А.Г. МУДРОВ
Р.Л. САХАПОВ
В.А. СУЛТАНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебно-методическое пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра технической физики и энергетики

А.Г. МУДРОВ
Р.Л. САХАПОВ
В.А. СУЛТАНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебно-методическое пособие

Казань 2018

УДК 621.8 (075.8)
ББК 39.311-06-5
М 89

Печатается по рекомендации
Учебно-методической комиссии
Инженерного института
(протокол № 11 от «28» ноября2018г.)

Под общей редакцией
зав. кафедрой технической физики и энергетики, доктора технических наук, профессора, члена-корреспондента АН РТ Н.Ф. Кашапова

Рецензенты:
директор Института электроэнергетики и электроники КГЭУ, д-р техн. наук, профессор **И.В.Ившин**;
профессор кафедры ТФ и Э ИИ К(П)ФУ, д-р техн. наук, доцент **С.Н.Шарифуллин**

Мудров А.Г.
М 89Теоретическая механика. Теория механизмов и машин: учебно-методическое пособие / А.Г. Мудров, Р.Л. Сахапов, В.А. Султанов; под общ. ред. проф. Н.Ф. Кашапова. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. – 54 с.

Учебно-методическое пособие «Теоретическая механика. Теория механизмов и машин» разработано в соответствии с программой обучения и предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 27.03.02«Управление качеством», профиль – Управление роботизированными производственными системами, 16.03.01«Техническая физика» и имеет целью оказать помощь студентам в самостоятельном изучении и решении практических инженерных задач по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика», «Техническая механика» и «Теория механизмов и машин», а также может быть полезно для студентов всех специальностей при изучении курса «Прикладная механика».

В работе излагаются основные положения технических дисциплин: теоретическая механика и теория механизмов и машин. Раскрыты основные разделы теоретической механики: статика, кинематика и динамика; даны основные понятия и определения, кинематический и динамический анализ механизмов и машин из теории механизмов и машин. Рассмотрены общие законы равновесия материальных тел, законы движения тел и представлены примеры решения практических инженерных задач. После каждого раздела приведены вопросы для самоконтроля знаний.

Учебно-методическое пособие разработано и оформлено профессором кафедры ДСМ КГАСУ, д-ром техн. наук, профессором А.Г.Мудровым, зав. кафедрой ДСМ КГАСУ, д-ром техн. наук, профессором Р.Л. Сахаповым и доцентом кафедры ТФ и Э ИИ К (П) ФУ, канд. пед. наук, доцентом В.А. Султановым.

Иллюстраций –32, таблиц – 2, библиографий – 9 (наимен.).

УДК 621.8 (0758)
ББК 39.311-06-5

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Прикладная механика» относится к основным дисциплинам общетехнической подготовки студентов, включающая основные сведения из нескольких самостоятельных предметов: теоретической механики, сопротивления материалов, детали машин и основы конструирования, теории механизмов и машин.

Основные задачи этого курса следующие:

1) изучение общих законов движения и равновесия материальных тел;

2) изучение методов расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость;

3) изучение устройств, область применения, основ расчета и конструирования деталей машин и механических устройств общего назначения;

4) изучение структуры и классификации механизмов, проектирование кинематических схем механизмов, их динамический анализ и синтез, уравновешивание механизмов и устройств.

Освоение указанных вопросов есть основа технического образования студентов. Изучение методов прикладной механики обеспечивает приобретение необходимых навыков для постановки и решения многих инженерных задач, повседневно встречающихся в практической деятельности специалистов. Этим определяется особое значение прикладной механики как основы для освоения смежных специальных дисциплин.

В теоретической механике изучаются общие законы движения и равновесия материальных тел. Здесь устанавливаются приемы и методы решения задач, относящихся к механическому движению. Основные разделы этого предмета рассмотрены ниже в данном учебно-методическом пособии.

Сопротивление материалов есть наука о прочности, жесткости и устойчивости частей сооружений и машин.

Детали машин изучает методы расчета и конструирования деталей машин общего назначения, которые выполняют одну и ту же функцию в различных машинах и устройствах.

Теория механизмов и машин – это наука об общих методах исследования, построения, кинематики и динамики, механизмов и машин и научные основы их проектирования. Основные разделы данного предмета также раскрыты ниже в этом учебно-методическом пособии.

В становление и развитие указанных наук огромную роль внесли отечественные ученые.

Так, в 1886 г. профессор Худяков П.К. заложил основы курса «Детали машин» как самостоятельную дисциплину и издал первый учебник в 1898 г. под тем же названием.

Первым капитальным трудом в области исследования динамики машин считается изданное в 1904 г. работа профессора Мерцалова Н.И. (1866-1948) «Динамика механизмов», он является основоположником теории пространственных механизмов, предложил новый метод расчета маховика.

Первый учебник для вузов «Курс теории механизмов и машин» был издан в 1945 г. Артоболевским И.И. Учебник неоднократно переиздавался под названием «Теория механизмов и машин» и до сих пор используется при подготовке инженеров машиностроительных специальностей.

Первая в мире паровая машина была построена в 1763 г Ползуновым И.И. (1728-1766).

Основоположником русской школы теории механизмов и машин считается П.Л.Чебышев (1831-1894), великий русский математик. Он разработал учение о степенях свободы и структуре механизмов, аналитический метод синтеза механизмов, основанный на разработанной им теории функций, создал много новых механизмов.

Петров Н.П. (1836-1920) создал гидродинамическую теорию трения, установил законы жидкостного трения.

Представляемый материал соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования. Учебное пособие предназначено для формирования у студентов общих представлений о методах анализа, расчета и проектирования деталей и узлов механических систем, а также знаний и навыков, которые помогут им успешно осваивать последующие профилирующие дисциплины и решать практические инженерные задачи.

В пособии принята Международная система единиц измерения (СИ) со следующими отклонениями, допущенными для расчетов деталей машин: частота вращения иногда дается во внесистемных единицах – мин$^{-1}$ (вместо с$^{-1}$ в СИ); размеры деталей выражаются в миллиметрах (вместо метров в СИ). Это вызвано тем, что на чертежах размеры даются в миллиметрах, а технические данные по частоте вращения в большинстве документаций к машинам приводятся в оборотах в минуту (мин$^{-1}$) и т.д.

Данное пособие может быть использовано также для бакалавров, изучающих дисциплины «Механика» и «Техническая механика».

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
1.1 Статика
1.1.1 Основные понятия и определения статики

Теоретическая механика – это наука о механическом движении твердых материальных тел и их взаимодействии [1].

Статика – это раздел теоретической механики, изучающий условия, при которых тело находится в равновесии.

Механическое движение – это изменение положения тела или точек тела в пространстве с изменением времени. Частным случаем механического движения является *состояние покоя*. Абсолютно неподвижных тел в природе нет (движение относительно Земли и вокруг Солнца).

Материальные тела, размерами которых в рассматриваемой задаче можно пренебречь, называются *материальными точками*. Тело считается материальной точкой во всех случаях, когда все его точки совершают тождественные движения.

Абсолютно твердым называется тело, расстояния между частицами которого, всегда остаются неизменными. В действительности все тела под влиянием силовых воздействий со стороны других тел изменяют свои размеры и форму, но они очень малы, и при изучении движения и равновесия объектов, ими пренебрегают.

Сила – это мера механического взаимодействия материальных тел между собой. Действие силы на тело определяется тремя параметрами (рисунок 1): численным значением, направлением и точкой приложения, т.е. сила является *векторной величиной.*

Модуль, или численное значение силы, в Международной системе единиц (СИ), измеряется в ньютонах (Н).

Точкой приложения силы называется та материальная частица тела, к которой сила непосредственно приложена (точка A на рисунке 1).

Линия действия силы - прямая a - a (рисунок 1), вдоль которой направлен вектор, изображающий эту силу.

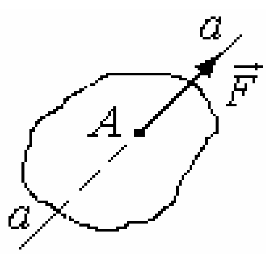


Рисунок 1 – Действие силы

Силы (или системы сил), действующие на тело, делят на *внешние и внутренние*. Силы, действующие на частицы тела со стороны других материальных тел, называют *внешними*, а со стороны других частиц этого же тела – *внутренними силами*. *Внешние силы* бывают активные и реактивные. *Активные силы* вызывают перемещение тела. *Реактивные* стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил. *Внутренние силы* возникают под действием внешних сил [2].

Системой сил называется совокупность нескольких сил, приложенных к телу или точке. Одну силу, эквивалентную данной системе, называют *равнодействующей*. Силу, равную по величине равнодействующей, направленную по той же линии, но в противоположном направлении, называют *уравновешивающей* силой. Если к системе сил добавлена уравновешивающая сила, то полученная новая система находится *в равновесии* и соответственно эквивалентна нулю.

1.1.2 Аксиомы статики

Статика основана на аксиомах, вытекающих из опыта и принимаемых без доказательств. Аксиомы статики устанавливают основные свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Первая аксиома, или закон инерции, впервые сформулирована Галилеем. Система сил, приложенная к материальной точке, является уравновешенной, если под ее воздействием точка находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно [3].

***Вторая аксиом**а* устанавливает условие равновесия двух сил. Две равные по модулю или численному значению силы ($F_1 = F_2$) приложенные к абсолютно твердому телу, направленные по одной прямой, но в противоположные стороны взаимно уравновешиваются (рисунок2).

Третья аксиома служит основой для преобразования систем сил. Не нарушая механического состояния абсолютно твердого тела, к нему можно приложить или отбросить от него уравновешенную систему сил (рисунок3).

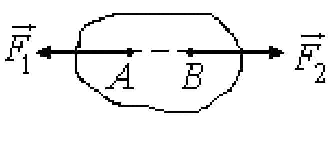


Рисунок 2 – 2-я аксиома

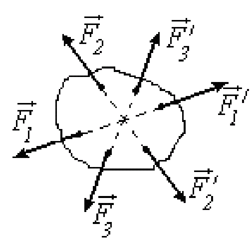


Рисунок 3–3-я аксиома

Например, некоторое тело находится в состоянии равновесия. Если к нему приложить несколько взаимно уравновешенных сил ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_1',\ \vec{F}_2 = -\vec{F}_2',\ \vec{F}_3 = -\vec{F}_3'$), то равновесие данного тела не нарушится. Аналогичный эффект получится при отбрасывании этих уравновешенных сил.

Системы сил, показанные на рисунках2 и 3, эквивалентны, так как они дают одинаковый эффект, под действием каждой из них тело находится в равновесии.

Из третьей аксиомы вытекает *следствие*, согласно которому, *всякую силу*, действующую на абсолютно твердое тело, можно перенести вдоль линии ее действия в любую точку тела, не нарушая при этом его механического состояния.

Пусть на тело в точкеA действует сила $\vec{F}_1$ (рисунок 4). В произвольной точкеB на линии действия силы $\vec{F}_1$ приложим две силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, равные по модулю $\vec{F}_1$ и направленные в противоположные стороны. Состояние тела в этом случае не нарушится. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$, равные по модулю и противоположно направленные, можно отбросить. Таким образом, силу $\vec{F}_1$ можно заменить равной силой $\vec{F}_2$, перенесенной по линии действия $\vec{F}_1$ из точкиAв точку B (рисунок5). Таким образом, сила, приложенная к твердому телу, - *скользящий вектор*.

Четвертая аксиома определяет правило сложения двух сил. Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, приложена к этой же точке и равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах. Вектор $\vec{F}_\Sigma$ (рисунок6) представляет собой геометрическую сумму векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

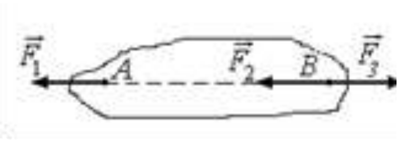


Рисунок4-4-я аксиома

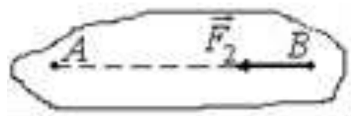


Рисунок 5-5-я аксиома

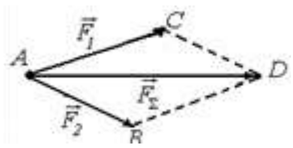


Рисунок 6-6-я аксиома

Таким образом, определение равнодействующей двух сил $\vec{F}_\Sigma$ по правилу параллелограмма называют векторным или геометрическим сложением и выражается векторным равенство:

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \qquad (1)$$

Такой способ нахождения равнодействующей путем построения параллелограмма, называется *правилом параллелограмма*, а сам параллелограмм, построенный на данных силах, называют *параллелограммом сил*.

При графическом определении равнодействующей двух сил вместо правила параллелограмма можно пользоваться правилом треугольника.

Действительно, вместо параллелограмма можно построить треугольник сил: равнодействующая двух сил соединяет начало первой силы с концом второй.

На основании четвертой аксиомы одну силу $\vec{F}_\Sigma$ можно заменить двумя составляющими $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Пятая аксиома устанавливает, что в природе не может быть одностороннего действия силы, т.е. при взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Так, если тело *1* действует на тело *2* с силой $\vec{F}_{12}$ (рисунок 7), то тело 2 действует на тело 1 точно с такой же по модулю силой $\vec{F}_{21}$, но направленной в противоположную сторону. Хотя силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны, они не уравновешивают друг друга, так как приложены к разным телам.

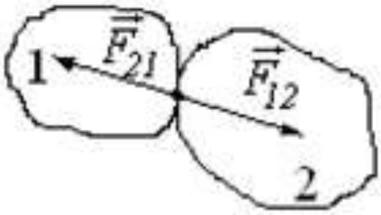


Рисунок 7-Действие сил

1.1.3 Связи и их реакции

В механике различают свободные и несвободные твердые тела.

Свободным называют тело, которое не испытывает никаких препятствий для перемещения в пространстве в любом направлении.

Если тело не может иметь каких-либо перемещений из-за связи с другими телами, ограничивающими его движение, то оно называется *несвободным*.

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются наложенными на него *связями*.

Так, для детали, лежащей на столе, связью будет плоскость стола.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется *реакцией этой связи.*

Реакция связи (по пятой аксиоме статики) всегда противоположны тому направлению, по которому связь препятствует движению тела.

Для определения реакций связей используют *принцип освобождения от связей. Не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив её реакцией*.

Рассмотрим наиболее распространенные виды связей:

1) *связь в виде гладкой* (без трения) плоскости или поверхности. В этом случае реакция гладкой поверхности $\vec{R}$ – направлена по нормали к этой поверхности и приложена к телу в точке касания (рисунок 8, *а*, *б*);

2) *вязь в виде шероховатой плоскости* (рисунок8, *в*). Здесь принято учитывать две составляющие реакции, нормальную $\vec{R}_n$ перпендикулярную плоскости, и касательную $\vec{R}_t$, лежащую в плоскости движения. Составляющая $\vec{R}_t$ называется силой трения, она всегда направлена в сторону, противоположную действительному или возможному движению.

Полная реакция $\vec{R}$, равная геометрической сумме нормальной и касательной составляющих отклоняется от нормали к опорной поверхности на угол трения ρ иопределяется как

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t \qquad (2)$$

В реальных конструкциях силы трения малы и ими часто пренебрегают.

3) гибкая связь (рисунок 8, *г*), осуществляемая нитью, тросом, цепью. Считаем, что гибкие связи нерастяжимы и реакции $\vec{R}_B$ и $\vec{R}_C$ направлены вдоль нихк точке их закрепления;

4) связь в виде жесткого прямого стержня с шарнирным закреплением концов (рисунок 8, *д*). *Шарнир* представляет собой подвижное соединение двух тел, допускающее только вращение вокруг общей оси (цилиндрический шарнир) или общей точки (шаровой шарнир). Здесь реакции $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ направлены вдоль *осей стержня*, которые могут быть как *растянутыми*, так и *сжатыми*;

5)*связь, осуществляемая ребром двугранного угла или точечной опорой* (рисунок8, *е*).

Реакция связи $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ направлена перпендикулярно к поверхности, опирающегося тела, если эту поверхность можно считать гладкой.

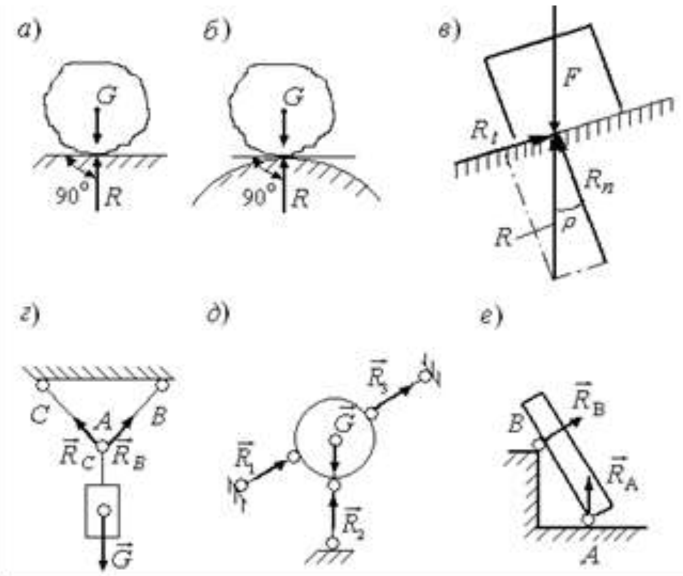


Рисунок 8-Реакции связи

В дальнейшем мы нередко будем встречаться с элементами различных конструкций, называемых брусьями. *Брусом* принято считать твердое тело, у которого длина значительно больше поперечных размеров. Брус с прямолинейной осью, положенный на опоры и изгибаемый приложеннымик нему нагрузками, называется *балкой*.

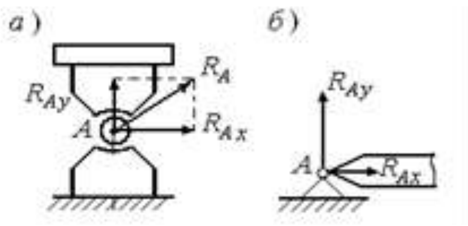
Чтобы балка могла воспринимать внешние нагрузки, она должна быть прикреплена к основанию с помощью устройств, называемых опорами.

Схематизируя реальные опорные устройства, их можно свести к трем основным типам.

Шарнирно-неподвижная опора (рисунок 9). Препятствует любому поступательному перемещению балки, но дает возможность поворачиваться вокруг оси шарнира.

Реакция приложена в центре шарнира; направление и значения опорной реакции неизвестны, поэтому заменяем реакцию взаимно перпендикулярными составляющими.

Шарнирно-подвижная опора (рисунок 10). Такая опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Реакция прикладывается в центре шарнира и направлена по нормали к опорной поверхности. Здесь неизвестно числовое значение опорной реакции.



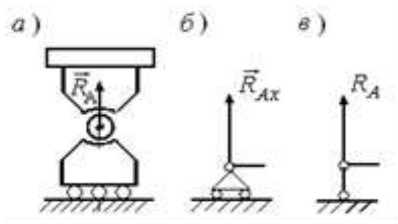


Рисунок 9-Шарнирно-неподвижная опора   Рисунок 10-Шарнирно-подвижная опора

Жесткая заделка (*защемление*) (рисунок 11). Такая опора препятствует любому поступательному движению балки и повороту ее в плоскости действия сил. Неизвестными в этом случае являются не только направление реакции, но и точка её приложения. Поэтому жесткую заделку заменяют силой реакции R_A и парой сил с моментом T_A.

Определение реакций связей является одной из наиболее важных задач статики.

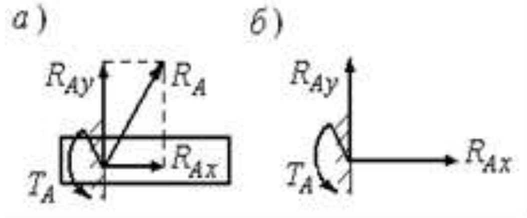


Рисунок 11-Жесткая заделка

1.1.4 Плоская система сходящихся сил

Силыназывают сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке (рисунок 12, *а*).

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется *плоской*.

Существует два способа сложения пересекающихся сил: геометрический (рисунок 12, *б*) и аналитический.

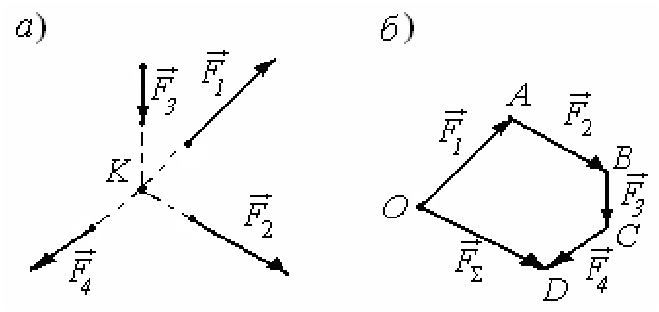


Рисунок12-*а*) Система сходящихся сил *б*) Геометрический способ сложения сходящихся сил

Геометрический способ сложения сходящихся сил

На основании следствия из третьей аксиомы, силу можно переносить по линии ее действия, поэтому, сходящиеся силы всегда можно перенести в одну точку – в точку пересечения их линий действия.

От произвольной точки*O*(рисунок 12, *б*)откладываем вектор, равный силе $\vec{F}_1$; от конца $\vec{F}_1$ откладываем вектор, равный силе $\vec{F}_2$, и т.д. Сохраняем при этом масштаб и направление сил. Затем, соединяем начало вектора $\vec{F}_1$ с концом последнего $\vec{F}_4$, получаем *равнодействующую* $\vec{F}_\Sigma$ всех сил системы. Построенная фигура называется *силовым многоугольником*.

Равнодействующая всегда направлена от начала первого слагаемого к концу последнего. Если конец последнего слагаемого вектора совпадет с началом первой, т.е. $\vec{F}_\Sigma = 0$, и значит, система сходящихся сил будет находиться в равновесии.

Самозамыкание силового многоугольника системы сходящихся сил является геометрическим условием её равновесия.

Аналитический способ сложения сходящихся сил

Для знакомства с этим способом необходимо ввести понятие проекции силы на ось.

Осью называют прямую линию, которой предписано определенное направление.

Проекция вектора на ось определяется отрезком оси, отсекаемой перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора. Проекция считается *положительной* при одинаковом направлении с осью, и *отрицательной*, если направлена в сторону отрицательной полуоси.

Рассмотрим ряд случаев проецирования сил на ось [4]:

1) вектор силы $\vec{F}$ (рисунок 13, *а*) составляет с положительным направление оси x острый уголα:

$$F_x = ab = F \cdot \cos\alpha \,; \qquad (3)$$

2) вектор силы $\vec{F}_1$ (рисунок 13, *б*) составляет с положительным направление оси x тупой уголα:

$$F_x = -a_1 b_1 = -F_1 \cdot \cos\beta\ ; \qquad (4)$$

3) векторы сил $\vec{F}_2\, и\, \vec{F}_3$ (рисунок13, *в* и *г*) параллельны оси *x*,они проецируется на эту ось в натуральную величину, т.е. $F_{2x} = F_2$ и $F_{3x} = -F_3$;

4) вектор силы $\vec{F}_4$ (рисунок 13, *д)* перпендикулярен оси *x*,его проекция на эту ось равна нулю, т.е. $F_{4x} = 0$.

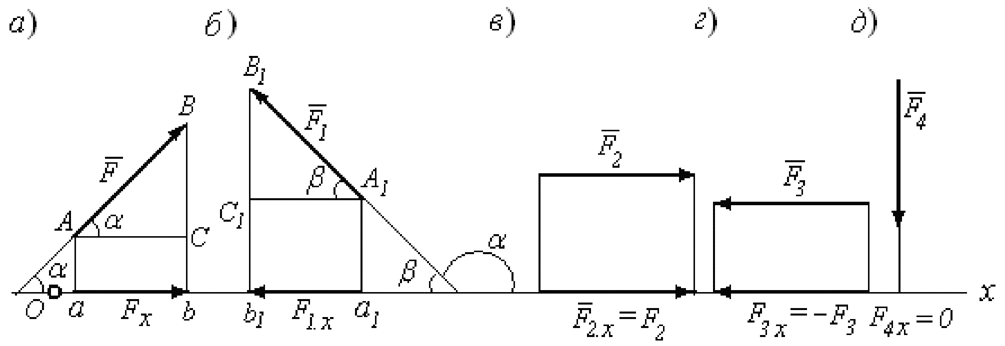


Рисунок 13-Поектирование сил на ось

Итак, проекция силы на ось координат равна произведению модуля силы на косинус острого угла между вектором силы и положительным направлением оси.

При решении задач, в которых фигурирует плоская система сходящихся сил, как правило, необходимо определять проекции сил (рисунок 14) на две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy. Все сказанное ранее о проекциях на ось Ox справедливо и для проекций сил на ось Oy. Модуль и направление силы можно определить по ее проекциям на две взаимно перпендикулярные оси:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha; \quad F_y = F \cdot \cos\beta = F \cdot \cos\left(90^0 - \alpha\right) = F \cdot \sin\alpha\ ,$$

тогда модуль силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad (5)$$

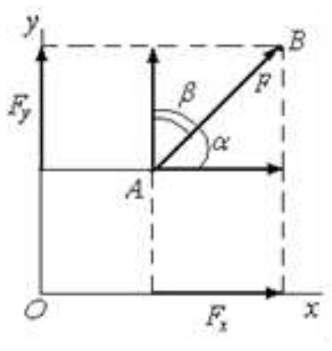


Рисунок 14-Проекция сил на оси X и У

Для заданной (рисунок15, *а*) системы сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_n$ построен (рисунок 15, *б*) силовой многоугольник, его замыкающая сторона $F_{\sum x}$ есть *равнодействующая системы*. Проецируя все силы, входящие в многоугольник на ось x, получим $\vec{F}_{1x}, \vec{F}_{2x}, \vec{F}_{3x}, \vec{F}_{nx}$ – проекции сил на эту ось.

Из рисунка (рисунок15, *б*) $\vec{F}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} + \vec{F}_{nx}$; т.е.

$$\vec{F}_{\sum x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} . \qquad (6)$$

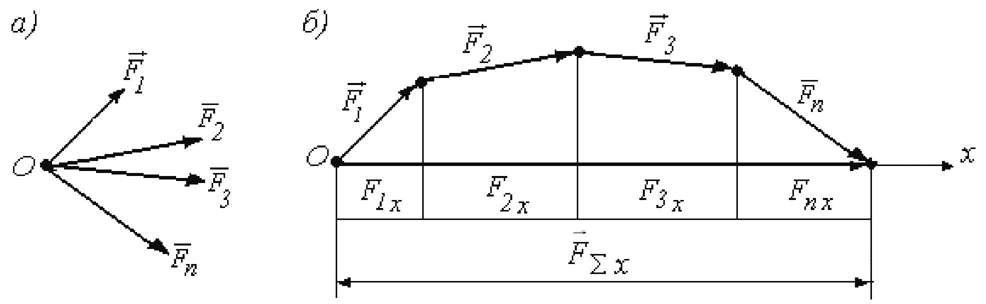


Рисунок 15-Равнодействующая системы сходящихся сил

Теорема:*проекция равнодействующей плоской системы сходящихся сил на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось.*

Модуль равнодействующей на основе выражения (5) можно определить:

$$F_{\sum} = \sqrt{F_{\sum x}^2 + F_{\sum y}^2} = 0, \quad \text{где} \quad F_{\sum x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix}; \qquad F_{\sum y} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} \qquad (7)$$

Условием равновесия плоской системы сходящихся сил является равенство нулю модуля равнодействующей $F_{\sum} = 0$ т.е. силовой многоугольник должен быть замкнутым (при геометрическом способе сложения) или, аналитически, проекции равнодействующей силы на оси координат должны быть равны нулю (выражение 7). Отсюда для плоской системы сходящихся сил получим два уравнения равновесия этих сил:

$$\begin{cases} F_{\sum x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ F_{\sum y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Следовательно, *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей равнялась нулю.*

1.1.5 Плоская система произвольно расположенных сил

Приведение силы к данной точке

A

Пусть дана сила $\vec{F}$, приложенная к точке A твердого тела, и её требуется перенести в точку O (рисунок 16). Приложим к телу в точке O уравновешенную систему сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельных $\vec{F}$ и равных ей по модулю (т.е. $F' = F'' = F$). Теперь кроме силы $\vec{F}'$, приложенной к точке O, образовалась пара сил $\left(\vec{F}, \vec{F}''\right)$ с моментом $T = F \cdot \ell$. Но момент данной силы $\vec{F}$ относительно точки O равен $T_0\left(\vec{F}\right) = F \cdot \ell$.

Таким образом $T = T_0\left(\vec{F}\right)$. Эту пару сил $\left(\vec{F}, \vec{F}''\right)$ называют *присоединенной*, плечо ℓ равно плечу силы $\vec{F}$ относительно точки O.

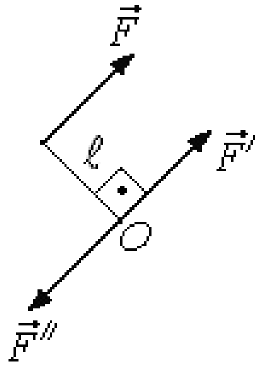


Рисунок 16-Перенос параллельных сил

Следовательно, всякую силу, приложенную к телу в данной точке, можно перенести параллельно в любую точку тела, присоединяя при этом пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки её приложения.

Приведение к точке плоской системы сил

Линии действия системы сил расположены произвольно на плоскости, для оценки состояния тела такую систему необходимо упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку, называемую *центром приведения.*

Пусть на твердое тело действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ (рисунок17). Приложим в точкеO по две уравновешенные силы, одна из которых будет равна и параллельна заданной: $\vec{F}_1' = \vec{F}_1, ..., \vec{F}_n' = \vec{F}_n$, а другая – равна, но направлена в противоположную сторону: $\vec{F}_1'' = -\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n'' = -\vec{F}_n$.

Теперь на тело действуют: система сходящихся сил $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{F}_3', ..., \vec{F}_n$ и система пар сил с моментами $T_1 = T_0(F_1)$,

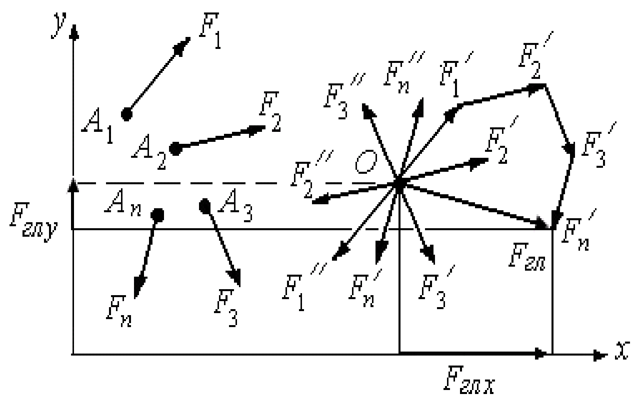


Рисунок 17-Нахождение равнодейстствующей системы сходящихся сил

$T_2 = T_0(F_2)$, $T_3 = T_0(F_3)$, $T_n = T_0(F_n)$. Систему сходящихся сил заменяем равнодействующей (рисунок 17): $\vec{F}'_{гл} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 + \vec{F}'_n$ или (что вытекает из равенства $\vec{F}_1 = \vec{F}'_1$ и т.д.):

$$\vec{F}_{гл} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{13}$$

В соответствии со вторым свойством пары сил найдем алгебраическую сумму моментов всех сил относительно заданного центра, и называется она *главным моментом системы*:

$$T_{гл} = T_1 + T_2 + T_3 + ...+ T_n = \sum_{i=1}^{n} T_0(F_i) \tag{14}$$

Итак, произвольная плоская система сил эквивалентна одной силе - *главному вектору* и одной паре, момент которой равен *главному моменту* системы.

Главный вектор – вектор, представляющий собой геометрическую сумму всех заданных сил системы, перенесенных параллельно самим себе в центр приведения (точка).

Модуль главного вектора $F_{гл}$ можно определить по его проекциям на оси ординат и на основании теоремы о проекции равнодействующей на ось (выражение 16), поместив при этом начало координат в центр приведения:

$$F_{гл} = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2} = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{ix}\right)^2};$$

$$\sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + ...+ F_{nx}; \tag{15}$$

$$\sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + ...+ F_{ny}$$

Если за центр приведения принять другую точку, то модуль и направление главного вектора остаются неизменными, а главный момент изменяется, т.к. изменяются плечи и соответственно весь момент.

Могут встретиться следующие случаи приведения системы сил:

1) $F_{гл} \neq 0; T_{гл} \neq 0$ - общий случай; система приводится к главному вектору и к главному моменту;

2) $F_{гл} = 0; T_{гл} \neq 0$ - система сил приводится к паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов всех сил относительно центра приведения. В этом случае главный момент не зависит от центра приведения;

3) $F_{гл} \neq 0; T_{гл} = 0$ - система приводится к одной равнодействующей силе, приложенной в точке *О*; главный вектор в этом случае является равнодействующей, так как он один заменяет совокупность действующих сил;

4) $F_{гл} = 0; T_{гл} = 0$ – плоская система сил находится в равновесии.

Равнодействующая плоской системы

Теорема о моменте равнодействующей ***(теорема Вариньона)****.*

Пусть плоская система приведена к главному вектору $F_{гл} \neq 0$, приложенному в точке O, и главному моменту $T_{гл} \neq 0$ (рисунок 18).

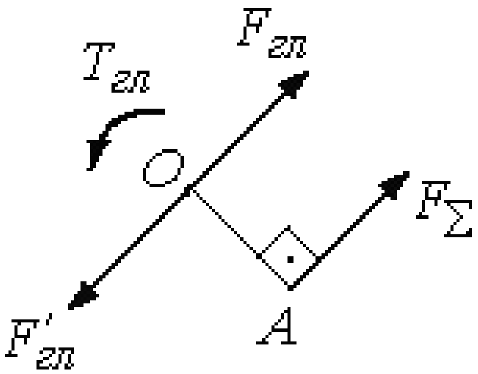


Рисунок 18-К теореме Вариньона

Добавим к исходной системе момент пары сил $(\vec{F}'_{гл}, \vec{F}_{\Sigma})$, модуль которых выберем равным модулю главного вектора $F_{гл}$, т.е. $\vec{F}_{гл} = \vec{F}'_{гл} = \vec{F}_{\Sigma}$. Плечо этой пары ℓ определим следующим образом. Одну из сил, составляющих пару (силу $\vec{F}'_{гл}$), приложим в центре приведения O, тогда точку приложения A другой силы F_{Σ} определим из условия равенства главного момента и момента пары сил $(\vec{F}'_{гл}, \vec{F}_{\Sigma})$:

$$T_{гл} = F_{\Sigma} \cdot \ell = F_{\Sigma} \cdot OA .$$

Отсюда

$$\ell = OA = \frac{T_{гл}}{F'_{гл}} = \frac{T_{гл}}{F_{\Sigma}} \qquad (16)$$

Силы $F_{гл}$ и $F'_{гл}$ равны и противоположно направлены, взаимно уравновешиваются, следовательно, их можно отбросить согласно второй аксиоме статики.

Таким образом, относительно точки O возникает момент силы F_Σ

$T_0(\overline{F}_\Sigma) = F_\Sigma \cdot \ell$.

Поскольку этот момент $T_0(\overrightarrow{F_\Sigma})$ и главный момент $T_{гл}$ исходной системы уравновешивают друг друга (направлены противоположно), то главный момент рассматриваемой системы сил станет равным нулю $T_{гл} = 0$. Таким образом, в системе остается сила $F_\Sigma = F_{гл}$, приложенная в точке A и заменяющая данную систему. Она и является *равнодействующей* F_Σ.

Следовательно, когда $F_{гл} \neq 0$, $T_{гл} \neq 0$, *система имеет равнодействующую, равную по модулю и направленную параллельно главному вектору в ту же сторону.*

Модуль момента равнодействующей F_Σ относительно центра приведения (точка O), с учетом (выражение 16) определится как:

$$T_0\left(\vec{F}_\Sigma\right) = \vec{F}_\Sigma \cdot \left(T_{гл} / \vec{F}_\Sigma\right) = T_{гл}, \tag{17}$$

учитывая, что это модуль главного момента системы записываем тогда:

$$T_0\left(\vec{F}_\Sigma\right) = \sum_{i=1}^{n} T_0\left(\vec{F}_i\right) \tag{18}$$

Теорема Вариньона: *момент равнодействующей плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этого же центра.*

Из теоремы Вариньона следует, что главный момент плоской системы сил относительно любой точки, лежащей на линии действия её равнодействующей, равен нулю. С помощью теоремы Вариньона решаются многие задачи механики.

В частности, легко определяется равнодействующая системы параллельных сил. Рассмотрим применение этого правила на конкретном примере.

Пример 1.1 Определить равнодействующую системы параллельных сил $F_1 = 20\,H$, $F_2 = 60\,H$, $F_3 = 40\,H$, приложенных к телу, как показано на рисунке 19.

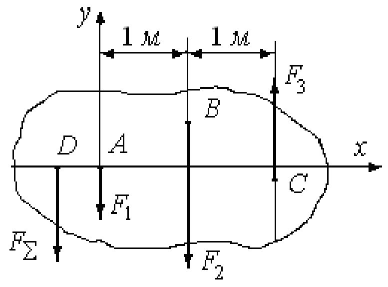


Рисунок 19-К нахождению равнодействующей силы

Решение:

1) находим модуль равнодействующей силы по формуле (18).

Приняв точку A за начало координат, направим ось x перпендикулярно данным силам, а ось y параллельно им, направив её положительный отсчет вверх, тогда проекции каждой из сил на ось x равны нулю, а проекции сил на ось y равны их модулям с соответствующими знаками;

2) модуль равнодействующей системы параллельных сил

$F_\Sigma = \sum F_{iy} = -F_{1y} - F_{2y} + F_{3y} = -20 - 60 + 40 = -40\,H$.

Вектор равнодействующей силы F_Σ направлен параллельно составляющим силам в сторону отрицательного отсчета, т.е. равнодействующая равна $F_\Sigma = -40\,H$ и направлена вниз;

3) Приняв точку A за центр моментов на основании теоремы Вариньона (выражение 18) запишем моменты всех сил относительно точки A, при этом точкой приложения равнодействующей силы F_Σ будет точка D:

$T_A(F_\Sigma) = T_A(F_1) + T_A(F_2) - T_A(F_3);\ T_A(F_1) = 0$.

Отсюда после подстановки числовых значений сил и плеч

$-F_\Sigma \cdot AD = F_2 \cdot a - F_3 \cdot 2 \cdot a$, отсюда $AD = \dfrac{60 \cdot 1 - 40 \cdot 2 \cdot 1}{-40} = 0{,}5\,м$.

Следовательно, $F_\Sigma = 40\,H$, а её линия действия, параллельная составляющим силам, проходит от точки A на расстоянии $AD = 0{,}5\,м$ (рисунок19).

Три формы равновесия

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия: ***главный вектор системы сил и главный момент системы равнялись нулю,*** т.е.

$$\mathbf{R=O}, \quad \mathbf{M_o=0}. \tag{19}$$

Из равенства (19) можно получить ***три формы условий равновесия*** в аналитическом виде (***это необходимо помнить всегда***).

<u>Первая форма равновесия</u> (основная форма). Величины R и M_o определяются равенствами

$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$, $M_0=\sum m_o(F_i)$,

или

$R_x = 0$, $R_y = 0$.

Но R может равняться нулю только тогда, когда одновременно $R_x = 0$ и $R_y = 0$, следовательно, условие (19) будет выполнено, если будет:

$$\sum F_{xi}=0, \quad \sum F_{yi}=0, \quad \sum m_o(F_i)=0. \tag{20}$$

Итак – ***для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю***.

По механическому смыслу первые два из трех условий выражают необходимые условия того, чтобы тело не имело перемещений вдоль осей координат, а третье является условием отсутствия вращения в плоскости ХОУ.

<u>Вторая форма условия равновесия</u>: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на одну из координатных осей и сумма моментов всех сил относительно любых двух центров были равны нулю, при этом прямая, соединяющая центры, не должна быть перпендикулярна координатной оси:

$$\sum F_{xi}=0, \quad \sum m_A(F_i)=0, \quad \sum m_B(F_i)=0. \tag{21}$$

<u>Третья форма условий равновесия</u>: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно любых трех центров, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum m_A(F_i)=0, \quad \sum m_B(F_i)=0, \quad \sum m_C(F_i)=0. \tag{22}$$

Для системы параллельных сил при условии, что оси – одна параллельна силам, а другая – перпендикулярна к ним, получим два уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} m_o\left(\vec{F}_i\right) = 0 \qquad (23)$$

$$\text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_i\right) = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} m_B\left(\vec{F}_i\right) = 0 \qquad (24)$$

Пример 1.2 Балка AE с шарнирными опорами в точках A и B нагружена, как показано (рисунок20, *а*) моментом T, сосредоточенной силой $\vec{F}$ и на участке DE – равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Необходимо определить реакции опор.

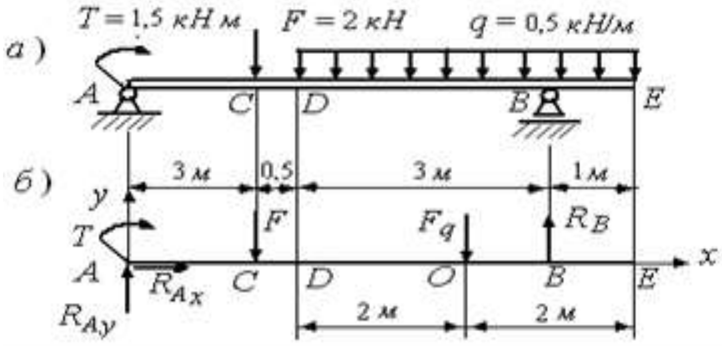


Рисунок 20-К определению реакций опор

Решение:

1) заменим равномерно распределенную нагрузку q её равнодействующей F_q, приложенной в середине отрезка $DE\ (DE = DB + BE = 4\,м)$ в точке $O\ (DO = OE = DE/2 = 2\,м)$; освободим балку от связей, заменив их реакциями $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}$ и $\vec{R}_B$, получим (рисунок 20, *б*) действующую на балку уравновешенную систему сил;

2) расположив оси x и y, как показано на рисунок 20, *б* составим уравнения равновесия вида (выражение 20):

$$\Sigma T_A\left(\vec{F}_i\right) = 0; \quad T + F \cdot AC + F_q \cdot AO - R_B \cdot AB = 0;$$

$$\Sigma T_B\left(\vec{F}_i\right) = 0; \quad T + R_{Ay} \cdot BA - F \cdot BC - F_q \cdot BO = 0;$$

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0.$$

3) решая уравнения, получаем: из первого уравнения

$$R_B = \frac{T + F \cdot AC + F_q \cdot AO}{AB} = \frac{1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 + 0{,}5 \cdot 4 \cdot 4}{5} = 2{,}5\,кН,$$

из второго уравнения

$$R_{Ay} = \frac{-T + F \cdot BC + F_q \cdot BO}{BA} = \frac{-1{,}5 + 2 \cdot 3{,}5 + 0{,}5 \cdot 4 \cdot 1}{5} = 1{,}5\,кН.$$

Из третьего уравнения следует, что горизонтальная составляющая шарнирно неподвижной опоры $\vec{R}_{Ax} = 0.$ Следовательно, полная реакция этой опоры перпендикулярна балке и равна $\vec{R}_{Ay}$. Это обстоятельство в данном случае объясняется тем, что нагрузки не стремятся сдвинуть балку в горизонтальном направлении;

4) для проверки правильности определения реакций, составим не использованное при решении уравнение:

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - F - F_q + R_B = 0$$

и увидим, что $1{,}5 - 2 - 0{,}5 \cdot 4 + 2{,}5 = 0,$ т.е. задача решена правильно.

Вопросы для самоконтроля

1. Смысл термина *«механика»*?
2. Что изучает *«теоретическая механика»*?
3. Что изучает *«статика»*?
4. Что означает термин *«масса»*?
5. Что означает термин *«инертность»*?
6. Что понимается под*«материальной точкой»*?
7. Что такое *«абсолютно твёрдое тело»*?
8. Что означает термин *«механическая система»*?
9. Определение термина *«механическое действие»*?
10. Определение термина *«механическое движение»*?
11. Определение термина *«свободное тело»*?
12. Определение термина *«равновесие механической системы»*?
13. Определение термина *«система отсчёта»*?
14. Что такое *«сила»*?
15. Что означает термин *«линия действия силы*?*»*
16. Определение термина *«сила тяжести»*?
17. Понятие термина *«вес тела»*?
18. Понятие термина *«внешняя сила»*?
19. Определение термина *«внутренние силы»*?
20. Понятие о *«системе сил»*?
21. Определение термина *«уравновешенная система сил»*?
22. Сформулировать определение термина *«уравновешивающая система сил»*?
23. Сформулировать определение термина *«эквивалентные системы сил»*?
24. Сформулировать определение термина *«равнодействующая системы сил»*?
25. Сформулировать определение термина *«плоская система сил»*?
26. Смысл термина *«сходящаяся система сил»*?
27. О термине *«сосредоточенная сила»*?
28. Смысл термина *«распределённые силы»*
29. Сформулировать *аксиому инерции*?
30. Сформулировать *аксиому равновесия двух сил*?

31. Смысл *аксиомы присоединения и исключения уравновешенной системы сил*.

32. Сформулировать *первое следствие из аксиомы присоединения и исключения уравновешенной системы сил*.

33. Сформулировать *второе следствие из аксиомы присоединения и исключения уравновешенной системы сил*.

34. Сформулировать *аксиому параллелограмма сил*.

35. Рассказать об *аксиоме равенства действия и противодействия*.

36. Сформулировать *аксиому равновесия сил, приложенных к деформирующемуся телу при его затвердевании*.

37. Записать формулу для определения равнодействующей системы сходящихся сил.

38. Записать формулу для определения модуля сосредоточенной силы при действии на балку распределённой нагрузки с интенсивностью **q**, изменяющейся по закону прямоугольника.

39. Записать формулу для определения модуля сосредоточенной силы при действии на балку распределённой нагрузки с интенсивностью **q**, изменяющейся по закону треугольника.

40. Используя аксиому параллелограмма сил, записать формулу для определения модуля равнодействующей двух сходящихся сил.

41. Используя правило треугольника, записать формулу, связывающую модули двух сходящихся сил и их равнодействующую.

42. Записать формулу, выражающую аксиому равновесия двух сил.

43. Сформулировать определение термина *«проекция силы на ось»*.

44. Записать формулы для определения проекций силы **F** на координатные оси декартовой системы отсчёта OXYZ.

45. Записать формулу для определения силы **F** через компоненты этой силы в декартовой системе отсчёта OXYZ.

46. Записать формулы для определения направляющих косинусов силы в декартовой системе отсчёта OXYZ.

47. Записать формулы для определения проекций равнодействующей системы сходящихся сил в декартовой системе отсчёта OXYZ.

48. Записать формулу, выражающую геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил.

49. Записать уравнения равновесия для пространственной системы сходящихся сил в декартовой системе отсчёта OXYZ.

50. Записать уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил в декартовой системе отсчёта OXYZ.

1.2 Кинематика
1.2.1 Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве, вне связи с силами, определяющими это движение.

Траектория – линия, которую описывает точка при своем движении в пространстве относительно выбранной системы отсчета.

Механическое движение, т.е. происходящее во времени изменение положения одного тела относительно другого, рассматриваемое в системе отсчёта, которая и связана с этим другим телом.

Система отсчёта может быть как движущейся, так и условно неподвижной. При изучении движений на Земле за неподвижную систему отсчёта (НСО) принимают систему координатных осей, неизменно связанных с Землей. Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчёта не изменяется, находится в состоянии ***относительного покоя*** (по отношению к этой системе отсчёта).

Пространство в механике рассматривается как трёхмерное евклидово пространство. ***За единицу длины*** при измерении расстояний принимается метр (м). ***За единицу времени*** принимается одна секунда (с). Все ***кинематические характеристики*** движения тела (расстояния, скорости, ускорения) ***рассматриваются как функции времени.***

Движение точки может быть задано естественным, координатным и векторным способами. При естественном способе должно быть известно: траектория точки в выбранной системе отсчета, начало и положительная сторона отсчета, закон движения точки по данной траектории в виде уравнения $\mathbf{s = f(t)}$ или графика.

Координатный способ заключается в том, что положение точки может быть задано при помощи различных систем координат, наибольшее применение на практике имеет прямоугольная система координат. Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид:

$$x = f_x(t),\ y = f_y(t),\ z = f_z(t). \tag{25}$$

Если точка движется в плоскости ***xOy***, то будет только два уравнения движения:

$$x = f_x(t),\ y = f_y(t).$$

При векторном способе движение точки выражается как векторная функция радиус-вектора $\bar{r}$ от времени t, т.е. $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

- Общим случаем движения твердого тела является плоскопараллельное, в котором каждая точка тела описывает плоскую траекторию, расположенную в плоскости, параллельной данной неподвижной плоскости.

Положение плоской фигуры можно определить в любой момент времени, если будут заданы координаты какой-либо точки фигуры и угол поворота тела. Уравнение плоскопараллельного движения тела имеет вид:

$$\boldsymbol{x = f_x(t),\ y = f_y(t),\ \varphi = f(t).} \tag{26}$$

Пример такого движения: шатун кривошипно-шатунного механизма; движение колеса автомобиля на прямолинейном участке пути и т.д.

Поступательное движение можно рассматривать как частный случай плоскопараллельного движения, когда $\boldsymbol{\varphi=const}$.

Вращательное движение также является частным случаем, когда:

$\boldsymbol{x = const}$ и $\boldsymbol{y = const}$.

Плоскопараллельное движение может быть представлено суммой двух движений: поступательного и вращательного и скорость любой точки можно представить как геометрическую сумму двух скоростей (рисунок 21): скорость движения полюса А– вокруг полюса А - V_{BA}, т.е. V_Aи скоростьвращательного движения:

$$V_B=V_A+V_{BA} \tag{27}$$

Величина скорости вращательного движения определяется по формуле:

$$V_{BA}=\omega \cdot AB \tag{28}$$

Вращательная часть движения не зависит от выбора полюса и ω называется угловой скоростью плоской фигуры.

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек при плоскопараллельном движении тела основан на понятии мгновенного центра скоростей.

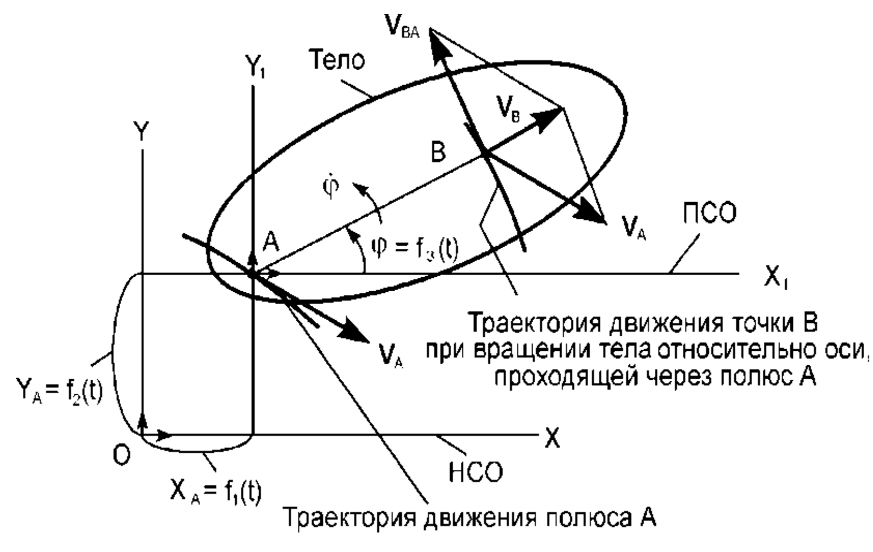


Рисунок 21 – Геометрическая сумма двух скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться в том, что если тело движется не поступательно, то такая точка в каждый момент времени существует и притом единственная.

Пусть заданы скорости $\mathbf{V}_A$ и $\mathbf{V}_B$ двух точек A и B тела. Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров к соответствующим векторам $\mathbf{V}_A$ и $\mathbf{V}_B$ будет мгновенным центром скоростей, так как $V_P = 0$ (рисунок 22).

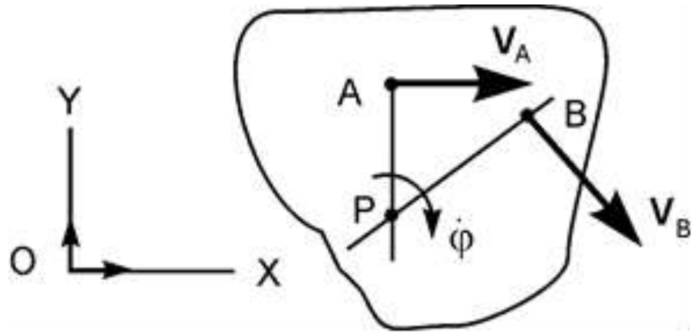


Рисунок 22 – К определению мгновенного центра скоростей

Таким образом, в каждый момент времени плоскопараллельное движение тела можно представить как вращательное относительно оси, проходящей через МЦС. Исходя из этого, имеем:

$$V_A = \omega \cdot AP; \quad \mathbf{V}_A \perp AP; \quad V_B = \omega \cdot BP; \quad \mathbf{V}_B \perp BP,$$

где ω – модуль угловой скорости $\dot{\varphi}$ тела.

Отсюда следует $V_A/AP = V_B/BP = \omega$, т. е. модули скоростей точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1) для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\mathbf{V}_A$ и $\mathbf{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B тела (или траектории этих точек). МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям);

2) для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь точки A тела и направление скорости другой его точки B. Тогда, восстановив из точек A и B перпендикуляры к $\mathbf{V}_A$ и $\mathbf{V}_B$, определим МЦС (точку P) и по направлению $\mathbf{V}_A$ найдем направление поворота тела. После того, зная $\mathbf{V}_A$, найдем скорость $\mathbf{V}_B$ любой точки тела. Направлен вектор $\mathbf{V}_B$ перпендикулярно BP ($\mathbf{V}_B \perp BP$) в сторону поворота тела;

3) модуль угловой скорости тела равен отношению модуля скорости какой-нибудь точки к её расстоянию до мгновенного центра скоростей: $\omega = V_A/AP = V_B/BP = V_C/CP = \ldots$

Различные случаи определения положения мгновенного центра скоростей:

Случай 1.Пусть известен вектор скорости $\mathbf{V}_A$точки А и линиядействия вектора скорости$\mathbf{V}_B$ точки В (рисунок 23). Восстановив перпендикуляры к скоростям в точках А и В, определим положение МЦС (точка Р) и направление вращения тела.

Тогда: $V_A = \omega \cdot AP$; $\omega = V_A/AP$; $V_B = \omega \cdot BP$;
$V_C = \omega \cdot CP$; $\mathbf{V}_A \perp AP$;$\mathbf{V}_B \perp BP$$\mathbf{V}_C \perp CP$,
где ω – модуль угловой скорости $\dot{\varphi}$ тела.

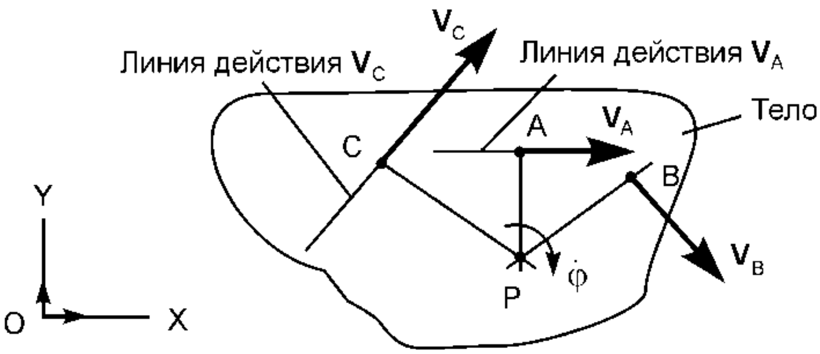


Рисунок 23 – К определению положения мгновенного центра скоростей

В такой последовательности можно определить скорость любой точки тела.

Случаи 2, 3 и 4- графического определения МЦС представлены на рисунках 24,25 и26.

Порядок определения МЦС для этих случаев не требует особых комментариев. Все формулы, полученные для первого случая, остаются справедливыми и для остальных случаев.

Рассматривается **особый случай** плоскопараллельного движения, при котором скорости точек $\mathbf{V}_A$ и $\mathbf{V}_B$ параллельны (рисунок 27).

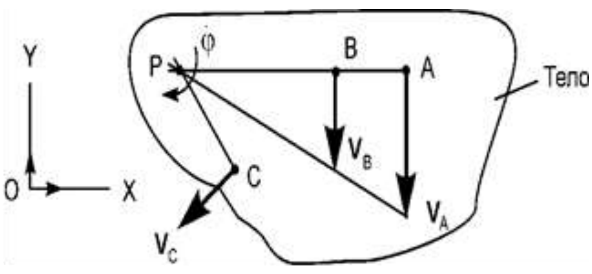


Рисунок 24 – 2-й случай графического определения МЦС

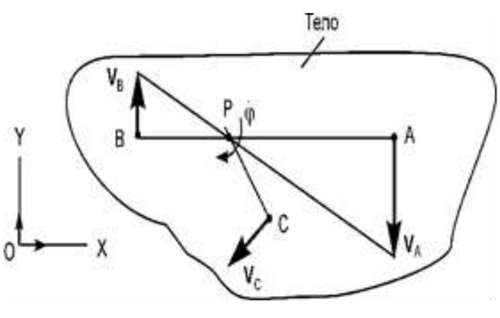


Рисунок 25 – 3-й случай графического определения МЦС

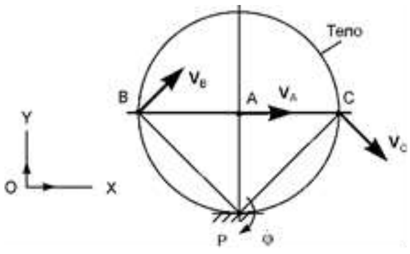


Рисунок 26 – 4-й случай графического определения МЦС

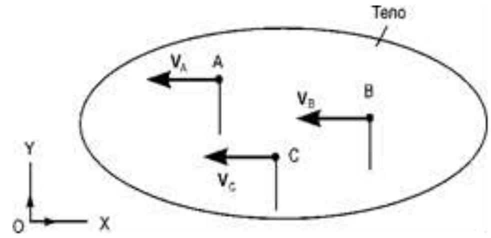


Рисунок 27 – Особый случай плоскопараллельного движения

Если скорости точек А и В параллельны, то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности (АР = ∞; ВР = ∞ и т. д.). Очевидно, что в этом случае $\omega = V_A/AP = V_A/\infty = 0$. Поэтому скорости точек плоской фигуры в рассматриваемый момент времени геометрически равны: $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C = \ldots$

Следует отметить, что при поступательном движении плоской фигуры скорости всех её точек в каждый момент времени также геометрически равны и мгновенный центр скоростей этой фигуры находится в бесконечности. Если условие $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C = \ldots$ остается справедливым в течение некоторого промежутка времени, а не только в отдельный момент, то движение плоской фигуры является поступательным. Если же $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C$ только в некоторый момент времени, то утверждать, что плоская фигура движется поступательно, нельзя. В этом случае говорят, что движение тела является ***мгновенно поступательным***.

Скорость - есть величина, характеризующая быстроту и направление движения в данный момент времени. Если точка за равные промежутки времени проходит равные отрезки пути, то ее движение называется равнопеременным v=s/t, если не равные пути, то неравномерным и скорость неравномерного движения есть величина переменная и является функцией времени

$$V=f(t),\ V=\lim(AA_1/\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta S/\Delta t)=dS/dt.$$

В проекциях на оси:

$$V_x=dx/dt и V_y=dy/dt,\quad V=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,. \quad (29)$$

Изменение скорости за единицу времени есть ***ускорение,*** которое может быть двух видов: касательное $a_t=dv/dt$, которое направлено по касательной к траектории движения и нормальное $a_n=v^2/r$, направленное по перпендикуляру к траектории.

Касательное ускорение характеризует изменение величины скорости, нормальное – изменение направления скорости.

Полное ускорение $\mathbf{a} = \mathbf{a_t} + \mathbf{a_n}$ или $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}$.

Проекции ускорения на координатные оси составят:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2};\ \ a_y = \frac{d^2y}{dt^2}\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (30)$$

1.2.2 Кинематические характеристики движения

Характер движения точки и форма ее траектории определяются ее ускорением:

1) равномерное прямолинейное движение характеризуется тем, что **v=const** и $\mathbf{r} = \infty$**,** касательное ускорение $\mathbf{a_t=dv/dt=0}$, нормальное ускорение равно $\mathbf{a_n= v^2/r=0}$, следовательно и полное ускорение равно **a=0;**

2) неравномерное прямолинейное движение, касательное ускорение $\mathbf{a_t=dv/dt\neq 0}$, нормальное ускорение $\mathbf{a_n=v^2/r=0}$**,** $\mathbf{r=\infty}$**,** и$\mathbf{a=a_t}$.;

3) равномерное криволинейное движение **v=const** и $\mathbf{a_t=dv/dt=0}$, $\mathbf{a_n=v^2/r\neq 0}$ и $\mathbf{a=a_n}$.;

4) неравномерное криволинейное движение $\mathbf{a_t=dv/dt\neq 0}$**, и** $\mathbf{a_n= v^2/r\neq 0}$**, и** $\mathbf{a=a_t+a_n}$**.**

При исследований механических систем необходимы знания величин скоростей и ускорений характерных звеньев или тел, например, при пуске и торможении рабочих машин, как при поступательном, так и при вращательном движениях.

Следует обратить внимание на существенную аналогию между формулами кинематики точки и формулами для вращательного движения тела.

Сведения о кинематических параметрах приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Кинематические характеристики движения

Кинематические характеристики		Движение точек		Вращательное движение тела	
1		2		3	
Уравнние движения	Общая формула Равномерное движение Равномерно переменное движение	$s = f(t)$ $s = s_0 + vt$ $s = s_0 + v_0t + at^2/2$		$\varphi = f(t)$ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$	
Скорость	Общая формула Равномерное движение Равномерно переменное движение	Линейная	$v = ds/dt$ $v = (s - s_0) / t$ $v = v_0 + a_t t$	Угловая	$\omega = d\varphi/dt$ $\omega = (\varphi - \varphi_0) / t$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
Ускорение	Общая формула Равномерно переменное движение	Касательное	$a_t = dv/dt = d^2s/dt^2 = (d/dt)r\omega = r d\omega/dt = r\ \varepsilon.$ $a_t = (v - v_0) / t$, $a_n = v^2/r = r\omega^2$ $a = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$	Угловое	$\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi = d^2\varphi/dt^2$ $\varepsilon = (\omega - \omega_0) / t$
	Работа Мощность Сила инерции		$A = P \cdot s$ $N = A/t = Ps/t = P \cdot s = P \cdot v$ $P = m \cdot a$		$A = T \cdot \varphi$ $N = A/t = T \cdot \varphi = T\varphi/t = T \cdot \omega$ Момент инерции $M = J \cdot \varepsilon$

Следует запомнить, что при изменении скорости возникает ускорение, соответственно, появляется сила инерции или момент инерции за период изменения времени движения, возникающие дополнительные инерционные силовые воздействия догружают элементы передачи и источник привода, что нежелательно.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать определение термина *«кинематика»*.
2. Сформулировать определение термина *«механическое движение»*.
3. Записать уравнения движения точки в декартовой системе отсчёта (точка движется в пространстве).
4. Записать уравнения движения точки в декартовой системе отсчёта (точка движется в горизонтальной плоскости).
5. Записать уравнения движения точки в декартовой системе отсчёта (точка движется параллельно оси OX).
6. Записать уравнение траектории движения точки в декартовой системе отсчёта (точка движется в вертикальной плоскости OYZ).
7. Сформулировать определение *термина «скорость»*.
8. Записать формулу для определения скорости точки через компоненты скорости в декартовой системе отсчёта.

9. Записать формулы для определения проекций скорости на координатные оси в декартовой системе отсчёта.

10. Записать формулу для определения модуля скорости через её проекции в декартовой системе отсчёта.

11. Записать формулы для определения направляющих косинусов при ориентации скорости в декартовой системе отсчёта.

12. Как направлена скорость точки по отношению к траектории её движения?

13. Сформулировать определение термина *«ускорение»*.

14. Куда направлено ускорение точки по отношению к криволинейной траектории её движения?

15. Записать формулу для определения ускорения точки через компоненты ускорения в декартовой системе отсчёта.

16. Записать формулы для определения проекций ускорения на координатные оси в декартовой системе отсчёта.

17. Записать формулу для определения модуля ускорения через его проекции в декартовой системе отсчёта.

18. Записать формулы для определения направляющих косинусов при ориентации ускорения в декартовой системе отсчёта.

19. Записать уравнение равнопеременного прямолинейного движения точки в декартовой системе отсчёта.

20. Записать формулу равномерного прямолинейного движения точки в декартовой системе отсчёта.

21. Записать уравнение движения точки в естественных координатах.

22. Записать формулу для определения вектора скорости точки в естественных координатах.

23. При каком условии точка движется в сторону увеличения дуговой координаты?

24. При каком условии точка движется в сторону уменьшения дуговой координаты?

25. Записать формулу для определения модуля скорости в естественных координатах.

26. Записать формулу для определения вектора ускорения в естественных координатах.

27. Сформулировать определение термина *«касательное ускорение»*.

28. Сформулировать определение термина *«нормальное ускорение»*.

29. *Записать формулу для определения вектора касательного ускорения.*

30. Записать формулу для определения вектора нормального ускорения.

31. Записать формулу для определения модуля ускорения точки при естественном способе задания движения точки.

32. Записать формулу для определения модуля касательного ускорения с использованием проекций скорости и ускорения на координатные оси декартовой системы отсчёта.

33. Как движется точка, если проекции её скорости и ускорения на касательную совпадают по знакам?
34. Как движется точка, если проекции её скорости и ускорения на касательную не совпадают по знакам?
35. Что характеризует касательное ускорение?
36. Что характеризует нормальное ускорение?
37. Чему равен радиус кривизны траектории при прямолинейном движении точки?
38. При каких условиях происходит прямолинейное движение точки?
39. При каких условиях происходит равномерное криволинейное движение?
40. При каких условиях происходит неравномерное криволинейное движение?
41. Записать уравнение движения точки при векторном способе задания её движения.
42. Записать формулу для определения скорости точки при векторном способе задания её движения.
43. Записать формулу для определения ускорения точки при задании её движения векторным способом.
44. Записать уравнение равнопеременного движения точки в естественных координатах.
45. Записать уравнение равномерного движения точки в естественных координатах.
46. Какое отрицательное влияние оказывает неравномерное движение на материальное тело?
47. Куда направлена сила инерции тела при поступательном движении?
48. Куда направлена сила инерции тела при вращательном движении?
49. Какое положительное влияние оказывает переменное движение?

1.3 Динамика

В динамике устанавливают зависимости между характером движения и его физическими причинами, в динамике выводят основные законы механического движения.

Динамика коренным образом отличается от кинематики, где движение оценивается только с геометрической точки зрения, независимо отвызывающего его причин. Динамика является наиболее общим разделом теоретической механики и теории механизмов и машин (ТММ), она использует выводы и статики, и кинематики, и ТММ, в ней устанавливаются общие законы движения материальных точек и тел в зависимости от действующих сил.

Законы движения точек и тел, устанавливаемые в динамике, являются объективными законами природы. Они подтверждаются многочисленными наблюдениями и опытами.

Применение законов динамики к изучению явлений природы и в технике не приводило к противоречию с опытом. Но в конце Х1Х века ряд исследований привел к непримиримым противоречиям между законами электродинамики и классической механики. Эти противоречия явились основой для появления новой механики – теории относительности. Однако законы классической механики, законы динамики сохранили свое значение в технической практике, в области так называемых малых скоростей, т.е. скоростей, существенно меньших скорости света.

В основе динамики лежат некоторые положения (аксиомы), вытекающие из опыта и принимающиеся без доказательств. В разделе теоретической механики (статика) были приведены шесть аксиом, общих для разделов статика и динамика. Некоторые аксиомы динамики не отличаются от аксиом статики, но имеют свои особенности [4].

1.3.1 Аксиомы динамики

Аксиома I

Закон или принцип инерции. Система сил, приложенная к материальной точке или телу, является уравновешенной, если под ее воздействием точка или тело находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно.

В этом случае ускорение материальной точки равно нулю и под действием уравновешенной системы сил или при отсутствии силовых воздействий материальная точка не испытывает ускорений и движется равномерно и прямолинейно, движение по инерции. Отсюда вывод – тело не может сообщать самому себе ускорение без воздействия других тел.

Аксиома II

Уравнение динамики. Ускорение, сообщаемое материальной точке или телу приложенной силой, имеет направление силы и по величине пропорционально ей.

Формула второй аксиомы запишется в векторной форме в следующем виде, (сила имеет точку приложения, направление и модуль)

$$\overline{P} = m\overline{a}, \qquad (31)$$

где Р – сила воздействия, Н;

m – масса тела, кг;

$\bar{a}$ - ускорение, м/с^2.

Размерность силы обозначается в Ньютонах, один Н означает - «Сила, необходимая для сообщения телу массой один кг ускорения один м/с^2», следовательно, $H = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$.

Численное значение силы можно определить по формуле (31) в скалярной форме:

$$P = m a \qquad (31а)$$

Из уравнения (31) следует, что масса тела является мерой ее «инертности», т.е. чем больше масса, тем большая сила потребуется для сообщения телу определенного ускорения.

Уравнение (31) относится и к материальному телу, находящемуся под действием силы тяжести:

$$P = G = mg, \quad (32)$$

где G –вес тела, Н;

g – ускорение свободного падения, м/с^2 (величина зависит от широты места, меньше на экваторе и больше на полюсе,**g= 9,7803 (1+0,005302sin^{2}φ – 0,000006sin^{2}2φ) –0,000003086h**, где φ- широта, м; h-высота над уровнем моря, м), для средних широт обычно принимают g=9,81 м/с^2.

Масса ($m = G/g$) служит более полной характеристикой тела, чем вес, так как вес в разных точках Земли различен, а масса всегда остается одинаковой.

Уравнение динамики вращательного движения тела по своему виду аналогично уравнению прямолинейного движения точки, P=ma. При прямолинейном движении точки (тела) мерой инертности является масса тела ***m***, а при вращательном движении мерой инертности тела является момент инерции массы тела **J**. При поступательном движении тело имеет линейное ускорение ***a***, а при вращательном – угловое ускорение **ε**. При поступательном движении – сила Р, а при вращательном движении – момент силы.

Таким образом, основное уравнение динамики для вращательного движения запишется

$$J_y\varepsilon=\sum M_y \qquad (33)$$

Из уравнения (33) следует, что ***произведение момента инерции тела относительно оси вращения на его угловое ускорение равно сумме моментов всех сил относительно этой оси (вращающему моменту)***.

Уравнение позволяет: зная вращающий момент, найти закон вращения тела или его угловую скорость; зная закон вращения, найти вращающий момент.

При решении задач уравнением (33) целесообразно пользоваться тогда, когда система состоит только из одного вращающегося тела. Если в системе кроме одного вращающегося тела есть еще другие движущие тела, то уравнение движения лучше составлять с помощью общих теорем или методов динамики.

Аксиома III

Аксиома независимости действия сил. Если на материальную точку или тело действует несколько сил, то, ускорение, получаемое точкой или телом, будет такое же, как и при действии одной силы, равной геометрической сумме сил.

Сила, которая сообщает материальной точке или телу такое же ускорение, как и заданная система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3,.., \overline{F}_n$, называется в динамике ***равнодействующей силой***.

Понятие равнодействующей в статике и в динамике эквивалентны.

Итак, смысл третьей аксиомы динамики заключается в том, что несколько сил - $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3,.., \overline{F}_n$, действующих на материальную точку или тело, можно заменить их равнодействующей $\overline{R}$

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \cdots + \overline{F}_n \qquad (34)$$

Эту аксиому можно выразить в другой форме:***Ускорение, получаемое материальной точкой или телом под действием нескольких сил, может быть определено как геометрическая сумма ускорений, вызванных каждой из сил в отдельности.***

В векторной форме аксиома запишется

$$\overline{a} = \vec{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \cdots + \overline{a}_n \qquad (35)$$

Аксиома IV

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Из этого следует, что силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки или тела, всегда равны по модулю и направлены по прямой, соединяющие точки или тела, в противоположные стороны.

Важное значение этой аксиомы заключается в том, что она является основой для объяснения сущности так называемого реактивного движения. Доказательством этой аксиомы является полет ракеты, у которой газы при истечении из сопла двигателя ракеты отбрасывают ее в противоположном направлении, и это происходит не только в воздухе, но и в безвоздушном пространстве. Такое движение не имеет ничего общего с «отталкиванием от воздуха». Именно поэтому принцип реактивного движения используется в космических ракетах.

1.4 Кинетическая энергия материального тела
1.4.1 Тело движется поступательно

При поступательном движении тела скорость всех точек его равны между собой.

Следовательно, в данном случае кинетическая энергия тела равна

$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i \text{ или } E = \frac{mv^2}{2} \quad (36)$$

Кинетическая энергия E поступательно движущегося твердого тела равна половине произведения массы m тела на квадрат его скорости v.

1.4.2 Тело вращается вокруг неподвижной оси

Модуль $\boldsymbol{v_i}$ скорости любой ***i-к*** точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен, как известно, произведению угловой скорости ω тела на расстояние r_i данной точки от оси вращения тела: $\boldsymbol{v_i} = \omega\, r_i$. Следовательно, кинетическая энергия вращающегося тела равна:

$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 \quad (37)$$

Но $\sum m_i r_i^2$, т.е. сумма, составленная из произведений масс точек тела на квадраты их расстояний до оси вращения тела, есть не что иное, как момент инерции J тела относительно его оси вращения. Следовательно, при вращательном движении тела кинетическая энергия равна

$$E = \frac{J\omega^2}{2} \quad (38)$$

Кинетическая энергия Е тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции J тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости ω.

Сравнивая формулу (38) с формулой (37), можно заметить, что строение их аналогично. В формуле (38) роль массы играет момент инерции тела, а роль линейной скорости – угловая скорость тела.

1.4.3 Тело совершает плоскопараллельное движение

Необходимо ориентироваться на положение кинематики тела, совершающее плоскопараллельное движение, которое может быть разложено на поступательное со скоростью полюса и вращательное движение вокруг полюса. Только, в отличие от кинематики, выбор полюса здесь не произволен. В динамике при плоскопараллельном движении за полюс надо обязательно выбирать центр масс тела.

Кинетическая формула при плоскопараллельном движении будет иметь вид

$$E = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \tag{39}$$

гдеv_c – скорость поступательного движения полюса, центра массы тела;

J_c –момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Кинетическая энергия тела при его плоскопараллельном движении равна сумме кинетических энергий при его поступательном движении со скоростью центра масс тела, и при его вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной к той неподвижной плоскости, параллельно которой движется тело.

Если за полюс принять другую точку тела, то будет иная формула кинетической энергии.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите аксиомы динамики?
2. Запишите уравнение кинетической энергии материальной точки.
3. Сравните аксиомы статики и аксиомы динамики.
4. Кинетическая энергия при поступательном движении точки.
5. Кинетическая энергия при вращательном движении точки.
6. Как определяется уравнение движения машины ?
7. Как определяются главный вектор и главный момент ?
8. Кинетическая энергия при плоскопараллельном движении точки.
9. Каким образом проводится построение диаграммы работы машины в трех периодах работы?
10. Как определяются параметры динамической модели для механизма, например, механизма подъема груза кранов?
11. Каким образом проводится уравновешивание устройств?
12. Какая роль маховика в двигателе?

2 ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

2.1 Основные понятия и определения

Что понимается под терминами «машина» и «механизм»? *Машина* – это устройство, для преобразования энергии, материалов и информации с целью облегчения физического и умственного труда человека. Если машина выполняет все функции без участия человека, то – это *машина-автомат*.

По назначению различают:

энергетические машины (электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания, турбины);

технологические и *транспортныемашины* (металлообрабатывающие станки, транспортеры, пищевые машины);

информационные машины (вычислительные машины, контрольно-измерительные приборы).

При всем многообразии машин и машинных агрегатов их объединяет то, что в основе каждой машины имеются различные механизмы.

Механизм – система тел, предназначенная для преобразования независимого движения одного или нескольких тел в требуемое движение остальных тел в соответствии с заданным функциональным назначением.

В состав механизма входят следующие элементы: *звено механизма*, неподвижное звено называется *стойкой*, со стойкой шарнирно связаны входные и выходные звенья.

Входным звеном называют звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев.

Выходным звеном называется звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Остальные подвижные звенья называются соединительными или *промежуточными*. Механизмы могут иметь несколько входных и выходных звеньев.

Входное звено является *ведущим* звеном. Остальные подвижные звенья механизма, совершающие требуемые, однозначно определенные движения, называются *ведомыми*.

На рисунке 28 показана структурная схема кривошипно-шатунного механизма. Здесь 0 – стойка (неподвижное звено); 3 – входное звено (кривошип); 2 – промежуточное звено (шатун); 1 – выходное звено (ползун).

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется *кинематической парой.*

Тело, находясь в пространстве (в декартовой системе координат $x,\ y,\ z$) имеет 6 степеней свободы. Оно может перемещаться вдоль каждой из трёх осей $x,\ y$ и z, а также вращаться вокруг каждой оси (рисунок 29). Постоянное соприкосновение звеньев в кинематической паре налагает ограничения на их относительное движение. Для звеньев, входящих в кинематическую пару, число степеней свободы в их относительном движении всегда меньше шести, т.к. условия постоянного соприкосновения звеньев кинематической пары уменьшают число возможных перемещений.

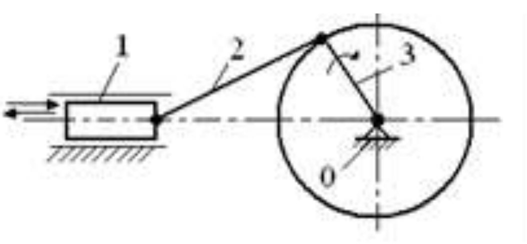


Рисунок 28–Структурная схема кривошипно - шатунного механизма

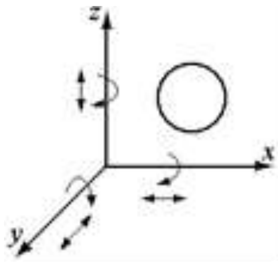


Рисунок 29 – Расположение тела в пространстве (6 степеней свободы)

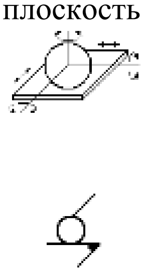
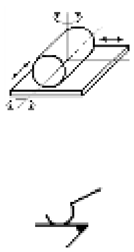
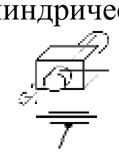
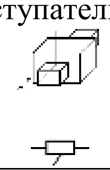
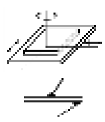
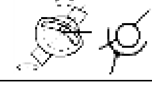
Количество наложенных ограничений на относительное движение звеньев называется *связью* (условиями связи).

Число условий связей, налагаемых кинематической парой, может быть от 1 до 5, кинематические пары делят на пять классов, которые определяются числом условий связей s.

Точки, линии, поверхности, по которым звенья соприкасаются в процессе движения, называют *элементами кинематических пар.*

Кинематические пары разделяют на *низшие*, звенья которых соприкасаются по поверхностям: вращательная, поступательная, винтовая, цилиндрическая, сферическая (таблица 2), кинематические пары классов 3,4,5; и *высшие* пары, элементы звеньев которых соприкасаются по линии и в точке (таблица 2), кинематические пары: шар и плоскость - класс 1; цилиндр и плоскость – класс 2. Стрелками здесь отмечены возможные перемещения звеньев, которые сохраняются после образования пары.

Таблица 2 - Классификация кинематических пар

Кинематическая пара и ее условное обозначение	Шар - плоскость 	Цилиндр - плоскость 	Сферическая 	Цилиндрическая 	Поступательная 
			Плоскостная 	Сферическая с пальцем 	Вращательная 
Число степеней свободы/ класс пары	5 / 1	4 / 2	3 / 3	2 / 4	1 / 5

Для постоянного соприкосновения звеньев в кинематических парах должно быть обеспечено замыкание пары.

Замыкание может быть: кинематическое (конструктивное) – осуществляется конструктивной формой элементов, входящих в пару (4 класс); силовое – осуществляется путем использования силы тяжести (веса), упругости пружины и т.д. (1, 2 класс).

2.2 Степень подвижности кинематической цепи

Число степеней свободы кинематической цепи относительно одного из звеньев называют *степенью её подвижности*.

Для определения степени подвижности кинематической цепи W необходимо из общего числа степеней свободы всех ее подвижных звеньев вычесть число связей, накладываемых на относительное движение звеньев кинематическими парами, которые связывают звенья.

Степень подвижности для пространственной кинематической цепи (структурная формулу Сомова - Малышева) имеет вид:

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot P_5 - 4 \cdot P_4 - 3 \cdot P_3 - 2 \cdot P_2 - P_1, \qquad (40)$$

где n – число подвижных звеньев;

P_5 – число пар 5 класса;

P_4 –число пар 4 класса;

P_3– число пар 3 класса;

P_2– число пар 2 класса;

P_1– число пар 1 класса;

Для плоской кинематической цепи (в этом случае звено может иметь только 3 возможных движения) степень подвижности определяется по формуле Чебышева:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - P_4 \qquad (41)$$

Подвижность кинематической цепи W показывает, какому количеству звеньев должно быть задано движение (т.е. сколько должно быть ведущих звеньев), для однозначной определенности положения всех звеньев механизма.

Кинематические пары 5-го класса в плоском механизме могут существовать в виде вращательной и поступательной пар (таблица 2).

Так, для механизма шарнирного плоского четырехзвенника имеем (рисунок 30 а): $n = 3$; $P_5 = 4$; $P_4 = 0$. Степень подвижности рассчитываем по формуле (41): $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Степень подвижности (или свободы) механизма совпадает с числом обобщенных координат, т.е. с числом независимых переменных, однозначно определяющих положение механической системы.

Следовательно, механизм шарнирного четырехзвенника имеет одно ведущее звено и одну обобщенную координату [5]. В качестве обобщенной координаты обычно выбирают угловую координату ведущего звена $\varphi = \varphi\ (t)$.

Для механизма, изображенного на рисунке 30б, степень подвижности равна $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$.

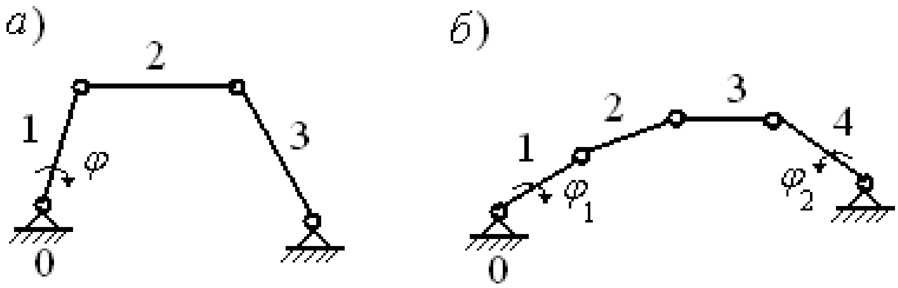


Рисунок 30 –Механизм шарнирного четырёхзвенника

В механизмах с двумя степенями подвижности за обобщенные координаты выбирают координаты двух ведущих звеньев $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2 = \varphi_2(t)$

2.3 Кинематический анализ механизмов

Движение реальных механизмов машин происходит под действием различных сил и является переменным во времени в соответствии с изменением режимов работы, назначения машин.

Целью кинематического анализа является определение кинематических характеристик механизмов, т.е. траекторий, скоростей и ускорений характерных точек его звеньев без учета сил, вызывающих это движение, т.е. рассматривается движение лишь с геометрической точки зрения («кинематика» - это геометрия движения).

Основные задачи кинематического анализа:

1)*определение положений звеньев*, включая определение траекторий отдельных точек звеньев;

2)*определение скоростей иускорений* точек и угловых скоростей и ускорений звеньев.

При решении этих задач считаются известными законы движения начальных звеньев и кинематическая схема механизма, т.е. структурная схема механизма с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа.

Эти задачи могут быть решены графическими, графоаналитическими и аналитическими методами. Выбор того или иного метода зависит как от необходимой степени точности решения, так и от целевого назначения расчета. Первые два метода уступают по точности третьему, однако, они более наглядны и сравнительно просты [6].

2.4 Динамический анализ машин

Цели и задачи динамического анализа

Динамика машин является разделом общей теории механизмов и машин, в которой движение механизмов и машин изучается с учетом действующих сил и свойств материалов.

Основная цель динамического анализа заключается в установлении общих зависимостей между силами (моментами), действующими на звенья механизма, и кинематическими параметрами механизма с учетом масс (моментов инерции) его звеньев. Эти зависимости определяются из уравнений движения механизма.

Различают две *задачи* динамического анализа:

-изучение влияния внешних сил, сил веса звеньев, сил трения и сил инерции на звенья механизма, на кинематические пары и неподвижные опоры, и установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма – *задача силового анализа механизмов;*

- изучение режимов движения механизма под действием заданных сил и установление способов, обеспечивающих заданные режимы движения – *задача динамики механизмов.*

Силы, действующие на звенья механизма и их классификация

Действующие на механизм силы можно разделить на следующие группы:

1) *движущие силы* $\vec{F}_{дв}$ (или пары сил с моментом $\vec{T}_{дв}$) приложены к *входным звеньям* машин со стороны приводных двигателей, являющихся источником энергии, необходимой для приведения в действие машины и осуществления технологических процессов производства;

2) силы $\vec{F}_{пс}$ (или пары сил с моментом $\vec{T}_{пс}$) *полезных сопротивлений* возникают при реализации производственных процессов;

3) силы $\vec{F}_{вс}$ (или пары сил с моментом $\vec{T}_{вс}$) *вредных сопротивлений*. К ним относят преимущественно силы внешнего и внутреннего трения звеньев, силы сопротивления их движению в газообразных или жидких средах;

4) силы *веса звеньев* $\vec{F}_{в}$, которые в зависимости от направления их действия относительно направления движущих сил могут быть полезными (или вредными), когда они способствуют (или препятствуют) движению;

5) силы $\vec{F}_{и}$ и моменты сил $\vec{T}_{и}$ *инерции* звеньев, возникающие при изменении скорости движения звеньев, могут быть как движущими, так и силами сопротивления, в зависимости от направления их действия относительно направления движения звеньев. Силы инерции препятствуют движению при ускорении и способствуют ему при замедлении.

2.5 Трение в механизмах

Трением называется сопротивление относительному перемещению соприкасающихся тел, возникающее в месте их соприкосновения.

По кинематическим признакам различают: *трение скольжения* (трение первого рода), возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого (движение поршня в цилиндре), и *трение качения* (трение второго рода), возникающее при качении одного тела по поверхности другого (качение колеса по рельсу).

По *характеру смазки* трущихся поверхностей различают: *сухое трение* – смазка отсутствует; *граничное трение* – поверхности разделены очень тонким слоем смазки; *полусухое трение* - сочетания жидкостного и граничного; *жидкостное трение* - поверхности полностью отделены слоем смазки.

Физическая природа трения без смазочного материала истолковывается как процесс зацепления и разрушения шероховатостей поверхностей при относительном движении звеньев. При этом сила трения будет тем большей, чем хуже обработаны поверхности контакта. В технических расчетах, следуя закону Кулона, полагают силу трения скольжения пропорциональной силе нормального давления, как в покое, так и в движении:

$$F_0 = f_0 \cdot N; \quad F_{mp} = f \cdot N, \tag{42}$$

где f_0 и f – коэффициенты трения покоя и движения при скольжении соответственно, зависящие от вида материалов соприкасающихся звеньев, скорости относительного движения и других факторов;

N – сила нормального давления звеньев.

Величина силы трения покоя F_0, как правило, превышает величину силы трения движения F_{mp}.

2.6 Уравнение движения машины (механизма)

Для определения законов движения начальных звеньев по заданным силам, действующим на звенья механизма, используются уравнения, называемые *уравнениями движения механизма*. Число этих уравнений равно числу степеней свободы механизма.

Для записи уравнений движения механизмов с одной степенью свободы чаще всего используют теорему об изменении кинетической энергии материальной системы. Согласно этой теореме, *перемещение материальной системы из начального положения в конечное равно сумме работ, совершаемых на этом перемещении всеми силами, действующими на систему*. В интегральной форме уравнение движения механизма имеет вид:

$$E_к - E_{ко} = \sum_{i=1}^{n} W_i, \tag{43}$$

где $E_к$, $E_{ко}$ – значения кинетической энергии механизма в её конечном и начальном положениях;

W_i – работа, совершаемая i-ой из n сил, которые действуют на систему при её перемещении из начального положения в конечное.

Суммарную работу всех сил в уравнении (43) разложим на работу движущих сил $W_{дс}$, работу сил полезного $W_{пс}$ и вредного $W_{вс}$ сопротивления:

$$E_к - E_{ко} = W_{дс} + W_{пс} + W_{вс} \qquad (44)$$

Стадии (режимы) движения машинного агрегата, которые принято различать при работе машинного агрегата с одной степенью свободы: *разбег, установившееся движение, выбег* (рисунок 31).

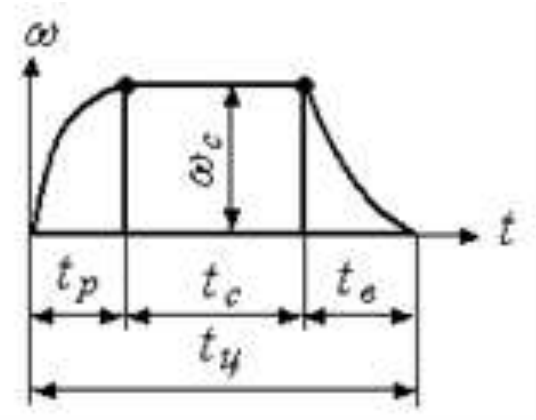


Рисунок 31 –Стадии (режимы) движения машинного агрегата

На *стадии разбега* скорости звеньев механизма возрастают от нуля до некоторого рабочего значения ω_c, соответствующего скорости установившегося значения. Следовательно, на стадии разбега $E_{ко} = 0$ и согласно равенству (44) можно записать:

$$W_{дс} = W_{пс} + W_{вс} + E_к \qquad (45)$$

Выражение (45) показывает, что на стадии разбега при запуске механизма движущие силы должны не только преодолеть силы полезного и вредного сопротивления, но и сообщить механизму кинетическую энергию.

Установившийся режим движения механизма – это движение, при котором обобщенная скорость и кинетическая энергия механизма являются периодическими функциями времени.

Время цикла установившегося движения $t_ц$ – это минимальный промежуток времени, по истечении которого обобщенная координата и кинетическая энергия механизма принимают те же значения, что и в начале этого промежутка (рисунок 31). Мгновенная скорость меняется за время цикла $t_ц$, но ее среднее значение за цикл и, следовательно, за весь период установившегося движения остается постоянным ω_c (это состояние не может прекратиться самопроизвольно, без вмешательства извне).

Изменение кинетической энергии за весь период установившегося движения равно нулю, $E_к = E_{ко}$, и уравнение (45) принимает вид:

$$W_{дс} = W_{пс} + W_{вс} \qquad (46)$$

Из (46) видно, что энергия движущих сил в установившемся режиме машин расходуется только на преодоление полезных и вредных сопротивлений. И чем меньше работа сил вредного сопротивления (трения и др.), тем эффективнее используется энергия в машине.

На *стадии выбега* (останова) скорости звеньев механизма убывают до нуля. Движущие силы отключают, поэтому $W_{\partial c} = 0$. В конце выбега $E_к = 0$, и уравнение (44) выглядит следующим образом:

$$E_{ко} = W_{пс} + W_{вс} \qquad (47)$$

Когда вся кинетическая энергия механизма оказывается израсходованной на преодоление сил полезного и вредного сопротивлений, механизм останавливается. Для уменьшения времени выбега (останова) используются тормозные устройства, создающие дополнительную работу тормозящих сил. Особенно эффективно применение тормозных устройств, если по технологическим причинам полезные сопротивления на стадии выбега выключаются.

2.7 Механический коэффициент полезного действия

Одним из важнейших параметров, оценивающих качество машин и механизмов, эффективность использования ими поступающей энергии, является *коэффициент полезного действия (КПД) – это отношение работы сил полезного сопротивления* $W_{пс}$ (или мощности $P_{пс}$) *к работе движущих сил* $W_{\partial c}$ (или мощности $P_{\partial c}$) *за один и тот же промежуток времени:*

$$\eta = \frac{W_{пс}}{W_{\partial c}} = \frac{P_{пс}}{P_{\partial c}}, \qquad (48)$$

где $P_{пс}$ – мощность на ведомом звене;

$P_{\partial c}$ – мощность на ведущем звене.

Так как на стадии установившегося движения выполняется равенство (46), работу сил полезного сопротивления удобно представить разностью $W_{пс} = W_{\partial c} - W_{вс}$. Тогда КПД механизма при установившемся движении:

$$\eta = \left(W_{\partial c} - W_{вс}\right)/W_{\partial c} = 1 - W_{вс}/W_{\partial c} = 1 - \psi \qquad (49)$$

Отношение $W_{вс}/W_{\partial c}$ называют *коэффициентом потерь* ψ. При установившемся движении коэффициент потерь определяют равенством

$$\psi = W_{вс}/W_{\partial c} = W_{вс}/\left(W_{пс} + W_{вс}\right) \qquad (50)$$

или

$$\psi = P_{вс} / \left(P_{пс} + P_{вс}\right) \qquad (51)$$

Коэффициент полезного действия и коэффициент потерь являются безразмерными величинами.

КПД всегда меньше единицы, так как в реальных условиях работа сил вредных сопротивлений не может быть равной нулю.

Чем больше η, тем большая часть энергии расходуется в механизме на полезную работу, и тем меньшая доля потерь этой энергии на вредные сопротивления, т.е. тем рациональнее используется поступающая энергия.

В технике распространены случаи работы машин или механизмов при их последовательном соединении друг с другом. В таких случаях важно знать зависимость их общего КПД от коэффициентов полезного действия отдельных машин (механизмов). Допустим, имеем совокупность n механизмов (1, 2, …, n) (рисунок32) с коэффициентами полезного действия($\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$).

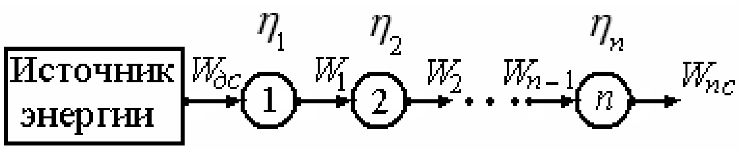


Рисунок 32 - Совокупность механизмов (1, 2, ..., n) с к.п.д. $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$

Если работа, поступающая от источника энергии $W_{дс}$, а полезная работа $W_{пс}$, то $W_1, W_2, ..., W_{пс}$ полезная работа 1-го, 2-го, n – го механизмов соответственно.

Тогда $\eta_1 = \dfrac{W_1}{W_{дс}}, \quad \eta_2 = \dfrac{W_2}{W_1}, ..., \eta_n = \dfrac{W_{пс}}{W_2}$.

Перемножив, левые и правые части этих равенств:

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n = \frac{W_1}{W_{дс}} \cdot \frac{W_2}{W_1} \cdot \ldots \cdot \frac{W_{пс}}{W_2},$$

так как $\dfrac{W_{пс}}{W_{дс}} = \eta$ - КПД всего механизма, то:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n. \qquad (52)$$

Таким образом, *при последовательном соединении механизмов общий КПД равен произведению КПД всех механизмов.*

Из формулы (52) следует: чем длиннее «цепочка» совместно работающих механизмов, тем меньше её общий КПД, причем общий КПД всегда меньше самого малого из числа перемножаемых.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает динамика машин?
2. Отличие динамики от кинематики.
3. Какая аксиома указывает на уравнение динамики?
4. Закон динамики в скалярной форме.
5. Уравнение динамики во вращательном движении.
6. Сила инерции направляется... .
7. Реакция между ползуном и направляющей направлена...
8. Силовой анализ механизма с учётом сил инерции звеньев называется...
9. Реакция во вращательной кинематической паре раскладывается на ... составляющие.
10. Направление вектора силы трения … с направлением вектора скорости.
11. Сила трения движения – это …
13. Сила трения в поступательной кинематической паре определяется
12. по формуле.
14. Признаком самоторможения является условие.
15. Момент трения во вращательной кинематической паре определяется по формуле.
16. Какие режимы движения машинного агрегата?
17. Установившийся режим движения характеризуется.
13. Силы трения в период торможения как действуют?
18. Средняя скорость как определяется (формула)?
19. Как определяется коэффициент неравномерности хода механизма?
20. В физическом смысле маховик играет какую роль в работе машины?
21. КПД последовательно соединённых механизмов определяется через.
22. КПД параллельно соединённых одинаковых механизмов определяется через..
23. График угловой скорости кривошипа при бесконечно большом маховике будет иметь форму…
24. Коэффициентом неравномерности хода машины называется отношение…
25. Колебания угловой скорости кривошипа …, если увеличить момент инерции маховика.
26. Маховик накапливает кинетическую энергию, когда работа…
27. Мощность силы имеет размерность.
28. Приведение сил к кривошипу производится с помощью.
29. Цель динамического исследования заключается в определении … по заданному движению звеньев.
30. Закон о кинетической энергии материальной точки.

Список использованных источников

1. Бегун, П. И. Прикладная механика: учебник / П.И. Бегун, О.П. Кормилицын.- СПб.: Политехника, 2016.- 464 с.
2. Прикладная механика: учеб.для вузов / В.В.Джамай [и др.].- М.: Дрофа, 2014.- 414 с.
3. Прикладная механика: учеб.пособие / А.Т. Скойбеда [и др.].- Мн.: Высш. шк., 2012.- 522 с.
4. Мудров, А.Г. Прикладная механика: учеб.-методическое пособие / А.Г. Мудров, Р.Л. Сахапов. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2018. – 86 с.
5. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2-х частях/Н.Н. Бухгольц.- М.: Изд-во «Лань», 2011. - 816 с.
6. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов/С.М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с., ил.
7. Теория механизмов и механика машин: учеб.для втузов/ К.В. Фролов [и др.].- М.: Высш. шк., 2009.- 496 с.
8. Коровин, Ю.В. Теория механизмов и машин: учеб. пособие/Ю.В. Коровин. -Казань: Издательство Фэн, 2009. -396 с.
9. Мудров, А.Г. Разработка курсового проекта по деталям машин и основам конструирования : учеб. пособие / А.Г. Мудров , Р.Л. Сахапов.- Казань: Изд-во КГАСУ, 2015. -167 с.

Учебное издание

Мудров Александр Григорьевич
Сахапов Рустем Лукманович
Султанов Вячеслав Андреевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебно-методическое пособие