

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ  
ИНСТИТУТ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА им. А. В. ЛЫКОВА  
Журнал основан в январе 1958 г.

*ИФЖ*

60  


*И*  
**НЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

JOURNAL  
OF ENGINEERING PHYSICS  
AND THERMOPHYSICS

**Отдельный оттиск  
Offprint**

**Том 91, № 4  
Vol. 91, No. 4**

ИЮЛЬ–АВГУСТ  
JULY–AUGUST

2018

# ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Основан в январе 1958 г.

2018. ТОМ 91, № 4 (ИЮЛЬ–АВГУСТ)

## СОДЕРЖАНИЕ

### ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ДИСПЕРСНЫХ И ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

- Рудобашта С. П., Зуева Г. А., Муравлева Е. А., Дмитриев В. М.** Массопроводность капиллярно-пористых коллоидных материалов при их конвективной сушке ..... 903
- Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С.** Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками ..... 912
- Хасанов М. К.** Режимы гидратообразования при инъекции углекислого газа в пористую среду, насыщенную метаном и водой ..... 922
- Дьяченко Н. Н., Дьяченко Е. Н.** Компьютерное моделирование процесса фильтрования шахтных вод на слое песка ..... 932
- Степкина М. Ю., Кудряшова О. Б.** Моделирование процесса электростатической сорбции на взвешенных частицах твердофазных порошков в воздушном пространстве ..... 937
- Стефанович Л. И., Фельдман Э. П., Кириллов А. К.** Влияние трещин и пор на импедансные спектры углей ..... 943
- Arunsandeep G. and Chandramohan V. P.** Numerical Solution for Determining the Temperature and Moisture Distributions of Rectangular, Cylindrical, and Spherical Objects during Drying ..... 952

### ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ПРОЦЕССАХ ГОРЕНИЯ

- Жданова А. О., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А.** Влияние плотности лесного горючего материала на подавление его термического разложения жидкостным аэрозолем ..... 965
- Зима В. П., Касымов Д. П.** Экспериментальные исследования влияния природного пожара на древесный материал ..... 972
- Крайнов А. Ю., Моисеева К. М.** Моделирование горения метано-воздушной смеси в замкнутом сферическом объеме ..... 977
- Михайлов А. С., Пиралишвили Ш. А., Степанов Е. Г., Евдокимов О. А., Спесивцева Н. С.** Особенности сжигания пылевидного торфяного топлива в вихревом горелочном устройстве ..... 984
- Белоцерковский М. А., Шкурко В. В., Сосновский А. В., Трусов Д. И.** Определение параметров рабочих газов, используемых в процессе гиперзвуковой металлизации стальных покрытий ..... 992
- Пенязьков О. Г., Фомин Н. А.** Новые схемы цифровой спекл-фотографии ..... 999

### ТЕПЛОПЕРЕНОС ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

- Хузина Ф. Р., Салиева М. С., Красильников В. А., Набиуллин А. Р.** Начальный этап истечения вскипающей жидкости из полубесконечного канала. Решение в виде волны Римана ..... 1016

### ГИДРОГАЗОДИНАМИКА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

- Исаев С. А., Леонтьев А. И., Мильман О. О., Судаков А. Г., Усачов А. Е., Гульцова М. Е.** Интенсификация теплообмена при ламинарном вихревом течении воздуха в узком канале с однорядными наклонными овальными траншеями ..... 1022
- Волков В. Ф., Киселева Т. А., Чиркашенко В. Ф.** Численные и экспериментальные исследования возмущенных давлений в окрестности тандемной компоновки ..... 1035
- Mishra S. R., Mohanty J., and Das J. K.** Free Convective Flow, Heat and Mass Transfer in a Micropolar Fluid over a Shrinking Sheet in the Presence of a Heat Source ..... 1043

### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛООБМЕН В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

- Карякин Ю. Е., Кузин В. М., Плетнев А. А., Федорович Е. Д.** Численное моделирование теплового состояния металлобетонного контейнера с отработавшим ядерным топливом при его транспортировке ..... 1050

|   |      |
|---|------|
| <b>Янковский А. П.</b> Влияние теплового воздействия на эффект увеличения несущей способности вращающихся дисков с тонкими высокомодульными покрытиями..... | 1058 |
| <b>Кот В. А.</b> Обобщенное решение смешанной задачи теплопроводности методом взвешенной температуры.....   | 1066 |
| <b>Бирюк В. В., Ларин Е. А., Лившиц М. Ю., Шелудько Л. П., Шиманов А. А.</b> Блочная теплофикационная парогазовая установка.....                            | 1089 |

#### ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ

|   |      |
|---|------|
| <b>Бойцова А. А., Кондрашева Н. К.</b> Исследование реологических свойств углеводородных систем с высоким содержанием смол и асфальтенов.....   | 1098 |
| <b>Салахов Р. Х., Хамидуллин Р. Ф., Мансуров З. А., Бодыков Д. У., Сейтжанова М. А.</b> Исследование смачивающей способности деэмульгаторов для высоковязких и тяжелых нефтей Казахстана..... | 1106 |

#### ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

|   |      |
|---|------|
| <b>Гончаров В. К., Пузырев М. В., Ступакевич В. Ю.</b> Управление потоками заряженных частиц в эрозионной лазерной плазме графитовой мишени в вакууме.....                  | 1115 |
| <b>Аульченко С. М., Картаев Е. В.</b> Управление размерами и фазовым составом субмикронных частиц диоксида титана, синтезируемых в проточном плазмохимическом реакторе..... | 1122 |

#### КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

|   |      |
|---|------|
| <b>Закиров Т. Р., Галеев А. А., Стаценко Е. О., Хайдарова Л. И.</b> Расчет фильтрационных характеристик пористых сред по их цифровым образам с использованием решеточных уравнений Больцмана..... | 1128 |
|---|------|

#### ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

|   |      |
|---|------|
| <b>Барбин Н. М., Колбин Т. С., Терентьев Д. И., Алексеев С. Г., Кайбичев И. А.</b> Термические и теплофизические свойства системы радиоактивный графит–инертный газ при нагревании. Компьютерный эксперимент..... | 1139 |
| <b>Кац М. Д., Кац И. М.</b> Особенности определения теплофизических характеристик жидкостей методом лазерной вспышки.....   | 1150 |
| <b>Николаенко Ю. Е., Постол А. С.</b> Экспериментальное исследование контактного термического сопротивления в зоне резьбового соединения соприкасающихся поверхностей.....  | 1157 |
| <b>Кочурова Н. Н., Коротких О. П., Абдуллин Н. Г., Киприанов А. А., Айрапетова Е. Р., Караев Р. Р., Petzold G.</b> О диссоциации воды.....  | 1164 |
| <b>Фомин В. М., Волков В. Ф., Киселева Т. А., Чиркашенко В. Ф.</b> Исследования проблемы звукового удара в ИТПМ СО РАН.....   | 1170 |

#### ИНФОРМАЦИОННАЯ ЛИНИЯ

|  |      |
|--|------|
| <b>Одиннадцатая Международная теплофизическая школа "Информационно-сенсорные системы в теплофизических исследованиях", 6–9 ноября 2018 г. (г. Тамбов).....</b> | 1181 |
| <b>Памяти профессора Клайва Грейтида (29 сентября 1940 – 25 марта 2018).....</b>   | 1183 |

Ответственный за выпуск: Л. Н. Шемет

Подписано в печать 05.07.2018. Формат 60×84%. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 32,55. Уч.-изд. л. 28,05. Тираж 90 экз. Заказ 134

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская навука».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/18 от 02.08.2013.  
ЛП № 02330/455 от 30.12.2013.

220141, г. Минск, ул. Ф. Скорины, 40

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

УДК 532.546.7

Т. Р. Закиров<sup>1,2</sup>, А. А. Галеев<sup>1</sup>, Е. О. Стаценко<sup>1</sup>, Л. И. Хайдарова<sup>1</sup>

## РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТЫХ СРЕД ПО ИХ ЦИФРОВЫМ ОБРАЗАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Исследованы особенности применения моделей SRT и MRT решеточных уравнений Больцмана для расчета фильтрационных характеристик пористых сред с использованием их цифровых образов. Результаты расчетов, выполненных на основе этих моделей, сравнивались с результатами аналогичных расчетов, выполненных с использованием стационарных уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности. Расчеты ламинарного течения в трубке с использованием модели MRT имели существенно более высокую точность по сравнению с аналогичными расчетами по модели SRT и показали независимость от параметра релаксации. Установлено, что для течения жидкости в поровых каналах модель MRT и уравнения Навье–Стокса дают сопоставимые результаты, тогда как при использовании модели SRT имеет место зависимость численного решения от параметра релаксации.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, решеточные уравнения Больцмана, рентгеновская микротомография, пористые среды.

**Введение.** Рентгеномографический метод, используемый для построения цифрового трехмерного изображения внутренней структуры пористой среды с субмикронным разрешением, успешно зарекомендовал себя при исследовании фильтрационно-емкостных свойств горных пород. Компьютерная обработка цифровых образов пористой среды делает возможным выделение в них двух фаз, соответствующих насыщенным флюидом порам и минеральному скелету среды, что позволяет рассчитать емкостные свойства среды и задать необходимые граничные условия для вычислительных экспериментов по движению жидкости в поровом канале. Применение данного метода для изучения свойств пористых сред было подробно рассмотрено в работах [1–4]. Использование цифровых образов пористых сред особенно актуально при исследовании их фильтрационных характеристик [5–7]. Моделирование движения жидкости в пористой среде на сетках, ассоциированных с ее цифровым образом, позволяет определить все компоненты тензора абсолютной проницаемости среды, что трудно реализуемо в лабораторных условиях, а также исследовать вопросы о представительности выбранного объема образца [8–10].

В настоящей работе в качестве основного метода исследования течения однофазной жидкости использован метод LBM (lattice Boltzmann method) [11–13]. Данный метод получил большую популярность ввиду его относительно простой численной реализации, например, по сравнению с уравнениями Навье–Стокса. Одним из этапов решения проблемы с использованием метода LBM является применение операции столкновения частиц, в результате которой состояние системы стремится к равновесному [14]. Для описания этого явления использовались модели решеточных уравнений Больцмана SRT (single relaxation time) [11] и MRT (multirelaxation time) [15, 16]. Основная цель исследования заключалась в выявлении особенностей применения этих моделей для расчета фильтрационных характеристик пористых сред, а также в оценке их достоверности при моделировании течения жидкости в поровом канале.

<sup>1</sup>Казанский федеральный университет. Россия, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; э-почта: tirzakirov@krfu.ru; <sup>2</sup>Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН. Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31. Поступила 15.02.2017.

**Математическая модель. Решеточные уравнения Больцмана.** В рамках LBM течение среды рассматривается с точки зрения динамики ансамбля частиц с заданным конечным числом возможных скоростей. Область течения разбивается сеткой с ячейками квадратной или кубической формы. Совокупность данных ячеек составляет решетку (lattice). Частицы за шаг по времени  $\Delta t$  могут совершить без взаимодействия друг с другом один акт перехода между соседними узлами решетки. Состояние системы в каждом узле сетки описывается функцией распределения частиц по скоростям  $f(r, \mathbf{u}, t)$ , определенной таким образом, что  $f(r, \mathbf{u}, t) \cdot \Delta r \cdot \Delta u$  показывает количество частиц в момент времени  $t$  в окрестности точки  $r(x, y, z)$  с координатами, изменяющимися в диапазонах от  $x$  до  $x + \Delta x$ , от  $y$  до  $y + \Delta y$  и от  $z$  до  $z + \Delta z$ , которые движутся со скоростями от  $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$  до  $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}(u_x + \Delta u_x, u_y + \Delta u_y, u_z + \Delta u_z)$ .

Рассматривается задача о течении жидкости в поровом канале в двухмерной и трехмерной постановках. Для двухмерного течения используется дискретный набор скоростей D2Q9 (рис. 1):  $e_1 = c(0, 0)$ ,  $e_2 = c(1, 0)$ ,  $e_3 = c(0, 1)$ ,  $e_4 = c(-1, 0)$ ,  $e_5 = c(0, -1)$ ,  $e_6 = c(1, 1)$ ,  $e_7 = c(-1, 1)$ ,  $e_8 = c(-1, -1)$ ,  $e_9 = c(1, -1)$ .

Здесь  $c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$  — базовая скорость, где  $\Delta l$  — шаг сетки. Для трехмерной задачи используется дискретный набор скоростей D3Q19:  $e_1 = c(0, 0, 0)$ ;  $e_2 = c(1, 0, 0)$ ;  $e_3 = c(-1, 0, 0)$ ;  $e_4 = c(0, 1, 0)$ ;  $e_5 = c(0, -1, 0)$ ;  $e_6 = c(0, 0, 1)$ ;  $e_7 = c(0, 0, -1)$ ;  $e_8 = c(1, 1, 0)$ ;  $e_9 = c(-1, 1, 0)$ ;  $e_{10} = c(1, -1, 0)$ ;  $e_{11} = c(-1, -1, 0)$ ;  $e_{12} = c(1, 0, 1)$ ;  $e_{13} = c(-1, 0, 1)$ ;  $e_{14} = c(1, 0, -1)$ ;  $e_{15} = c(-1, 0, -1)$ ;  $e_{16} = c(0, 1, 1)$ ;  $e_{17} = c(0, -1, 1)$ ;  $e_{18} = c(0, 1, -1)$ ;  $e_{19} = c(0, -1, -1)$ . Каждому вектору скорости из заданной совокупности  $e_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) для модели D2Q9 и  $e_i$  ( $i = 1, \dots, 19$ ) для модели D3Q19 ставится в соответствие функция распределения, зависящая только от  $t$  и  $r$ :  $f_i(r, t)$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) для модели D2Q9 и  $f_i(r, t)$  ( $i = 1, \dots, 19$ ) для модели D3Q19.

Описание динамики ансамбля частиц проводится в два этапа. Первый этап именуется этапом переноса (streaming step). На данном этапе частицы за время  $\Delta t$  смещаются в соседние узлы, причем направление скорости их движения не меняется. На втором этапе рассматривается процесс столкновения частиц (collision step), в результате которого функция распределения частиц стремится к равновесному состоянию. Эволюция функции распределения частиц во времени и пространстве описывается уравнением

$$f_i(r + e_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + \Omega_i(r, t), \quad (1)$$

где  $i = 1, \dots, 9$  для набора скоростей D2Q9,  $i = 1, \dots, 19$  для набора D3Q19,  $\Omega_i(r, t)$  — оператор столкновений.

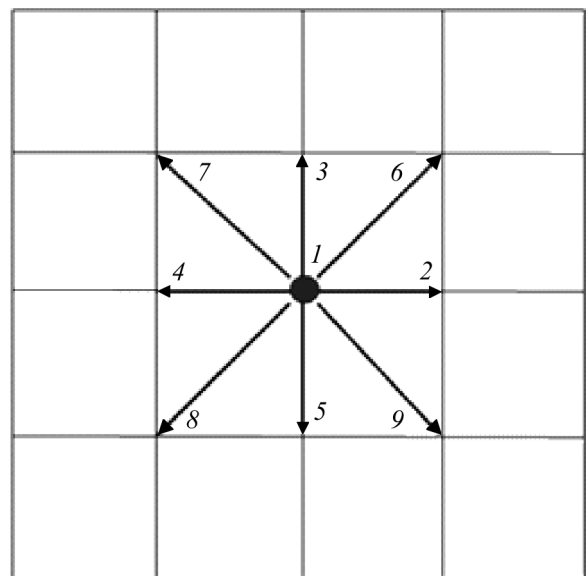


Рис. 1. Возможные вектора скорости частиц в методе решеточных уравнений Больцмана для двухмерной девятискоростной модели D2Q9

В отличие от классических постановок задач механики жидкости и газа, описываемых уравнениями Навье–Стокса, где решение ищется в переменных давление–скорость, уравнения в методе LBM решаются в переменных плотность–скорость. Макроскопические плотность и компоненты скорости флюида в ячейках вычисляются по формулам

$$\rho(r, t) = \sum_{i=1}^n f_i(r, t), \quad (2)$$

$$u(r, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n e_i f_i(r, t), \quad (3)$$

где  $n = 9$  и  $n = 19$  для двухмерной и трехмерной задач соответственно. В случае однофазного течения давление  $p$  связано с плотностью  $\rho$  в методе LBM соотношением  $p = \frac{\rho c^2}{3}$  [14].

При исследовании гидродинамических процессов методом LBM необходимо соблюдение условия, при котором число Маха, вычисляемое как отношение средней по расчетной области скорости к базовой скорости  $c$ , не превышает 0.1. Для приближенного описания оператора столкновений  $\Omega$  в уравнении (1) наиболее часто используются SRT- и MRT-модели.

*SRT-модель.* В рамках SRT-модели оператор столкновений  $\Omega$ , названный в честь исследователей Бхатнагара, Гросса и Крука оператором BGK [17], имеет вид

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) - f_i(r, t)). \quad (4)$$

Этот оператор характеризует линейную релаксацию функции распределения  $f_i$  к равновесному состоянию. В формуле (4) функция  $f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})$  вычисляется по формуле

$$f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) = w_i \rho(r) \left( 1 + 3 \frac{e_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + 4.5 \frac{(e_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - 1.5 \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right). \quad (5)$$

Весовые коэффициенты  $w_i$  для модели D2Q9 равны  $w_1 = \frac{4}{9}$ ,  $w_{2-5} = \frac{1}{9}$ ,  $w_{6-9} = \frac{1}{36}$ , а для модели D3Q19 их значения составляют  $w_1 = \frac{1}{3}$ ,  $w_{2-8} = \frac{1}{18}$ ,  $w_{9-19} = \frac{1}{36}$ . Указанные числовые значения весовых коэффициентов обусловлены тем, что для любого вида решеток должно выполняться условие  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , где

$n = 9$  и  $n = 19$  для наборов векторов D2Q9 и D3Q19 соответственно, поскольку  $f(r, t)$  — вероятностная характеристика. Более того, равенство коэффициентов  $w_i$  при  $i = 2, \dots, 5$  и  $i = 6, \dots, 9$  для набора D2Q9, а также при  $i = 2, \dots, 8$  и  $i = 9, \dots, 19$  для набора D3Q19 обусловлено равнозначностью данных направлений. Наконец, численные значения указанных коэффициентов, оператор BGK, представленный в виде

уравнения (4) и равновесная функция распределения (5) обеспечивают соблюдение условий  $\sum_{i=1}^n \Omega_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n e_i \Omega_i = 0$ , при которых выполняется закон сохранения массы и момента движения системы. С использованием коэффициентов  $w_i$ , равновесной функции распределения (5), оператора столкновений BGK (4) и разложения Чепмена–Энскога возможно получение уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с точностью до малых величин.

Параметр релаксации  $\tau$  в операторе столкновений BGK служит для управления кинематической вязкостью  $\mu$  флюида и связан с ней замыкающим соотношением

$$\mu = \left( \frac{2\tau - 1}{6} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta t}. \quad (6)$$

Из этого уравнения видно, что параметр  $\tau$  не может принимать значения меньшего, чем 0.5, поскольку отрицательные значения вязкости жидкости нефизичны. С увеличением параметра  $\tau$  вязкие свойства флюида также увеличиваются. Шаг по времени  $\Delta t$  выступает коэффициентом пропорциональности между параметром  $\tau$  и вязкостью  $\mu$ .

*MRT-модель.* Оператор столкновений в MRT-модели описывается уравнением [15]

$$\Omega_i = -M^{-1}S(m_i - m_i^{\text{eq}}). \quad (7)$$

Здесь  $m_i = \sum_{k=1}^n M_{ik}f_k$ , где  $n = 9$  для набора D2Q9 и  $n = 19$  для набора D3Q9.

Набор скоростей D2Q9. Матрица  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В работе [15] показано, что матрица  $M$  может быть представлена в виде  $m = (\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T$ , где  $e$  и  $\varepsilon$  — величины, пропорциональные энергии потока жидкости и ее квадрату,  $j_x$  и  $j_y$  — компоненты импульса движения жидкости,  $q_x$  и  $q_y$  — компоненты, пропорциональные потоку энергии,  $p_{xx}$  и  $p_{xy}$  — значения, характеризующие диагональную и недиагональную компоненты тензора вязких напряжений. Равновесные значения компонент функции  $m^{\text{eq}} = (\rho^{\text{eq}}, e^{\text{eq}}, \varepsilon^{\text{eq}}, j_x^{\text{eq}}, q_x^{\text{eq}}, j_y^{\text{eq}}, q_y^{\text{eq}}, p_{xx}^{\text{eq}}, p_{xy}^{\text{eq}})^T$  вычисляются

$$\text{из соотношений } \rho^{\text{eq}} = \rho, \quad e^{\text{eq}} = -2\rho + \frac{3\rho(u_x^2 + u_y^2)}{c^2}, \quad \varepsilon^{\text{eq}} = \rho - \frac{3\rho(u_x^2 + u_y^2)}{c^2}, \quad j_x^{\text{eq}} = \frac{\rho u_x}{c}, \quad q_x^{\text{eq}} = -\frac{\rho u_x}{c},$$

$$j_y^{\text{eq}} = \frac{\rho u_y}{c}, \quad q_y^{\text{eq}} = -\frac{\rho u_y}{c}, \quad p_{xx}^{\text{eq}} = \frac{\rho(u_x^2 - u_y^2)}{c^2}, \quad p_{xy}^{\text{eq}} = \frac{\rho u_x u_y}{c^2}.$$

Матрица  $S$  имеет диагональный вид. Ее диагональные компоненты обозначим как  $(s_\rho, s_e, s_\varepsilon, s_j, s_q, s_j, s_q, s_p, s_p)$ . В работе [18] приведены результаты исследований, согласно которым оператор столкновения не оказывает влияния на массу и импульс жидкости в рассматриваемом узле, поэтому  $s_\rho = s_j = 0$ . Коэффициенты  $s_e = s_\varepsilon = s_p = 1/\tau$ , где параметр  $\tau$  вычисляется по формуле (6). Коэффициенты  $s_q$  и  $s_\varepsilon$  связаны соотношением

$$s_q = 8 \frac{2 - s_\varepsilon}{8 - s_\varepsilon}. \quad (9)$$

Набор скоростей D3Q19. Матрица  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -30 & -11 & 11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Применив операцию умножения матрицы  $M$  на компоненты столбца  $f_i$ , получаем  $m = (\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, j_z, q_z, 3p_{xx}, 3\pi_{xx}, p_{ww}, \pi_{ww}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}, m_x, m_y, m_z)^T$ , где  $p_{ww} = p_{yy} - p_{zz}$ ,  $\pi_{ww} = \pi_{yy} - \pi_{zz}$ ,  $\pi_{ij}$  и  $m_i$  — динамические характеристики движения, пропорциональные скорости флюида в четвертой и третьей степенях соответственно. Согласно [16], равновесные значения компонент функции  $m^{eq} = (\rho^{eq}, e^{eq}, \varepsilon^{eq}, j_x^{eq}, q_x^{eq}, j_y^{eq}, q_y^{eq}, j_z^{eq}, q_z^{eq}, 3p_{xx}^{eq}, 3\pi_{xx}^{eq}, p_{ww}^{eq}, \pi_{ww}^{eq}, p_{xy}^{eq}, p_{yz}^{eq}, p_{zx}^{eq}, m_x^{eq}, m_y^{eq}, m_z^{eq})^T$  рассчитываются

$$\begin{aligned} \text{по формулам } \rho^{eq} &= \rho, \quad e^{eq} = -11\rho + \frac{19\rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{c^2}, \quad \varepsilon^{eq} = 3\rho - \frac{5.5\rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{c^2}, \quad j_x^{eq} = \frac{\rho u_x}{c}, \\ q_x^{eq} &= -\frac{2\rho u_x}{3c}, \quad j_y^{eq} = \frac{\rho u_y}{c}, \quad q_y^{eq} = -\frac{2\rho u_y}{3c}, \quad j_z^{eq} = \frac{\rho u_z}{c}, \quad q_z^{eq} = -\frac{2\rho u_z}{3c}, \quad 3p^{eq} = \frac{\rho(2u_x^2 - u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \\ 3\pi_{xx}^{eq} &= -0.5 \cdot \frac{\rho(2u_x^2 - u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \quad 3p_{ww}^{eq} = \frac{\rho(u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \quad \pi_{ww}^{eq} = -0.5 \cdot \frac{\rho(u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \quad p_{xy}^{eq} = \frac{\rho u_x u_y}{c^2}, \\ p_{yz}^{eq} &= \frac{\rho u_y u_z}{c^2}, \quad p_{xz}^{eq} = \frac{\rho u_x u_z}{c^2}, \quad m_x^{eq} = 0, \quad m_y^{eq} = 0, \quad m_z^{eq} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим компоненты матрицы  $S$  как  $s_\rho, s_e, s_\varepsilon, s_j, s_q, s_p, s_\pi, s_m$ . Здесь  $s_e = s_\varepsilon = s_p = s_\pi = 1/\tau$ , где параметр  $\tau$  вычисляется по формуле (4). Как уже отмечалось, оператор столкновений не оказывает влияния на массу и импульс жидкости, поэтому  $s_\rho = s_j = 0$ . Коэффициенты  $s_q, s_m$  и  $s_\varepsilon$  связаны соотношением

$$s_m = s_q = 8 \frac{2 - s_\varepsilon}{8 - s_\varepsilon}. \quad (11)$$

*Граничные и начальные условия в LBM.* В начальный момент времени все компоненты скорости течения флюида в каждом узле расчетной области равны нулю (данное условие относится только к рассматриваемой в работе задаче и не является обязательным в решеточных уравнениях Больцмана), плотность жидкости в насыщенных флюидом узлах решетки равна плотности воды при нормальных условиях и составляет  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Функция  $f_i(r, 0)$  соответствует равновесному состоянию (5) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $\mathbf{u} = 0 \text{ м/с}$ .



Классические условия прилипания и непротекания жидкости на непроницаемых областях (внешние границы и препятствия внутри расчетной области), согласно которым нормальная к границе компонента скорости флюида равна нулю, а касательная к границе компонента равна скорости движения этой границы, равной нулю в нашем случае, реализуются в LBM при помощи операции отражения частиц от твердой поверхности (условие bounce-back) [11]. В данной работе рассматривается сетка mid-grid, в которой непроницаемая граница располагается посередине между узлами, т. е. в полушаге от ячеек.

Рассмотрим подробнее случай, когда верхняя граница является непроницаемой, т. е. твердой. Пусть в момент времени  $t$  в выбранном нами узле известны все значения функции  $f_i$ . В момент времени  $t + \Delta t$  компоненты  $f_5, f_8$  и  $f_9$  являются неизвестными, поскольку значения плотности и скорости флюида в ячейках, принадлежащих к твердым фазам, не определены. Чтобы определить неизвестные компоненты функции  $f_i$ , используется операция отражения, согласно которой компоненты  $f_3, f_6$  и  $f_7$ , значения которых взяты на момент времени  $t$ , меняют свое направление на  $180^\circ$  (рис. 2). Общее правило можно записать в следующем виде:

$$f_i(r, t + \Delta t) = f_{i\_opp}^*(r, t) . \tag{12}$$

Знак \* означает, что данные величины соответствуют состояниям после применения оператора столкновения. Нижние индексы  $i$  и  $i\_opp$  соответствуют противоположным направлениям. Отметим, что условие (11) при использовании MRT модели гарантирует наличие непроницаемой границы в точности посередине между узлами. На входной и выходной границах будем считать известными плотности  $\rho_{in}$  и  $\rho_{out}$ , а также касательную компоненту скорости, которая равна нулю. В качестве примера рассмотрим двухмерный случай, когда входная область соответствует левой границе (рис. 3).

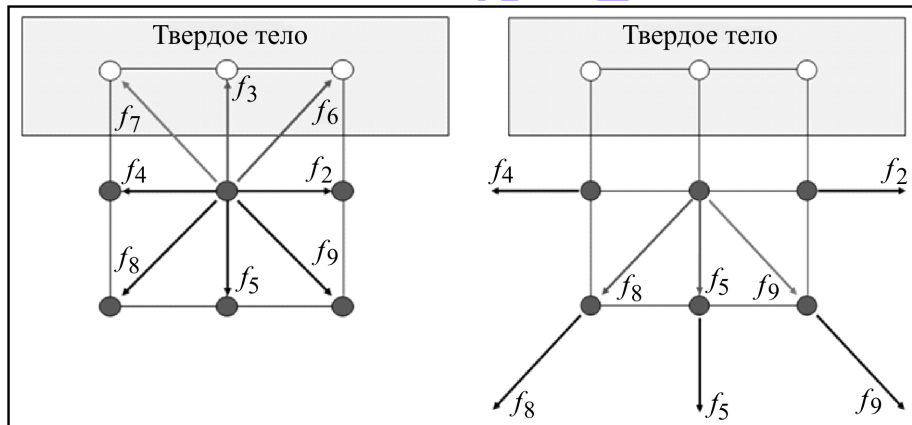


Рис. 2. Операция отражения bounce-back для сетки mid-grid

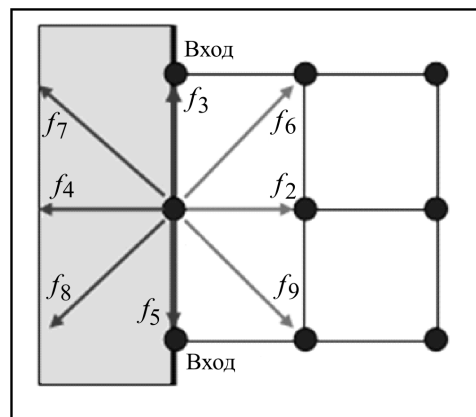


Рис. 3. Условия на входной границе области течения

Для набора скоростей D2Q9, после этапа переноса, функции  $f_2$ ,  $f_6$  и  $f_9$  для каждого узла входной границы и компонента скорости  $u_x$  являются неизвестными. Решая систему из 4-х уравнений, состоящую из уравнения (2) и двух уравнений (3) для компонент скорости  $u_x$  и  $u_y$  ( $u_y = 0$ ), а также принимая во внимание условие Зоу–Хе [19], которое предполагает равновесие в направлении, перпендикулярном границе, и замыкает систему уравнений, т. е.  $f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq}$ , получаем соотношения

$$u_x = c \left( 1 - \frac{f_1 + f_3 + f_5 + 2(f_4 + f_7 + f_8)}{\rho_{in}} \right), \quad (13)$$

$$f_2 = f_4 + \frac{2\rho_{in}u_x}{3c}, \quad (14)$$

$$f_6 = f_8 - 0.5(f_3 - f_5) + \frac{\rho_{in}u_x}{6c}, \quad (15)$$

$$f_9 = f_7 + 0.5(f_3 - f_5) + \frac{\rho_{in}u_x}{6c}. \quad (16)$$

Аналогичная методика расчета может применяться для любой геометрии узлов, принадлежащих входным или выходным граничным ячейкам.

**Стационарные уравнения Навье–Стокса.** Для оценки достоверности результатов, полученных с использованием LBM, проведен расчет однофазного течения жидкости с применением хорошо зарекомендовавших себя при решении данной задачи [5–10] классического уравнения неразрывности (17) и стационарных уравнений Навье–Стокса (18). Утверждение о стационарности течения жидкости в пористых средах опирается на результаты работы [5], в которой показано, что скорость потока при невысоких перепадах давления очень мала. Следовательно, инерционными силами по сравнению с диффузионными в рамках решаемой задачи можно пренебречь:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (17)$$

$$\mu \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (18)$$

Дискретизация системы уравнений (17), (18) осуществлялась с использованием метода конечных разностей [20], а для формирования сетки использовались основы метода MAC (маркеров и ячеек) [20]. На внешних границах и на твердых поверхностях внутри расчетной области задавались условия прилипания и непротекания жидкости, а на входной и выходной границах расчетной области — постоянные давления и условие Неймана для компоненты скорости, нормальной к выходной границе. Ячейка в методе MAC устроена таким образом, что давление  $P_{i,j,k}$  (для трехмерного случая) определяется в центре, а компоненты скоростей, например  $u_{x(i-1/2,j,k)}$  и  $u_{x(i+1/2,j,k)}$ , определяются в центрах ее левой и правой грани соответственно. Решение матричного уравнения, полученного в результате дискретизации системы уравнений (17), (18), отыскивалось при помощи библиотеки SPARSKIT с использованием процедуры ILU для разложения матрицы и итерационного метода решения уравнений (процедур VCGSTAB и GMRES) [21]. Более подробно рассматриваемая процедура описана в работах [7–10].

**Результаты расчетов и обсуждение.** В качестве первого примера численного расчета для тестирования SRT- и MRT-моделей LBM рассмотрим простейший вид движения жидкости — ламинарное течение в трубе цилиндрического сечения. Шаг сетки составляет  $\Delta l = 10$  мкм, шаг по времени рассчитывается по формуле (6) при заданном значении  $\tau$ . Для установившегося режима такого течения известна аналитическая формула, описывающая зависимость продольной компоненты скорости течения флюида  $u_x$  от расстояния до оси канала:

$$u_x^{an}(y) = \frac{\Delta P}{4\rho\mu L} (R^2 - y^2), \quad (19)$$

где  $R$  — гидравлический радиус,  $y$  — расстояние от оси канала. Для модели флюида приняты следующие значения параметров:  $\mu = 1.0 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с (или 1.0 сПз),  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Перепад давления  $\Delta P$  между входной и выходной границами в численном эксперименте составлял  $1 \cdot 10^{-6}$  Па.

Проведены численные расчеты для количества узлов в поперечном сечении канала 7, 10, 15, 20, 30, 50 и 100. Размерность сетки в продольном направлении во всех расчетах составляла 100 узлов. Для каждого варианта сечения был проведен ряд вычислительных экспериментов, в которых значения параметра  $\tau$  составляли 0.51, 0.52, 0.55, 0.60, 0.80, 1.00 и 1.50. Расчеты выполнялись с использованием SRT- и MRT-моделей. В качестве критерия для оценки отклонения результатов расчетов, полученных методом LBM с использованием аналитической зависимости (19), принята относительная погрешность  $\Delta$ , измеряемая в процентах:

$$\Delta = \frac{100}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \frac{u_x^{\text{LBM}}(y_i) - u_x^{\text{an}}(y_i)}{u_x^{\text{an}}(y_i)} \right|.$$

Результаты вычислений представлены на рис. 4. Из этого рисунка видно, что, независимо от значения  $\tau$ , относительная погрешность расчетов при использовании MRT-модели в среднем на 2 порядка меньше, чем при применении оператора BGK, и возрастает с уменьшением размерности сетки. Для SRT-модели наблюдается ярковыраженная зависимость  $\Delta$  от параметра релаксации  $\tau$ , тогда как для MRT-модели она практически отсутствует. Более того, если для размерности сетки 50 и 100 узлов  $\Delta$  не превышает 1% при использовании SRT-модели (что является существенной ошибкой даже для такой простейшей задачи), то для ситуации, когда  $N < 50$ , погрешность расчетов говорит о невозможности применения SRT-модели в таких случаях. Так,  $\Delta = 14.2\%$  при  $N = 7$  и варьируется в зависимости от  $\tau$ , тогда как максимальная погрешность для MRT-модели составляет 0.2% и не подвержена влиянию параметра релаксации. Легко показать как аналитически, так и численно, что применение оператора BGK (4) не изменяет общую массу и импульс системы как во внутренних узлах расчетной области, так и в ячейках, граничащих с непроницаемыми областями. Следовательно, при использовании SRT-модели в приграничных узлах имеется зависимость между параметром релаксации  $\tau$  и расстоянием между приграничной ячейкой и непроницаемой границей (для модели MRT с учетом соотношения (11) это расстояние составляет  $0.5\Delta l$  и от  $\tau$  не зависит). Поскольку основной целью настоящей работы являлось выяснение особенностей применения SRT- и MRT-моделей для исследования гидродинамических процессов в пористых средах с использованием их цифровых образов, данный пример был рассмотрен не случайно — ширина поровых каналов в микрофотографических изображениях в большинстве случаев составляет 25–75 мкм. При разрешающей способности съемки в 5 мкм (т. е. при шаге сетки  $\Delta l = 5$  мкм) количество узлов в поперечном сечении канала в среднем колеблется в пределах от 5 до 15.

Таблица 1. Расчеты коэффициента проницаемости  $k_{xx}$  с использованием SRT и MRT моделей LBM при различных значениях параметра  $\tau$  и на основе уравнений Навье–Стокса

| Образец     | $\tau$ | $k_{xx}$ , мкм <sup>2</sup> |         |                        | $\Delta$ , % |      |
|-------------|--------|-----------------------------|---------|------------------------|--------------|------|
|             |        | LBM_SRT                     | LBM_MRT | Уравнения Навье–Стокса | SRT          | MRT  |
| Песчаник №1 | 0.51   | 6.05                        | 10.35   | 10.56                  | -42.7        | -2.0 |
|             | 0.52   | 6.34                        | 10.35   |                        | -40.0        | -2.0 |
|             | 0.55   | 7.01                        | 10.35   |                        | -33.6        | -2.0 |
|             | 0.6    | 7.73                        | 10.35   |                        | -26.8        | -2.0 |
|             | 0.8    | 9.5                         | 10.35   |                        | -10.0        | -2.0 |
|             | 1      | 10.75                       | 10.35   |                        | 1.8          | -2.0 |
|             | 1.5    | 13.6                        | 10.35   |                        | 28.8         | -2.0 |
| Песчаник №2 | 0.51   | 4.55                        | 5.85    | 6.02                   | -24.4        | -2.8 |
|             | 0.52   | 4.72                        | 5.85    |                        | -21.6        | -2.8 |
|             | 0.55   | 4.91                        | 5.85    |                        | -18.4        | -2.8 |
|             | 0.6    | 5.08                        | 5.85    |                        | -15.6        | -2.8 |
|             | 0.8    | 5.58                        | 5.85    |                        | -7.3         | -2.8 |
|             | 1      | 5.96                        | 5.85    |                        | -1.0         | -2.8 |
|             | 1.5    | 6.78                        | 5.85    |                        | 12.6         | -2.8 |

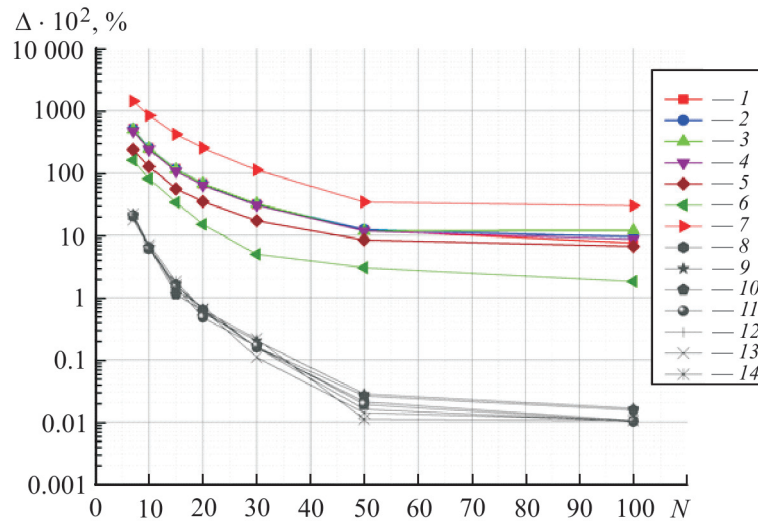


Рис. 4. Относительная погрешность расчетов для модели SRT (1–7) и модели MRT (8–14) LBM при  $\tau = 0.51$  (1), 0.52 (2), 0.55 (3), 0.60 (4), 0.80 (5), 1.00 (6), 1.50 (7), 0.51 (8), 0.52 (9), 0.55 (10), 0.60 (11), 0.80 (12), 1.00 (13) и 1.5 (14)

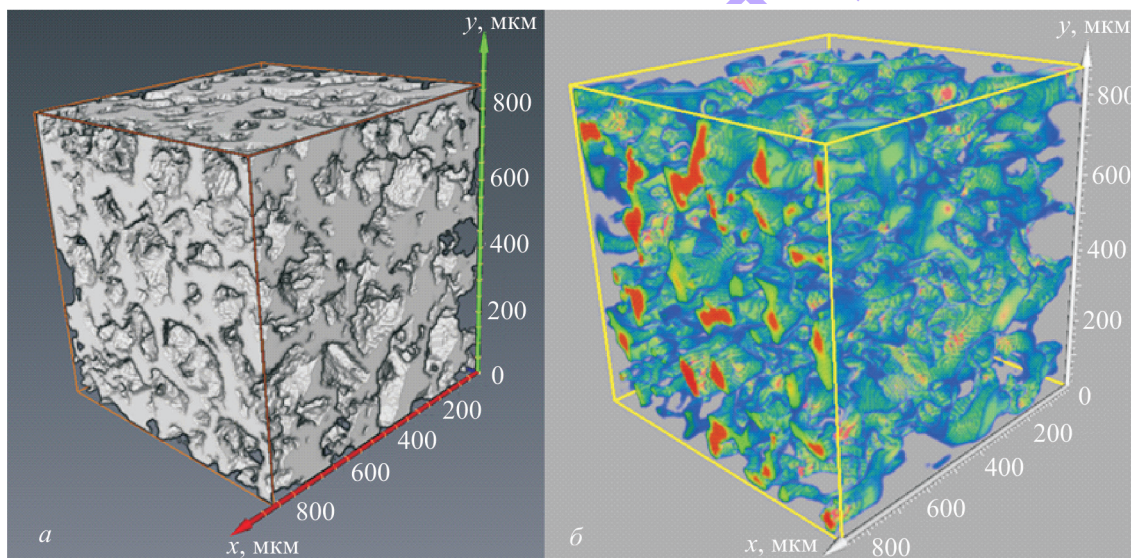


Рис. 5. Результаты вычислительных экспериментов: *а* — пористая структура песка; *б* — поле модуля скорости флюида в порах

Выполнены расчеты проницаемости двух цифровых образов песка, снятых с разрешением 5.8 и 2.8 мкм при  $\tau = 0.51, 0.52, 0.55, 0.60, 0.80, 1.00$  и 1.50 с применением SRT- и MRT-моделей. Размеры расчетной области в обоих случаях составляли  $150 \times 150 \times 150$  ячеек. Структура порового пространства песка и поле модуля скорости флюида в нем представлены на рис. 5. Для сопоставления результатов расчетов по моделям SRT и MRT с результатами аналогичных расчетов на основе уравнений Навье–Стокса использована компонента  $k_{xx}$  тензора абсолютной проницаемости, величина которой вычисляется при помощи закона Дарси по формуле  $k_{xx} = \frac{Q\mu\Delta L}{\Delta S\Delta P}$ , где  $Q$  — расход жидкости через выходное сечение канала,  $\Delta S$  — площадь выходного сечения канала,  $\Delta L$  — длина образца в направлении оси  $Ox$ . Результаты вычислений представлены в табл. 1. По данным, приведенным в этой таблице, можно сделать заключение, что использование SRT-модели приводит к большей относительной погрешности в определении коэффициента

проницаемости песчаника, сильно зависящей от  $\tau$ , по сравнению с результатами расчета этого коэффициента с использованием уравнений Навье–Стокса. При этом результаты расчетов с применением MRT-модели являются удовлетворительными и независимыми от параметра релаксации. Небольшое отклонение в 2 и 2.8% связано с использованием стационарных уравнений Навье–Стокса и пренебрежением в них конвективной составляющей течения. Следует также отметить, что в случае использования оператора BGK наилучшее совпадение наблюдается при  $\tau = 1$ . Однако жесткое требование использования этого значения  $\tau$  вызывает необходимость однозначного определения шага по времени  $\Delta t$  в (6), что может внести ограничения на перепад давления, при котором решение задачи сохраняет численную устойчивость.

**Заключение.** Установлено, что при численном решении задачи о ламинарном течении в трубе с использованием SRT-модели решеточных уравнений Больцмана наблюдается зависимость полученных результатов от параметра релаксации течения  $\tau$ . Расчеты такого течения по MRT-модели указанных уравнений являются существенно более точными по сравнению с расчетами по SRT-модели и не зависят от параметра  $\tau$ . Показано, что при исследовании течения жидкости в поровых каналах расчеты, выполненные на основе MRT-модели и уравнений Навье–Стокса, дают сопоставимые результаты. Не рекомендуется применять SRT-модель в исследованиях фильтрационных процессов в пористых средах, т. е. в случаях, когда характерный размер области течения содержит 5–20 узлов сетки и число контактов жидкости с непроницаемыми границами велико.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 15-11-10015) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант мол\_а 16-35-00155).

#### Обозначения

$e_i$  — компоненты векторов набора скоростей;  $f_i$  — функция распределения количества частиц по скоростям;  $N$  — количество узлов сетки в поперечном сечении канала;  $p$  — давление;  $r$  — координата ячейки расчетной сетки;  $t$  — время;  $\mathbf{u}$  — скорость движения жидкости;  $x, y, z$  — оси координат;  $\Delta$  — относительная погрешность вычислений;  $\mu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\rho$  — плотность флюида;  $\tau$  — параметр релаксации течения. Индексы: an — аналитический; eq — равновесный;  $i$  — номер одного из возможных направлений скорости в ячейке; in — вход; out — выход; opp — противоположный.

#### Литература

1. Blunt M. J., Bijeljic B., Dong H., Gharbi O., Iglauer S., Mostaghimi P., Paluszny A., and Pentland C. Pore-scale imaging and modeling. *Adv. Water Resour.* 2013. Vol. 51. Pp. 197–216.
2. Andrew M., Bijeljic B., and Blunt M. J. Pore-scale contact angle measurements at reservoir conditions using X-ray tomography. *Adv. Water Resour.* 2014. Vol. 68. Pp. 24–31.
3. Watanabe N., Ishibashi T., Ohsaki Y., Tsuchiya Y., Tamagawa T., Hirano N., Okabe H., and Tsuchiya N. X-ray CT based numerical analysis of fracture flow for core samples under various confining pressures. *Eng. Geol.* 2011. Vol. 123. Pp. 338–346.
4. Farber L., Tardo S. G., and Michaels J. N. Use of X-ray tomography to study the porosity and morphology of granules. *Powder Technol.* 2003. Vol. 132. Pp. 57–63.
5. Mostaghimi P., Blunt M. J., and Bijeljic B. Computations of absolute permeability on micro-CT images. *Mathem. Geosci.* 2013. Vol. 45. Pp. 103–125.
6. Dvorkin J., Armbruster M., Baldwin C., Fang Q., Derzhi N., Gomez C., Nur B., Nur A., and Mu Y. The future of rock physics: computational methods vs. lab. testing. *First Break.* 2008. Vol. 26. Pp. 63–68.
7. Закиров Т. Р., Галеев А. А., Королев Э. А., Нуриев И. С., Стаценко Е. О. Исследование фильтрационно-емкостных свойств песчаников Ашальчинского месторождения методом рентгеновской компьютерной томографии. *Нефтяное хозяйство.* 2015. № 8. С. 36–40.
8. Закиров Т. Р., Галеев А. А., Коновалов А. А., Стаценко Е. О. Анализ "представительного элемента объема" фильтрационно-емкостных свойств песчаников Ашальчинского месторождения с использованием метода рентгеновской компьютерной томографии. *Нефтяное хозяйство.* 2015. № 10. С. 54–57.
9. Закиров Т. Р., Галеев А. А., Королев Э. А., Стаценко Е. О. Исследование коэффициентов пористости и абсолютной проницаемости карбонатного коллектора с применением метода рентгеновской компьютерной микротомографии. *Нефтяное хозяйство.* 2016. № 6. С. 56–69.

10. **Zakirov T. R., Galeev A. A., Korolev E. A., and Statsenko E. O.** Flow properties of sandstone and carbonate rocks by X-ray computed tomography. *Current Sci.* 2016. Vol. 110, Issue 11. Pp. 2142–2147.
11. **Chen S. and Doolen G.** Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1998. Vol. 30. Pp. 329–364.
12. **Кривовичев Г. В.** Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана. *Вычислит. методы и программирование.* 2013. Т. 14. С. 1–8.
13. **Pan C., Luo L. S., and Miller C. T.** An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation. *Comput. Fluids.* 2006. Vol. 35. Pp. 898–909.
14. **Succi S.** *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond.* Oxford University Press, 2001.
15. **Aslan E., Taymaz I., and Benim A. C.** Investigation of the lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow. *Int. J. Mater., Mech. Manuf.* 2014. Vol. 2, No. 4. Pp. 317–324.
16. **Niu X., Munekata T., Hyodoa Sh., and Suga K.** An investigation of water-gas transport processes in the gas-diffusion-layer of a PEM fuel cell by a multiphase multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model. *J. Power Source.* 2007. Vol. 172. Pp. 542–552.
17. **Bhatnagar P. L., Gross E. P., and Krook M. A.** Model for collision processes in gases. I. Small-amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.* 1954. Vol. 94. Pp. 511–525.
18. **Lallemand P. and Luo L.** Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Phys. Rev.* 2000. Vol. 61, No. 6. Pp. 6546–6562.
19. **Zou Q. and He X.** On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phys. Fluids.* 1997. Vol. 9. Pp. 1591–1598.
20. **Белоцерковский О. М.** *Численное моделирование в механике сплошных сред.* Москва: Физ.-мат. лит-ра, 1994.
21. **Роуч П.** *Вычислительная гидродинамика.* Москва: Мир, 1980.