/\left(-\frac{1}{2x}\right) = 2x.$$

Таким образом, функция Лагранжа имеет две критические точки $M_1(1; 2)$ при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ и M_2(-1;-2) при $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Определим знак дифференциала второго порядка в каждой из этих критических точек. Для этого вычислим сначала производную неявной функции, определяемой уравнением связи $x^2+y^2=5$.

$$\left(x^2+y^2\right)' = (5)' \Rightarrow 2x+2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}; (y=2x);$$

$$y' = -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Найдем производные второго порядка функции $L(x;y;\lambda)$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \left(1+2\lambda x\right)' = 2\lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \left(2+2\lambda y\right)' = 2\lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = 0.$$

a) в критической точке $M_1(1; 2)$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = L''_{xx} = -1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = L''_{xy} = 0;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = L''_{yy} = -1\ .$$

$$d^2L(x_0;y_0) = dx^2\left[L''_{xx}(x_0;y_0) + 2L''_{xy}(x_0;y_0)\frac{dy}{dx} + L''_{yy}(x_0;y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1}{2}.$$

$$d^2L(1;2) = dx^2\left(-1-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)' = dx^2\left(-1-\frac{1}{4}\right) < 0.$$

В точке $M_1(1; 2)$ функция $L(x;y;\lambda)$ имеет максимум, а функция $z=x+2y$ условный максимум.

$Z_{\max\ усл}=5$.

b) в критической точке $M_2(-1; -2)$ при $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = L''_{xx} = 1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = L''_{yy} = 1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = L''_{xy} = 0.$$

$$d^2L(-1;-2) = dx^2\left(1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)' = dx^2\left(1+\frac{1}{4}\right) > 0.$$

В точке M_2(-1;-2) функция $L(x;y;\lambda)$ имеет минимум, а функция $z=x+2y$ условный минимум. $Z_{min\ усл}$=-5.

Замечание. Метод множителей Лагранжа можно применить и для функций любого числа n независимых переменных.

Предположим, что требуется найти условные экстремумы функции $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условиях, где $i = 1, 2, ..., m$ ($m< n$).

В этом случае функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = f_1(x_1,x_2,...,x_n) +$$
$$+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n) + ... + \lambda_n\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n).$$

Критические точки и неизвестные множители Лагранжа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ определяются из решения n+m уравнений:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = f'_{x_1} + \lambda_1\varphi'_{1x_1} + \lambda_2\varphi'_{2x_1} + ... + \lambda_m\varphi'_{mx_1} = 0, \\ L'_{x_2} = f'_{x_2} + \lambda_1\varphi'_{1x_2} + \lambda_2\varphi'_{2x_2} + ... + \lambda_m\varphi'_{mx_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'_{x_n} = f'_{x_n} + \lambda_1\varphi'_{1x_n} + \lambda_2\varphi'_{2x_n} + ... + \lambda_m\varphi'_{mx_n} = 0, \\ \varphi_i(x_1,x_2,...,x_n) = 0, \\ (i = 1,2,...,m). \end{cases}$$

Применение в экономике

Многофакторные функции спроса и предложения.

Ранее были рассмотрены функции спроса и предложения, зависящие от одной переменной цены. В реальной действительности на спрос кроме цены товара влияют и другие факторы: доход (I), вкусы (T), цены заменителей (P_s), число покупателей (N) и другие, а на предложение - затраты ресурсов (PR), число продавцов на рынке (N), инфляция (IN) и другие. Следовательно, многофакторные функции спроса и предложения будут иметь вид:

$$D=D(P, I, T, P_s, N),$$
$$S=S(P, PR, N, IN).$$

Если потребитель изъявляет желание покупать большее или меньшее количество товара по данной цене, то происходит ***изменение в спросе***. Графически это означает смещение положения кривой спроса вдоль вертикальной оси (рис.54). На положение кривой спроса на координатной плоскости *DOP*, влияют перечисленные выше факторы.

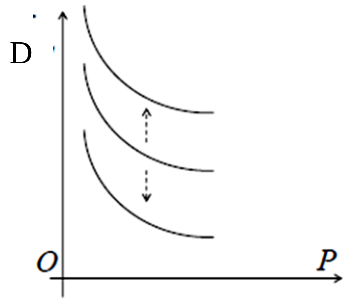

Рис. 54

Замечание. Нельзя путать ***изменение в спросе*** с изменением спроса: сдвиг кривой спроса вверх или вниз иллюстрирует изменение в спросе, а динамика вдоль кривой спроса – изменение величины спроса.

Смещение кривой предложения вверх или вниз под воздействием различных факторов (при данной цене товара) иллюстрирует ***изменение в предложении*** (рис. 55).

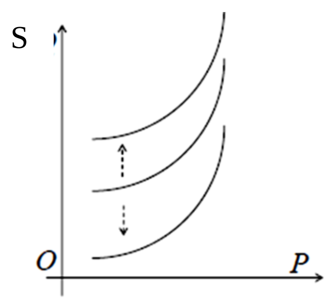

Рис. 55

Изменения в спросе и предложении и равновесная цена

Предположим, что в силу ряда факторов происходит увеличение в спросе с D_1 до D_2 тогда равновесная цена увеличивается с P_{01} до P_{02} увеличивается также равновесное количество товара с q_1 до q_2. При уменьшении в спросе с D_2 до D_1 равновесная цена уменьшается с P_{02} до $P_{01.}$ Равновесное количество товара уменьшается с q_2 до q_1 (рис.56).

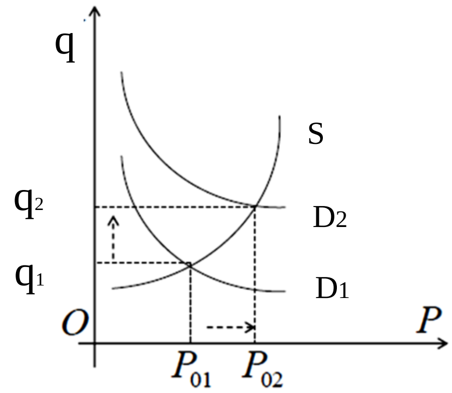

Рис. 56

Производственные функции.

Функция Кобба-Дугласа

Свойства производственных функций

Основными видами производственных функций являются следующие два:

1) Линейная (или аддитивная) производственная функция. В случае двух факторов имеет форму:

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2 \ (a_i>0,\ i=0,\ 1,\ 2); \tag{4.11}$$

2) Мультипликативная производственная функция. В случае двух факторов имеет форму:

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}. \tag{4.12}$$

В формулах (4.11) и (4.12) $a_i>0$ (i=0, 1, 2) – параметры производственной функции, x_i (i=1, 2) – независимые переменные (ресурсы).

Функция Кобба – Дугласа относится к мультипликативным двухфакторным производственным функциям. Она имеет вид:

$$Y = a_0 \cdot K^{a_1} \cdot L^{a_2}.$$

Эластичность функции двух переменных

Пусть дана функция двух переменных $z=f(x;y)$, ее частными приращениями будут:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0),$$
$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Эластичностью функции $z=f(x; y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ по x называется предел

$$E_{zx}(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Эластичностью функции $z=f(x; y)$ в той же точке $M_0(x_0,\ y_0)$ по y называется предел

$$E_{zy}(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta y}{y}\right).$$

Из определения вытекают следующие формулы для нахождения коэффициентов эластичности z по x и по y:

$$E_{zx}(x_0; y_0) = \frac{x}{z} \cdot z'_x = x \cdot (\ln z)'_x, \quad E_{zy}(x_0; y_0) = \frac{y}{z} \cdot z'_y = y \cdot (\ln z)'_y.$$

Пример. Найти коэффициенты эластичности z по x и по y функции $z=x^y$ в точке (2; 3).

Решение:

$$E_{zx}(x; y) = x \cdot (\ln z)'_x = x \cdot (y \ln x)'_x = y,$$

$$E_{zy}(x; y) = \frac{y}{z} \cdot z'_y = y \cdot (\ln z)'_y = y \cdot (y \ln x)'_y = y \cdot \ln x.$$

Следовательно, $E_{zx}(2;3) = 3, \quad E_{zy}(2;3) = 3 \cdot \ln 2.$

Предельная полезность и предельная норма замещения

Определение. ***Функцией полезности*** $U=U(x; y)$ называется функция, которая выражает меру полезности набора $(x; y)$, где x - количество товара X, а y - количество товара Y.

Определение. ***Предельной полезностью*** X называется чувствительность набора $(x; y)$ к незначительному изменению x при фиксированном y и определяется как частная производная U'_x.

Определение. ***Предельной полезностью*** Y называется чувствительность набора $(x; y)$ к незначительному изменению y при фиксированном x и определяется как частная производная U'_y.

Линией уровня функции полезности будет график функции $U(x; y)=c$. Чаще всего эта линия (её ещё называют *кривой безразличия*) является графиком убывающей функции. Это означает, что для точек $M_0(x_0, \ y_0)$ и $M_0(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y)$ расположенных на одной линии уровня, приращения Δx и Δy имеют разные знаки. Пусть, для определенности, $\Delta x>0$, а $\Delta y<0$. В этом случае говорят, что Δx единиц первого товара замещается на Δy единиц второго товара (имеется в виду переход из M в M_0 (рис. 57).

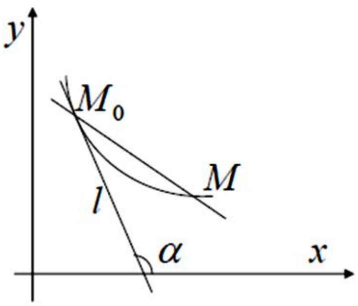

Рис. 57

Определение. ***Предельной нормой замещения X на Y в точке M_0*** называется предел отношения $\frac{-\Delta y}{\Delta x}$, когда точка M стремится к M_0, оставаясь на одной с M_0 линии уровня функции $U(x;\ y)$ и обозначается MRS_{xy} или $MRS_{xy}(M_0)$, если необходимо явно указать ее зависимость от точки M_0. Итак,

$$MRS_{xy}=\lim_{M\to M_0}\left(\frac{-\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Утверждение. Предельная норма замещения одного товара другим равна отношению их предельных полезностей, т.е.

$$MRS_{xy}(M_0)=\frac{U'_x(M_0)}{U'_y(M_0)}.$$

Пример. Найти предельную норму замещения x на y для функции полезности $U(x;\ y)=\ln x+\ln y$ в точке (3; 12).

Решение.

$$MRS_{xy}(3;12)=\frac{U'_x(3;12)}{U'_y(3;12)}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}\Big|_{(3;12)}=4.$$

Если p - цена X, q - цена Y, тогда стоимость набора $(x;\ y)$ будет равна сумме $px+qy$, которая называется ***доходом потребителя товаров*** *X и Y*. Обозначим данный доход через I, тогда:

$$I=px+qy. \tag{4.13}$$

Покажем экономический смысл предельной нормы замещения на следующем примере. Пусть $MRS_{xy}=2$, т.е. одна единица товара X по вкладу в общую полезность набора $(x;\ y)$ эквивалентна 2 единицам товара Y. При замене в этом наборе одной единицы X на 2 единицы Y доход потребителя изменится на $2q-p$. Если же, наоборот, две единицы Y заменить на одну единицу X, то доход изменится на $p-2q$.

Предположим теперь, что $(x^*,\ y^*)$ – самый дешевый набор при заданном уровне полезности $U(x;\,y) = const$. Тогда получаем, что указанные выше изменения дохода I должны быть неотрицательными: $2q - p \geq 0,\ p - 2q \geq 0 \Rightarrow p=2q$.

Ясно, что двойка в приведенном выше примере может быть заменена любым другим числом, так что отсюда вытекает равенство:

$$MRS_{xy}(x^*; y^*) = \frac{p}{q}.$$

Определение. ***Изоклинами (изоклиналями)*** производственных функций называются линии постоянной предельной нормы замещения ресурсов, т.е. $MRS_{xy} = const$.

Свойства производственных функций

Приведём свойства производственных функций на примере двухфакторной функции $z=f(x,y)$.

1. $f(0,\,y) = f(x,\,0) = 0$. При отсутствии хотя бы одного ресурса нет выпуска продукции.

2. При $x_1>x_2$ $f(x_1,y)> f(x_2,y)$; при $y_1>y_2$ $f(x,y_1)> f(x,y_2)$. С увеличением объёма использования любого ресурса объём выпуска растёт. Это свойство ещё можно записать в виде: $z'_x > 0, z'_y > 0$.

3. $z''_{xx} \leq 0,\ z''_{yy} \leq 0$. С ростом использования ресурсов скорость роста выпуска замедляется.

4. Производственная функция является однородной функцией k-го порядка. То есть, если затраты каждого ресурса изменятся в t раз, объём выпуска изменится в t^k раз.

5. При $x>0$, $y>0$ $z''_{xy} \leq 0$. С ростом затрат одного из ресурсов предельная эффективность другого ресурса возрастает.

Понятие перекрёстной эластичности

Пусть $z=z(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – производственная функция многих переменных**.** Частная эластичность функции нескольких переменных по переменной x_i:

$$E_{x_i}(z) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}.$$

В производственной функции Кобба – Дугласа $E_K(Q) = \alpha, E_L(Q) = \beta$, т.е. показатели α и β приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда L или только объема производственных фондов K на 1 %.

Рассмотрим двухфакторную функцию спроса $D=D(p_1,\ p_2)$ зависящую от двух переменных: p_1 - цены какого-либо товара (собственная цена) и p_2 – цены альтернативного товара. Тогда эластичность спроса от собственной цены будет равна:

$$E_{Dp_1} = \frac{p_1}{D} \cdot D'_{p_1}.$$

Эластичность спроса от собственной цены показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении его собственной цены на 1%.

Аналогично, эластичность спроса от цены альтернативного товара будет определяться формулой:

$$E_{Dp_2} = \frac{p_2}{D} \cdot D'_{p_2}. \tag{4.14}$$

Коэффициент эластичности, определяемый формулой (4.14), называется ***перекрёстным коэффициентом эластичности*** спроса. Он показывает на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении цены альтернативного товара на 1%.

Товары, которые служат одним и тем же целям, называются ***взаимозаменяемыми.*** Товары, которые в совокупности удовлетворяют одну и ту же потребность, называются ***взаимодополняющими.***

Если альтернативный товар является взаимозаменяемым, то с ростом p_2 растёт спрос D на наш товар, т.к. при прочих равных условиях потребитель предпочтёт менее дорогой товар. Следовательно, $E_{Dp_2} > 0$.

Если альтернативный товар является взаимодополняющим, то с ростом p_2 уменьшается спрос на наш товар, так как увеличиваются совокупные затраты на приобретение других видов товаров и $E_{Dp_2} < 0$.

Если $E_{Dp_2} = 0$, то такие товары характеризуются как ***независимые***.

Если рассматривать спрос D как функцию нескольких переменных, например двух – цены товара p и доходов потребителей r, т.е. $D = f(p, r)$, то можно говорить о частных эластичностях спроса от цены

$$E_p(D) = \frac{p}{D} \cdot D_p{}'.$$

и спроса от доходов

$$E_r(D) = \frac{r}{D} \cdot D'_r.$$

Например, можно установить, что $E_r(D) > 0$ для качественных товаров и $E_r(D) < 0$ для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные – уменьшается.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, альтернативного товара ценой p_1, т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных

$D=f(p,\ p_1,\ r)$, то можно ввести перекрестный коэффициент эластичности спроса, определяемый по формуле:

$$E_{p_1}(D)=\frac{p_1}{D}\cdot D_{p_1}{}'.$$

Он показывает приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%. Очевидно, что для взаимозаменяемых товаров $E_{p_1}(D)>0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время для взаимодополняющих товаров $E_{p_1}(D)<0$, ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

I. Двухфакторная производственная функции (функция Кобба – Дугласа). Двухфакторной производственной функцией является функция Кобба – Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где Q – объем выпускаемой продукции, K – объем основного капитала, L – объем приложенного труда, $A > 0$ – коэффициент размерности, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ – постоянные, показывающие долю участия соответственно величин K и L в объеме выпускаемой продукции.

Функция зависит от двух переменных K и L и ее графиком в трехмерном пространстве будет некоторая поверхность, называемая ***производственной поверхностью.*** На рисунке изображена эта поверхность.

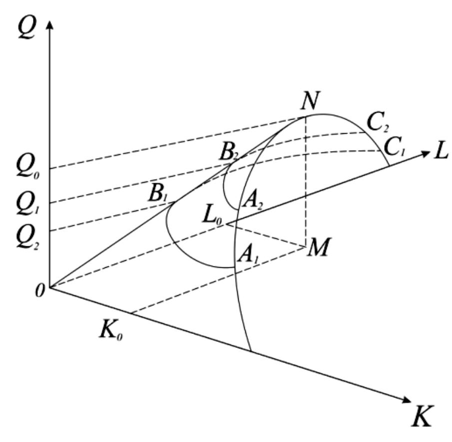

Рис. 58

На горизонтальной плоскости KOL по оси абсцисс откладываются производственные фонды K(ч), по оси ординат трудовые ресурсы L(чел.-ч), по оси аппликат – объем выпускаемой продукции Q. Каждой точке производственной поверхности соответствует определенный объем выпускаемой продукции Q при данном сочетании затрат ресурсов K и L. Например, точке N соответствует объем Q_0, получаемый при сочетании ресурсов K_0 и L_0. Кривые на производственной поверхности, соединяющие точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 получаются сечением производственной поверхности плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости KOL и являются изоквантами для объемов Q_1 и Q_2 (рис. 58).

Если предположить, что производственная поверхность пересекается вертикальными плоскостями, параллельными оси OK и отстоящими от нее по оси OL на расстоянии, например, L_1,L_2, L_3 $(L_1 < L_2 < L_3)$, то в сечении получатся кривые, каждая и из которых показывает изменение объема выпускаемой продукции Q в зависимости от изменения производственных фондов K при фиксированной величине трудовых ресурсов L (рис. 59).

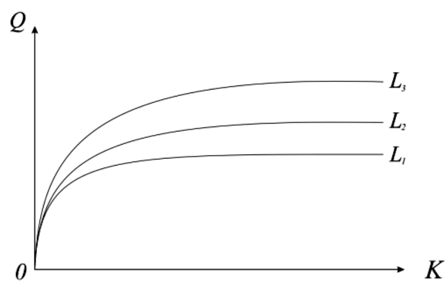

Рис. 59

В результате сечения производственной поверхности вертикальными плоскостями, параллельными оси OL, получим совокупность кривых, показывающих изменение объема выпускаемой продукции Q с изменением трудовых ресурсов L при фиксированной величине производственных фондов K. Вид этих кривых идентичен с кривыми на рисунке.

Пример. Издержки частного фермерского хозяйства по выращиванию племенных бычков определяются формулой $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=z$ где x – трудовые затраты, y – материальные затраты. Определить, при каких значениях x и y издержки z будут минимальными, если затраты на одного бычка составляют 9 у.е.

Решение. Графиком функции $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=z$ является эллиптический параболоид. Его каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=2z$, где a = 2, $b=\sqrt{8}$. Так как затраты на одного бычка составляют 9 у.е., то уравнение связи имеет вид $x + y = 9$, где x – трудовые, y – материальные затраты. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = z$ при $x + y = 9$.

Мы получили стандартную задачу на отыскание условного экстремума функции двух переменных. Выразим $y = 9 - x$ и подставим в функцию издержек z и получим

$$z = \frac{x^2}{8} + \frac{(9-x)^2}{16}.$$

Чтобы отыскать экстремум функции z, находим ее производную и приравниваем к нулю.

$$z' = \frac{2x}{8} - \frac{2(9-x)}{16} = \frac{x}{4} - \frac{9-x}{8}.$$

$$\frac{x}{4} - \frac{9-x}{8} = 0.$$

$2x - (9 - x) = 0$ или $3x - 9 = 0$ и получаем, что $x = 3$. Поскольку $y = 9 - x = 9 - 3 = 6$. Функция издержек $z = \frac{3^2}{8} + \frac{6^2}{16} = 3{,}375 у.е.$

Таким образом, при трудовых затратах $x = 3$ у.е. и материальных затратах $y = 6$ у.е. издержки z частного фермерского хозяйства составляют 3,375 у.е.

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

Нарисуем график заданной функции. Так как функция зависит от двух переменных это будет поверхность. Используем вкладку **Графики -> Трехмерный график** (рис. 60).

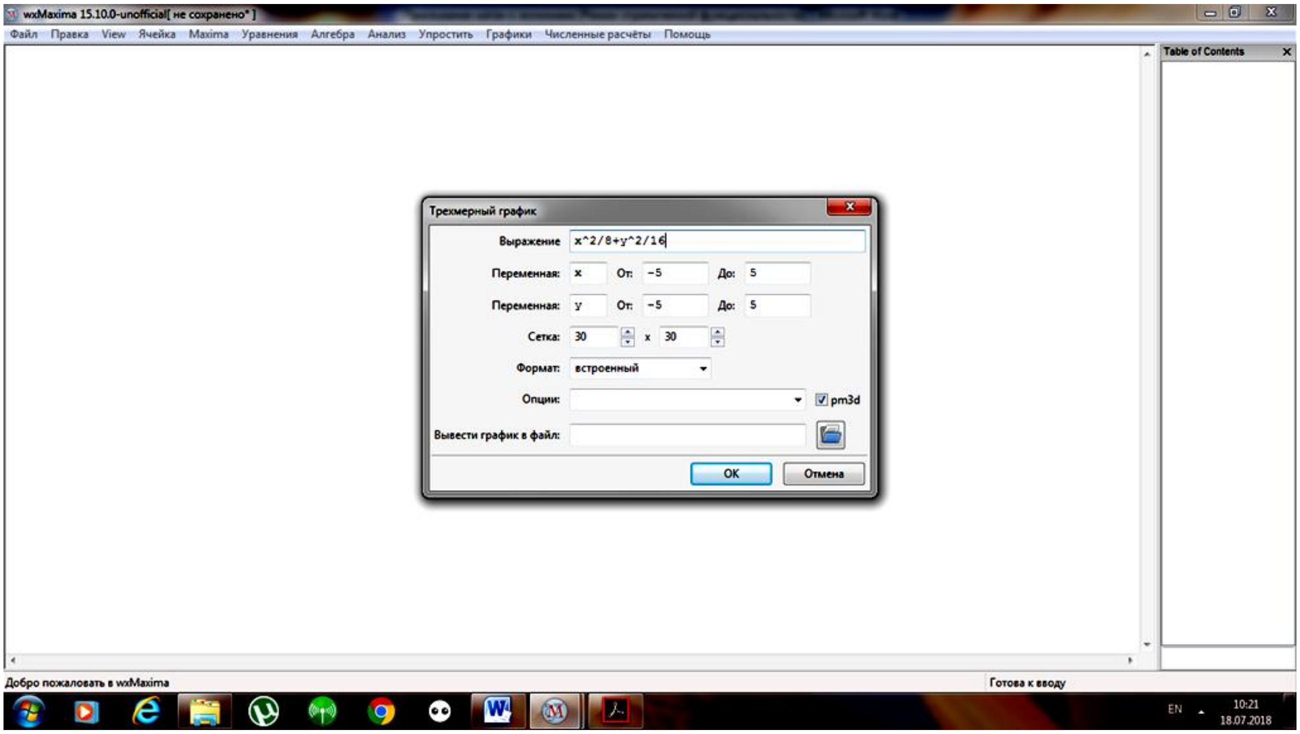

Рис. 60

График данной поверхности представлен на рисунке 61.

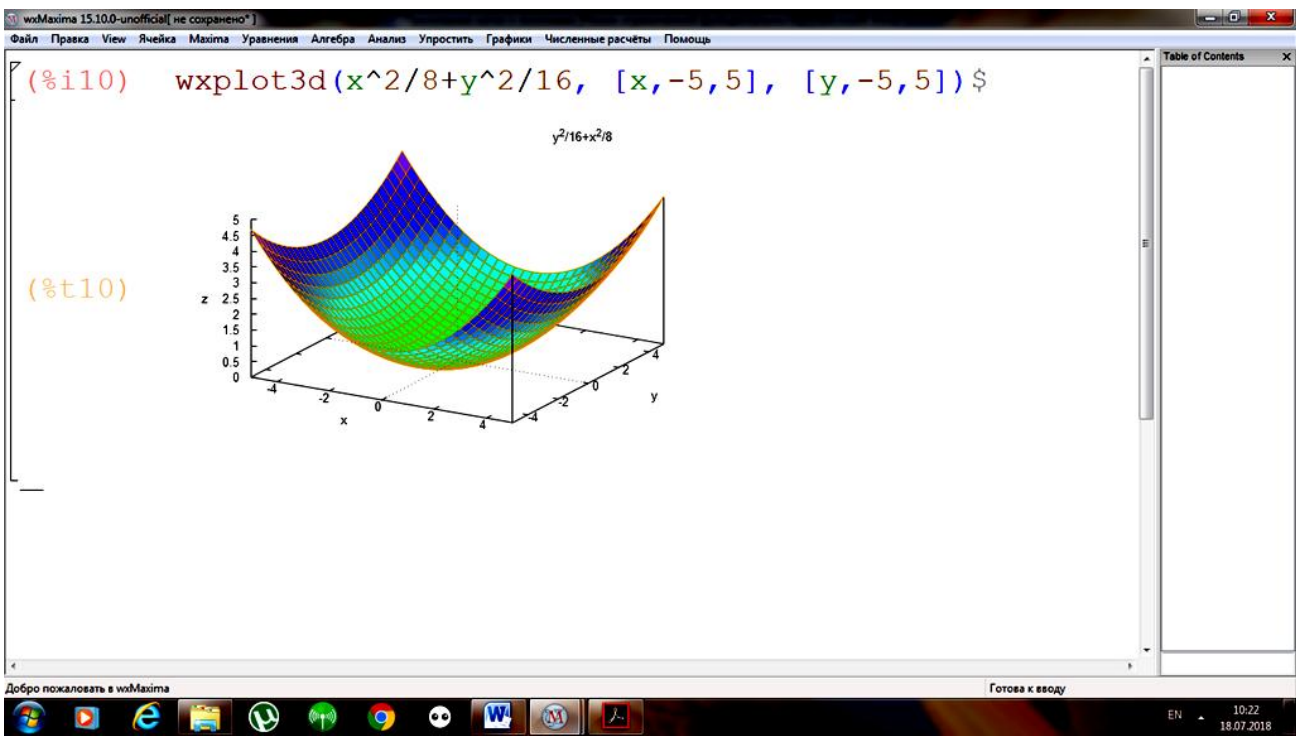

Рис. 61

Найдем условный экстремум данной функции. Подставим в заданную функцию вместо переменной *y* выражение 9 – *x* (рис. 62).

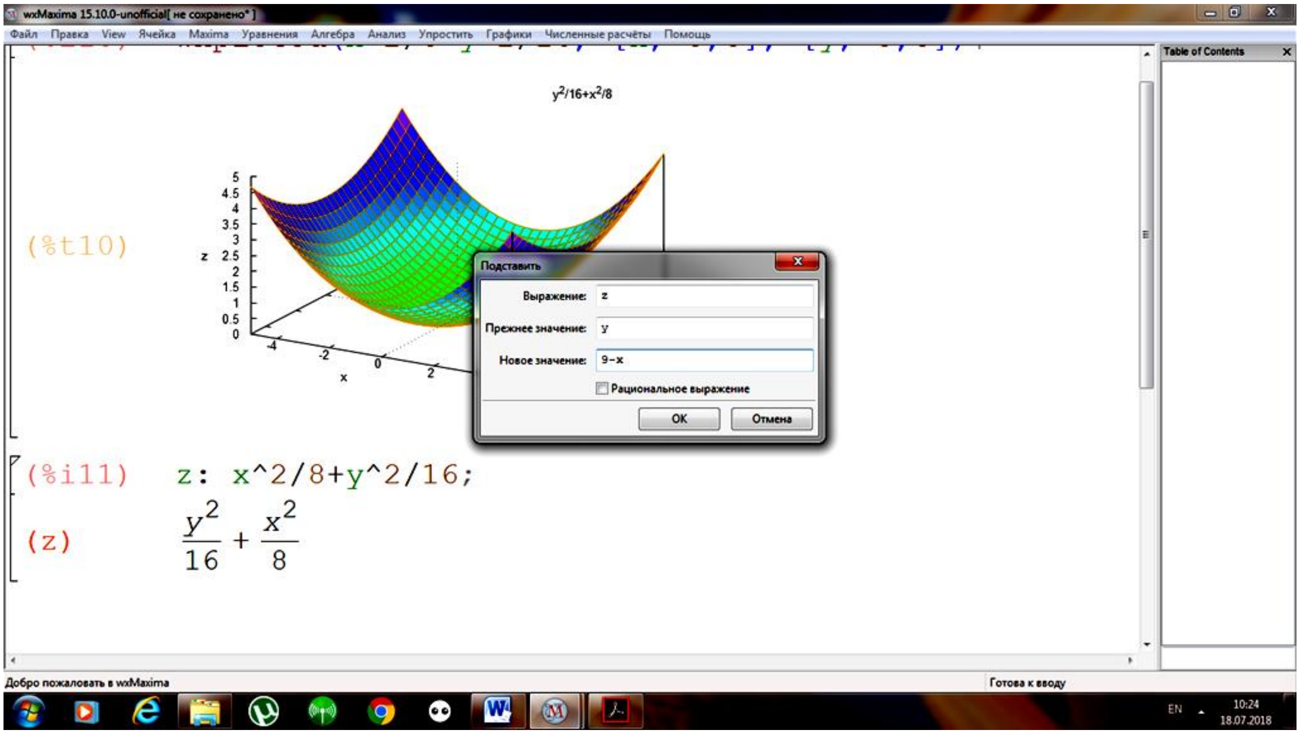

Рис. 62

Получим функцию одной переменной, представленную на рисунке 63.

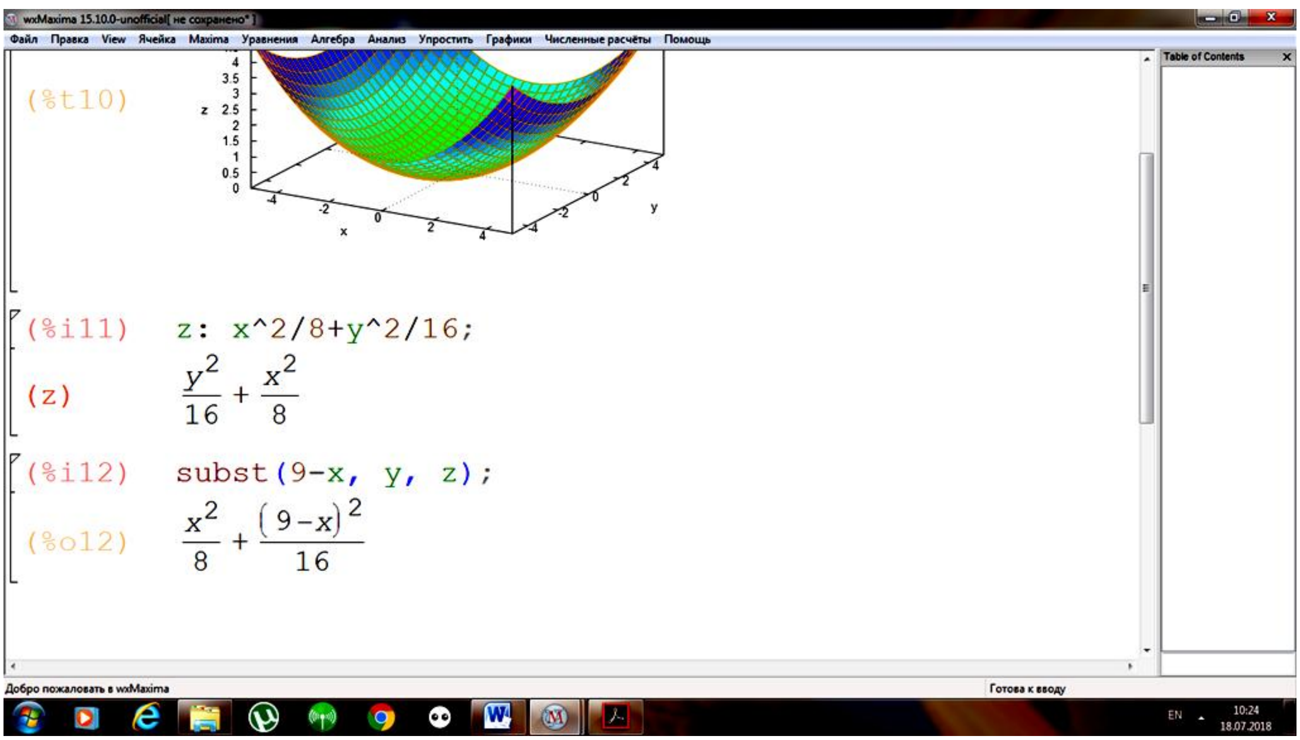

Рис. 63

Найдем точку минимума полученной функции. Для этого продифференцируем ее и приравняем производную к нулю (рис. 64).

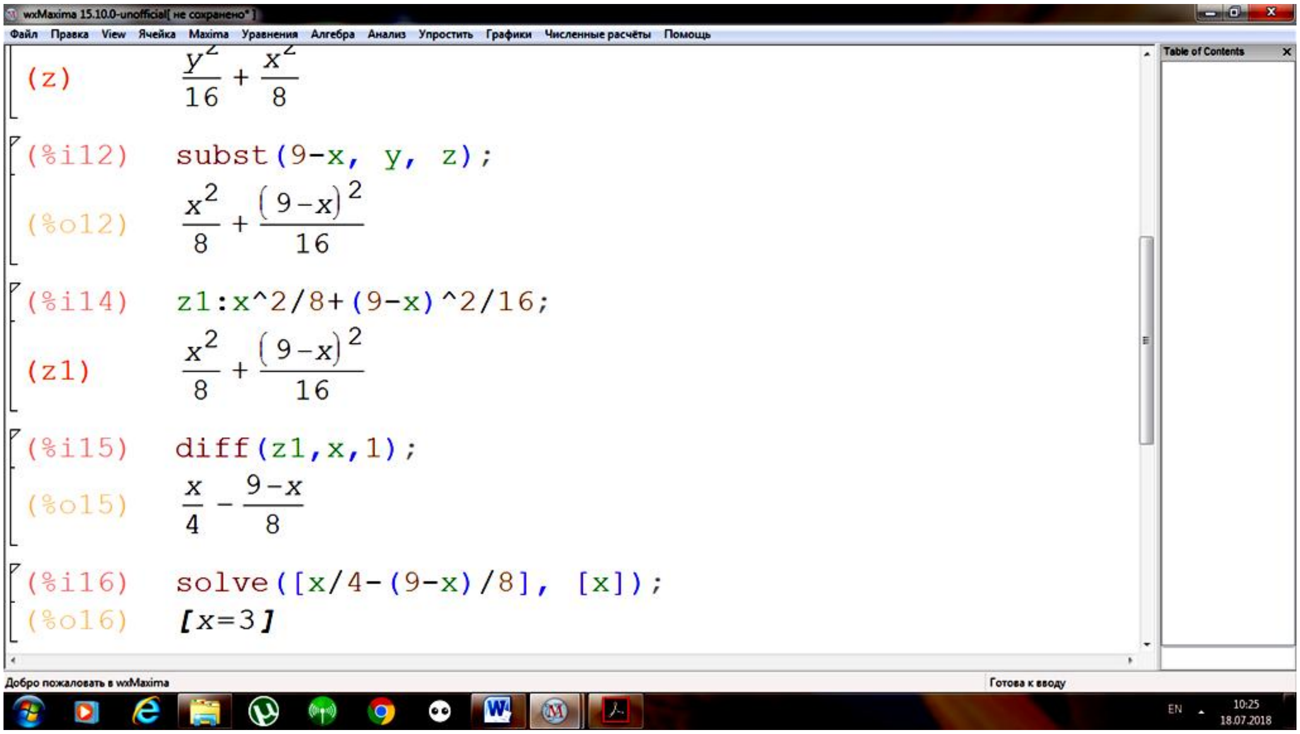

Рис. 64

Так как полученная точка попадает в экономически обусловленную область ($x \geq 0, y \geq 0$) и других точек экстремума нет, то $x = 3$ является точкой минимума. Подставляя минимальное значение в функцию, получим минимальные издержки (рис. 65).

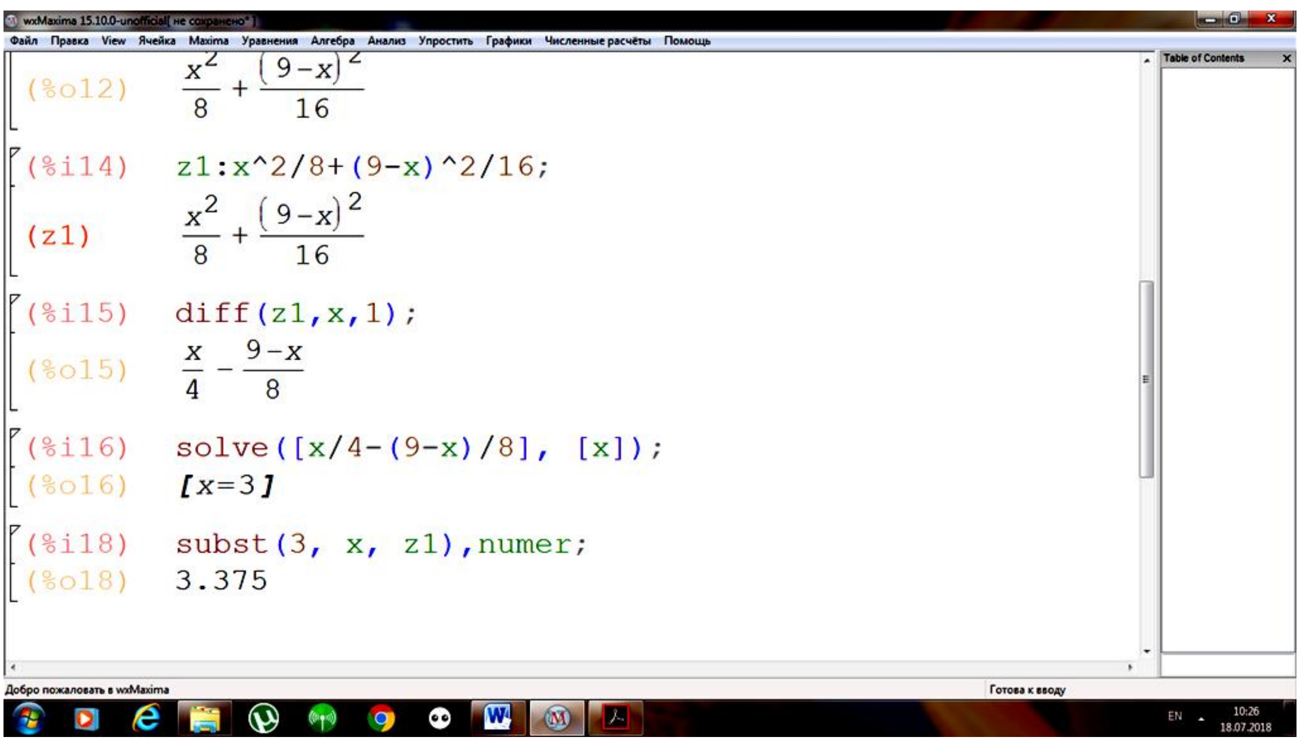

Рис. 65

II. Прибыль от производства разных видов товара. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – количества производимых m разновидностей товара, а их цены – соответственно $P_1, P_2, \ldots, P_m$ (все P_i – постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией C:

$$C = C(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_m x_m - C(x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{4.15}$$

Максимум прибыли естественно искать как условие локального экстремума функции многих переменных (4.15) при $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2, \ldots, m.$$

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2, \ldots, m. \tag{4.16}$$

Система уравнений (4.16) реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из m значений каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений (4.16) зависит от вида функции издержек и может быть достаточно сложным.

Пример. Пусть производятся два вида товаров, обозначим их количества через x и y. Пусть P_1=8 и P_2=10 – цены на эти товары соответственно, а $C = x^2 + xy + y^2$ – функция затрат. Тогда согласно (4.15) при $x_1 = x$, $x_2 = y$ прибыль является функцией двух переменных:

$$\Pi(x,y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2 .$$

Условия локального экстремума приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = 10, \end{cases}$$

решением которой является точка *(2;4)*. Поскольку $a_{11} = (-2x - y + 8)'_x = -2 < 0$, $a_{22} = (10 - x - 2y)'_y = -2$, $a_{12} = (8 - 2x - y)'_y = -1$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$, то найденная точка определяет локальный максимум функции прибыли, который равен Π_{max}=28.

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

Продифференцируем функцию прибыли по переменной x. Для этого выберем вкладку **Анализ -> Дифференцировать.** В строке **Переменные** указываем переменную, по которой необходимо продифференцировать, в нашем случае x (рис. 66).

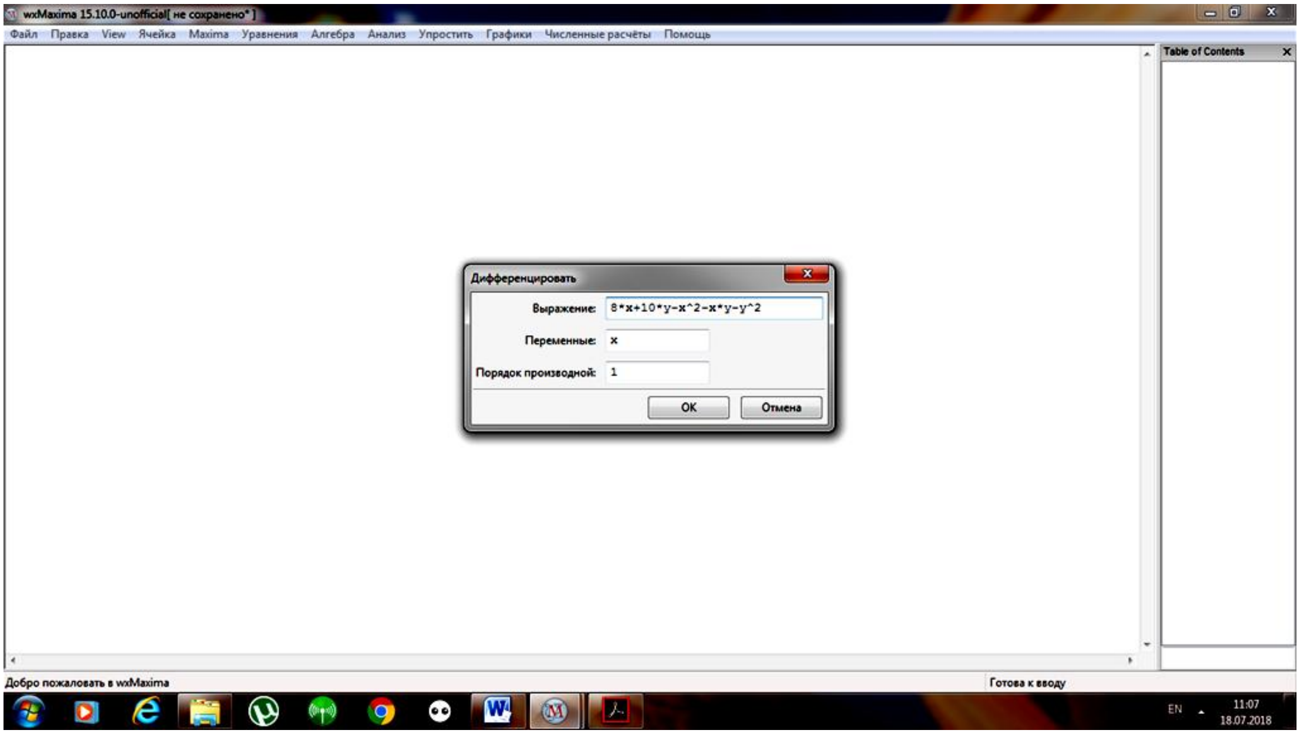

Рис. 66

Частная производная по *x* представлена на рисунке 67.

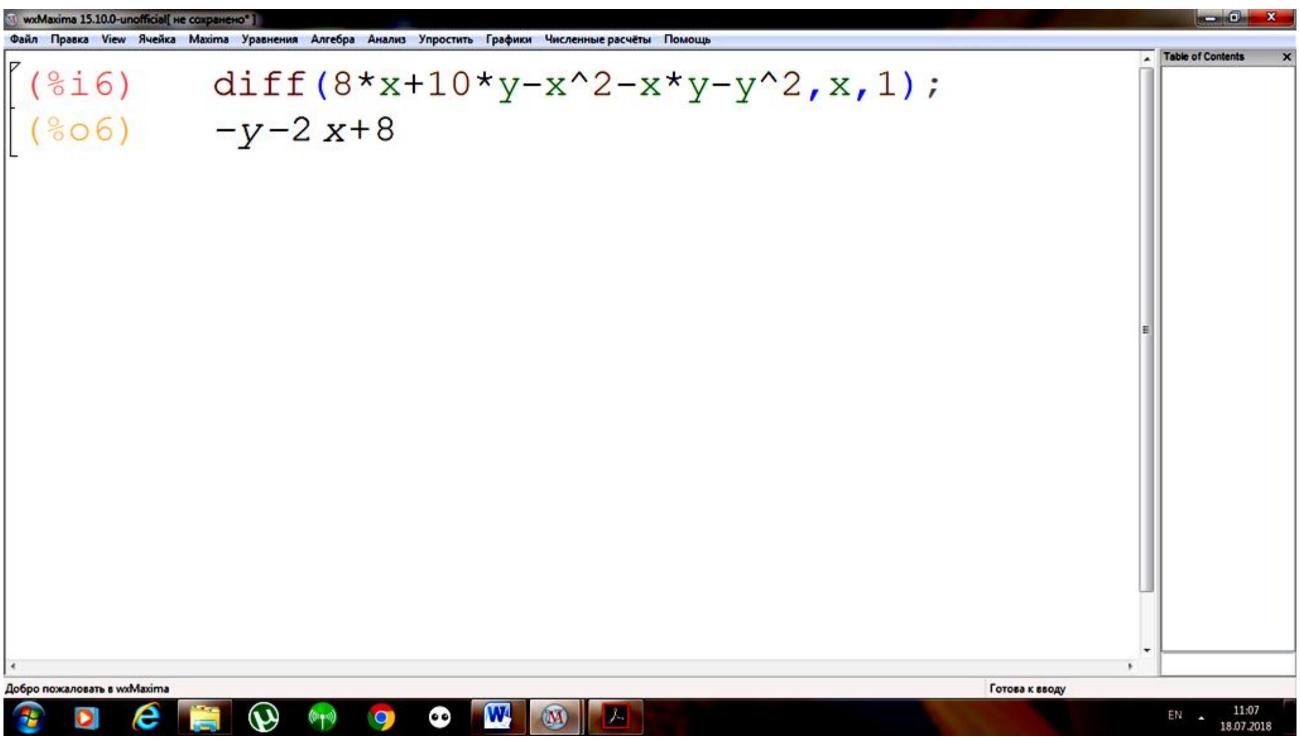

Рис. 67

Обозначим ее через z1 (рис. 68). Аналогично найдем частную производную по *y* (рис. 69).

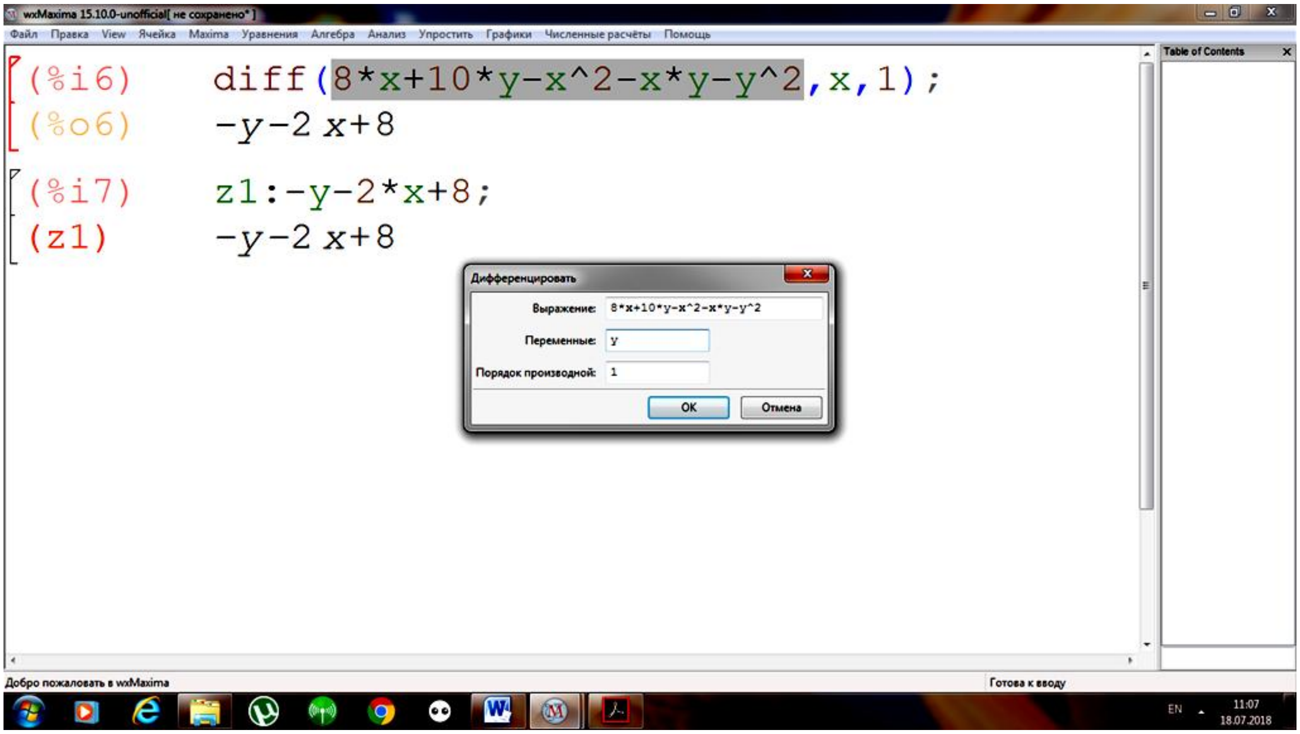

Рис.68

Обозначим ее через z2 (рис. 69).

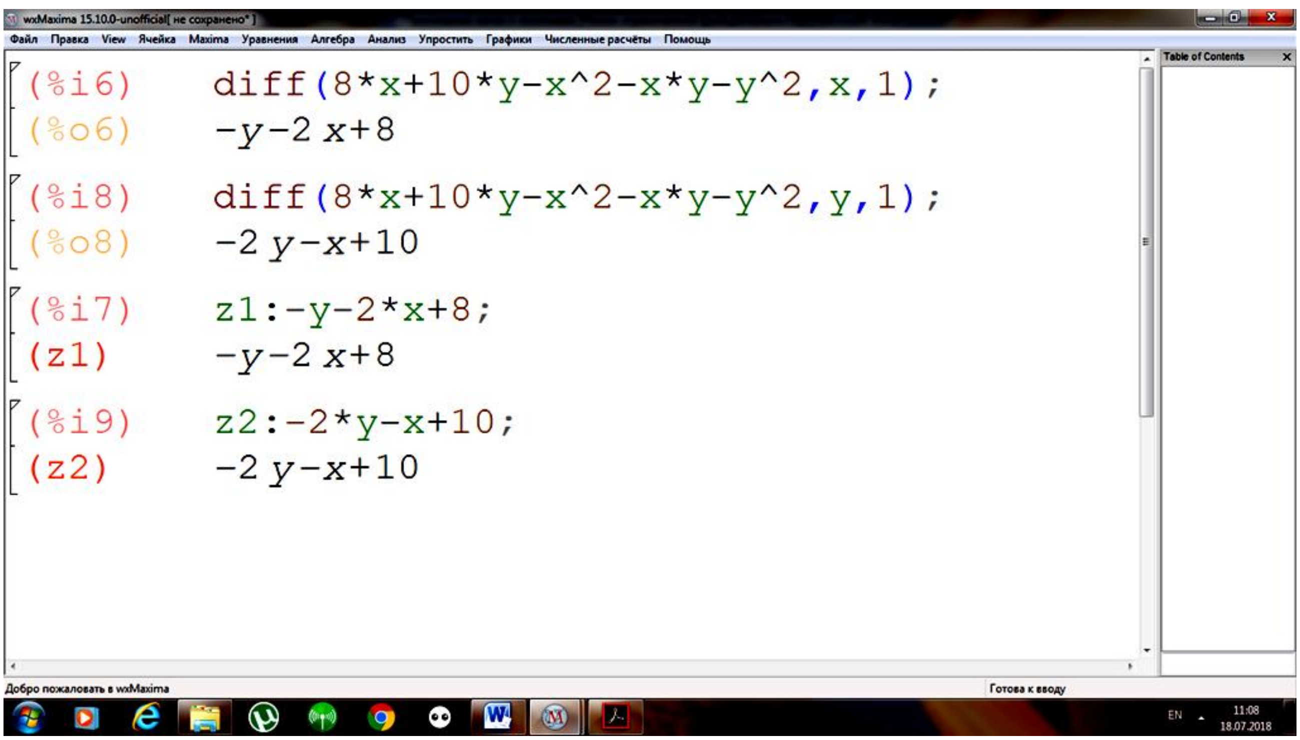

Рис. 69

Приравняем полученные выражения к нулю и решим систему линейных уравнений. Для этого используем вкладку **Уравнения -> Решить линейную систему**. В строке **Уравнение 1** записываем $z1=0$, в строке **Уравнение 2** – $z2=0$, **Переменные** –x, y (рис. 70).

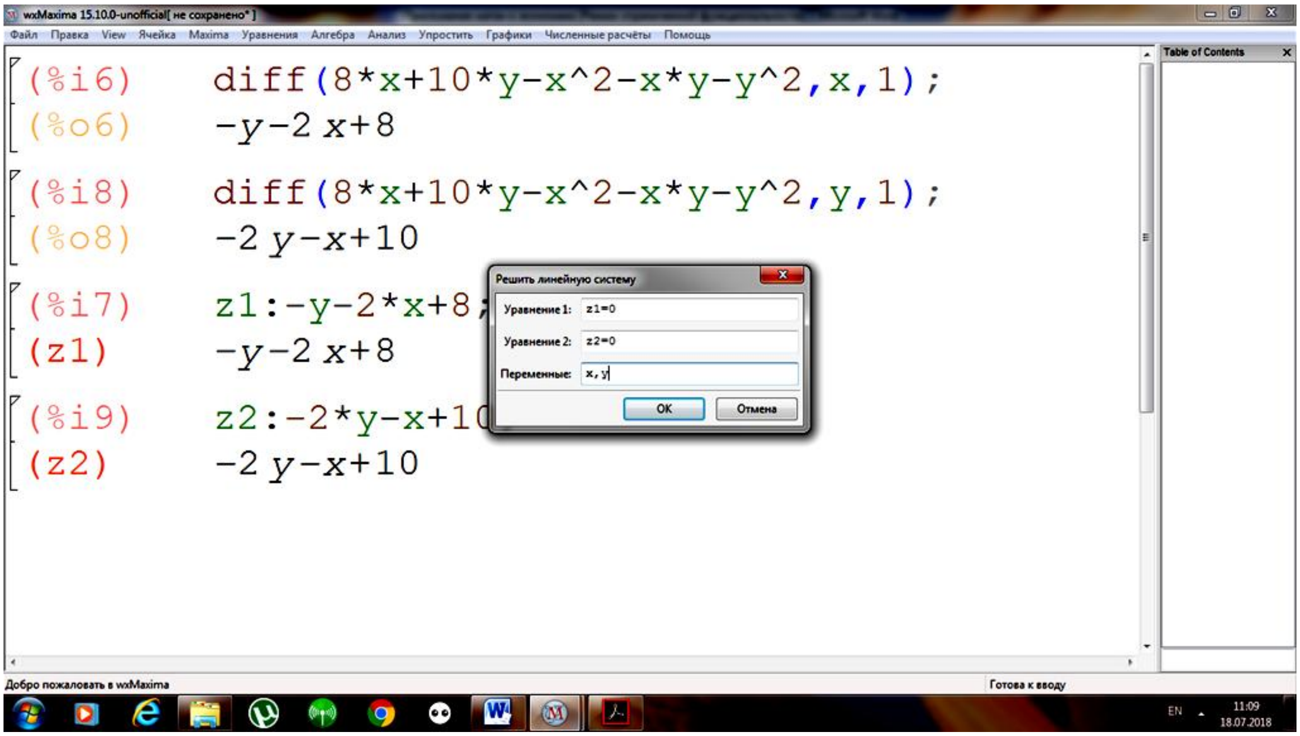

Рис. 70

Решение системы представлено на рисунке 71.

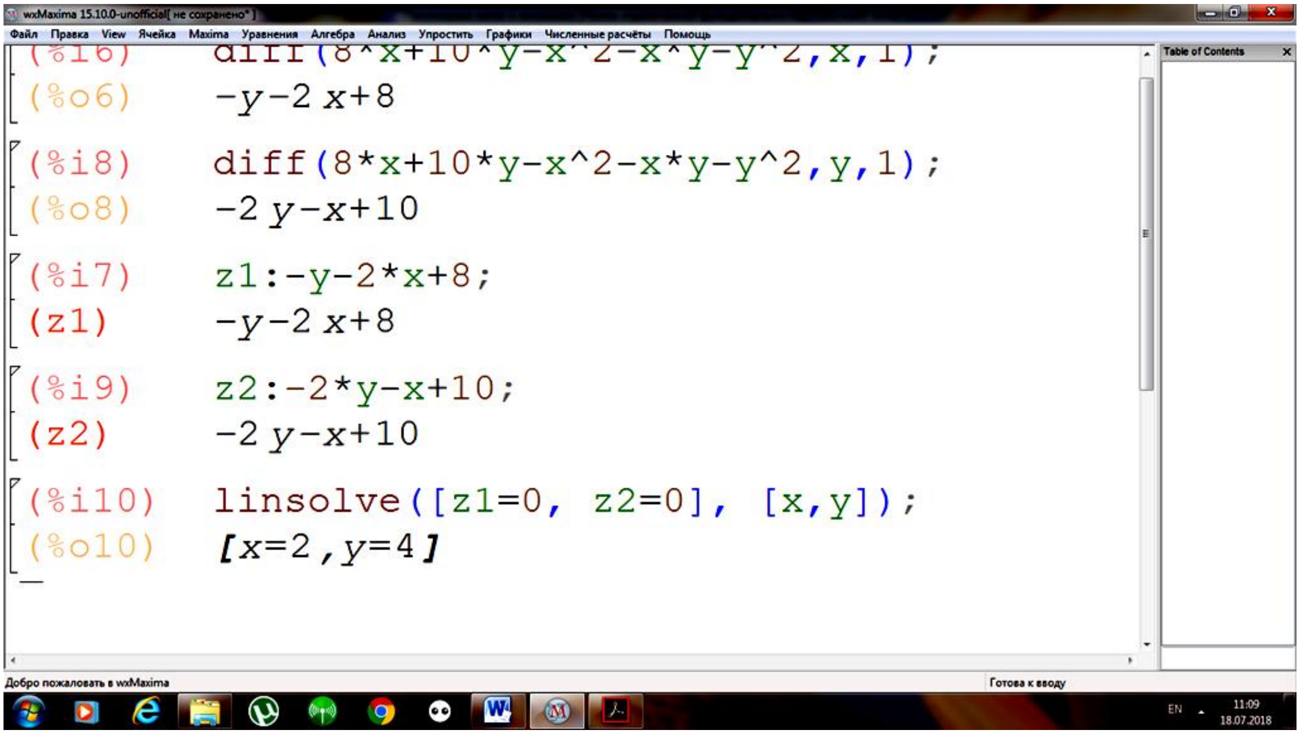

Рис. 71

Найдем частные производные второго порядка. Возьмем функцию $z1$ и продифференцируем ее по x (рис. 72).

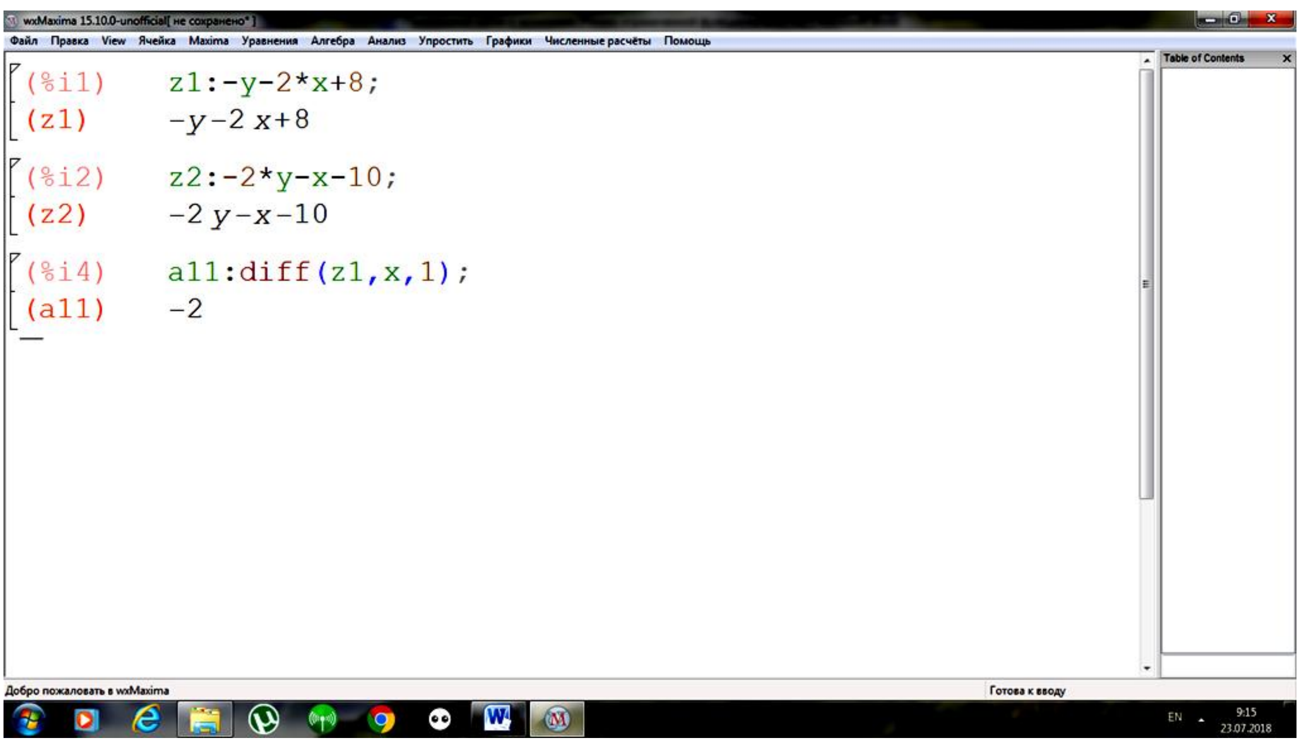

Рис. 72

Аналогично найдем частные производные (рис.73).

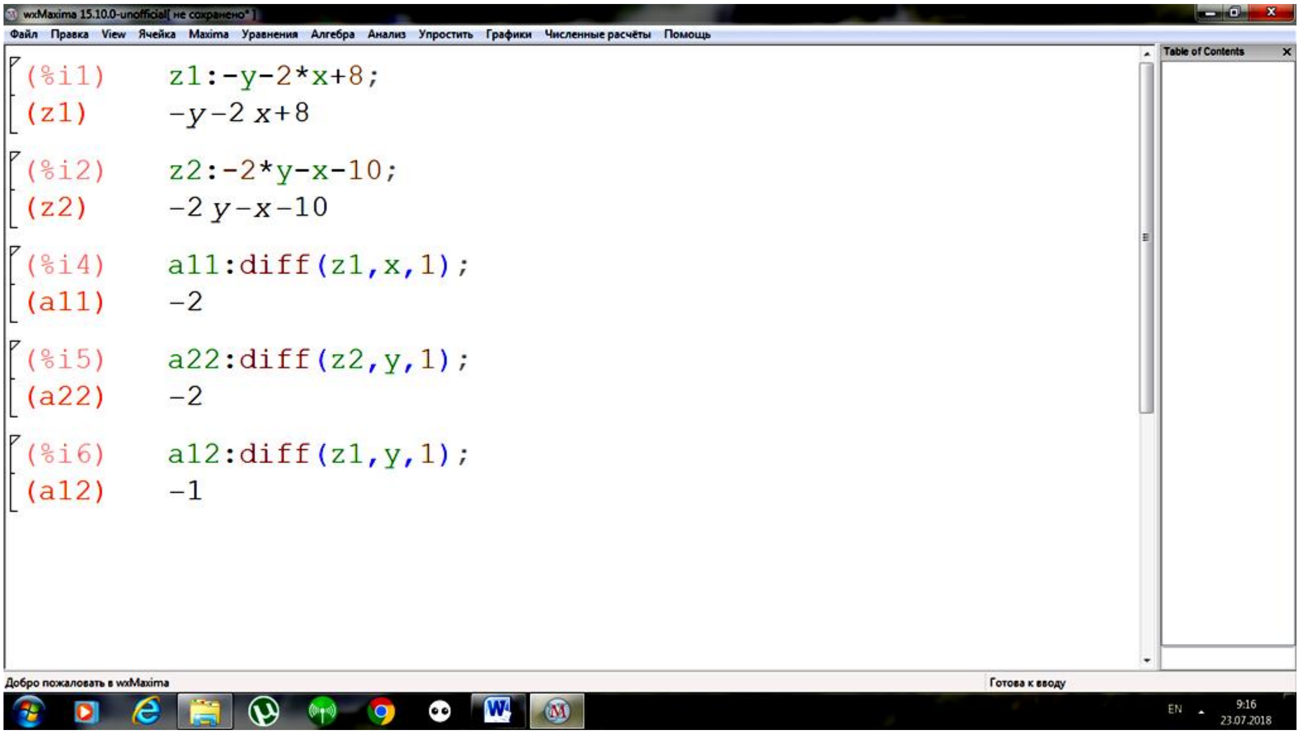

Рис. 73

Найдем *Δ* (рис. 74).

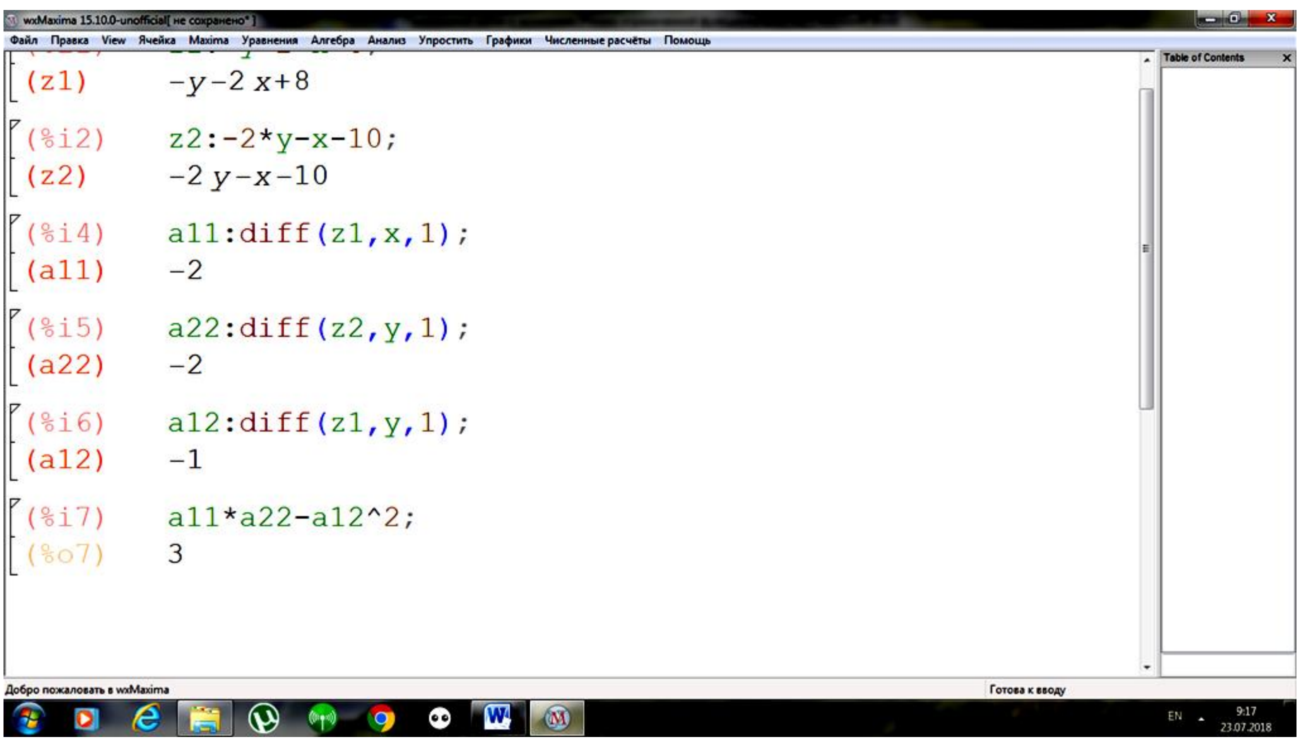

Рис.74

Итак, точка (2; 4) – точка локального минимума. Подставляем эту точку в функцию прибыли (рис. 75).

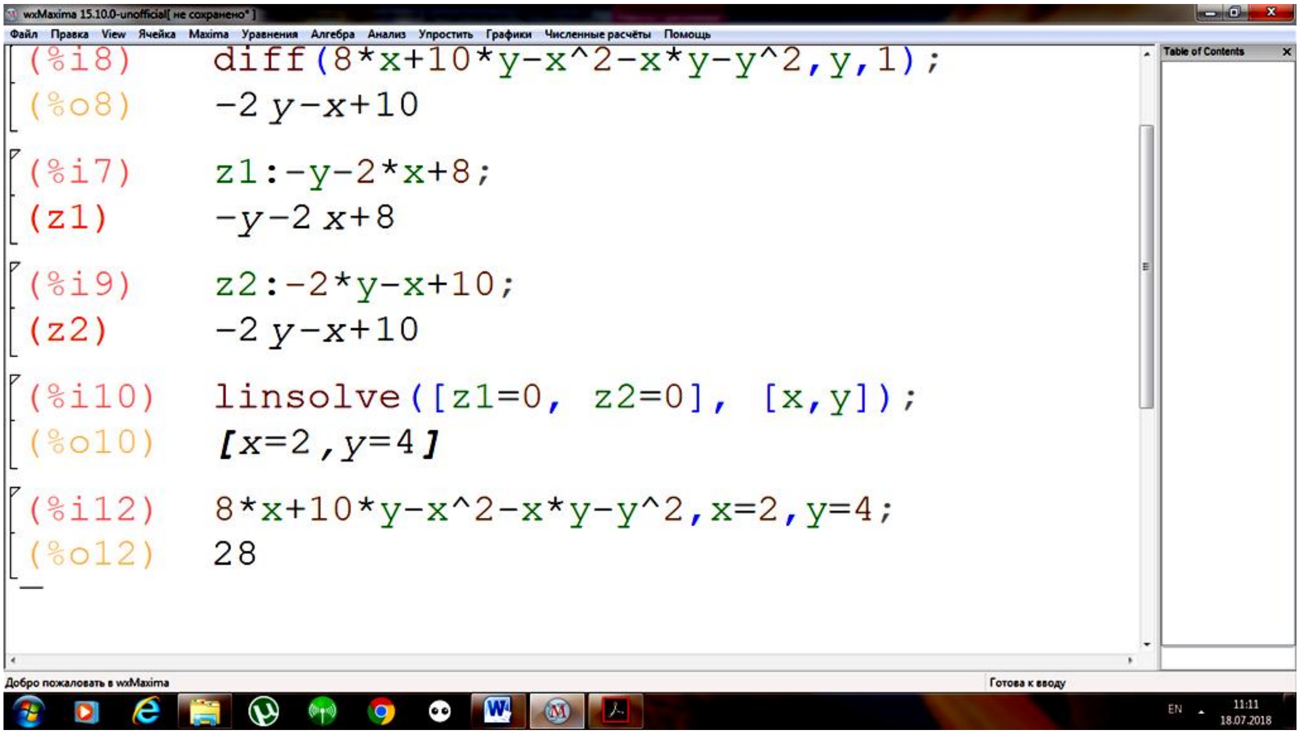

Рис. 75

III. Оптимальное распределение ресурсов. Рассмотрим типичную задачу оптимального распределения ресурсов на примере функции выпуска $u = a_0xy^2$ при допущении, что функция затрат на ресурсы x и y линейна, т.е. имеет вид $u = P_1x+P_2y$, где P_1 и P_2 – соответствующие цены на эти факторы.

В точке $F(x_0, y_0)$, определяющей оптимальное определение ресурсов, линии уровня функций выпуска и затрат касаются (рис. 76).

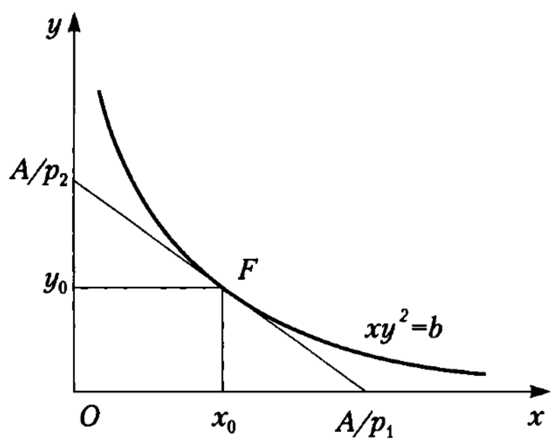

Рис. 76

Эти линии определяются соответственно уравнениями $a_0xy^2 = C$, $P_1x+P_2y = A$, или $y = (b/x)^{1/2}$, $y =- (P_1/P_2)x+A/P_2$, где $C > 0$ и $A > 0$ – постоянные числа, $b = C/a_0$. Условие касания этих линий дается уравнением

$$\left[(b/x)^{1/2}\right]'|_{x_0} = -P_1/P_2.$$

Из этого уравнения определяется значение $x_0 = b^{1/3}(P_2/2P_1)^{2/3}$. Тогда из уравнения линии уровня функции выпуска определяется значение $y_0 = (b/x_0)^{1/2} = b^{1/3}(2P_1/P_2)^{1/3}$. Отсюда получаем, что оптимальное распределение ресурсов x_0/y_0 должно быть произведено в отношении $P_2 : 2P_1$.

IV. Максимизация прибыли производства продукции. Функция прибыли обычно вычисляется по формуле

$$П(K, L) = PF(K, L) - WL - RK, \quad (4.17)$$

где $F(K, L)$ – производственная функция, P – цена продукции, W и R – соответственно факторные цены на труд и капитальные затраты, L и K – соответственно затраты трудовых ресурсов и капитала. Рассмотрим две задачи, связанные с определением максимума прибыли.

1. Точка (K_0, L_0) называется ***оптимальным планом***, если в ней функция прибыли (4.17) принимает максимальное значение. Найти предельную норму замещения производственной функции F при оптимальном плане.

В точке локального экстремума первые производные функции прибыли $П(K, L)$ равны нулю, откуда имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} PF'_K(K_0, L_0) - R = 0, \\ PF'_L(K_0, L_0) - W = 0. \end{cases}$$

Как известно, предельная норма замещения вычисляется по формуле $\mu = -F'_L/F'_K$, откуда при оптимальном плане получаем $\mu = -W/R$.

2. Максимизация функции прибыли. Найти оптимальный план и максимум функции прибыли (8.13), если $F(K, L) = 2(KL)^{1/3}$.

В данном случае функция прибыли имеет вид

$$П(K, L) = 2P(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Условия локального экстремума приводят к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно координат K_0 и L_0 оптимального плана

$$\begin{cases} \frac{2}{3}PL_0^{1/3}K_0^{-2/3} = R, \\ \frac{2}{3}PK_0^{1/3}L_0^{-2/3} = W. \end{cases}$$

Отсюда получаем координаты оптимального плана:

$$K_0 = (2P/3)^3/(R^2W),\ L_0 = (2P/3)^3/(RW^2).$$

Подстановка этих величин в функцию прибыли дает ее максимум:

$$\Pi_{max} = (2P/3)^3/(RW).$$

Задания для самостоятельной работы

4.1. Технология производства одного из товаров характеризуется производственной функцией Кобба – Дугласа $f(K,L) = 70K^{0,35}L^{0,65}$. Найти предельную производительность труда и предельную производительность капитала.

4.2. Объем выпуска товара в некоторой экономике описывается производственной функцией Кобба – Дугласа $y = 4K^{0,25}L^{0,75}$.

1) Предположим, что величины K и L меняются со временем t следующим образом $K(t) = 6t^2 + 2{,}5,\quad L(t) = 0{,}001t^2$. Какова скорость изменения объема выпуска товара в момент времени t = 5.

2) Величины K и L не только меняются со временем t, но и зависят от нормы банковского процента i следующим образом:

$$K(t,i) = 6t^2 + 250i,\quad L(t,i) = \frac{10t^2}{i^2}.$$

Найти скорость изменения объема выпуска со временем и предельный выпуск по норме процента.

4.3. Пусть производственная функция имеет вид

1) $f(K,L) = 6\sqrt{KL}$; 2) $f(K,L) = \sqrt[3]{KL^2}$, где K – объем фондов в стоимостном выражении, L – объем трудовых ресурсов. Изобразить графически изокванты, представляющие разные уровни выпуска. Найти среднюю производительность труда, среднюю фондоотдачу, предельную производительность труда и предельную фондоотдачу.

4.4. Полезность потребления двух товаров для некоторого потребителя описывается формулой:

1) $U(x,y)=\sqrt{xy}$; 2) $U(x,y)=2x+3y$; 3) $U(x,y)=\ln x+\ln y$.

Требуется: а) изобразить графически кривые безразличия потребителя; б) определить предельную полезность каждого товара; в) определить предельную норму замещения для каждого товара; г) прокомментировать ситуации.

4.5. Полезность потребления мороженного и яблок для студента определяется формулой $U(x,y)=2x^2\sqrt{y}$. Определите предельную полезность яблок в наборе, состоящем из двух мороженных и трех яблок, и предельную норму замещения яблок мороженым. Какому из двух следующих наборов студент отдаст предпочтение: два мороженых и три яблока или три мороженных и два яблока?

4.6. Потребитель приобретает на рынке три товара. Полезность от приобретенного набора товаров может быть выражена следующей функцией полезности:

1) $U(x,y,z)=\sqrt{xy^3z^5}$; 2) $U(x,y,z)=\sqrt{x}\cdot y+\sqrt{yz}$.

Найти предельную полезность каждого товара, если известно, что приобретенный набор содержит 16 единиц первого товара, 9 единиц второго товара и 4 единицы третьего товара. Определить предельную норму замещения первого товара третьим для указанного набора товаров. Проверить выполнение первого закона Госсена.

4.7. Технология производства фирмы может быть описана следующей производственной функцией $f(K,L)=25K^{0,25}L^{0,75}$. Изобразить графически изокванты, соответствующие различным уровням выпуска. Определить среднюю производительность труда, среднюю фондоотдачу, предельную производительность труда и предельную фондоотдачу капитала, если стоимость фондов равна 800 000 ден. ед., а стоимость рабочей силы составляет 62 500 ден. ед.

4.8. Функция полезности набора из двух товаров для некоторого потребителя имеет вид:

1) $U(x,y)=2x+y$; 2) $U(x,y)=5x$; 3) $U(x,y)=3x^2y$; 4) $U(x,y)=2y^2$.

Нарисовать кривые безразличия. Найти предельные полезности каждого из товаров, если приобретенный набор содержит 5 единиц первого товара и 7 единиц второго товара.

4.9. Для каждой из следующих функций полезности найти предельную полезность каждого товара и предельную норму замещения первого товара вторым в заданных точках:

1) $U(x,y)=0,3\ln(x-1)+0,4\ln(y-2),\quad x=2,\quad y=3;$

2) $U(x,y)=x^2y(x+1)^{-3},\quad x=1,\quad y=4$.

4.10. Фермерское хозяйство занимается выращиванием культур двух видов. Доход от выращивания х тонн первой культуры составляет $4x(1+0{,}02x)$, а доход от выращивания x тонн второй культуры $6x(1+0{,}1x)$. Определите максимально возможный доход фермерского хозяйства от выращивания этих культур, если ресурсы хозяйства позволяют вырастить не более 25 тонн продукции, а каждой из культур в отдельности может быть выращено не более 15 тонн.

4.11. Фирма производит два вида товаров. Функция ее суммарных затрат имеет вид $TC=10x+xy+10y$. Кривые спроса на каждый вид товара определяются соответственно уравнениями $p_1=50-x+y,\ p_2=30+2x-y$. Найти максимальную прибыль фирмы, если имеются следующие ограничения на объем производимой продукции $x+y=15$.

4.12. Фирма, занимающаяся производством двух видов бытовой техники, реализует ее на рынке по ценам $p(q_1)=2q_1+800,\quad p(q_2)=4q_2+800$. Суммарные затраты на производство продукции определяются следующей формулой $TC=4q_1^2+5q_2^2-20$. Какой объем выпуска продукции желает произвести фирма?

4.13. Приобретая на рынке два товара, потребитель рассчитывает полезность покупки с помощью формулы $U(x,y)=8x^{0{,}5}y^{0{,}25}$. Какой набор будет приобретен потребителем, если его доход равен 360 рублей? Кроме того, известно, что цены на товары равны 12 и 18 рублей соответственно.

4.14. Полезность от приобретения набора ручек и тетрадей для студента выражается формулой $U(x,y)=2\sqrt{xy}$. Какова максимальная полезность этих благ для студента, если цены на ручки и карандаши соответственно равны 10 и 5 рублей, а бюджет студента составляет 105 рублей?

4.15. Функция полезности имеет вид $U(x,y)=12\ln(x-1)+3\ln(y-1)$. Цена первого блага равна 8 ден. ед., а второго – 16 ден. ед. На приобретение этих благ была затрачена сумма в 1000 ден. ед. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их потребления была наибольшей?

4.16. Молодой человек приобретает газеты и журналы, зная, что цены на эти товары соответственно равны 7 и 20 рублей. Он желает истратить на покупку 140 рублей. Функция полезности газет и журналов для молодого человека имеет вид $U(x,y)=10x+y$, Какую покупку совершит молодой человек?

4.17. Изучая свои вкусы и предпочтения, студент пришел к выводу о том, что полезность от потребления трех различных товаров хорошо описывается следующей функцией $U(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{4}}$. Какой набор надо выбрать студенту, если он имеет 660 рублей? Цены на рассматриваемые товары таковы 5, 10 и 15 рублей соответственно.

4.18. Опытным путем установлено, что для некоторой фирмы функция затрат при производстве двух видов товаров имеет вид $TC = x^2 + xy + y^2$. При какой объеме выпуска прибыль фирмы будет максимальной, если на рынке товары продаются по ценам 160 и 200 рублей соответственно?

4.19. Фирма производит продукцию и реализует ее на рынке. Зависимость объема производства от факторов капитала и труда может быть представлена следующим образом $f(K,L) = K^{0,5} L^{0,8}$. Цены, уплачиваемые за факторы, соответственно равны 7 и 8 ден. ед. Цена реализации продукции – 14 ден. ед. При каком соотношении факторов производства фирма будет получать максимальную прибыль?

4.20. Предприниматель решил открыть небольшое автотранспортное предприятие по оказанию услуг населению. Ознакомившись со статистикой, он установил, что примерная зависимость ежедневной выручки от числа автомашин A и числа рабочих N выражается формулой $Y = 900 A^{0,5} N^{0,25}$. Амортизационные и другие ежедневные расходы на одну машину равны 400 руб., ежедневная заработная плата рабочего 100 руб. Найдите оптимальную численность рабочих и автомашин.

4.21. Функция затрат фирмы по производству двух товаров имеет вид $TC = x^2 + 2xy + 3y^2$. Ситуация на рынке такова, что данные товары реализуются по ценам 180 и 100 рублей соответственно. Какое решение по выпуску товаров будет принято руководством фирмы?

4.22. По результатам работы фирмы рассчитана ее производственная функция $f(K,L) = 36 K^{0,75} L^{0,25}$. Какой объем производства будет планировать фирма, располагающая капиталом 20 000 при ценах на ресурсы $p_K = 2,\ p_L = 3$?

4.23. Часть производимого товара фирма-монополист реализует на внутреннем рынке, а оставшуюся часть поставляет на экспорт соответственно по ценам P_1 и P_2. Цена и количество продаваемого товара на внутреннем связаны соотношением $4p_1 + 3x = 720$. Для экспортных поставок связь между ценой и количеством продаваемого товара задается уравнением

$p_2 + y = 500$. Функция затрат фирмы имеет вид $TC = 400 + 20x + 30y$. Какую ценовую политику должна проводить фирма для получения наибольшей прибыли?

4.24. Производственная функция имеет вид $f(x, y) = 30x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$. Стоимость единицы первого ресурса равна 5 ден. ед., а второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден. ед. В этих условиях найти оптимальное для производителя значение количества используемых ресурсов.

4.25. Технологический процесс некоторой фирмы характеризуется следующей производственной функцией $f(K, L) = 200K^{0,5}L^{0,3}$. Найти эластичность выпуска продукции по труду и эластичность выпуска продукции по фондам.

4.26. Потребитель приобретает на рынке три товара. Полезность от приобретенного набора товаров выражается функцией полезности:

1) $U(x, y, z) = \sqrt{xy^3z^5}$; 2) $U(x, y, z) = \sqrt{x} \cdot y + \sqrt{yz}$.

Найти эластичность полезности по каждому товару.

4.27. Пусть технология производства характеризуется производственной функцией Кобба–Дугласа $f(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Найти эластичность выпуска продукции по труду и эластичность выпуска продукции по фондам. Найти перекрестную эластичность ресурсов.

4.28. Производственная функция, описывающая деятельность фирмы, задается формулой

$F(K, L) = \dfrac{K^2 + L^2}{2K^2 + L^2}$. Найти эластичность выпуска по ресурсам в точке $K = 1$, $L = 1$.

4.29. Пусть P_x – цена на товар x, а P_y – цена на товар y. Функция спроса на эти товары имеет вид:

1) $D(P_x) = 8P_x + 4\ln(P_xP_y)$; 2) $D(P_x) = e^{P_xP_y} - 2^{P_x}$.

Найти прямую эластичность спроса по цене и перекрестную эластичность спроса на товар x по цене на товар y.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Определение. ***Дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если от нескольких – то ***уравнением в частных производных***.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{5.1}$$

где Φ – некоторая функция от n +2 переменных, $n \geq 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение n -го порядка называется ***разрешенным относительно старшей производной,*** если оно имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{5.2}$$

где f – некоторая функция от n+1 переменной.

Решением дифференциального уравнения (5.1) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y''+y=0$, так как $(\sin x)''+ \sin x=0$ для любых x.

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется ***задачей интегрирования*** данного дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Определение. ***Общим решением дифференциального уравнения (5.1) или (5.2)*** называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ или короче $y = \varphi(x, C_i)$, где C_i (i=1,…,n)— произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения (5.1) или (5.2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных x_0, y_0, $y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i0}$, такие, что будут выполнены начальные условия $\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0, \varphi'(x_0, C_{i0}) = y_0', ...,$ $\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}$

Определение. Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y, C_i) = 0$, **называется *общим интегралом дифференциального уравнения.***

Определение. Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно ***частным решением* или *частным интегралом дифференциального уравнения.***

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y = \varphi(x)$ (интеграл $\Phi(x, y)=0$) дифференциального уравнения (5.1) или (5.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$ ($\Phi(x_0, y_0)=0$).

С геометрической точки зрения это означает, что среди всех интегральных линий данного уравнения необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема 1 (Коши). Если правая часть уравнения (5.2) является непрерывной функцией в окрестности значений

$$X_0, y_0, y_0', \ldots. y_0^{(n-1)}, \tag{5.3}$$

то уравнение (5.2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале $(a; b)$, содержащем x_o, такое, что

$$y(x_o) = y_o, y'(x_o) = y'_o, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{5.4}$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то решение $y = y(x)$ – единственное.

Числа из совокупности (5.3) называются ***начальными данными***, а равенства (5.4) – ***начальными условиями***.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения (5.1) или (5.2), удовлетворяющее начальным данным (5.3), т. е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (5.4).

Дифференциальные уравнения первого порядка

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0.$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме

$$y' = f(x, y). \tag{5.5}$$

Теорема 2 (Коши). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в ее окрестности, то существует решение $y = y(x)$ уравнения (5.5), такое, что $y(x_0) = y_0$. Если непрерывна также частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ данной функции, то это решение единственно.

Отметим, что иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно, записывать в так называемой ***дифференциальной форме:***

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с ***разделяющимися переменными***, если оно может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ или в виде $M(x)P(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0$, где $f(x)$, $M(x)$, $N(x)$ – некоторые функции переменной x, $g(y)$, $P(y)$, $Q(y)$ – функции переменной y.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной y – в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства

Пример. Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ или $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1$. Это решение можно записать в виде $x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$.

Уравнения вида

$$y' = f(ax + by),$$

где a и b — некоторые числа, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax+by+c$, где c – некоторое число).

Пример. Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1.$$

Решение. Положим $z = x + 2y$. Тогда $z' = 1+2y'$, откуда $y' = \frac{1}{2}(z' - 1)$ и исходное уравнение приводится к виду $\frac{1}{2}z(z'-1) = 1$, который допускает разделение переменных. Действительно, выражая из последнего равенства z', получаем $z' = \frac{z+2}{z}$ и, следовательно, $\frac{zdz}{z+2} = dx$

Выполним почленное интегрирование данного равенства: $\int dx = \int \frac{zdz}{z+2}$.

$$\int \frac{zdz}{z+2} = \int \left(1 - \frac{2}{z+2}\right) dz = \int dz - 2\int \frac{dz}{z+2} = z - 2\ln|z+2| + C_1 .$$

Поэтому $x = z - 2\ln|z+2| + C_1$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем $x = x + 2y - 2\ln|x+2y+2| + C_1$ или $y - \ln|x+2y+2| = C$, где $C = -\frac{1}{2}C_1$.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***однородным***, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(y/x),$$

где f – некоторая функция (одной переменной).

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция $y = f(x, y)$ называется ***однородной степени k*** (по переменным x и y), если для произвольного числа t выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Замена переменной $u = y/x$ позволяет свести однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Так как из замены следует, что $y = ux$, то $y' = u'x + u$, поэтому однородное уравнение приобретает следующий вид

$$u'x + u = f(u).$$

откуда получим, что $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{x+2y}{x}$.

Решение. Так как $\frac{x+2y}{x} = 1 + \frac{2y}{x}$, то это однородное уравнение. Положим $u = y/x$. Тогда

$$y' = \frac{x+2y}{x}.$$

$$u'x + u = 1 + 2u; \quad u'x = 1 + 2u - u;$$

$$\frac{du}{dx}x = 1 + u; \quad \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем $\ln|1+u| = \ln|x| + C_1$, откуда $|1+u| = e^{C_1}|x|$ или $1 + u = Cx$, где $C = \pm e^{C_1}$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим $1 + \frac{y}{x} = Cx$, откуда $y = (Cx-1)x$.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{5.6}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые (непрерывные) функции переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным. Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (5.6): будем искать решение в виде $y=u(x)v(x)$ (подстановка Бернулли) (тем самым искомыми становятся функции $u(x)$ и $v(x)$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая – должна определяться из уравнения (5.6).

Так как $y' = u'v + uv'$, то из (5.6) следует $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или

$$u'v + u(v' + f(x)v) = g(x). \tag{5.7}$$

Найдем сначала какое-либо частное решение $v = v(x)$ уравнения

$$v' + f(x)v = 0. \tag{5.8}$$

Тогда (см.(5.7)) функция $u = u(x)$ – решение уравнения

$$u'v = g(x). \tag{5.9}$$

Тем самым решение исходного уравнения (5.6) сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными (см. (5.8) и (5.9)).

Пример. Решите уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на x, приходим к линейному неоднородному уравнению: $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Пусть $y = uv$, т.е. $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение примет вид

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3. \tag{5.10}$$

Положим $\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 0$ или $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$, откуда $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$. Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при C=0: $\ln|v| = 2\ln|x|$ и $v = x^2$. При $v = x^2$ равенство (5.10) обратится в уравнение $u'x^2 = 2x^3$, или $\frac{du}{dx} = 2x$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = x^2 + C$. Тогда окончательно имеем

$$y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2.$$

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{5.11}$$

где $n = const \in R$, $n \neq 0, n \neq 1$, а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к уравнению (5.11), называется ***уравнением Бернулли***.

Уравнение Бернулли, как и линейное уравнение (5.11), можно решить с помощью подстановки Бернулли $y = u(x)u(x)$.

Другой способ: путем введения новой функции $z(x)$ по формуле $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению относительно этой функции:

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \tag{5.12}$$

Решив уравнение (5.12), найдем $z = z(x, C)$, а затем и $y = z^{1/(1-n)}$.

Пример. Найти общее решение уравнения Бернулли $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}$.

Решение. Так как для данного уравнения, $a = 1/2$, можно сделать замену $z = y^{1-a} = \sqrt{y}$. Согласно уравнению (5.12), получим уравнение $z' + e^x z = e^x$, которое приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = e^x(1-z); \frac{dz}{1-z} = e^x dx;$$

$$(-1)\cdot\int\frac{d(1-z)}{1-z} = \int e^x dx; -\ln|1-z| - e^x = C$$

$$\ln(1-z) = -(C + e^x),$$

$$1 - z = e^{-(C+e^x)}; z = 1 - e^{-C}e^{-e^x}; z = 1 + C_1 e^{-e^x},$$

$$где \quad C_1 = -e^{-C}$$

Общее решение исходного уравнения $y = z^2 = (1 + C_1 e^{-e^x})^2$.

Применение в экономике

I. Модель естественного роста выпуска. Пусть $y(t)$ – объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t. Будем полагать, что вся произведенная отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т.е. выполнено условие не насыщаемости рынка. Тогда доход к моменту t составит $Y(t) = py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$y' = l \cdot I(t), \tag{5.13}$$

где l = const. Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства и ее реализацией, т.е. считаем, что инвестиционный лаг равен нулю.

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = m \cdot Y(t) = mpy(t), \tag{5.14}$$

где коэффициент пропорциональности m (так называемая норма инвестиций) – постоянная величина, $0<m<l$. Подставляя последнее выражение (5.14) для $I(t)$ в (5.13), приходим к уравнению

$$y' = ky, \text{ где } k=mpl. \tag{5.15}$$

Полученное дифференциальное уравнение – с разделяющимися переменными. Решая его,

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y; \tag{5.16}$$

$$\frac{dy}{y} = k \cdot dt; \int \frac{dy}{y} = k \int dt;$$

$$\ln y + \ln c = kt;$$

$$\ln cy = kt; \quad e^{\ln cy} = e^{kt}; \quad cy = e^{kt}$$

приходим к функции

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}, \text{ где } y_0=y(t_0).$$

Заметим, что уравнение (5.16) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции.

II. Пусть доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t)\,. \tag{5.17}$$

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t)\ , \tag{5.18}$$

где b – коэффициент капиталоемкости прироста дохода (что равносильно (5.13) при постоянной цене на продукцию p и $l = l/(pb)$).

Рассмотрим поведение функции дохода $Y(t)$ в зависимости от функции $C(t)$. Пусть $C(t)$ представляет фиксированную часть получаемого дохода $C(t) = (1-m)Y(t)$, где m – норма инвестиций. Тогда из (5.17) и (5.18) получаем

$$Y'(t) = \frac{m}{b}Y\ ,$$

что равносильно уравнению (5.16) при $p = const$.

III. Рост выпуска в условиях конкуренции. В этой модели мы снимем предположение о ненасыщаемости рынка. Пусть $P = P(Q)$ – убывающая функция, т.е. с увеличением объема продукции на рынке цена на нее падает: $dP/dQ < 0$. Теперь из формул (5.13)-(5.15) мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными:

$$Q' = aP(Q)Q,\ \ \alpha = lm. \tag{5.19}$$

Поскольку все сомножители в правой части этого уравнения положительны, то $Q' > 0$, т.е. функция $Q(t)$ возрастающая.

Характер возрастания функции определяется ее второй производной. Из уравнения (6.19) получаем

$$Q'' = \alpha\left[Q'P(Q) + Q\frac{dP}{dQ}Q'\right] = \alpha Q'\left(P + \frac{dP}{dQ}Q\right).$$

Это равенство можно преобразовать, введя эластичность спроса $E(P) = \frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}$, откуда $Q'' = \alpha Q'P\left(1 + \frac{dP}{dQ}\cdot\frac{Q}{P}\right)$, или, так как $\frac{dQ}{dP} < 0$, а значит, и $E < 0$, окончательно получаем

$$Q'' = \alpha Q'(P - 1/|E|). \tag{5.20}$$

Из уравнения (5.20) следует, что $Q'' > 0$ при эластичном спросе, т.е. когда $|E| > 1$, и график функции $Q(t)$ имеет направление выпуклости вниз, что означает прогрессирующий рост. При неэластичном спросе $|E| < 1$, и в этом случае $Q'' < 0$ — направление выпуклости функции $Q(t)$ вверх, что означает замедленный рост (насыщение).

Для простоты примем зависимость $P(Q)$ в виде линейной функции

$$P(Q) = a - bQ,\ a > 0,\ b > 0,$$

(рис. 77). Тогда уравнение (5.19) имеет вид

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q,$$

откуда

$$Q'' = \alpha\, Q'(a - 2bQ).$$

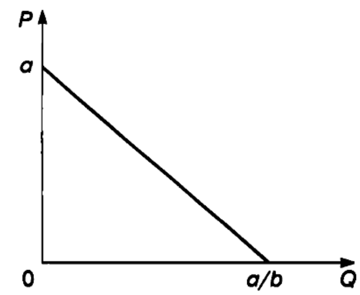

Рис. 77

Из соотношений (5.19) и (5.20) получаем: $Q' = 0$ при $Q = 0$ и при $Q = a/b$, $Q'' > 0$ при $Q<a/(2b)$ и $Q'' < 0$ при $Q > a/(2b)$; $Q = a/(2b)$ – точка перегиба графика функции $Q = Q(t)$. Приведенный на рисунке 78 график этой функции носит название ***логистической кривой***.

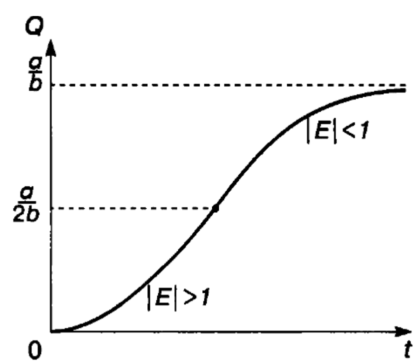

Рис. 78

IV. Динамическая модель Кейнса. Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ – соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени t. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \end{cases} \qquad (5.21)$$

$$I(t) = k(t)Y'(t),$$

где $a(t)$ – коэффициент склонности к потреблению ($0<a(t)<l$), $b(t)$ – автономное (конечное) потребление, $k(t)$ – норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (5.21), положительны.

Поясним смысл уравнений (5.21). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу – этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода в народном хозяйстве и конечного потребления – эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход.

Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $E(t)$ заданы – они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Требуется найти динамику национального дохода, или Y как функцию времени t.

Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравнения и для $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \tag{5.22}$$

Для дифференциального уравнения (5.22) существует достаточно сложная формула общего решения. Мы рассмотрим более простой случай, полагая основные параметры задачи a, b, k и E постоянными числами. Тогда уравнение (5.22) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \tag{5.23}$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения уравнения (5.23) возьмем так называемое равновесное решение, когда $Y' = 0$, т.е.

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a}\,. \tag{5.24}$$

Нетрудно видеть, что эта величина положительна. Общее решение однородного уравнения дается формулой $\tilde{y} = Ce^{\frac{1-a}{k}t}$, так что общее решение уравнения (5.23) имеет вид

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}\quad. \tag{5.25}$$

Интегральные кривые уравнения (5.23) показаны на рисунке 79. Если в начальный момент времени $Y_0 < Yp$, то $C = Y_0 - Yp < 0$ и кривые уходят вниз от равновесного решения (5.24), т.е. национальный доход со временем падает при заданных параметрах задачи *a, b, k* и *E,* так как показатель экспоненты в (5.25) положителен. Если же $Y_0 > Yp$, то $C > 0$ и национальный доход растет во времени - интегральные кривые уходят вверх от равновесной прямой $Y= Y_p$.

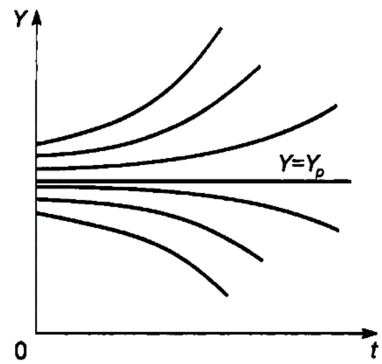

Рис. 79

Уравнение (5.23) является автономным; точка $Y=Y_p$ представляет собой точку неустойчивого равновесия.

V. Неоклассическая модель роста. Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где F – однородная производственная функция первого порядка ($F(tK, tL) = tF(K, L)$), $К$ – объем капиталовложений (производственных фондов), L – объем затрат труда. Введем в рассмотрение величину фондовооруженности $k = K/L$, тогда производительность труда выражается формулой

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(k,1) \qquad (5.24)$$

Целью этой задачи является описание динамики фондовооруженности или представление ее как функции от времени t. Поскольку любая модель базируется на определенных предпосылках, нам нужно сделать некоторые предположения и ввести ряд определяющих параметров. В данном случае будем полагать, что выполнены следующие предположения.

1. Имеет место естественный прирост во времени трудовых ресурсов:

$$L' = \alpha L. \qquad (5.25)$$

2. Инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов и на амортизацию, т.е.

$$I = K' + \beta K,$$

где β – норма амортизации.

Тогда если l – норма инвестиций, то $I = lY = K' + \beta K$, или

$$K' = lF(K, L) - \beta K.$$

Из определения фондовооруженности k вытекает, что

$$\ln k = \ln K - \ln L.$$

Дифференцируя это равенство по t, имеем

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} = \frac{L'}{L}. \tag{5.26}$$

Подставив в это соотношение выражения (5.25) и (5.26), получаем уравнение относительно неизвестной функции k

$$k' = lf(k) - (\alpha+\beta)k, \tag{5.27}$$

где функция $J(k)$ определена по формуле (5.24).

Полученное соотношение (5.27) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (которое является автономным). Выделим стационарное решение этого уравнения; из условия $k' = 0$ следует, что

$$lf(k) - (\alpha+\beta)k = 0, \tag{5.28}$$

т.е. k = const - постоянная величина, являющаяся корнем этого нелинейного алгебраического уравнения.

Рассмотрим производственную функцию $F(K, L) = \sqrt{KL}$. Найдем интегральные кривые уравнения (5.27) и стационарное решение. Из (5.24) следует, что $f(k) = \sqrt{k}$ и тогда уравнение (5.27) имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Стационарное решение этого уравнения следует из равенства

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0,$$

откуда получаем ненулевое частное решение уравнения (5.27): $k_{st} = I^2/(\alpha+\beta)^2$.

Дифференциальное уравнение (5.27) решаем методом разделения переменных:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[l-(\alpha+\beta)\sqrt{k}\right]} = dt.$$

Интегрируя это уравнение с заменой переменной $\sqrt{k} = z$, получаем его общее решение в окончательном виде:

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha+\beta} + Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right]^2. \tag{5.29}$$

Семейство интегральных кривых сходится сверху и снизу к стационарному решению (рис. 80): т.е. $k \to k_{st}$ при $t \to \infty$. Следовательно, при неизменных входных параметрах задачи

l, α и β функция фондовооруженности в данном случае устойчиво стремится к стационарному значению независимо от начальных условий. Такая стационарная точка $k = k_{st}$ является точкой устойчивого равновесия.

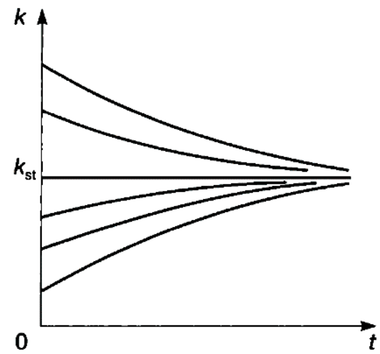

Рис. 80

Определение. ***Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*** имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x). \tag{5.30}$$

где p, q — некоторые действительные числа, $r(x)$ – некоторая функция. Если $r(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{5.31}$$

называется ***однородным***; в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (5.30) называется ***неоднородным***.

Определение. Уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** исходного уравнения (5.31).

Теорема. Пусть характеристическое уравнение уравнения имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (5.31) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1 и C_2 – некоторые числа.

2. Если характеристическое уравнение имеет один корень λ (кратности 2), то общее решение уравнения (5.31) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x},$$

где C_1 и C_2 – некоторые числа.

3. Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то общее решение уравнения (5.31) имеет вид

$$y = C_1 e^{ax} \sin \beta x + C_2 e^{ax} \cos \beta x,$$

где $\alpha = -p/2, \beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1, C_2 — некоторые числа.

Пример. Найти частное решение следующих уравнений при указанных начальных условиях:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 4$;

б) $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0$.

Решение: а) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Найдем такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия. Так как $y(0) = C_1 + C_2$ и $y'(0) = C_1 + 2C_2$, то постоянные C_1 и C_2 находим, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Искомое частное решение $y = 2e^x + e^{2x}$.

б) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. Так как $y(0) = 1$, то $C_1=1$ и, поскольку $y' = y + C_2 e^x$ и $y'(0) = 0$, то $C_2 = -1$. Таким образом, окончательно получаем частное решение $y = (1 - x)e^x$.

Перейдем теперь к решению линейного неоднородного уравнения (5.30) с постоянными коэффициентами. Это уравнение может быть в частности решено методом ***вариации произвольных постоянных***, который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного уравнения (5.31), имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (5.30). Затем решение уравнения (5.30) находится в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, т.е. предполагается, постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r. \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Решение. Решая соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

находим $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Полагая теперь, что C_1 и C_2 – функции переменной x, найдем первые производные этих функций, решая систему

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^{2x} + C_2' 2e^{2x} = e^x. \end{cases}$$

Найдем $C_1' = -1$, $C_2' = e^{-x}$. Полученные дифференциальные уравнения – с разделяющимися переменными. Решая эти уравнения, получаем $C_1 = -x + C_3$, $C_2 = -e^{-x} + C_4$, где C_3, C_4 – некоторые постоянные. Таким образом, окончательно решение уравнения имеет вид

$$y = (-x + C_3)e^x + (-e^{-x} + C_4)e^{2x} = C_3 e^x + C_4 e^{2x} + (-x - 1)e^x.$$

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.30) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (5.31) и частного решения исходного неоднородного уравнения (5.30).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть правая часть уравнения (5.30) является многочленом степени m, т.е. имеет вид

$$r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_m$ - действительные числа и $a_m \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (5.30) следует искать в виде

$$u(x) = (C_0 + C_1 x + \dots + C_m x^m)x^s,$$

т.е. в виде произведения многочлена той же степени m на x^s где $s = 0$, если $q \neq 0$, $s = 1$, если $q = 0$ и $p \neq 0$ и $s = 2$, если $q = p = 0$. (Другими словами, показатель степени s равен кратности значения $x = 0$ как корня характеристического многочлена).

2. Пусть правая часть уравнения (5.30) имеет вид

$$r(\mathrm{x}) = Ae^{ax},$$

где α и A — некоторые действительные числа. Тогда частное решение уравнения (5.30) следует искать в виде

$$u(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_0 x^s e^{ax},$$

где показатель степени s равен кратности значения $x = a$ корня характеристического многочлена.

Пример. Найти частные решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$;

б) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Решение: *а*) В данном случае $\alpha = 3$ и поскольку такого значения нет среди корней $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2)$ характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, то $s = 0$. Таким образом, частное решение уравнения (a) будем искать в виде $u = C_0 e^{3x}$. Тогда $u' = 3C_0 e^{3x}$, и $u'' = 9C_0 e^{3x}$. Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (a), приходим к равенству

$$9C_0 e^{3x} - 9C_0 e^{3x} + 2C_0 e^{3x} = 2e^{3x}$$

или $2C_0 e^{3x} = 2e^{3x}$, которое должно удовлетворяться тождественно. Поэтому $C_0 = 1$ и искомое частное решение $u = e^{3x}$.

б) Здесь $a = 2$ и это значение совпадает с одним из двух различных корней ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$) соответствующего характеристического уравнения. Поэтому $s = 1$, и частное решение уравнение (б) будем искать в виде $u = C_0 x e^{3x}$.

Подставляя выражения u и ее производных в уравнение (б) получим (после преобразований) $u = xe^{3x}$.

3. Пусть правая часть уравнения (5.30) имеет вид $r(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где некоторые действительные числа и $\beta \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (6.30) следует искать в виде

$$u(x) = x^s\ (\mathrm{C}_0 \cos\beta x + \mathrm{C}_1 \sin\beta x),$$

где $s = 1$, если одновременно выполнены условия $p = 0$ (см 4), $q > 0$, $\beta = \sqrt{q}$, и $s = 0$ в остальных случаях. (Условия случая $s = 1$ равносильны требованию, чтобы значение β в выражении $r(x)$ было таково, что комплексное число $i\beta$ было одним из корней характеристического уравнения (5.30)).

Пример. Найти частное решение уравнения

$$\mathrm{y}'' - 3\mathrm{y}' + 2\mathrm{y} = \sin x.$$

Решение. По сформированному правилу частное решение в данном случае следует искать в виде $u = \mathrm{C}_0 \cos x + \mathrm{C}_1 \sin x$. Найдем $u' = -\mathrm{C}_0 \cos x + \mathrm{C}_1 \sin x$, $u'' = -\mathrm{C}_0 \cos x - \mathrm{C}_1 \sin x$. Подставляя выражения u'', u', u в уравнение, приходим к равенству

$$(-3C_1 + \mathrm{C}_0)\cos x + (-C_1 + 3\mathrm{C}_0 + 2C_1)\sin x = \sin x,$$

которое должно удовлетворяться тождественно. Учитывая, что $\sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$, получим систему

$$\begin{cases} -3C_1 + C_0 = 0, \\ C_1 + 3C_0 = 1. \end{cases}$$

Откуда $C_0 = 0{,}3$, $C_1 = 0{,}1$ и, следовательно, искомое выражение имеет вид

$$u = 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x.$$

Рассмотренные случаи различных выражений правой части уравнения (6.30) являются частными случаями функции вида

$$r(x) = e^{ax}(f(x)\cos\beta x + g(x)\sin\beta x), \tag{5.32}$$

где $f(x)$, $g(x)$ – многочлены (с действительными коэффициентами); α, β – некоторые (действительные) числа.

Можно показать, что частное решение уравнения (5.30) с правой частью (5.32) следует искать в виде

$$u = x^s e^{ax}(v(x)\cos\beta x + w(x)\sin\beta x), \tag{5.33}$$

где s равно кратности корня $a + i\beta$ характеристического многочлена; $v(x)$, $w(x)$ – многочлены, степень которых равна наибольшей из степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в выражении (5.32). Коэффициенты многочленов $v(x)$ и $w(x)$ находятся из системы линейных уравнений, получаемой после подстановки решения (5.33) и его производных в уравнение (5.30).

Замечание. Если правая часть $r(x)$ уравнения (5.30) является суммой некоторых функций, т.е.

$$r(\mathrm{x}) = r_1(\mathrm{x}) + r_2(\mathrm{x}) + \ldots + r_k(\mathrm{x}),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частные решения $u_i(x)$ уравнений $y'' + py' + qy = r_1(x)$, где $i = 1,2,\ldots$, к, т.е.

$$u(\mathrm{x}) = u_1(\mathrm{x}) + u_2(x) + \ldots + u_k(x).$$

Пример. Решить уравнение

$$\mathrm{y}'' - 3\mathrm{y}' + 2\mathrm{y} = 2e^{3x} + e^{2x} + \sin x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $\mathrm{y}'' - 3\mathrm{y}' + 2\mathrm{y} = 0$. Получим $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Учитывая замечание, частное решение u дифференциального уравнения (14) будет равно сумме частных решений уравнений

$\mathrm{y}'' - 3\mathrm{y}' + 2\mathrm{y} = 2e^{3x}$, $\mathrm{y}'' - 3\mathrm{y}' + 2\mathrm{y} = e^{2x}$, $\mathrm{y}'' - 3\mathrm{y}' + 2\mathrm{y} = \sin x$, т.е.

$$u(\mathrm{x}) = u_1(\mathrm{x}) + u_2(x) + u_2(x) = e^{3x} + xe^{2x} + 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x.$$

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = \tilde{y} + u = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x} + xe^{2x} + 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x.$$

Приложение в экономике. Модель рынка с прогнозируемыми ценами

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят еще и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18,$$

$$S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3. \qquad (5.34)$$

Принятые в (5.34) зависимости вполне реалистичны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос "подогревается" темпом изменения цены: если темп растет ($P''>0$), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, потому слагаемое, содержащее P', входит в выражение для $S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравняем правые части уравнений (5.34). После приведения подобных слагаемых получаем

$$P'' + 2P' + 5P = 15. \qquad (5.35)$$

Соотношение (5.35) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$P'' + 2P' + 5P = 0. \qquad (5.36)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Его корни – комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = -1\pm 2i$, и, следовательно, общее решение уравнения (5.36) дается формулой

$$\tilde{P}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (5.35) возьмем решение $P = Pst$ – постоянную величину как ***установившуюся цену.*** Подстановка в уравнение (5.35) дает значение P_{st}: $P_{st} = 3$. Таким образом, общее решение уравнения (5.35) имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \qquad (5.36)$$

Нетрудно видеть, что $P(t) \to Pst = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Частные решения этой задачи.

1. Задача Коши. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция ее изменения: $t = 0$; $P = 4$, $P' = 1$. Подставляя первое условие в формулу (5.36), получаем $P(0)=C_1 + 3 = 4$, откуда $C_1 = 1$, т.е. имеем

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \qquad (5.37)$$

Дифференцируя, имеем отсюда

$$P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t).$$

Теперь реализуем второе условие задачи Коши: $P'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно получаем, что решение задачи Коши имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t).$$

2. Смешанная задача. Пусть в начальный момент времени известны цена и спрос: $t = 0$; $P = 4$, $D = 16$. Поскольку первое начальное условие такое же, как и в предыдущем случае, то имеем и здесь решение (5.37). Тогда производные функции $P(t)$ выражаются формулами

$$P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t),$$

$$P''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t).$$

Отсюда $P'(0) = 2C_2 - 1$ и $P''(0) = -4C_2 - 3$. Подставляя эти равенства во второе условие задачи, т.е. $D(0) = 16$, имеем с учетом вида $D(t)$ из первой формулы (5.35): $C_2 = -1$. Итак, решение данной задачи имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t).$$

Интегральные кривые, соответствующие задачам 1 и 2, изображены на рисунке 81.

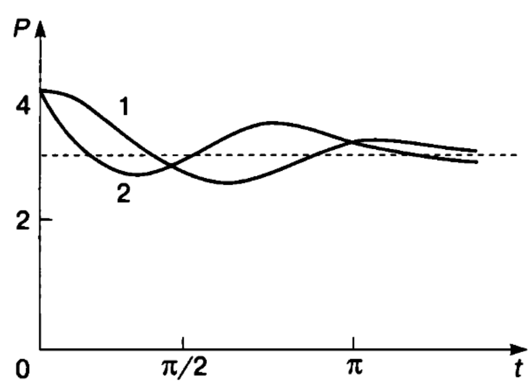

Рис. 81

Решим эту задачу в пакете «Maxima».

По умолчанию все переменные в Maxima являются независимыми. Поэтому, перед тем как приступить к заданию и решению дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, необходимо указать, что переменная y зависит от x. Для этого используем команду **depends(y,x)** (рис. 82).

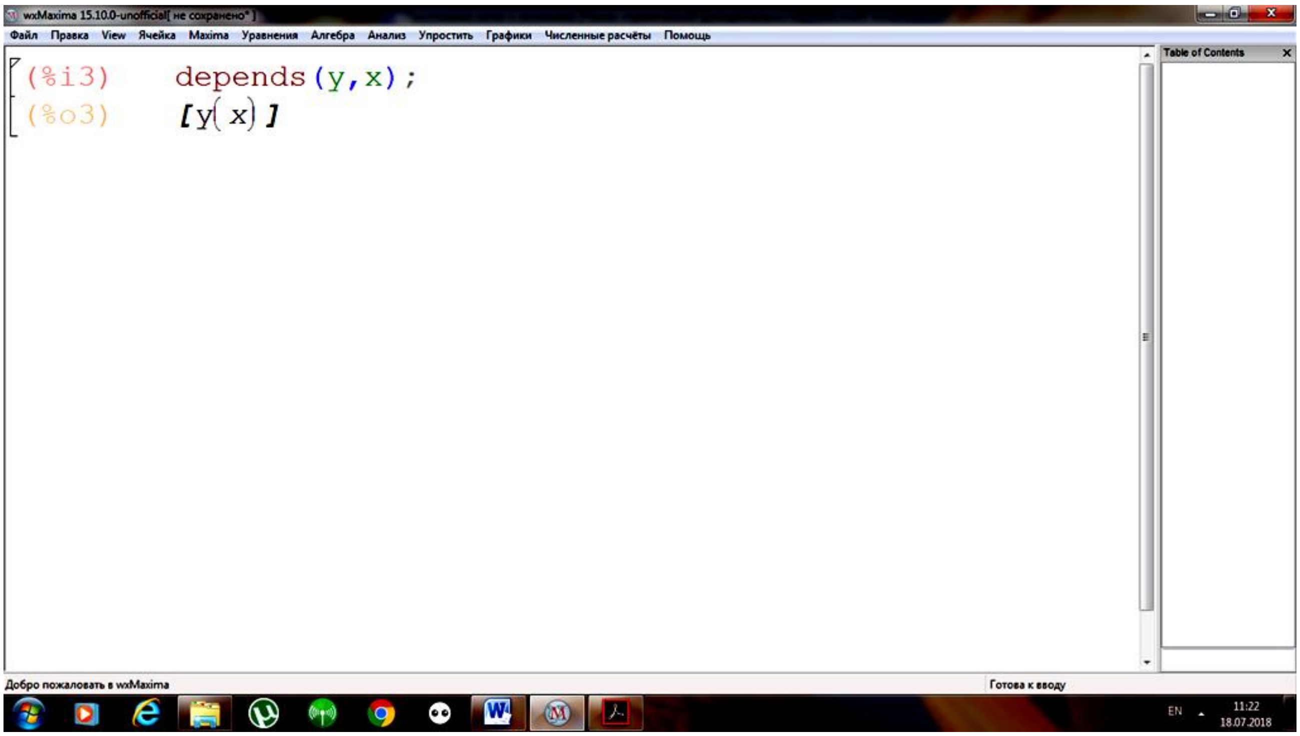

Рис. 82

Введем исходное дифференциальное уравнение и обозначим его ***eq*** (рис. 83).

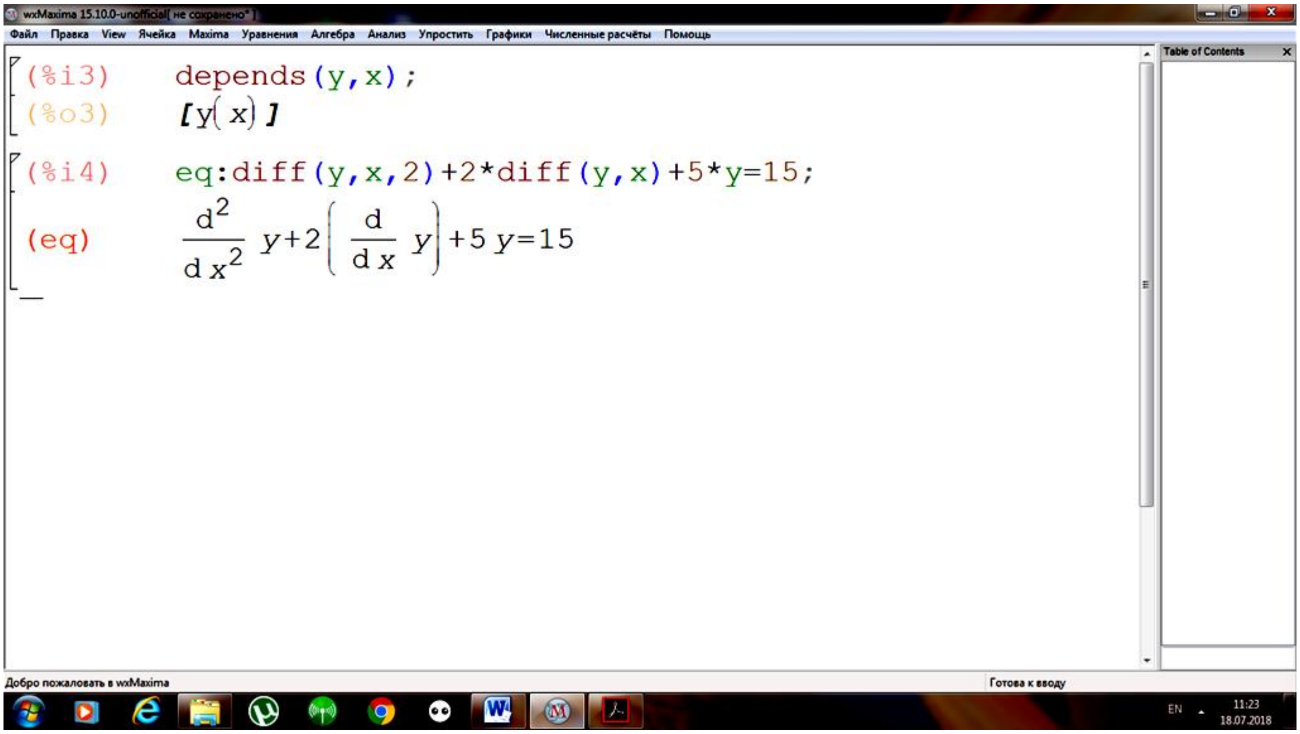

Рис. 83

Решим его. Для этого выберем в командной строке **Уравнения -> Решить ОДУ**. Решение данного дифференциального уравнения представлено на рисунке 84. Здесь ***%k1*** и ***%k2*** – произвольные постоянные.

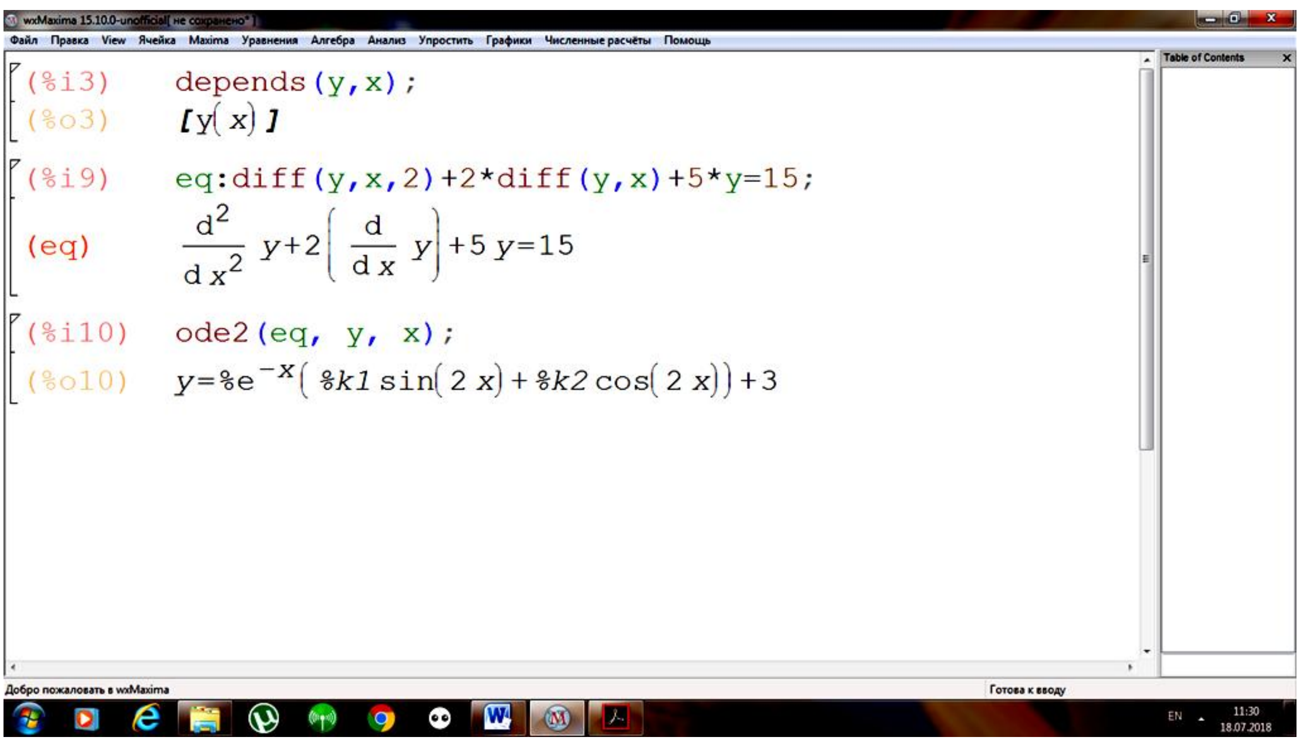

Рис. 84

Обозначим полученное решение через *y* (рис. 85).

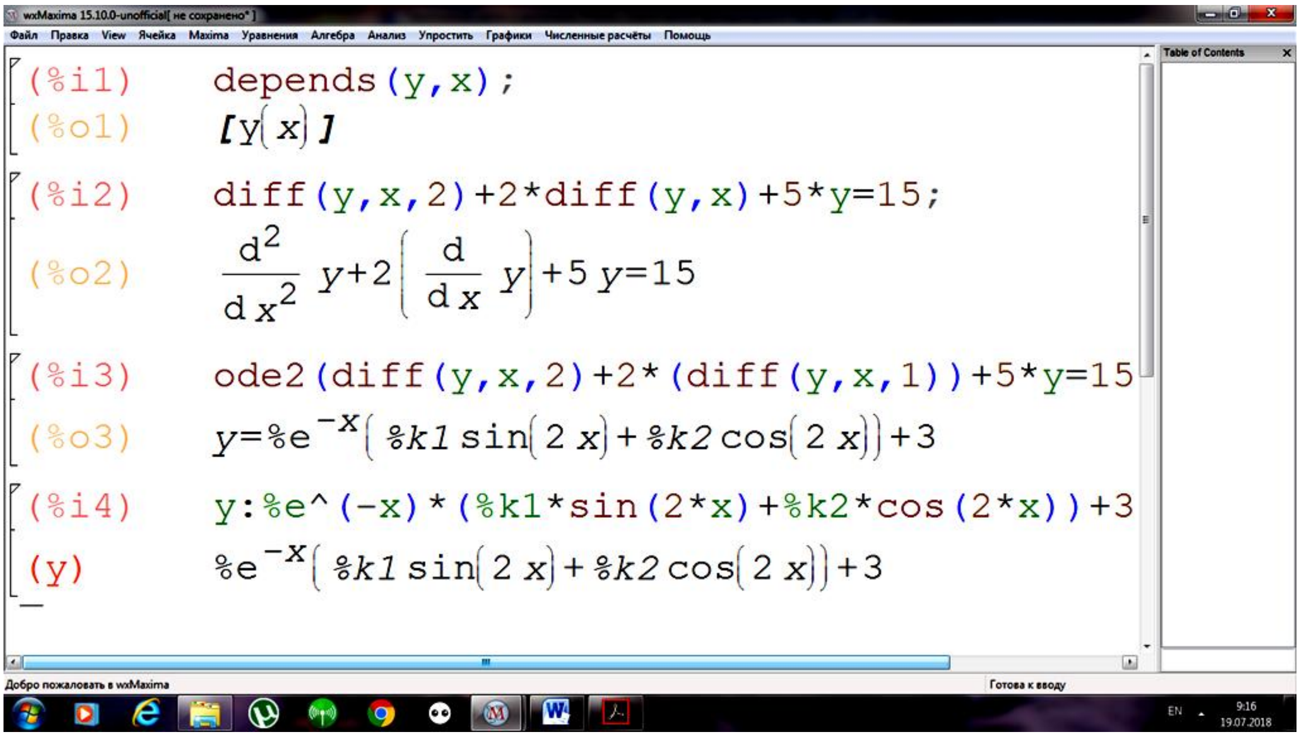

Рис. 85

Найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Выберем вкладку **Уравнения -> Initial Value Problem (2)** (рис. 86).

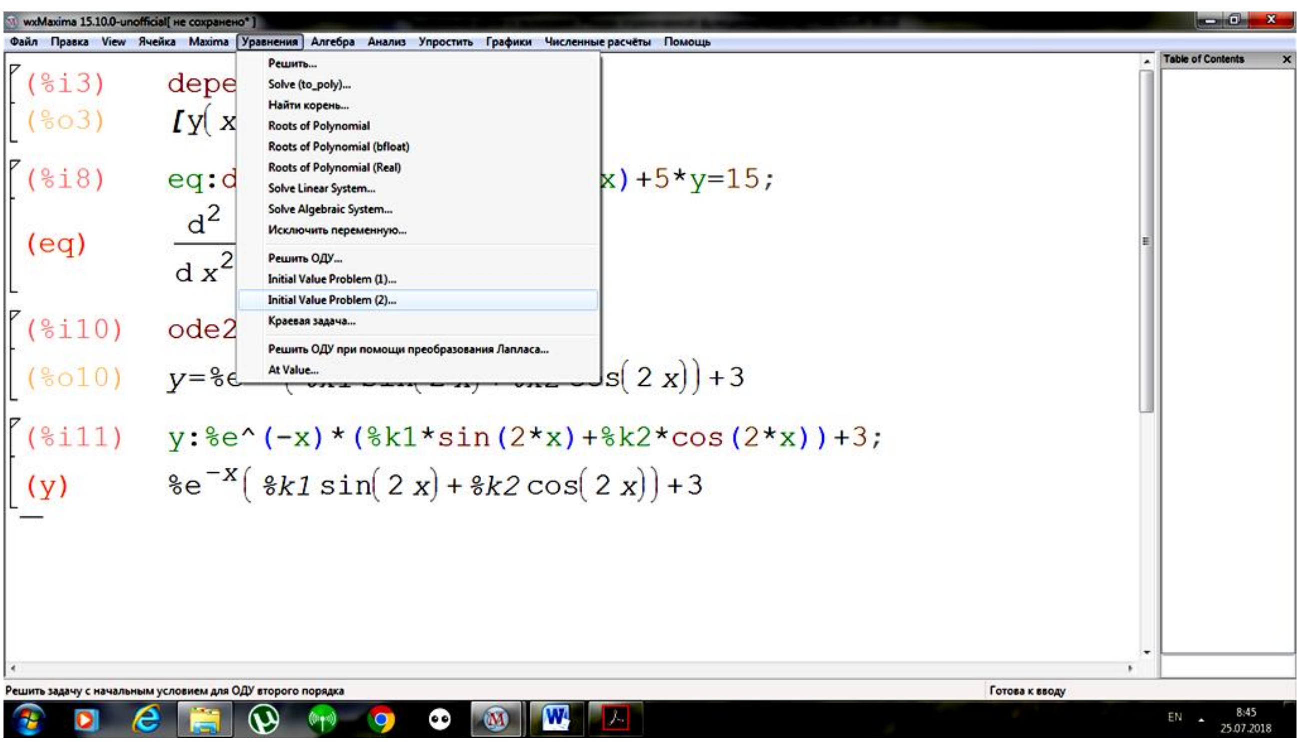

Рис. 86

В таблице введем **Решение** – *y;* **Точка** - *x*=0*;* **Значение** – *y*=4*;* **Производная** - $'diff(y,x) = 1$ (рис. 87).

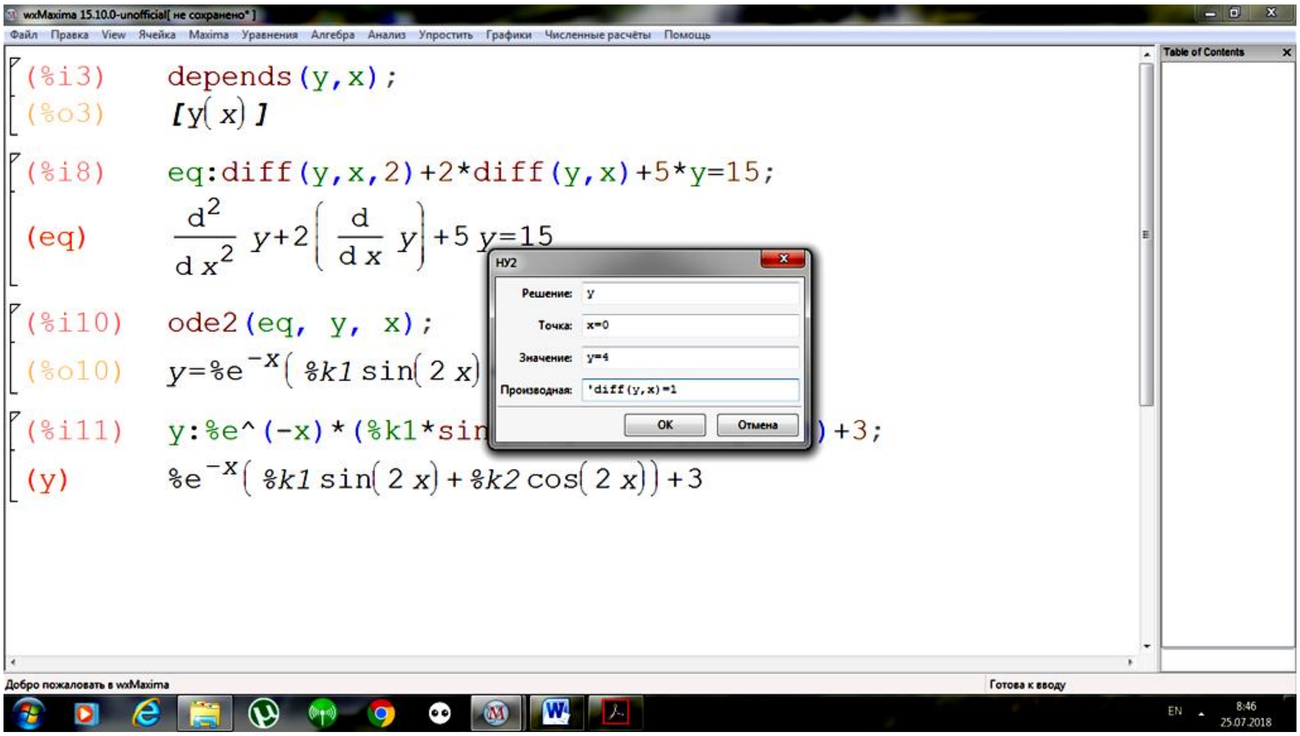

Рис. 87

Частное решение этого уравнения представлено на рисунке 88.

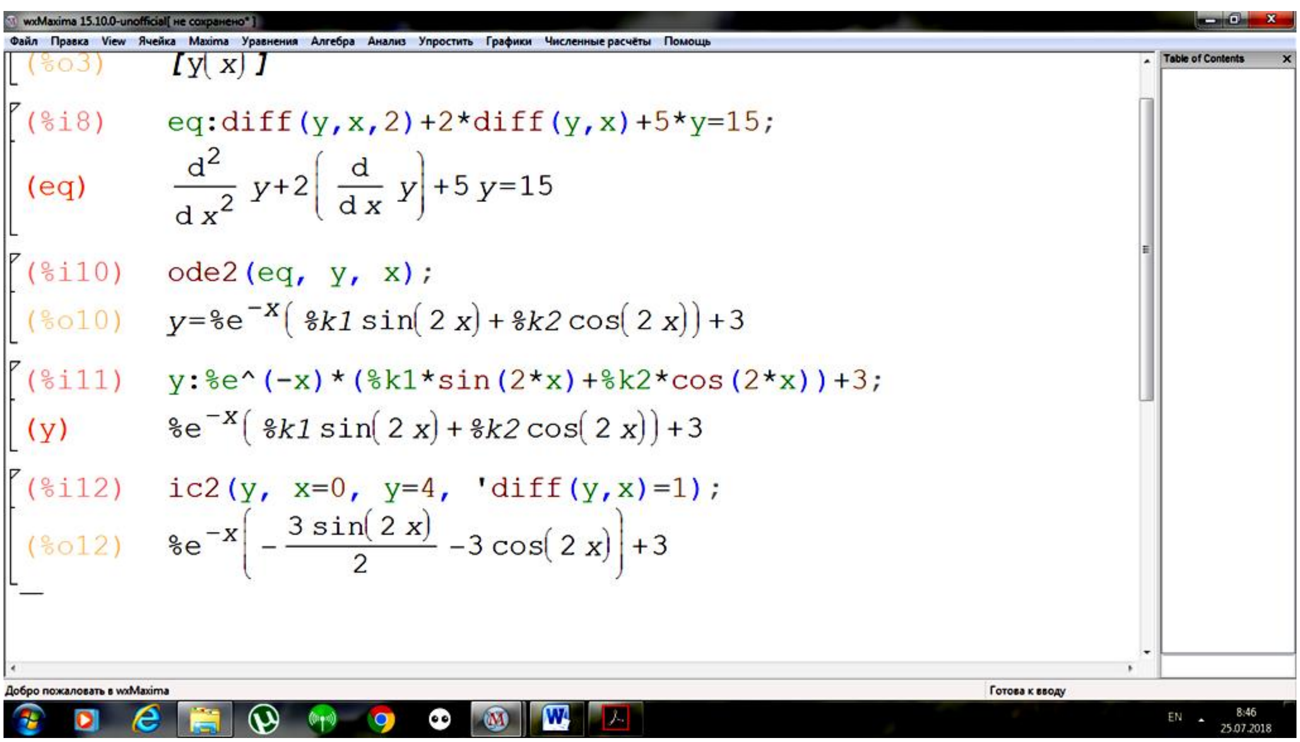

Рис. 88

2. Решим это же дифференциальное уравнение с другими начальными условиями. Общее решение уже найдено. Подставим в решение уравнения x =0. Получаем выражение, которое обозначим ***eq1*** (рис. 89).

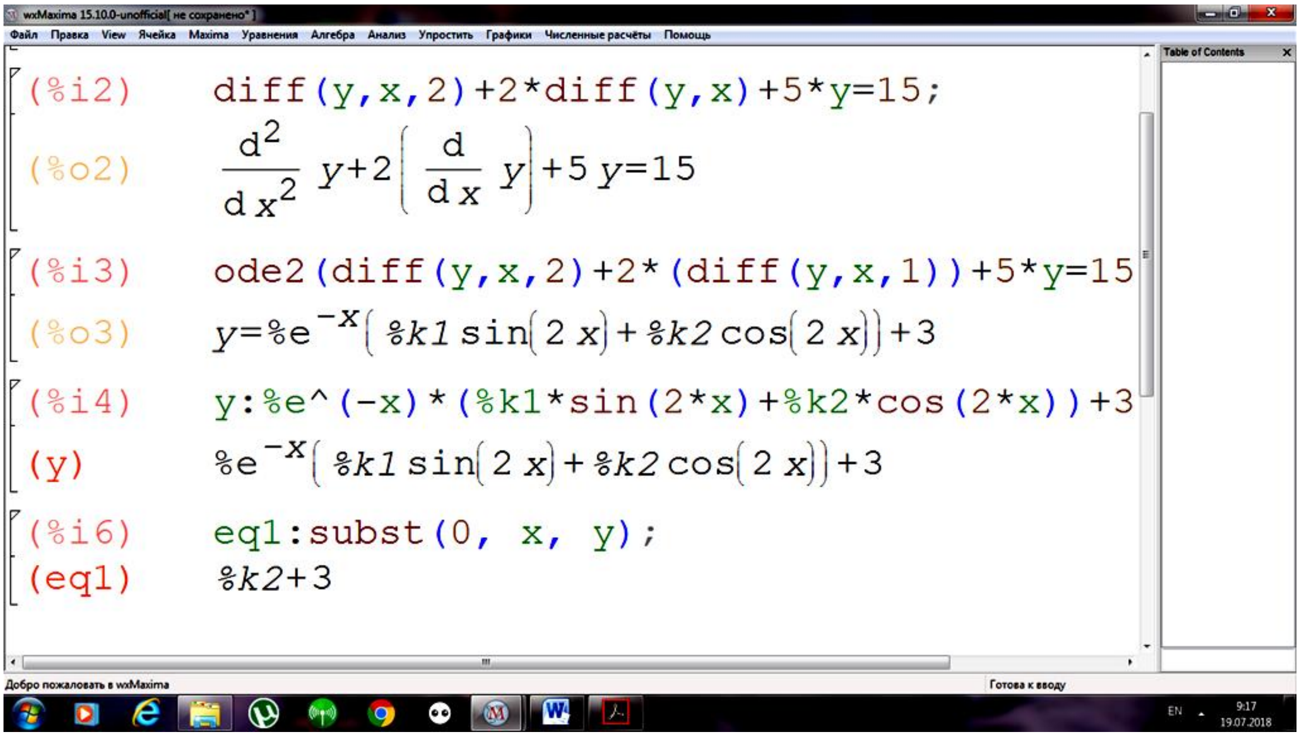

Рис. 89

Продифференцируем полученное общее решение уравнения (рис. 90).

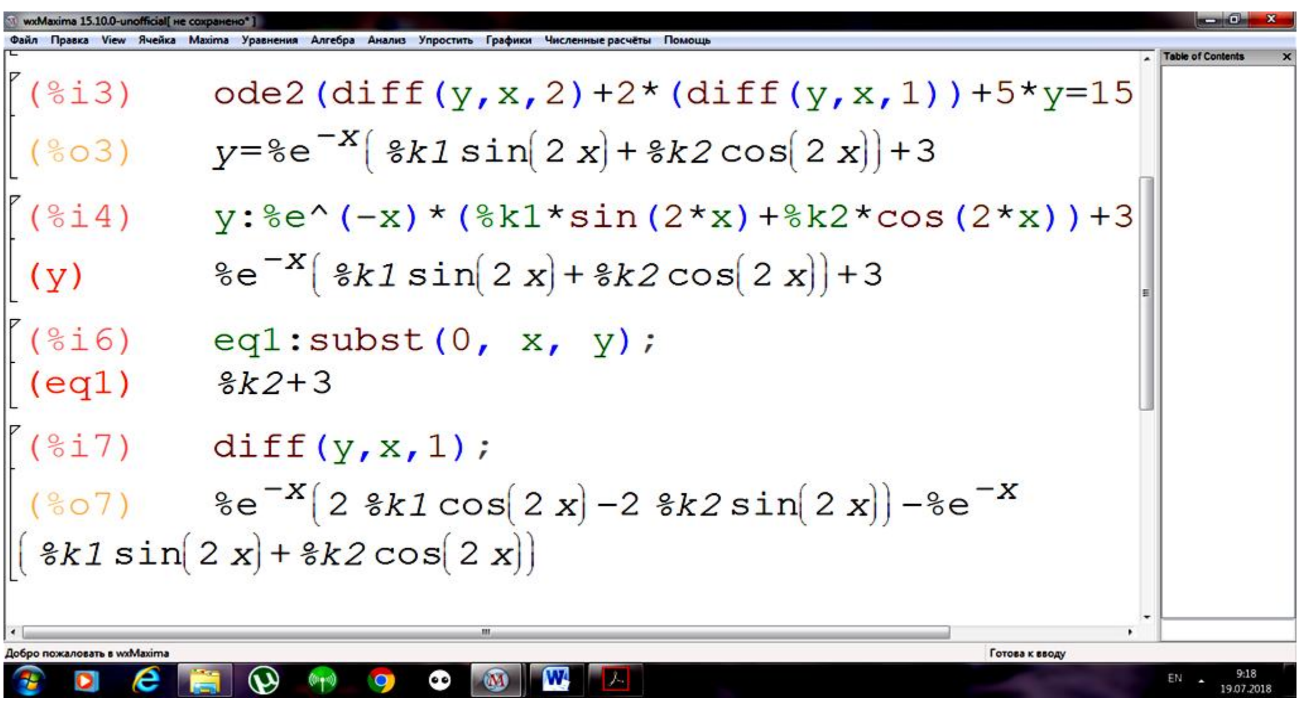

Рис. 90

Упростим его. Для этого в командной строке выберем **Упростить ->Упростить выражение.** Упрощенное выражение обозначим через $y1$ (рис. 91).

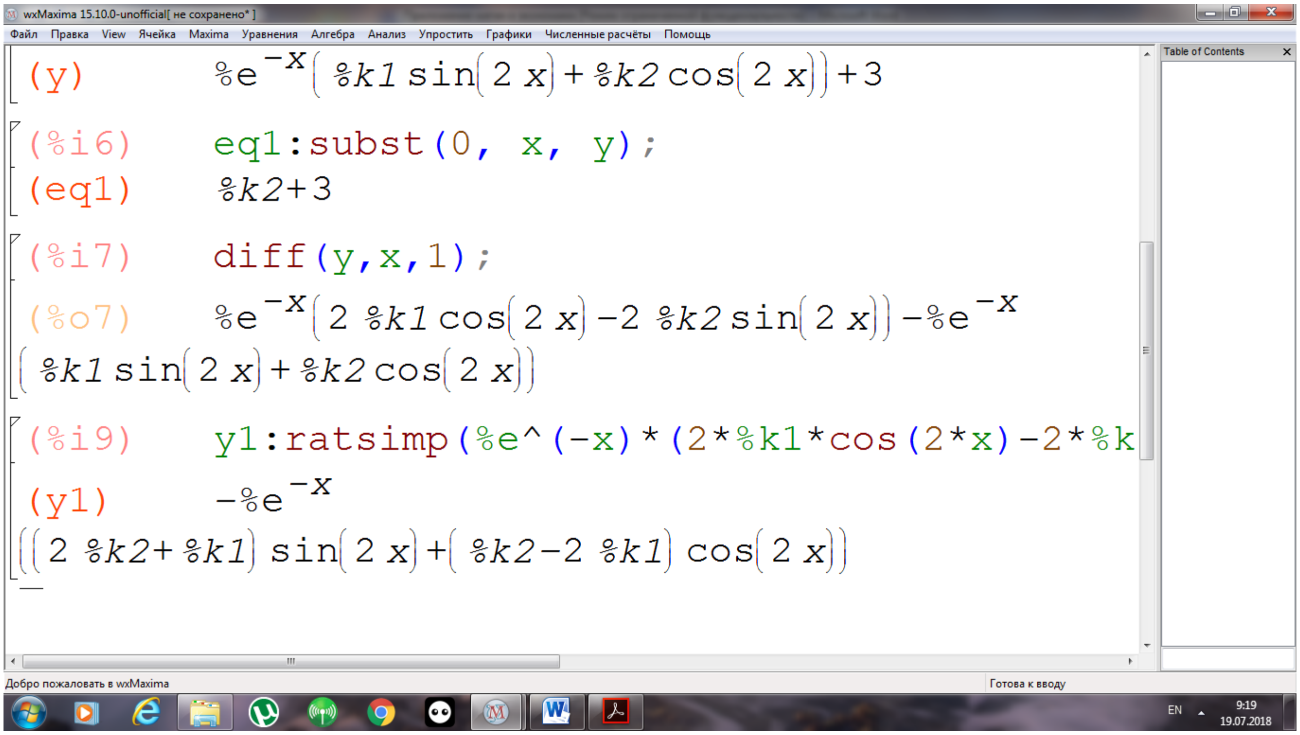

Рис. 91

Найдем производную от функции $y1$ и полученное выражение упростим. Полученную производную второго порядка обозначим через $y2$ (рис. 86).

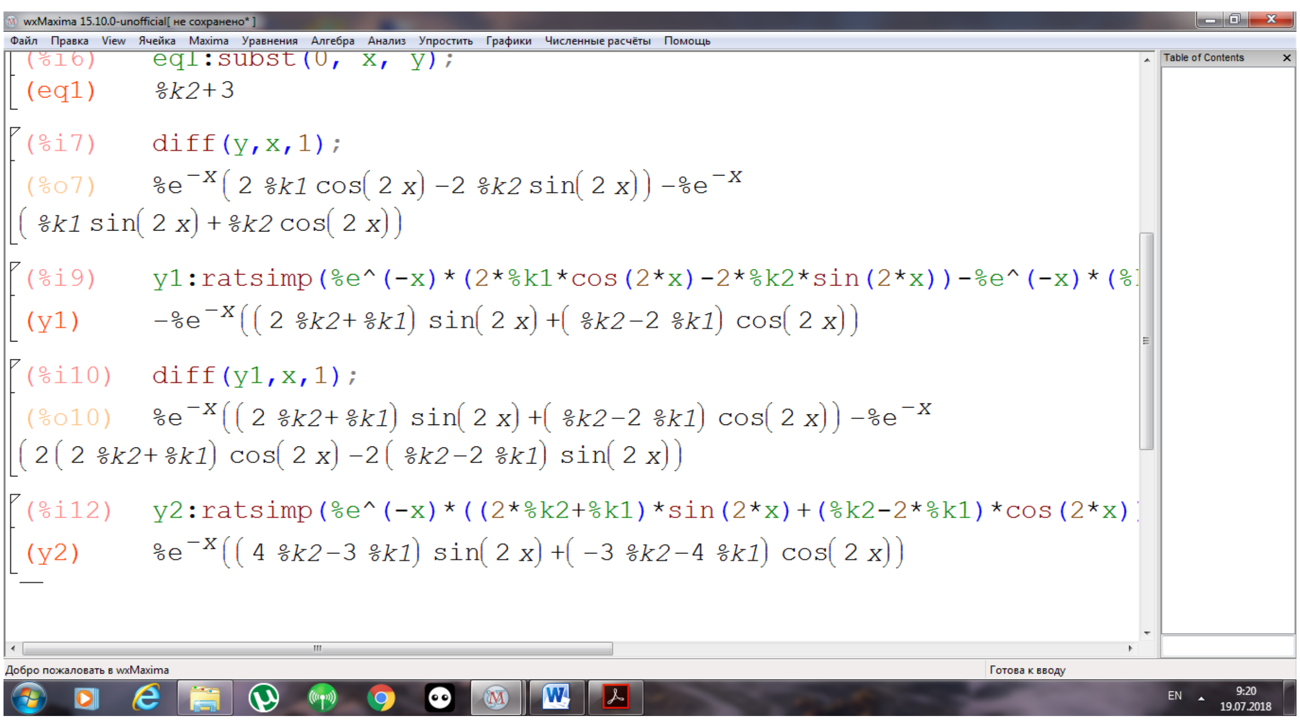

Рис. 92

Подставим *y*2, *y*1, *y* в функции спроса *D* и полученное выражение упростим (рис. 93).

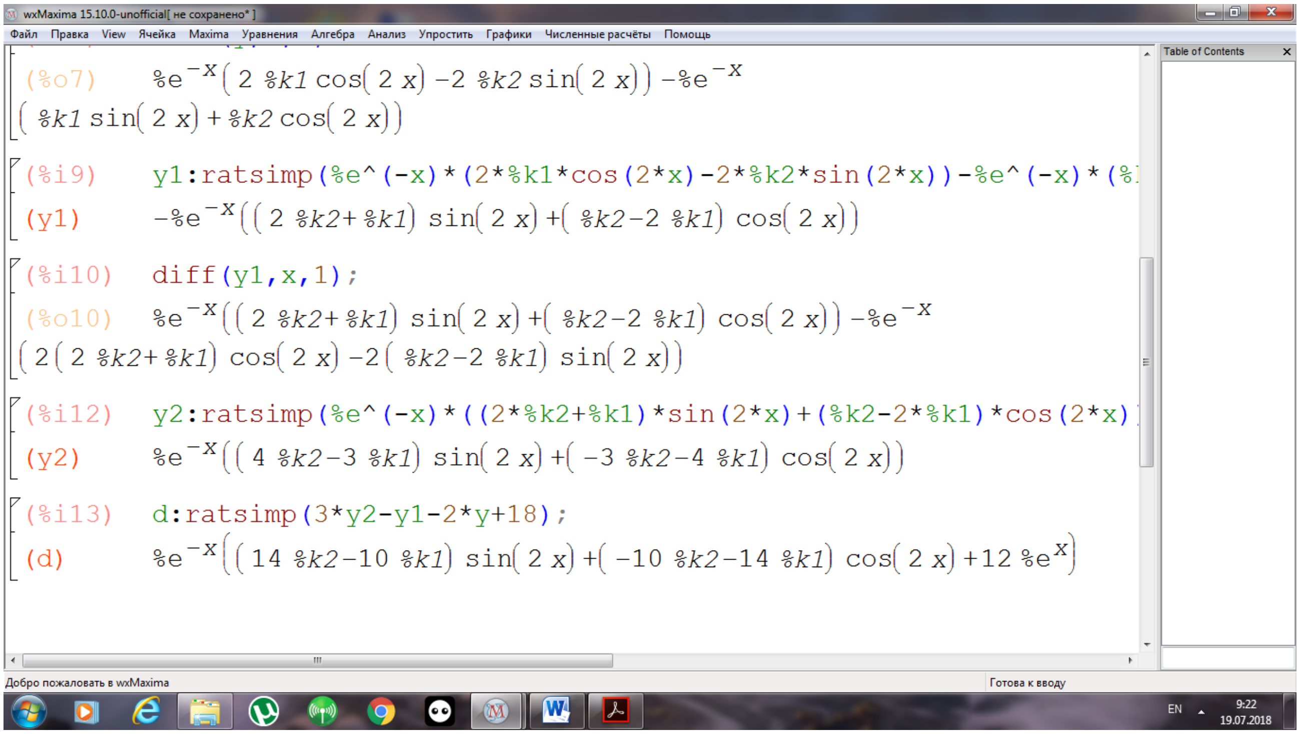

Рис. 93

Подставим в выражение *d* значение переменной *x*=0 и обозначим через ***eq2*** (рис.94).

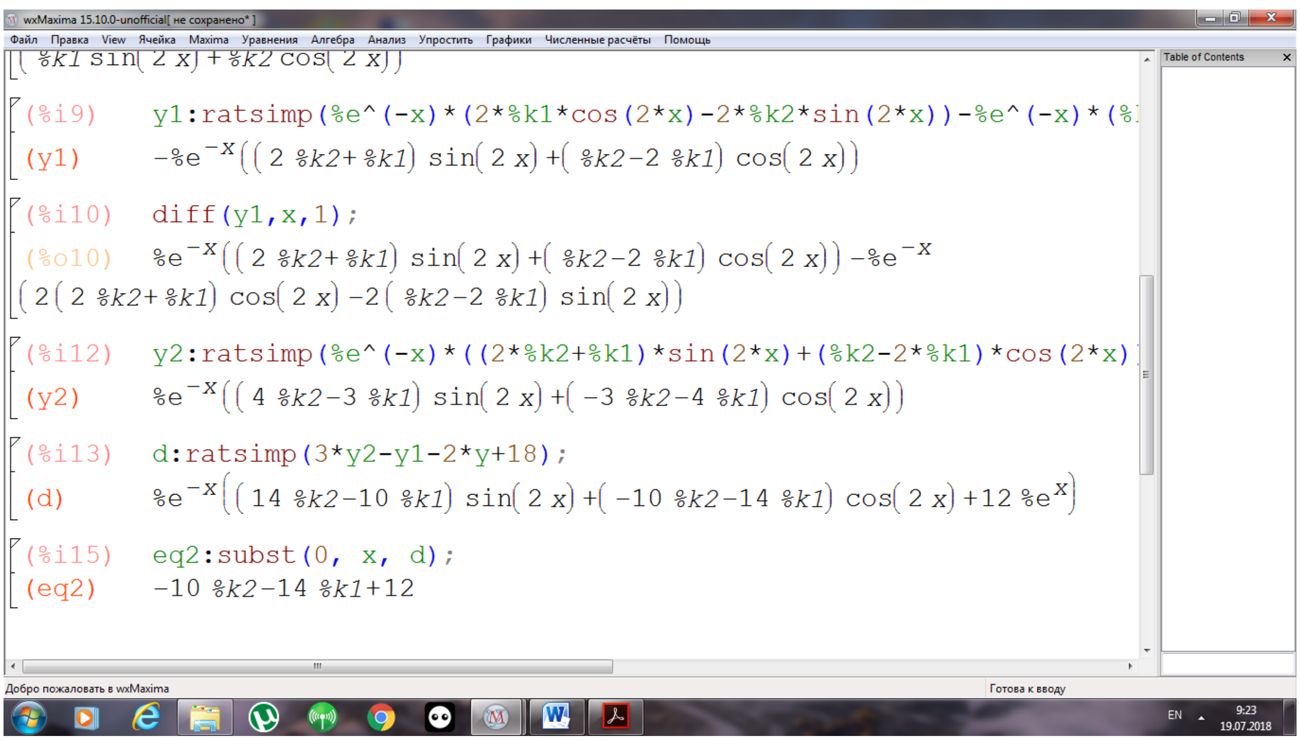

Рис. 94

Решим систему уравнений ***eq*1=4, *eq*2=16**. Переменными здесь будут ***%k1, %k2*** (рис. 95).

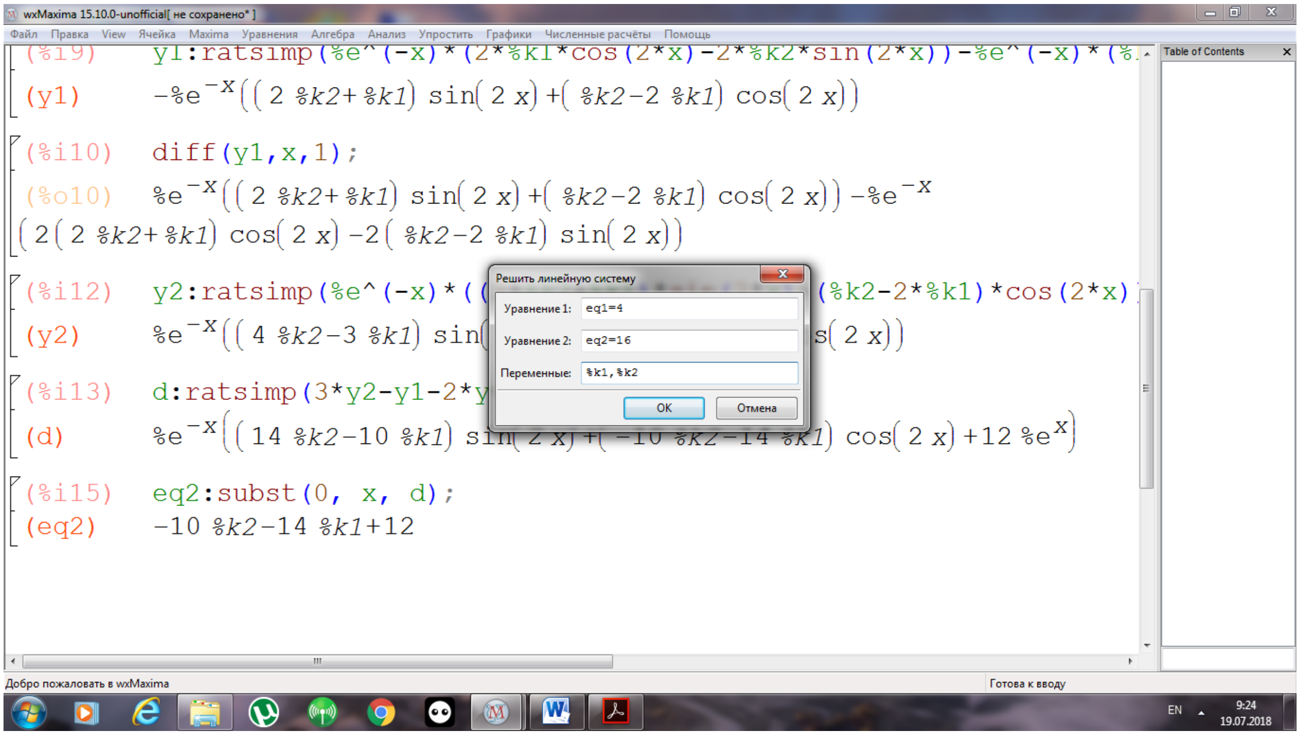

Рис. 95

Полученное решение представлено на рисунке 96.

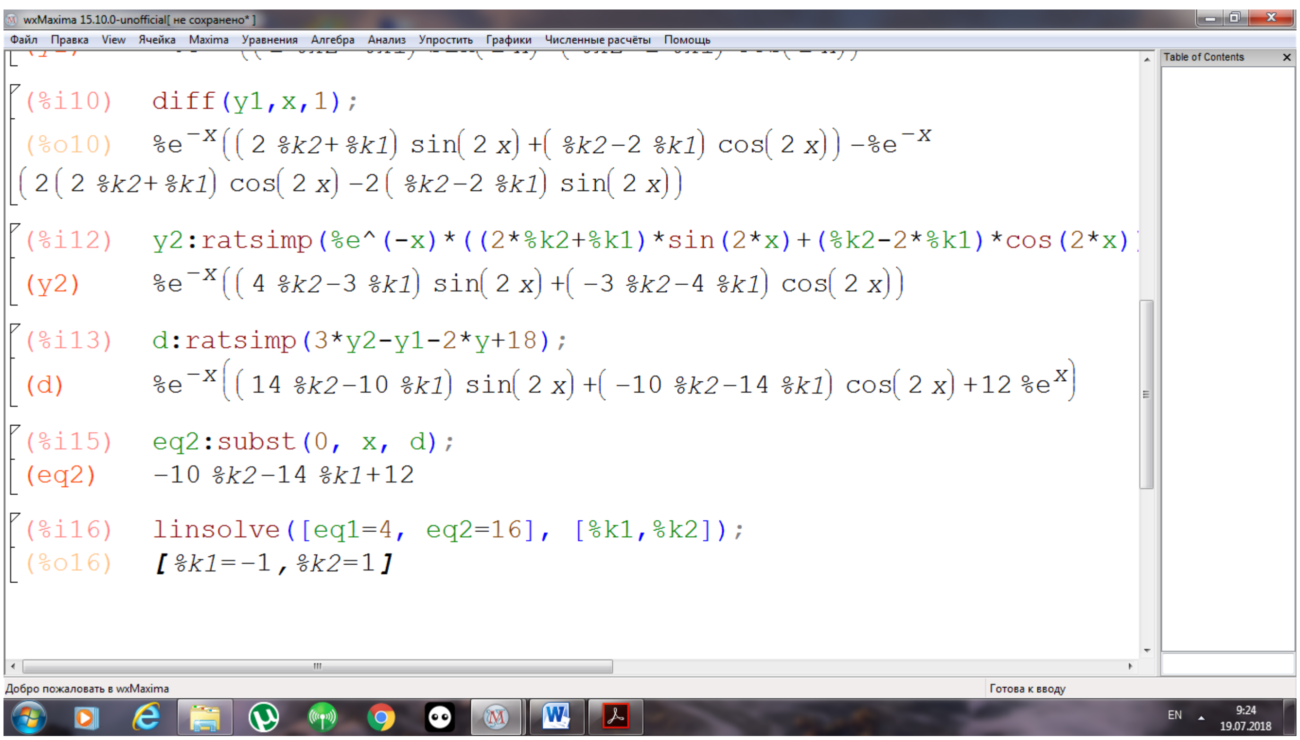

Рис. 96

В общее решение подставим полученное значение ***%k1*** (рис. 97-98).

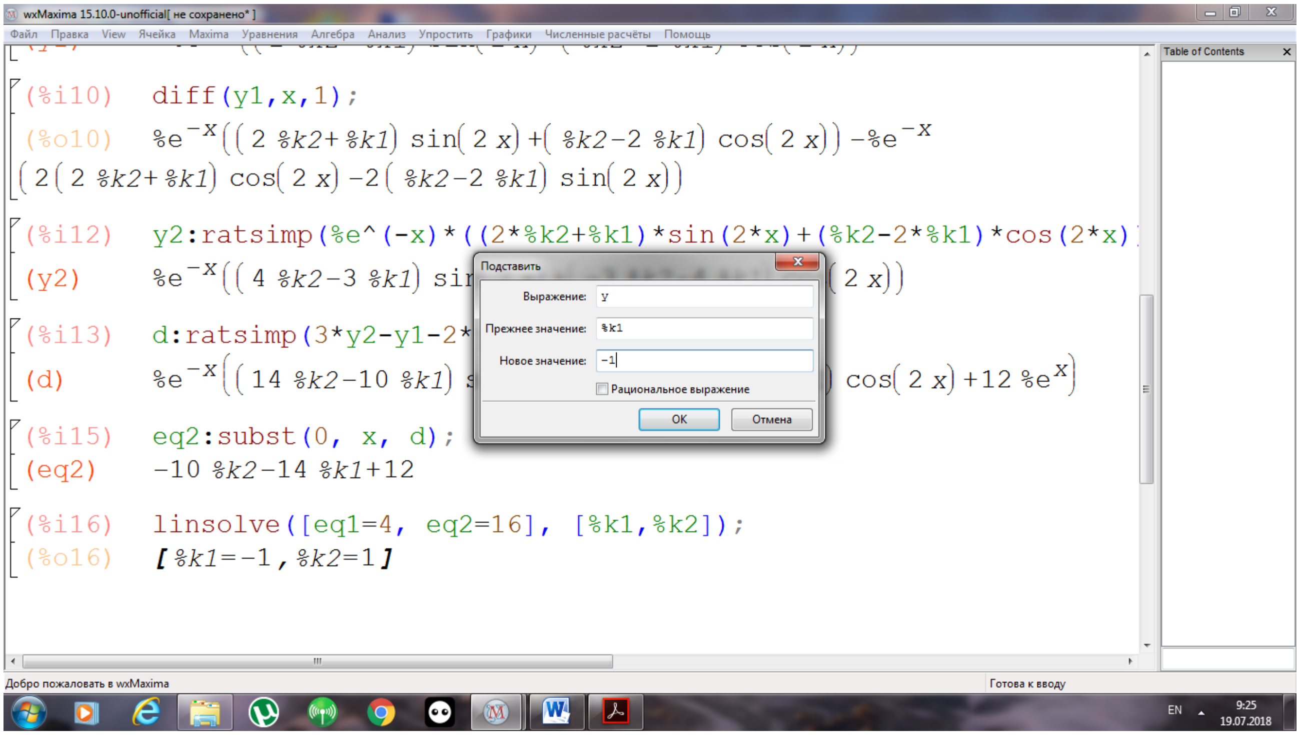

Рис. 97

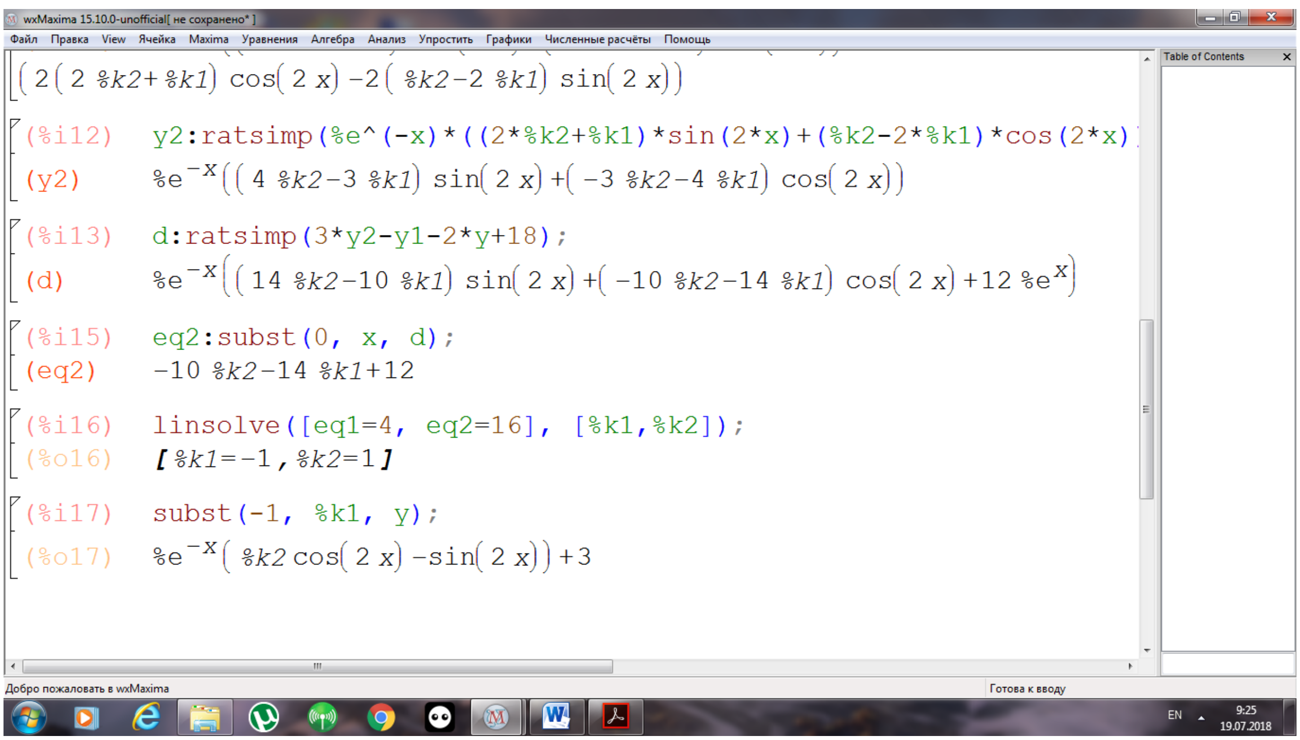

Рис. 98

В последнее выражение подставим найденное значение ***%k2*** (рис. 99).

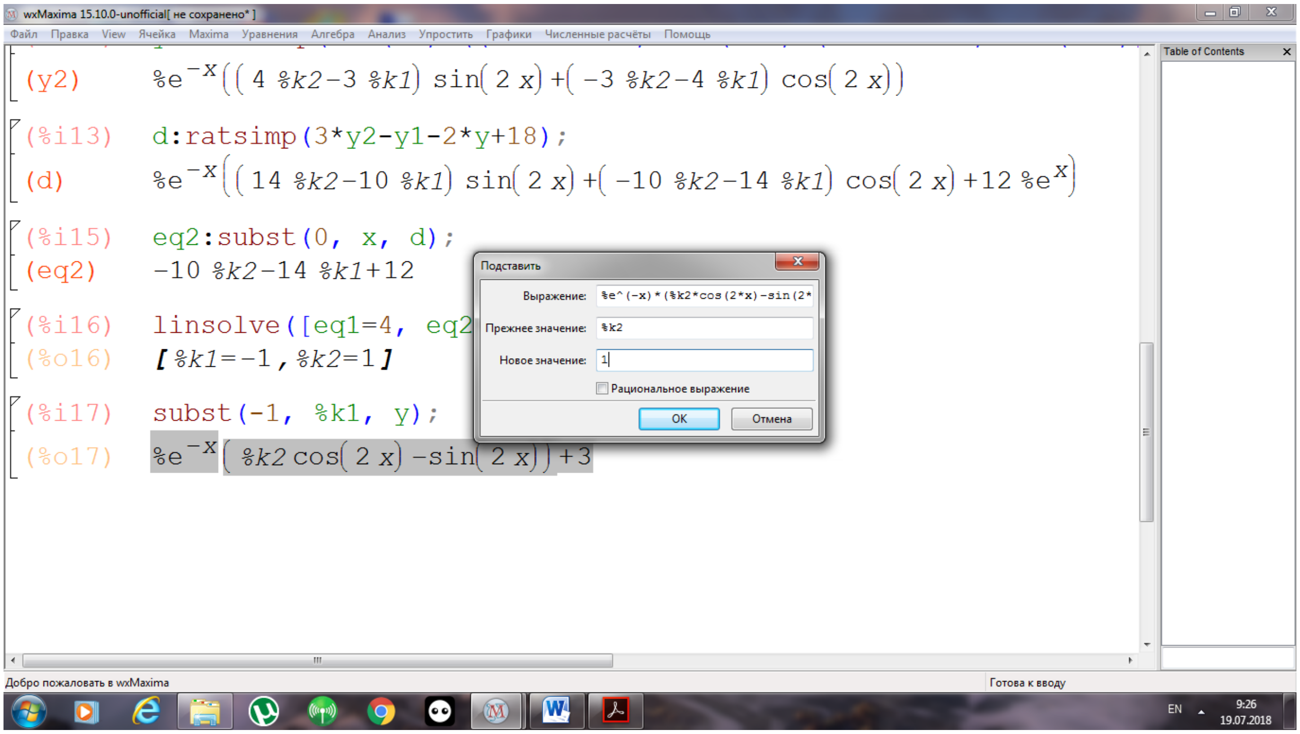

Рис. 99

Получаем искомое частное решение (рис. 100).

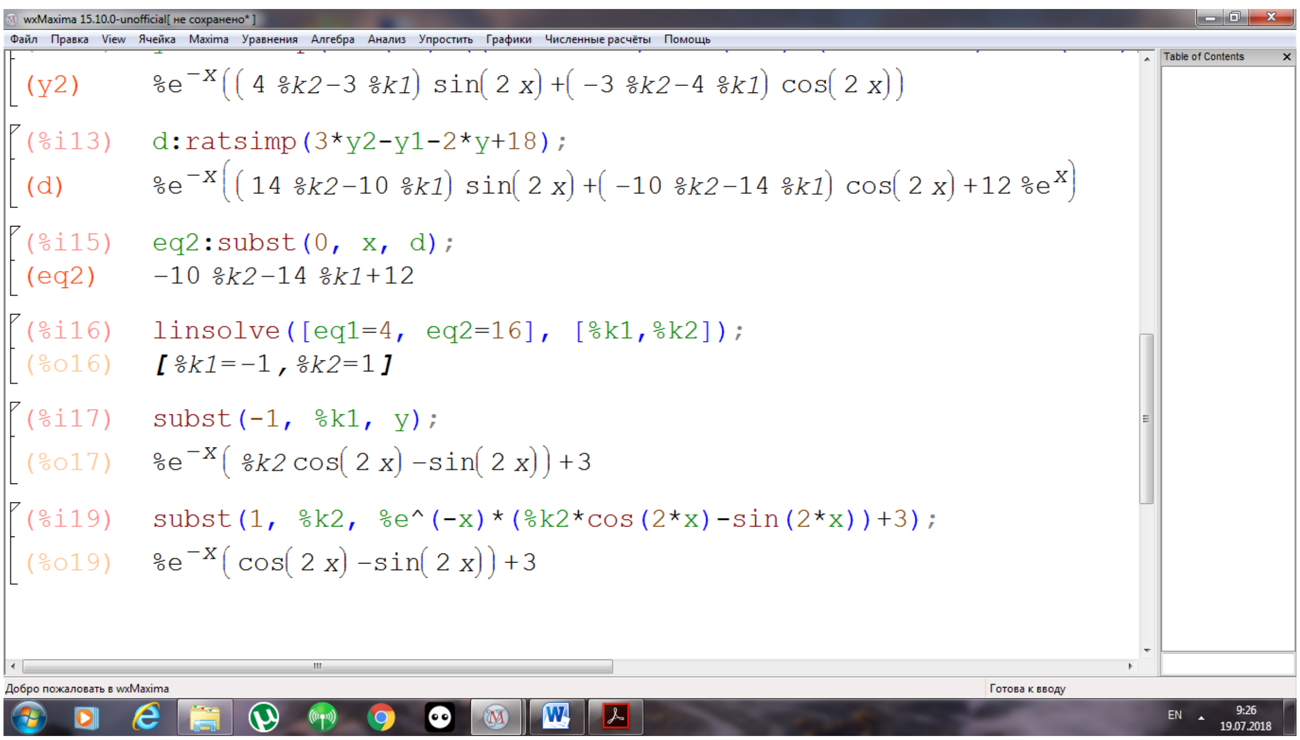

Рис. 100

Задания для самостоятельной работы

5.1. Известно, что некоторая фиксированная доля выручки от реализации продукции предприятия по цене p = 10 усл. ден. ед. направляется на расширение производства; при этом скорость изменения выпуска продукции пропорциональна объему этих инвестиций с коэффициентом k = 0,03. Найти закон изменения выпуска продукции с течением времени. Каким будет выпуск продукции через 5 лет, если в начальный момент он составлял 1200 усл. ден. ед.

5.2. Известно, что в начальный момент времени цена на товар равнялась 1500 усл. ден. ед., а годовой темп инфляции постоянный и равен 2,5%. Описать динамику роста цен при постоянном темпе инфляции.

5.3. Коэффициент выбытия основных фондов равен 0,15. Инвестиции постоянны и составляют 60 усл. ден. ед. Описать процесс движения основных фондов, если известно, что скорость изменения основных фондов равна разности между инвестициями и выбытием основных фондов. В начальный момент времени основные фонды составляли 2000 усл. ден. ед. Через какой промежуток времени износ фондов составит 60% от первоначальной величины?

5.4. Найти объем реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 4 - y$, норма акселерации l = 3 , норма инвестиций $m = \frac{2}{3}$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

5.5. Найти функцию дохода $y = y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 1{,}5t$, коэффициент капиталоемкости дохода $b = 0{,}5$, $y(0) = 3$.

5.6. Фирма оказывает услуги населению. Пусть в начале открытия фирмы всегда есть 15 единиц посетителей. В каждую единицу времени непрерывно поступают 3 ед. посетителей, из которых 20% хотят получить услугу А. Вновь прибывшие перемешиваются с уже пришедшими посетителями. И эта смесь убывает с фирмы с той же скоростью (3 единицы посетителей в единицу времени). Сколько будет желающих получить услугу А через 4 единицы времени?

5.7. Месячный доход семьи постоянный и составляет $I_0 = 60$ усл. ден. ед. Траты пропорциональны накоплениям с коэффициентом пропорциональности 0,4. Описать процесс изменения накопления. Через какой промежуток времени накопления составят 50% месячного дохода семьи? Стабилизируются ли накопления? В начальный момент накопления составляли $K_0 = 5$ усл. ден. ед.

5.8. Месячный доход семьи постоянный и равен *I*, а траты пропорциональны накоплениям. Описать процесс накопления, если через 2 года, накопления составили 45 усл. ден. ед., а через 4 года – 75 усл. ден. ед. В начальный момент времени накопления отсутствовали. Через сколько лет накопления сравняются с бюджетом семьи? Найти месячный доход семьи.

5.9. В начальный момент времени доход составлял 50 усл. ден. ед. Доход используется на потребление и инвестиции в соотношении 3:2. Темп роста дохода составляет 3% в год. Найти динамику дохода и норму инвестиций в доходе на начало и конец года.

5.10. Описать процесс обеспеченности товаром население, если скорость увеличения спроса прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром. Насыщение товаром (предельное значение обеспеченности товаром) составляет *A* = 400 ед. Установлено, что через год обеспеченность товаром составляла 70,5 ед., а через три года – 130,5 единиц. Какова обеспеченность товаром в начальный момент времени? Через какой промежуток времени будет обеспечено 70% предельного значения обеспеченности спросом?

5.11. Доход $y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$. Скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций. Найти функцию дохода $y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией: 1) $C(t)=3e^{0,5t}$; 2) $C(t)=2t$; 3) $C(t)=\sqrt[5]{t}$ коэффициент капиталоемкости дохода равен 0,5, $y(0)=2$.

5.12.Функция потребления определяется уравнением $C=70-0{,}3Y$. Доход в начальный момент времени составлял 3000 усл. ден. ед. Норма акселерации *l* = 1, государственные расходы постоянны и равны 600 усл. ден. ед. Определить равновесный доход. Найти доход потребление и инвестиции через 8 месяцев.

5.13. Найти динамику равновесной цены *p* на товар, если прогноз спроса и предложения описываются следующими соотношениями:

1) $D(t)=p''-p'+p+9, \quad S(t)=3p''+2p'+p+3$;

2) $D(t)=2p''-p'+2p+40, \quad S(t)=3p''+3p'+7p+10$;

3) $D(t)=p''-2p'-5p+50, \quad S(t)=4p''+10p'+7p+20$;

4) $D(t)=3p''-5p'-p+12, \quad S(t)=4p''+p'+4p+10$.

Задания для контрольной работы

Вариант 1

1. Дана функция спроса: $D(p) = 12 + p - p^2$. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса относительно цены товара p; б) эластичность спроса при цене $p = 2$, дать экономическую оценку.

2. Издержки, связанные с выпуском q единиц продукции, определяются функцией $TC = \ln(q^2 + q - 1{,}25)$. Найти: а) средние и предельные издержки при $q = 2$; б) объем производства, при котором прибыль максимальна, если цена единицы продукции $p = 4$.

3. Функция предельного дохода некоторого предприятия имеет вид $MR = 80 - 0{,}04q - 0{,}018q^2$ − (усл. ед.), где q – объем выпуска продукции. Найти функцию дохода и уравнение спроса на продукцию.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = \ln\left((x-2)^2(y-3)\right)$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 40, на благо y равна 10, доход потребителя равен 400. Найти оптимальный набор благ потребителя.

6. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3y(2-10-4\cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

Вариант 2

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $D = 700 - 0{,}6p, \quad S = 400 + 2{,}4p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) найти изменение дохода при увеличении равновесной цены на 10%.

2. На рынке спрос на некоторый товар определяется функцией $p = 1360 - q - q^2$, где q – число единиц товара, а средние издержки на производство этого товара составляют

$AC = 2q + 1000 + \dfrac{200}{q}$. Найти цену товара, при которой достигается максимальная прибыль и саму максимальную прибыль.

3. Дана функция предельной склонности к потреблению страны:

$$MC(Y) = \frac{1}{\sqrt{5Y + 4{,}41}} + 0{,}5,$$

где Y – национальный доход. Найти функцию потребления, если потребление равно 7 млрд. руб., когда доход равен нулю.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 15x + 3y^{0,4}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Производится два вида товаров, цены которых соответственно равны 12 и 17 условных ден. ед. Функция затрат, связанных с производством этих товаров, имеет вид $C = 0{,}6x^2 + 1{,}2xy + 0{,}1y^2$, где x и y – количества производимых товаров первого и второго видов. Найти максимальную прибыль.

6. Найти функцию спроса, если $E_p(D) = -2 = const$ и $D(3) = \dfrac{1}{6}$.

Вариант 3

1. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса $D(p)$ относительно цены товара p; б) эластичность спроса относительно цены товара. Определить показатель эластичности при заданной цене, дать экономическую оценку.

$$D(p) = \frac{2 - p}{p + 1}, \quad p = 0{,}5.$$

2. В прокате 50 прогулочных велосипедов. При цене проката 300 руб./час бывает взято 42 велосипеда. Если цена снижается до 270 руб./час, то взято на прокат 47 велосипедов. Найти: 1) максимальную выручку, предполагая линейным закон спроса; 2) цену проката, при которой выручка наибольшая.

3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0{,}8x^2 + 0{,}2x$, где y – доля совокупного дохода, получаемая частью x низко оплачиваемого населения. Какую часть дохода получают 9% наиболее низко оплачиваемого населения? Вычислить коэффициент Джини.

4. По данной производственной функции $f(x,y)=\left(0{,}6x^{\frac{1}{7}}+0{,}4y^{\frac{1}{7}}\right)^{7}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Найти величины спроса x и y на два вида товара, цены которых соответственно равны 15 и 9 усл. ден. ед., если потребитель при ограниченном бюджете 480 усл. ден. ед. стремится максимизировать функцию полезности (функция Кобба – Дугласа)

$$f(x,y)=x^{0,6}y^{0,36}.$$

При найденном оптимальном спросе указать наибольшее значение функции полезности.

6. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$D=25-2p+3p'; \quad S=15-p+4p'.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент p = 9.

Вариант 4

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $D=100-1{,}2p, \quad S=40+0{,}8p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) точку равновесия после введения налога, равного 5%.

2. Производитель реализует свою продукцию по цене 220 у.е. за единицу, а издержки при этом задаются как $C(q)=167q+0{,}5q^3$. Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль при налоге 5 у.е. на единицу продукции.

3. Законы спроса и предложения на товар соответственно имеют вид:

$$p=170-q^2, \quad p=2q^2+3q+44,$$

где q – количество товара. Найти выигрыш потребителей и поставщиков при установлении рыночного равновесия.

4. По данной производственной функции $f(x,y)=140xy^{0,7}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Функция предпочтений для инвестора задается эмпирической зависимостью $u=r-0{,}4\sigma-0{,}21\sigma^2$, где r – ожидаемая доходность портфеля, σ – риск. Граница области D

есть прямая $r = 0{,}12 + 2{,}5\sigma$. Определить наиболее предпочтительный для данного инвестора уровень риска.

6. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$y' = \frac{0{,}2y}{m}(m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80 % от максимального?

Вариант 5

1. Дана функция спроса $D = 24 - 3p$, где p – цена товара. Построить (на одной координатной плоскости) кривые спроса, эластичности спроса относительно цены, выручки. Определить при каких ценах спрос эластичен, неэластичен, нейтрален, абсолютно неэластичен и абсолютно эластичен.

2. Функция издержек имеет вид $C(q) = 50 + 0{,}25q^2$, а доход при производстве q единиц товара определяется следующим образом:

$$R(q) = \begin{cases} 2000\,x, & \text{если } x < 100, \\ 2000(100 + \sqrt{x - 100}), & \text{если } x > 100. \end{cases}$$

Определить оптимальное для производителя значение выпуска.

3. Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первых двух лет, а затем изменяется по закону $R(t) = 45e^{-0{,}18(t-2)}$ (усл. ден. ед.), где t – время в годах. Найти среднее значение дохода от инвестиций в течение первых 6 лет.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 20x + 16\ln y$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Установлены функция издержек $C(q) = 10 + q^2$, а также функция количества реализованного товара $K(p, q) = \dfrac{x}{1 + \dfrac{p^2}{25}}$ при установленной цене его единицы, равной p.

Найти оптимальные значения q и p для монополиста-производителя.

6. В поселке с населением 3000 человек распространение рекламной новости описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}001y(3000 - y),$$

где y – число узнавших о новом товаре; t – число недель. Сколько осведомленных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое людей, знающих о новом продукте?

Вариант 6

1. Дана функция спроса: $D(p) = 28 + 3p - p^2$. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса относительно цены товара p; б) эластичность спроса при цене $p = 5$, дать экономическую оценку.

2. Издержки, связанные с выпуском q единиц продукции, определяются функцией $TC = \ln(q^2 + 2q - 12)$. Найти: а) средние и предельные издержки при $q = 4$; б) объем производства, при котором прибыль максимальна, если цена единицы продукции $p = 5$.

3. Определить дисконтную сумму за t лет при процентной ставке 4%, если капиталовложения (инвестиции) изменяются по закону $K(t) = 80(1 + 0{,}09t)$. Дать пояснения полученному результату.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 18x^{0,5} + y^{0,75}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Предприниматель решил открыть новую производственную фирму. При этом он готов на развитие этой фирмы выделить 12 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудникам – y млн. руб., то прирост объема выпуска продукции составит $u(x, y) = 0{,}003x^{0,25}y^{0,75}$. Как следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Найти функцию спроса, если известно, что $D(18) = 1$ и эластичность спроса относительно цены имеет следующий вид:

$$E_p(D) = \frac{p}{p - 20}.$$

Вариант 7

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $S = 110 - 2{,}3p, \quad S = 30 + 1{,}7p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) субсидию, которая приведет к увеличению объема продаж на 3 единицы?

2. На рынке спрос на некоторый товар определяется функцией $p = 370 - 3q - 2q^2$, где q – число единиц товара, а средние издержки на производство этого товара составляют $AC = 9q + 10 + \dfrac{510}{q}$. Найти цену товара, при которой достигается максимальная прибыль и саму максимальную прибыль.

3. Производительность труда рабочего в течение дня задается эмпирической функцией $-0{,}006t^2 + 0{,}18t + 0{,}25$ (ден. ед./час), где $t \in [0;8]$ время в часах от начала работы. Найти дневную выработку.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 8\sqrt[3]{x} + 3\ln y$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $f(x, y) = 120\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ (где x, y – количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса – 20, второго – 40 (усл. ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

6. Функции спроса и предложения на некоторый товар соответственно имеют вид:

$$D = 50 - 2p - 4p'; \quad S = 70 + 2p - 5p'.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если p (0) = 10, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

Вариант 8

1. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса $D(p)$ относительно цены товара p; б) эластичность спроса относительно цены товара. Определить показатель эластичности при заданной цене, дать экономическую оценку.

$$D(p) = \frac{3 - p}{p + 2}, \quad p = 2{,}5.$$

2. В прокате 55 прогулочных велосипедов. При цене проката 275 руб./час бывает взято 43 велосипеда. Если цена снижается до 250 руб./час, то взято на прокат 48 велосипедов. Найти: 1) максимальную выручку, предполагая линейным закон спроса; 2) цену проката, при которой выручка наибольшая.

3. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t)=e^t$, $L(t)=(t+1)^2$, $K(t)=(100-3t)^2$, $\alpha=\beta=0{,}5$ (t – время в годах).

4. По данной производственной функции $f(x,y)=26x^{0,25}\ln y$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Фирма продает единственный товар на двух рынках. Функции спроса на этих рынках линейны и имеют вид соответственно

$$q_1=31{,}5-0{,}5p_1,\quad q_2=42-0{,}4p_2.$$

Функция затрат имеет вид $C=40+30q$, где $q=q_1+q_2$. Определить цены, при которых фирма получит максимальную прибыль.

6. Найти выражение объема реализованной продукции $y=y(t)$ и его значение при $t=2$, если известно, что кривая спроса имеет вид $p(y)=3-2y$, норма акселерации $\frac{1}{l}=\frac{3}{2}$, норма инвестиций $m=0{,}6$, $y(0)=1$.

Вариант 9

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $D=230-1{,}4p,\quad S=90+1{,}1p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) как изменится равновесная цена при уменьшении предложения на рынке на 10%?

2. Производитель реализует свою продукцию по цене 400 у.е. за единицу, а издержки при этом задаются как $C(q)=250q+0{,}2q^3$. Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль при налоге 15 у.е. на единицу продукции.

3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца

$$y=\frac{x}{3-2x},$$

где y – доля совокупного дохода, получаемая частью x низко оплачиваемого населения. Какую часть дохода получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения? Вычислить коэффициент Джини.

4. По данной производственной функции $f(x,y)=35\ln(4xy)$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $u=18x+16y-3x^2-xy-5y^2$. Цена на благо x равна 1, на благо y равна 2, доход потребителя равен 10. Найти оптимальный набор благ потребителя.

6. Цена продукции и затраты на производство линейно зависят от объема q ее выпуска: $p=10-q, C=6q+4$, а скорость изменения выпуска продукции пропорциональна прибыли с коэффициентом 0,2. Найти общий вид динамики выпуска продукции $q(t)$.

Вариант 10

1. Дана функция спроса $D=18-2p$, где p – цена товара. Построить (на одной координатной плоскости) кривые спроса, эластичности спроса относительно цены, выручки.

Определить при каких ценах спрос эластичен, неэластичен, нейтрален, абсолютно неэластичен и абсолютно эластичен.

2. При производстве монополией q единиц товара цена за единицу составляет $p(q)$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки $C(q)$ имеют вид:

$$C(q)=10+(x-1)^2, \quad p(q)=1-\frac{4\sqrt{x}}{3}.$$

3. Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $f(t)=16-2^{-0,5t+4}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) четвертый месяц; в) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

4. По данной производственной функции $f(x,y)=60x^{0,12}+\ln(10y)$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Общие издержки производства заданы функцией:

$$TC = x^2 + 1{,}2xy + 0{,}8y^2 + 1400x + 1200y + 3000,$$

где x и y – соответственно количество товаров А и В. Общее количество произведенной продукции должно быть равно 500 ед. Сколько единиц товара А и В нужно производить, чтобы издержки на их изготовление были минимальными

6. Процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности. Обозначим через $x = const$ – введенную производственную мощность, а через $y(t)$ – фактическое производство на базе этой мощности в момент времени t ($y(t) < x$). Предполагая, что рост производства пропорционален недоиспользованной мощности, найти изменение производства в каждый момент времени. Через какой промежуток времени будет достигнут заданный размер мощности $x = 150$ усл. ден. ед., если в начале года производство определялось величиной 10 усл. ден. ед., а через год – 20 усл. ден. ед.?

СПИСОК ОСНОВНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

D (demand) – спрос

S (supply) – предложения

Q (quantity) – количество

P (price) – цена

C (cost) – стоимость

R (revenue) – доход

П (profit) – прибыль

I (income) – доход

U (utility) – полезность

M (marginal) – маргинальный

T (total) – общая

F (fixed) – постоянный

V (variable) – переменный

A (average) – средний

TFC (total fixed cost) – постоянные издержки

TVC (total variable cost) – переменные издержки

TC (total cost) – общие издержки

AC (average cost) – средние издержки

MC (marginal cost) – предельные издержки

TR (total revenue) – общий доход

MR (marginal revenue) – предельный доход

TU (total utility) – общая полезность

MU (marginal utility) – предельная полезность

Литература

1. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2016 – 909 с. – Серия : Бакалавр. Углубленный курс.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: Учебно-справочное пособие / под общ. ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2014. – 724 с.
3. Красс, М.С. Математика для экономистов [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2010. – 464 с.
4. Солодовников, А.С. Математика в экономике [Текст]: учеб. / А.С. Солодовников [и др.]. – Ч. 2. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 560 с.
5. Монако Т.П. Задачи экономического содержания и математический анализ. – Ульяновск: Зебра, 2016. – 99 с.
6. Задачи по математике для экономистов: Методические указания / Сост. Н. Г. Дементьева, В. Ф. Казак, И. Э. Симонова; Волгоград. гос. техн. ун-т. – Волгоград, 2007. – 35 с.