

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт экологии и природопользования,
кафедра моделирования экологических систем

Основные правила и формулы математики

Никоненкова Т.В., Зарипов Ш.Х., Скворцов Э.В.,
Шарафутдинов В.Ф.

Учебное пособие

Издательство
Казанского федерального университета
2015

УДК 51-7

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУ
ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
и учебно-методической комиссии Института экологии и
природопользования*

*Протокол № 5 от 13 мая 2015 г.
заседания кафедры моделирования экологических систем
Протокол № 9 от 15 апреля 2015 г.*

Авторы-составители

к.ф.-м.н. Никоненкова Т.В., д.ф.-м.н. Зарипов Ш.Х.,
д.ф.-м.н. Скворцов Э.В., д.ф.-м.н. Шарафутдинов В.Ф.

Рецензенты д.ф.-м.н. Широкова Е.А., д.ф.-м.н. Абзалилов Д.Ф.

Основные правила и формулы математики: учебное пособие
/ Т.В. Никоненкова, Ш.Х. Зарипов, Э.В. Скворцов, В.Ф. Шарафутдинов. –
Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2015. – 66 с.

Учебное пособие предназначено для студентов 1 и 2 курса Института Экологии и Природопользования, обучающихся по направлению "Экология и природопользование" и "Землеустройство и кадастр". Пособие содержит минимальный объем знаний, который должен знать студент, прослушавший курс *Математики*, а также варианты контрольных работ.

© Казанский федеральный университет, 2015

Содержание

1. Аналитическая геометрия на плоскости	5
2. Математический анализ	10
2.1. Предел	10
2.2. Производная функции	12
2.3. Дифференциал функции	15
2.4. Неопределенный интеграл	16
2.5. Определенный интеграл	19
3. Алгебра	22
3.1. Матрицы	22
3.2. Определители	23
3.3. Системы линейных уравнений	25
4. Элементы векторной алгебры	27
4.1. Прямоугольные координаты в пространстве	27
4.2. Векторы и простейшие действия над ними	27
5. Аналитическая геометрия в пространстве	33
5.1. Уравнение плоскости в пространстве	33
5.2. Уравнение прямой в пространстве	35
5.3. Поверхности второго порядка	38
6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	40
6.1. Линии и поверхности уровня	40
6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных	40
7. Ряды	45
7.1. Числовые ряды	45
7.2. Знакоположительные ряды	46
7.3. Знакопеременные ряды	47
7.4. Степенные ряды	48
8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	49
8.1. Основные понятия	49

8.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	50
8.3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	55
8.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	57
8.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	59

Список литературы	66
--------------------------	-----------

1. Аналитическая геометрия на плоскости

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

Деление отрезка в данном отношении

Координаты точки $C(x; y)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = AC/CB$ (считая от A к B), определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

Если точка C делит отрезок AB пополам, то $AC = CB$ и, следовательно, $\lambda = 1$. Тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (3)$$

Площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Преобразование системы координат

Под *параллельным переносом* осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O'x'y'$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

Пусть начало новой системы координат точка O' имеет координаты $(a; b)$ в старой системе координат Oxy , т. е. $O'(a; b)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O'x'y'$ через $(x'; y')$, тогда

$$x' = x - a, \quad y' = y - b \quad (5)$$

Обратно,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b \quad (6)$$

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $Ox'y'$ получена поворотом системы Oxy на угол $\alpha = \angle x'Ox$, причем $\alpha > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки. Тогда формулы поворота осей могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (7)$$

Полученные формулы позволяют определять старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки M , и наоборот:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (8)$$

Параллельный перенос и поворот системы координат

Новая система координат $O'x'y'$ получена из старой Oxy путем параллельного переноса осей координат в новое начало $O'(a; b)$ и последующим поворотом осей на угол α

$$\begin{cases} x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \\ y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases} \quad (10)$$

Связь между полярными и прямоугольными координатами

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (11)$$

где x и y - прямоугольные координаты точки M , а r и φ - ее полярные координаты.

Параметрическое уравнение линии

Координаты точки $M(x; y)$ рассматриваются как функции некоторого параметра t :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (12)$$

При изменении t величины x и y будут меняться, следовательно, точка будет перемещаться. Роль параметра может играть время, угол между осью Ox и радиус-вектором точки $M(x; y)$, длина дуги, отсчитываемая от фиксированной точки линии и т. п.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\boxed{y = kx + b} \quad (13)$$

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется **угловым коэффициентом** прямой, b - величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Oy .

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

Общее уравнение прямой

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \quad (14)$$

где A, B, C - произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \quad (15)$$

Это уравнение с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \quad (16)$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy - в точке $M_2(0; b)$. В этом случае уравнение прямой примет вид

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad (17)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Тангенс угла между этими прямыми определяется формулой:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}} \quad (18)$$

- Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то

$$\boxed{k_1 = k_2} \quad (19)$$

- Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}} \quad (20)$$

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, тогда тангенс угла между прямыми вычисляется по формуле

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|} \quad (21)$$

условие их параллельности имеет вид

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}} \quad (22)$$

условие их перпендикулярности:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \quad (23)$$

- Для нахождения общих точек прямых L_1 и L_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \quad (24)$$

Расстояние от точки $M(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (25)$$

Линии второго порядка на плоскости

Кривые второго порядка определяются уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (26)$$

Уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (27)$$

где $(x_0; y_0)$ - центр окружности, а R - ее радиус.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (28)$$

Точки пересечения кривой (28) с осями координат Ox и Oy есть точки $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$, $B(0; b)$, $B'(0; -b)$. Эти точки называются *вершинами эллипса*. Число $2a = A'A$ называется *большой осью* эллипса, а $2b = B'B$ - *малой осью* эллипса.

Фокусы эллипса имеют следующие координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$).

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (29)$$

где a - действительная полуось, b - мнимая полуось.

Фокусы гиперболы имеют следующие координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Гипербола имеет две асимптоты:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называют *эксцентриситетом* гиперболы.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = \pm 2px, \quad (30)$$

где $p > 0$ - параметр параболы. Ветви этой параболы направлены вправо(+) либо влево(-). Точки $F\left(\pm \frac{p}{2}; 0\right)$ - соответственно фокусы параболы (30), прямые $x = \mp \frac{p}{2}$ - директрисы параболы.

Если

$$x^2 = \pm 2py, \quad (31)$$

то ветви этой параболы направлены вверх(+) либо вниз(-). Фокусы находятся соответственно в точках $F(0; \pm \frac{p}{2})$, а директрисами параболы являются прямые $y = \mp \frac{p}{2}$.

2. Математический анализ

2.1. Предел

Предел функции

Функция $f(x)$ имеет предел A в точке x_0 , если значение $f(x)$ можно сделать сколь угодно близким к A , когда x достаточно близко к x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (32)$$

Основные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \frac{c}{x} = \pm \infty, \quad c > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ не существует}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (33)$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828\dots \quad (34)$$

Если в равенстве (34) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \infty$) будем иметь

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (35)$$

Основные виды неопределенностей

Виды неопределенности	Метод нахождения пределов
$\left[\frac{0}{0}\right]$	<ul style="list-style-type: none">• Преобразовать и упростить• Первый замечательный предел• Правило Лопиталья
$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	<ul style="list-style-type: none">• Преобразовать и упростить• Правило Лопиталья
$[0 \cdot \infty]$ или $[\infty - \infty]$	<ul style="list-style-type: none">• Преобразовать к $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, затем использовать правило Лопиталья
$[1^\infty]$	<ul style="list-style-type: none">• Второй замечательный предел
$[0^0]$ или $[\infty^\infty]$	<ul style="list-style-type: none">• Прологарифмировать и использовать равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)))$

Правило Лопиталья

Правило Лопиталья представляет собой метод вычисления пределов, имеющих неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть a - некоторое конечное действительное число или равно бесконечности.

- Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2.2. Производная функции

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется формулой

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (36)$$

Правила дифференцирования

1. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, $C = const$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - правило дифференцирования суммы(разности)
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - правило дифференцирования произведения
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ - правило дифференцирования частного
5. $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ - дифференцирование сложной функции

Таблица производных

$C' = 0$	$x' = 1$
$(x^2)' = 2x$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная функции, заданной параметрически

Если функция задана в параметрической форме $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то

$$\boxed{y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}} \quad (37)$$

Геометрический смысл производной

Производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

Уравнение касательной к плоской кривой при $x = x_0$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad (38)$$

Уравнение нормали к плоской кривой при $x = x_0$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \quad (39)$$

Алгоритм исследования функции

1) Нахождение области определения функции.

2) Исследование функции на четность или нечетность и периодичность.

Функция является *четной*, если $y(-x) = y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.

Функция является *нечетной*, если $y(-x) = -y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат.

Если же ни одно из равенств не выполняется, то перед нами функция общего вида.

3) Нахождение точек разрыва и участков непрерывности.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если предел слева равен пределу справа и совпадает со значением функции в точке x_0 , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

В точке x_0 функция имеет *неустранимый разрыв первого рода*, если пределы слева и справа существуют и конечны, но не равны, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$. Точку x_0 в этом случае называют *точкой скачка функции*.

В точке x_0 функция имеет *разрыв второго рода*, если либо предел слева $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, либо предел справа $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, не существует или бесконечен.

4) Нахождение точек пересечения с осями координат.

5) Нахождение интервалов знакопостоянства функции, т.е. где $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$.

6) Нахождение асимптот (вертикальных, горизонтальных, наклонных).

Прямая $x = x_0$ - *вертикальная* асимптота, если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 бесконечны.

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности.

Наклонные асимптоты ищутся в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Если $k = 0$ и $b \neq \infty$, то наклонная асимптота станет *горизонтальной*.

7) Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции

- находим производную;
- находим критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует);
- разбиваем область определения критическими точками на интервалы;
- определяем знак производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку возрастания ($f'(x) > 0$), знак «минус» - промежутку убывания ($f'(x) < 0$).

Точками экстремума функции являются точки, в которых функция определена, а ее производная, проходя через эти точки, меняет знак.

Если производная меняет знак с плюса на минус при прохождении через точку x_0 , то это *точка локального максимума*.

Если производная меняет знак с минуса на плюс, то это *точка локального минимума*.

8) Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.

Чтобы определить промежутки вогнутости (выпуклости вниз) и выпуклости (выпуклости вверх) функции

- находим вторую производную;

- находим нули числителя и знаменателя второй производной;
- разбиваем область определения полученными точками на интервалы;
- определяем знак второй производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку вогнутости, знак «минус» - промежутку выпуклости.

Точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба*, если в данной точке существует касательная к графику функции, и вторая производная функции меняет знак при прохождении через x_0 .

2.3. Дифференциал функции

Дифференциал функции $y = f(x)$

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \quad (40)$$

Отсюда получаем, что

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)} \quad (41)$$

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx .

Свойства дифференциалов

$$1. d(C \cdot u) = C \cdot du, \quad C = const$$

$$2. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$3. d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$4. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

$$5. df(u) = f'(u)du$$

Таблица дифференциалов

$d(C) = 0$	$d(x + C) = dx$
$d(\alpha \cdot x + C) = \alpha \cdot dx$	$d(x^p) = p \cdot x^{p-1} \cdot dx$
$d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx$	$d(e^x) = e^x dx$
$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$
$d(\sin x) = \cos x dx$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$

2.4. Неопределенный интеграл

Определение первообразной

Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$ называется такая функция $F(x)$, что выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любого x из заданного промежутка.

Определение неопределенного интеграла

Все множество первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (42)$$

Отыскание неопределенного интеграла называют *интегрированием* функции.

Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$
2. $\int d(F(x)) = F(x) + C$
3. $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$
4. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k = \text{const}$

$$5. \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица интегралов

$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln x-a + C$	$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C$

Замена переменных в неопределенном интеграле

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (43)$$

Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (44)$$

или

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (45)$$

Применение этой формулы целесообразно в тех случаях, когда интеграл справа либо проще интеграла слева, либо ему подобен.

Некоторые интегралы, которые удобно вычислять по частям:

1) для интегралов вида $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, $\int P(x)e^{kx} dx$ за u следует принять многочлен $P(x)$, а все остальное за dv

2) для интегралов вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \ln x dx$ за u принимают соответственно $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, а $P(x)dx$ за dv

Примечание. Многочленом степени n называют выражение

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n - коэффициенты многочлена.

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называют дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональную дробь называют *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Перед интегрированием $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нужно выполнить следующие действия:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь

2) разложить знаменатель дроби на множители

$$Q(x) = (x - a)^m \cdot \dots \cdot (x^2 + px + q)^n \cdot \dots,$$

где $x^2 + px + q$ - неразложимый множитель

3) правильную рациональную дробь представить как сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - a)^m} + \dots \\ &\dots + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \dots \end{aligned}$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты A_i ($i = \overline{1, m}$), B_j, C_j ($j = \overline{1, n}$) для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов

Интегрирование тригонометрических функций

Универсальной тригонометрической подстановкой является следующая:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t} \quad (46)$$

В результате этой подстановки имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t}$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Случай 1. Один из показателей m или n - нечетное положительное число.

а) если m - нечетное, то применяем замену $\cos x = t$

б) если n - нечетное, то применяем замену $\sin x = t$

Случай 2. И m и n - четные положительные числа. Тогда используем формулы понижения порядка:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x, \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{aligned}}$$

Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$

Такие интегралы находят с помощью формул:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned}}$$

2.5. Определенный интеграл

Принято следующее обозначение определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

где числа a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования соответственно.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b (kf(x) \pm g(x))dx = k \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \quad k = const$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),} \quad (47)$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Интегрирование по частям

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du} \quad (48)$$

Формула замены переменных

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,} \quad (49)$$

где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Вычисление длин дуг

1) Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

2) Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$:

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt}$$

Формулы вычисления площадей плоских фигур

Геометрический смысл определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ - это площадь криволинейной трапеции.

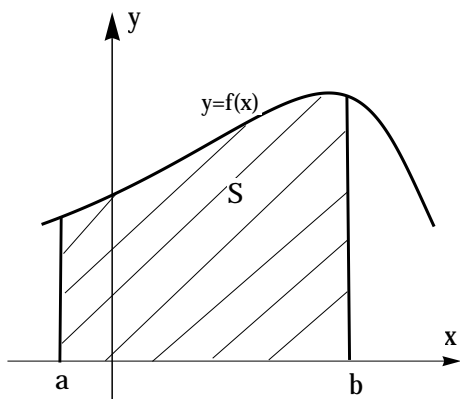


Рис. 1. $S = \int_a^b f(x)dx$

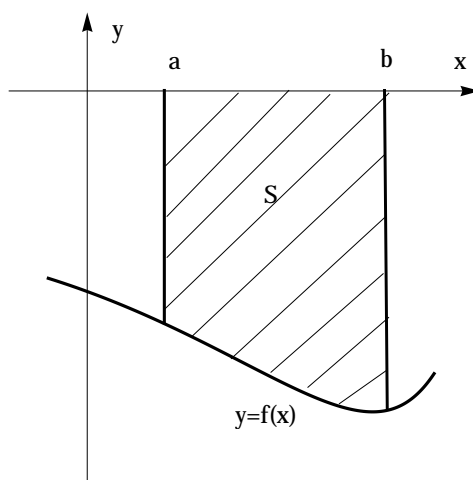


Рис. 2. $S = - \int_a^b f(x)dx$

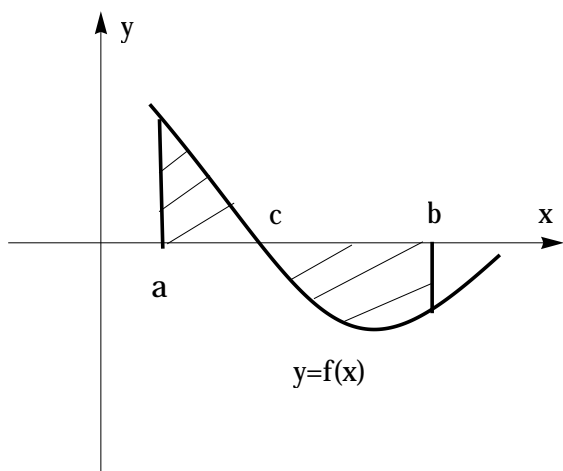


Рис. 3. $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

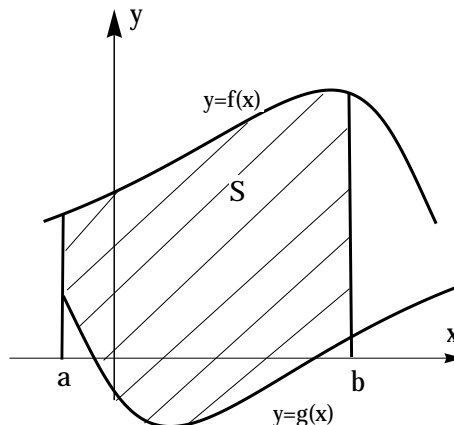


Рис. 4. $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) вращается вокруг оси Ox , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

3. Алгебра

3.1. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

1) две матрицы равны, если равны все соответствующие элементы этих матриц

2) матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называют *квадратной* $A_{n \times n}$

3) квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы нули, называется *единичной* матрицей:

$$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

4) матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором (или вектор-столбцом, или вектор-строкой)

5) матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к данной (A^T)

Сложение двух матриц

Эта операция определена для матриц одинаковой размерности

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} + b_{11}} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

$$k \cdot A_{m \times n} = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведение матриц

Операция умножения двух матриц A и B определена только для случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \\ = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ \boxed{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

3.2. Определители

Каждой квадратной матрице $A_{n \times n}$ можно сопоставить число $\det A$, которое называется определителем матрицы.

1) $n = 1$. $\det A = a_{11}$

2) $n = 2$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2) $n = 3$.

Первый способ. Определитель считается разложением по любому столбцу (строке). Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Второй способ. (способ Саррюса или способ «параллельных полосок»)

Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и проводят линии:

$$a_{11} \textcircled{-} [dr] a_{12} \textcircled{-} [dr] a_{13} \textcircled{-} [dr] \textcircled{-} - [dl] a_{11} \textcircled{-} - [dl] a_{12} \textcircled{-} - [dl] a_{21} a_{22} \textcircled{-} [dr] \textcircled{-} - [dl] a_{23} \textcircled{-}$$

Множители, находящиеся на «сплошных» диагоналях входят в формулу со знаком плюс, а множители, находящиеся на «пунктирных» диагоналях входят в формулу со знаком минус, т.е.

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Свойства определителей

- 1) при перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак
- 2) определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю
- 3) общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя
- 4) если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю
- 5) определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + k \cdot a_{11} & a_{32} + k \cdot a_{12} & a_{33} + k \cdot a_{13} \end{vmatrix}$$

Обратная матрица

Пусть A - квадратная матрица n -ого порядка. Матрица A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A , если выполнено условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Всякая матрица A , у которой $\det A \neq 0$, имеет обратную матрицу.

$$\underline{n = 2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$n = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3.3. Системы линейных уравнений

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (50)$$

Эта система может быть записана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (51)$$

или

$$A \cdot X = B$$

где A - основная матрица системы, B - столбец свободных членов, X - столбец неизвестных.

Матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной* матрицей.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Если выполнены условия:

- 1) A - квадратная матрица ($m = n$)
- 2) $\det A \neq 0$

то решение системы (50) единственно и находится по формулам Крамера:

$$x_k = \frac{D_k}{\det A}, \quad k = \overline{1, n},$$

где D_k - определитель, получающийся из $\det A$ заменой k -ого столбца на столбец свободных членов B .

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса – универсальный инструмент для нахождения решения системы линейных уравнений.

Метод Гаусса - метод последовательного исключения неизвестных (приведение к ступенчатому виду).

Дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3 \end{cases}$$

Основная цель метода - привести расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_2 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_3 \end{array} \right)$$

В результате возможны следующие случаи:

- 1) $c_{33} = 0$, а $c_3 \neq 0$, тогда система не имеет решений
- 2) $c_{33} = c_3 = 0$, тогда система имеет бесконечно много решений
- 1) $c_{33} \neq 0$, тогда система имеет единственное решение

Из преобразованной системы последовательно определяют все неизвестные.

4. Элементы векторной алгебры

4.1. Прямоугольные координаты в пространстве

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точку M пространства, имеющую координаты x (абсцисса), y (ордината), z (апшиката), обозначают $M(x; y; z)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (52)$$

Деление отрезка в данном отношении

Координаты точки $C(x; y; z)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = AC/CB$ (считая от A к B), определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (53)$$

В частности, координаты середины отрезка AB определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (54)$$

4.2. Векторы и простейшие действия над ними

Вектор - направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Координаты вектора

Если $A(x_1; y_1; z_1)$ начало вектора, а $B(x_2; y_2; z_2)$ - его конец, то вектор обозначается символом \overline{AB} или \bar{a} и имеет в заданной системе координат $Oxyz$, следующие координаты:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \quad (55)$$

или

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\},$$

где

$$a_x = \text{пр}_x \bar{a},$$

$$a_y = \text{пр}_y \bar{a},$$

$$a_z = \text{пр}_z \bar{a},$$

есть проекции вектора \bar{a} на соответствующие оси координат Ox , Oy , Oz (их называют *координатами вектора \bar{a}*).

Длина вектора

Длиной или *модулем* вектора \overline{AB} называется длина отрезка, она обозначается $|\overline{AB}|$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (56)$$

или

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (57)$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* (\bar{e}).

Свойство проекции

Проекция вектора \bar{a} на ось l равна произведению модуля вектора \bar{a} на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi \quad (58)$$

Орты осей координат

Единичные векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси, называются *ортами осей* :

$$\bar{i} = \{1; 0; 0\},$$

$$\bar{j} = \{0; 1; 0\},$$

$$\bar{k} = \{0; 0; 1\},$$

Разложение вектора по ортам координатных осей

Любой вектор \bar{a} , заданный в координатном пространстве $Oxyz$, можно представить в виде

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

где a_x , a_y , a_z - координаты вектора \bar{a} .

Направляющие косинусы вектора

Направление вектора $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ определяется углами α, β, γ образуемыми им с осями координат Ox, Oy, Oz . Косинусы этих углов находят по формулам:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Линейные операции над векторами

- 1) $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$
- 2) $\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot a_x\bar{i} + \lambda \cdot a_y\bar{j} + \lambda \cdot a_z\bar{k} = \{\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\}$

Равенство векторов

Пусть $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда

$$\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

Коллинеарность векторов

Векторы \bar{a} и \bar{b} *коллинеарны* ($\bar{a} \parallel \bar{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Условие коллинеарности векторов \bar{a} и \bar{b} , заданных своими координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Компланарность векторов

Три вектора компланарны, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Координаты точки

Вектор \overline{OM} , начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой $M(x; y; z)$, называют *радиус-вектором* точки M и обозначают \bar{r} , т.е. $\overline{OM} = \bar{r}$. Так как координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки M , то

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \{x; y; z\}$$

Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов \bar{a} и \bar{b} называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi$$

или

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$$

Свойства скалярного произведения

- 1) $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$
- 2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$
- 3) $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$
- 3) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

Скалярное произведение ортов осей

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{i} \cdot \bar{k} = 0$$

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть векторы заданы своими координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Угол между векторами \bar{a} и \bar{b}

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Проекция вектора на заданное направление

$$\boxed{\operatorname{pr}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}, \quad \operatorname{pr}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|}}$$

Определение векторного произведения

Векторным произведением двух векторов \bar{a} и \bar{b} называют третий вектор \bar{c} , определяемый следующим образом:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi$, где φ - угол между векторами \bar{a} и \bar{b} , т.е. модуль вектора \bar{c} равен площади параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b}

2) вектор \bar{c} перпендикулярен векторам \bar{a} и \bar{b}

3) векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} после приведения их к общему началу ориентированы друг к другу соответственно как орты \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} (в правой системе координат они образуют так называемую правую тройку векторов)

Свойства векторного произведения

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$

3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

4) $\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$

Векторное произведение ортов осей

$$\boxed{\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}}$$

$$\boxed{\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k}}$$

$$\boxed{\bar{j} \times \bar{k} = -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i}}$$

$$\boxed{\bar{k} \times \bar{i} = -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}}$$

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть векторы заданы своими координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах \bar{a} и \bar{b}

$$S_{\text{пар}} = |\bar{a} \times \bar{b}|,$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Смешанное произведение $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$

Модуль смешанного произведения трех векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения

1) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$

2) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$. Это равенство позволяет записывать смешанное произведение векторов без знаков векторного и скалярного умножения: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$

4) \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} - компланарны $\iff \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$

5) если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} - правая тройка, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} - левая тройка

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть векторы заданы своими координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, тогда

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Объем параллелепипеда

$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$$

5. Аналитическая геометрия в пространстве

5.1. Уравнение плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{A; B; C\}$:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \quad (59)$$

Вектор $\bar{n} = \{A; B; C\}$ называется *нормальным вектором плоскости*.

Общее уравнение плоскости

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad (60)$$

Частные случаи:

$A = 0$ - плоскость параллельна оси Ox ;

$B = 0$ - плоскость параллельна оси Oy ;

$C = 0$ - плоскость параллельна оси Oz ;

$D = 0$ - плоскость проходит через начало координат;

$A = B = 0$ - перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);

$A = C = 0$ - перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);

$B = C = 0$ - перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);

$A = D = 0$ - плоскость проходит через ось Ox ;

$B = D = 0$ - плоскость проходит через ось Oy ;

$C = D = 0$ - плоскость проходит через ось Oz ;

$A = B = D = 0$ - совпадает с плоскостью xOy ;

$A = C = D = 0$ - совпадает с плоскостью xOz ;

$B = C = D = 0$ - совпадает с плоскостью yOz ;

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.

Пусть даны три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой, тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно двум векторам $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox , Oy , Oz соответственно отрезки a , b , c , тогда получаем уравнение плоскости, проходящей через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Угол между двумя плоскостями

Угол φ между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.2. Уравнение прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определяется заданием какой-либо ее фиксированной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектора $\vec{S} = \{m; n; p\}$, параллельного этой прямой. Вектор \vec{S} называется *направляющим вектором прямой*.

Векторное уравнение прямой имеет вид:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}}, \quad (61)$$

где $\vec{r} = \{x; y; z\}$ - радиус-вектор произвольной точки на прямой, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ - радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, t - скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать любые значения.

Параметрические уравнения прямой

От векторного уравнения прямой (61) нетрудно перейти к параметрическим уравнениям:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp \end{cases}} \quad (62)$$

Канонические уравнения прямой

Пусть $\vec{S} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - точка, лежащая на этой прямой. Уравнения

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \quad (63)$$

называют каноническими уравнениями прямой.

Замечание. Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (63) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad (64)$$

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}} \quad (65)$$

Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, то направляющий вектор \bar{S} прямой можно найти как векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\boxed{\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}}$$

Замечание. Из уравнений (65) легко получить канонические уравнения прямой, взяв две какие-либо точки на прямой (65) и применив уравнения (64).

Угол между прямыми

Под углом между прямыми L_1 и L_2 понимают угол между их направляющими векторами $\bar{S}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\bar{S}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$, поэтому

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}} \quad (66)$$

- Условие перпендикулярности двух прямых

$$\boxed{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0}$$

- Условие параллельности двух прямых

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Прямые

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

лежат в одной плоскости, если

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (67)$$

Если величины m_1, n_1, p_1 не пропорциональны величинам m_2, n_2, p_2 , то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (68)$$

- Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

- Условие параллельности прямой и плоскости

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Расположение прямой и плоскости

Чтобы найти точку пересечения прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$. При этом:

1) если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая пересекает плоскость

2) если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости

3) если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости

След прямой линии

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

5.3. Поверхности второго порядка

Сфера

В декартовой системе координат уравнение сферы с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R записывается в виде

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2} \quad (69)$$

Канонические уравнения цилиндров второго порядка

- *Эллиптический цилиндр*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Частным случаем является круговой цилиндр $x^2 + y^2 = R^2$.

- *Гиперболический цилиндр*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- *Параболический цилиндр*

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси Oz , а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости xOy .

Уравнение конуса второго порядка

- Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

- Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Ox

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Поверхности второго порядка общего вида

- *Эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- *Однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- *Двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- *Эллиптический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, q > 0)$$

- *Гиперболический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, q > 0)$$

6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

6.1. Линии и поверхности уровня

Линия уровня

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называют линию $f(x, y) = C$ на плоскости xOy , в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

Поверхность уровня

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называют поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Частные производные первого порядка

• *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называют конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad (70)$$

вычисленный при постоянном y .

• *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной y называют конечный предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y), \quad (71)$$

вычисленный при постоянном x .

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полный дифференциал

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy} \quad (72)$$

Аналогично полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz} \quad (73)$$

Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называют частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \quad \text{и т.д.}$$

Так называемые *смешанные производные*, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

Дифференциалы высших порядков

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы второго и третьего порядка вычисляются по формулам

$$\boxed{d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2} \quad (74)$$

$$\boxed{d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3z}{\partial y^3}dy^3} \quad (75)$$

Дифференцирование сложных функций

• Пусть $z = f(x, y)$ где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}} \quad (76)$$

• Если $z = f(x, y)$ где $y = \varphi(x)$, тогда полная производная от z по x находится по формуле

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad (77)$$

• Если же $z = f(x, y)$ где $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, то частные производные выражаются так:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}} \quad (78)$$

Дифференцирование неявных функций

Производную неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, можно вычислить по формуле

$$\boxed{y' = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \quad (79)$$

Аналогично вычисляются производные неявной функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad (80)$$

Производная в данном направлении

Производная функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора \bar{l} вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,} \quad (81)$$

где α - угол, образуемый вектором \bar{l} с осью Ox .

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная в данном направлении определяется аналогично

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,} \quad (82)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы вектора \bar{l} .

Градиент функции

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ называют вектор с началом в точке M , координатами которого являются частные производные функции z :

$$\boxed{\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}} \quad (83)$$

Градиент функции и производная в направлении вектора l связаны формулой

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \text{pr}_l(\text{grad } z)} \quad (84)$$

Градиент указывает направление наиболее быстрого роста функции в данной точке. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial l} \right)_{\text{наиб}} = |\text{grad } z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}} \quad (85)$$

В случае функции $u = f(x, y, z)$ градиент функции равен

$$\boxed{\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}} \quad (86)$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ записывается в виде:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M \cdot (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M \cdot (z - z_0) = 0, \quad (87)$$

а уравнение нормали в этой же точке - в виде:

$$\frac{(x - x_0)}{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M} + \frac{(y - y_0)}{\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M} + \frac{(z - z_0)}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M} = 0. \quad (88)$$

Необходимые условия экстремума функции

Максимум или минимум функции называют ее *экстремумом*.

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю:

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0}$$

Точки, в которых производные равны нулю, называют *стационарными точками*. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума функции

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ - стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Положим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

$$\Delta = AC - B^2$$

Тогда:

- если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно, максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$)
- если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет
- если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование

7. Ряды

7.1. Числовые ряды

Основные понятия

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (89)$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ - числа, называемые *членами ряда*, u_n - *общий член* ряда.

Сумма первых n членов ряда (89) называется *n -й частичной суммой* ряда и обозначается через S_n .

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм, то ряд (89) *сходится*, и этот предел называется суммой ряда.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (89) *расходится*.

Ряд геометрической прогрессии

Ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0) \quad (90)$$

называется рядом геометрической прогрессии:

- если $|q| < 1$, то ряд (90) сходится и его сумма равна $S = \frac{a}{1 - q}$
- если $|q| \geq 1$, то ряд (90) расходится

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если ряд (89) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т.е. $u_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Достаточное условие расходимости числового ряда

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Гармонический ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots} \quad (91)$$

Гармонический ряд **расходится**.

7.2. Знакоположительные ряды

Первый признак сравнения

Даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

причем для всех n выполнено неравенство

$$u_n \leq v_n$$

Тогда

- если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится

Второй признак сравнения

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k,$$

то оба знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Признак Коши

Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C,$$

то этот ряд сходится при $C < 1$ и расходится при $C > 1$.

Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = m,$$

то этот ряд сходится при $m < 1$ и расходится при $m > 1$.

Интегральный признак

Если $f(x)$ при $x \geq 1$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \quad (p > 0) \quad (92)$$

Данный ряд сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

7.3. Знакопеременные ряды

Ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, т.е. ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^n u_n + \dots$$

где $u_n > 0$, называют *знакопередающим* рядом.

Признак Лейбница

Знакопередающий ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т.е.

- 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Общий достаточный признак сходимости

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$$

сходится, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots + |u_n| + \dots$$

В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

7.4. Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

где $x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ - действительные числа, называют *степенным рядом*.

Теорема Абеля

Если степенной ряд сходится при $x = a$, то он сходится абсолютно при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < |a - x_0|$

Следствие

Для всякого степенного ряда существует *интервал сходимости* $|x - x_0| < R$ с центром в точке x_0 , внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится.

Число R - *радиус сходимости* степенного ряда. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только в точке $x = x_0$; если же $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

Для отыскания интервала и радиуса сходимости используют следующие способы:

$$1) \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$2) \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

3) Во всех случаях интервал сходимости можно находить без определения радиуса сходимости, применяя признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из модулей членов данного ряда.

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (93)$$

Ряд Маклорена

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (94)$$

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \quad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$x \in \begin{cases} [-1, 1], & \alpha \geq 0, \\ (-1, 1], & -1 < \alpha < 0, \\ (-1, 1), & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

8.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные y' , y'' , ..., $y^{(n)}$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка в самом общем виде записывается так

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в данное уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение последнее обращается в тождество.

Поскольку решение дифференциальных уравнений сводится к вычислению интегралов, то в состав решения входит набор постоянных $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, т.е. получается бесчисленное множество решений. Количество постоянных равно порядку уравнения. Чтобы выделить из бесконечного множества решений то, которое описывает именно данный процесс, необходимо задать дополнительное условие, которое называется *начальным условием* ($y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$).

Общее решение дифференциального уравнения – это соотношение вида $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных.

Общий интеграл дифференциального уравнения – это общее решение, которое имеет неявный вид $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

Частное решение дифференциального уравнения – это общее решение при заданных значениях постоянных $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$.

Частный интеграл дифференциального уравнения – это общий интеграл при заданных значениях постоянных $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$.

Задача интегрирования дифференциального уравнения совместно с начальным условием называется начальной задачей или *задачей Коши*

8.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' = f(x, y)} \quad (95)$$

называют дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными – это уравнение вида

$$\boxed{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)} \quad (96)$$

Метод решения.

В уравнении (96) выразим производную y' через дифференциалы

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

т.е.

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Умножим уравнение на dx и разделим на $f_2(y)$ (разделяем переменные)

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл в квадратурах

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \quad f_2(y) \neq 0.$$

Далее нужно решить уравнение

$$f_2(y) = 0.$$

Если это уравнение имеет корни, то они также являются решениями уравнения (96).

Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{97}$$

называется однородным, если

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)} \tag{98}$$

Метод решения.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки (замены)

$$\boxed{u = \frac{y}{x}} \quad \text{или} \quad \boxed{y = u \cdot x}$$

Подставляя в (97) замену

$$y = ux, \quad y' = u'x + u,$$

имеем

$$u'x + u = f(x, ux),$$

а так как f удовлетворяет условию (98), т.е.

$$f(x, ux) = f(1, u) = \varphi(u)$$

приходим к уравнению

$$u'x + u = \varphi(u).$$

Последнее уравнение - уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = dx.$$

Найдя его общее решение (общий интеграл), следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$.
Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его можно записать в виде

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \quad (99)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - заданные функции. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение (99) называют линейным неоднородным, а если $Q(x) \equiv 0$ - линейным однородным.

Метод вариации произвольной постоянной.

Уравнение (99) решаем в два этапа.

1) Ищем решение однородного уравнения:

$$y' + P(x)y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

Разделяем переменные - умножаем на dx , делим на y :

$$\frac{dy}{y} + P(x) dx = 0.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x) dx = C,$$

откуда

$$y = C \cdot e^{-\int P(x) dx}.$$

2) Заменяем постоянную C на функцию $C(x)$ (варьируем произвольную постоянную). То есть, ищем решение исходного уравнения (99) в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx},$$

где $C(x)$ - некоторая, подлежащая определению, функция.

Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y в исходное уравнение, что приводит к уравнению

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x).$$

Отсюда

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C_1.$$

Тогда искомое общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C_1 \right] \cdot e^{-\int P(x) dx}.$$

Метод Бернулли.

Ищем решение исходного уравнения (99) в виде произведения двух функций:

$$\boxed{y = uv},$$

где u, v - неизвестные функции от x . Дифференцируем:

$$\boxed{y' = u'v + uv'}$$

Подставляя замену в исходное уравнение (99), получаем

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \quad (100)$$

В качестве v возьмем любое, отличное от нуля, решение уравнения:

$$v' + P(x)v = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, т.е.

$$\frac{dv}{v} + P(x) dx = 0.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} + \int P(x) dx = C.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$ можно положить $C = 0$. Отсюда

$$v = e^{-\int P(x) dx}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (100), получаем

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x).$$

Отсюда

$$du = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx.$$

Интегрируем

$$u = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

Возвращаясь к переменной y , получаем:

$$y = uv = \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int P(x) dx}.$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}, \quad (101)$$

где

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}, \quad (102)$$

называют уравнением в полных дифференциалах, т.е. левая часть такого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

В этом случае уравнение (101) можно записать в виде $dU(x, y) = 0$, а его общее решение определяется равенством $U(x, y) = C$.

Метод решения.

Так как

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

то

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (103)$$

Проинтегрируем первое уравнение (103) по x :

$$\boxed{U(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)}, \quad (104)$$

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y . Для ее нахождения подставим U во второе уравнение (103):

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \varphi'(y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right).$$

Из последнего равенства находим $\varphi(y)$. Затем, подставляя $\varphi(y)$ в равенство (104), находим функцию $U(x, y)$. Решение выписываем в виде $U(x, y) = C$.

8.3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Уравнения вида $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$

Решение этого уравнения находится n -кратным интегрированием.

Интегрируя уравнение первый раз, получим:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, получим:

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2.$$

Интегрируя n раз, получим общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, достаточно положить

$$C_n = y_0, C_{n-1} = y'_0, \dots, C_1 = y_0^{(n-1)}.$$

Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$

В данном уравнении левая часть явно не зависит от y . Порядок такого уравнения можно понизить с помощью замены:

$$\begin{cases} y' = z(x), \\ y'' = z'(x) \end{cases} \quad (105)$$

Тогда получим уравнение первого порядка

$$F(x, z, z') = 0.$$

Из этого уравнения находим его общее решение

$$z = \varphi(x, C_1).$$

Затем, возвращаясь к замене, находим y .

Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$

В этом уравнении левая часть явно не зависит от x . Уравнение этого вида допускает понижение порядка с помощью замены:

$$\begin{cases} y' = p(y), \\ y'' = \frac{dp}{dy}p \end{cases} \quad (106)$$

В этом случае исходное уравнение примет вид:

$$F(y, p, \frac{dp}{dy}) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим его общее решение

$$p = \varphi(y, C_1),$$

а затем, возвращаясь к замене, находим y .

Комплексные числа

Комплексное число — это выражение вида $\alpha + i\beta$, где α, β — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен -1 , то есть

$$\boxed{i^2 = -1} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Число α называется *действительной частью*, а число β — *мнимой частью* комплексного числа $z = \alpha + i\beta$. Если $\beta = 0$, то вместо $\alpha + 0i$ пишут просто α . Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

у которого $D = b^2 - 4ac < 0$. Отсюда следует, что действительных корней квадратное уравнение не имеет, но оно имеет два корня в поле комплексных чисел:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm i\beta,$$

где $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.

Числа $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ называются *комплексно сопряженными* числами.

8.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами это уравнение вида

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0; \quad a_i = \text{const}; \quad a_0 \neq 0} \quad (107)$$

Метод решения.

Чтобы решить уравнение (107) надо составить *характеристическое уравнение*

$$\boxed{a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0} \quad (108)$$

и найти все его n корней: k_1, \dots, k_n . Тогда характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$a_0(k - k_1)(k - k_2)(k - k_3) \cdots (k - k_{n-1})(k - k_n) = 0. \quad (109)$$

В зависимости от того, каковы корни этого характеристического уравнения различают разные способы построения решения.

Вещественные корни

1) Пусть корень k_1 однократный, то есть выражение $(k - k_1)$ входит в (109) только один раз. Тогда этому корню соответствует частное решение

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

2) Пусть k_1 - корень кратности m , то есть $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_m$, тогда выражение $(k - k_1)$ входит в (109) m раз.

Этим кратным (одинаковым) корням соответствуют m линейно независимых частных решений:

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = x e^{k_1 x}; \quad y_3 = x^2 e^{k_1 x}; \quad \dots \quad y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$$

Комплексные корни

1) Пусть комплексный корень k_1 однократный. Тогда паре корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных решения

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

2) Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$ - комплексный корень кратности m . Тогда комплексно сопряженное значение $k_2 = \alpha - i\beta$ также является корнем кратности m и выражение $(k - k_1)(k - k_2)$ входит в (109) m раз.

Этим $2m$ корням соответствуют $2m$ частных линейно независимых решений:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x; & y_{m+1} &= e^{\alpha x} \sin \beta x; \\ y_2 &= x e^{\alpha x} \cos \beta x; & y_{m+2} &= x e^{\alpha x} \sin \beta x; \\ y_3 &= x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x; & y_{m+3} &= x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x; \\ \dots & & \dots & \\ y_m &= x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; & y_{2m} &= x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x; \end{aligned}$$

Общее решение

Общее решение уравнения (107) есть сумма частных решений:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n,$$

где C_i , $i = \overline{1, n}$ - произвольные постоянные.

Частный случай

Пусть в уравнении (107) $n = 2$, т.е.

$$\boxed{a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad (\diamond)$$

Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\boxed{a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \quad (\diamond\diamond)$$

Общий вид решения линейного уравнения (\diamond) зависит от дискриминанта ($D = a_1^2 - 4a_0 a_2$) характеристического уравнения $(\diamond\diamond)$. Возможны случаи:

Дискриминант $(\diamond\diamond)$	Корни $(\diamond\diamond)$	Общее решение (\diamond)
$D > 0$	k_1, k_2 - вещественные, различные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$D = 0$	k_1, k_2 - вещественные, одинаковые	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексные	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

8.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами это уравнение вида

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)} \quad (110)$$

Метод решения неоднородного уравнения со специальной правой частью:

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]}$$

Здесь α и β - постоянные, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены от x соответственно n -й и m -й степени.

Суть этого метода заключается в следующем.

1) Вначале ищем общее решение y_{oo} однородного уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

(метод решения линейного однородного уравнения описан выше).

2) Далее устанавливаем вид частного решения y^* исходного уравнения (110).

а) Если $\alpha + i\beta$ - не корень характеристического уравнения

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0,$$

то частное решение уравнения (110) ищем в виде:

$$y^*(x) = e^{\alpha x} [\tilde{P}_s(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_s(x) \sin \beta x]$$

б) Если $\alpha + i\beta$ - корень характеристического уравнения кратности m , то частное решение ищем в виде:

$$y^*(x) = e^{\alpha x} x^m [\tilde{P}_s(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_s(x) \sin \beta x],$$

где $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ - полные многочлены от x степени $s = \max\{n, m\}$:

$$\tilde{P}_s(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_s x^s,$$

$$\tilde{Q}_s(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_s x^s$$

с неопределенными коэффициентами A_i , B_i .

3) После того как установлен вид частного решения, подставляем y^* в уравнение (110) и находим неизвестные коэффициенты A_i и B_i , отождествляя коэффициенты подобных членов в правой и левой частях полученного выражения.

После чего выписываем общее решение исходного уравнения (110):

$$y = y_{oo} + y^*$$

Замечание. Если неоднородная часть $f(x)$ может быть представлена в виде суммы функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

То частное решение y^* также может быть представлено в виде суммы частных решений:

$$y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* + \dots$$

каждое из которых удовлетворяет уравнению с правой частью в виде одной

из функций $f_i(x)$:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_i(x).$$

Частные случаи

Неоднородность вида $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$

В этом случае $\beta = 0$.

Если α - не корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y^* = \tilde{P}_n(x) e^{\alpha x}.$$

Если α - корень кратности m , то частное решение имеет вид:

$$y^* = x^m \tilde{P}_n(x) e^{\alpha x}.$$

Неоднородность вида $f(x) = e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$

Здесь M, N - константы.

Если $\alpha \pm i\beta$ - не корни характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y^* = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Если $\alpha \pm i\beta$ - корни кратности m , то частное решение имеет вид:

$$y^* = e^{\alpha x} x^m (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Примеры контрольных работ

Контрольная работа №1

- Даны вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(3;5)$, $C(8;1)$. Найти
 - периметр треугольника
 - площадь треугольника
 - уравнения прямых на которых лежат стороны треугольника
 - внутренние углы треугольника
 - длину высоты, опущенной из точки B ; уравнение прямой на которой лежит высота
 - длину медианы из точки A ; уравнение прямой на которой лежит медиана
 - уравнение прямой на которой лежит биссектриса CE

- Уравнение линии привести к каноническому виду. Построить линию

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$$

Найти точки пересечения заданной линии с прямой $y = -x$.

- Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox , симметрично относительно начала координат, если задана точка $M_1(2\sqrt{3}; 1)$ эллипса и его малая полуось равна 2.
- Построить линию

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Найти фокусы и эксцентриситет.

- Написать уравнение прямой, проходящей через вершину параболы

$$y = 4x^2 + 8x + 7$$

параллельно директрисе этой параболы.

Контрольная работа №2

Найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - x^2}{1 - x^2 + 7x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \sin 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 10x - 9} - x \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{1-x^2} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+1}$$

Найти производную от функции

$$1) y = \frac{x^5}{6} - \frac{4}{x} + \sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[4]{x^4}}$$

$$2) y = (x+1)2^{4x} - \sin^3(x^2+1)$$

$$3) y = \frac{x-2}{7x+5}$$

$$4) y = \operatorname{tg}^3 \left(\sqrt{\frac{2x}{3}} \right)$$

$$5) y = \frac{1}{18} \ln \frac{x-5}{2x} - e^{\sin(x/3)}$$

$$6) y = \frac{5}{2} \arcsin \frac{\sqrt{2x-3}}{3}$$

Контрольная работа №3

Вычислить интегралы

$$1) \int \frac{(2+3x^3)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$2) \int \frac{dx}{(4-3x)^7}$$

$$3) \int \frac{10x dx}{\sqrt[4]{3x^2-1}}$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$5) \int \sin^3 2x \cos^4 2x dx$$

$$6) \int x e^{x+1} dx$$

$$7) \int \frac{x^3-4}{x^2-4x+3} dx$$

$$8) \int \frac{2x}{(x+1)(x-1)^2} dx$$

Контрольная работа №4

1) Вычислить определенные интегралы

$$a) \int_0^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\text{б) } \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx$$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y + 2x = 0$, $x - 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$

б) $x - y = 0$, $xy = 1$, $x = 2$

3) Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

4) Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$$

Контрольная работа №5

1. Даны точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; -1; 1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overline{M_1M_2}$. Привести к общему виду. Построить плоскость.

2. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -2; 2)$ и параллельной вектору $\overline{S} = \{1; 2; -2\}$. Найти след прямой на плоскости xOy . Построить прямую.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 1, -2)$ и перпендикулярной плоскостям $2x - y + z - 3 = 0$ и $-x + 2y + z + 5 = 0$.

4. Даны уравнения прямой $x = 2$, $y = 2z + 1$. Построить прямую. Найти углы прямой с осями координат.

5. Найти угол между прямой $-x - 3y - 2z + 2 = 0$, $-2x + y - z - 1 = 0$ и плоскостью yOz .

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-0}{3}$ и через точку $(0; 4; 2)$.

Контрольная работа №6

1. Дана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

$$z = \cos y + (y - x) \sin y$$

Найти а) $(x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}$; б) dz .

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением: $z^3 - 3xyz = x^2$.

3. Дана функция $z = f(x, y)$, точка A и вектор \bar{p} .

$$z = 3x^2y^2 + 5y^2x; \quad A(1; 1); \quad \bar{p} = 2\bar{i} + \bar{j}$$

Найти градиент функции в точке A и производную $\frac{\partial z}{\partial p}(A)$.

4. Исследовать на сходимость знакоположительный ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$

Контрольная работа №7

Решить уравнения

1) $y' - (y^2 - 1)e^{3x} = 0$

2) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

3) $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{5^x}{x^2}$

4) $x \cos y dy + \sin y dx = y dy$

5) $(y - 3x^2 + 1)dx + xdy = 0$

Контрольная работа №8

Решить уравнения

1) $y^{IV} = \cos^2 x, \quad y(0) = \frac{1}{32}, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = \frac{1}{8}, \quad y'''(0) = 0$

2) $\frac{y''}{x^4} - \frac{y'}{x^5} = 2$

3) $3yy'y'' = (y')^3 + 2$

4) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

5) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{3x} + 2x^2$

Список литературы

- [1] Демидович Б.П., *Краткий курс высшей математики* / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М., 2007. – 654 с.
- [2] Письменный Д., *Конспект лекций по высшей математике: Ч. 1* / Д. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 256 с.
- [3] Письменный Д., *Конспект лекций по высшей математике: Ч. 2* / Д. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 288 с.
- [4] Лунгу К.Н., *Сборник задач по высшей математике : с контрольными работами. 1 курс* / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 576 с.
- [5] Лунгу К.Н., *Сборник задач по высшей математике : с контрольными работами. 2 курс* / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 592 с.