

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

## О СВОЙСТВАХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА-ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов<sup>1</sup>, Е.П. Кечко<sup>2</sup>

1 [svoitov@gsu.by](mailto:svoitov@gsu.by); Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины  
2 [ekechko@gmail.com](mailto:ekechko@gmail.com); Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

*В работе изучаются экстремальные свойства и локализация нулей недиагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для системы экспонент  $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$  с произвольными различными комплексными числами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Приведенные теоремы дополняют и обобщают известные результаты К. Малера, Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, П. Борвейна, Ф. Вилонского и К. Драйвер.*

**Ключевые слова:** многочлены Эрмита – Паде, нули многочленов Эрмита – Паде, асимптотические равенства.

Для заданного натурального числа  $k$  рассмотрим произвольный фиксированный набор  $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$  различных комплексных и произвольный набор  $\{n_p\}_{p=0}^k$  целых положительных чисел.

Многочленами Эрмита – Паде 1-го рода системы экспоненциальных функций  $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$  называют многочлены  $A_{n_p}^p$ ,  $\deg A_{n_p}^p \leq n_p - 1$ ,  $p = 0, 1, \dots, k$ , хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, \dots, n_k}(z) = \sum_{p=0}^k A_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1)$$

Многочлены  $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$  (при  $n_0 = n_1 = \dots = n_k$  их принято называть диагональными многочленами Эрмита – Паде 1-го рода) введены в рассмотрение Эрмитом [1] в связи с исследованием арифметических свойств числа  $e$ .

Если не принимать во внимание одномерный случай, когда мы имеем дело с хорошо изученными классическими многочленами Паде (см. [2]), то можно сказать, что к настоящему времени свойства недиагональных многочленов исследованы в значительно меньшей степени (см. [3], [4]), чем диагональных. Отчасти это связано с тем, что методы, ранее применяемые при изучении диагональных многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде, в общей ситуации не столь эффективны. Например, методы Лапласа и перевала (метод седловой точки) достаточно детально разработаны для нахождения асимптотики интегралов, зависящих от одного параметра  $n$ . Однако, в общей ситуации приходится иметь дело с интегралами, зависящими от  $k+1$  различных параметров  $n_0, n_1, \dots, n_k$ .

Полиномы  $A_{n_0}^0(z), A_{n_1}^1(z), \dots, A_{n_k}^k(z)$ , удовлетворяющие равенствам (1), могут быть получены решением линейной системы  $n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1$  однородных уравнений с  $n_0 + n_1 + \dots + n_k$  неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть  $C_p$  – граница круга с центром в точке  $\lambda_p$  столь малого радиуса, что все остальные  $\lambda_j$  лежат во внешности этого круга, а  $C_\infty$  – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа  $\lambda_j$ ,

$j = 0, 1, 2, \dots, k$  принадлежат его внутренности. С использованием теоремы Коши о вычетах легко показать, что функции

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{p=0}^k (\xi - \lambda_p)^{n_p}}, \quad 0 \leq p \leq k, \quad (2)$$

$$R_{n_0, n_1, \dots, n_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{p=0}^k (\xi - \lambda_p)^{n_p}} \quad (3)$$

удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенства (2) и (3) не являются новыми. Впервые они появились в работах Эрмита.

Далее будем рассматривать нормированную функцию, полученную делением остаточной функции  $R_{n_0, n_1, \dots, n_k}(z)$  на старший коэффициент многочлена  $A_{n_k}^k(z)$ . Чтобы найти его численное значение, продифференцируем  $n_k - 1$  раз равенство (2) при  $p = k$ . В результате получим, что значение старшего коэффициента  $A_{n_k}^k(z)$  совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i (n_k - 1)!} \int_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k) \prod_{p=0}^{k-1} (\xi - \lambda_p)^{n_p}},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$\prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{-n_p} / (n_k - 1)!.$$

Покажем, что нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены  $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$  являются решением следующей экстремальной задачи:

для фиксированного набора действительных чисел  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$  найти многочлены  $a_{n_p}^p(z)$ ,  $\deg a_{n_p}^p \leq n_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, k$ , со старшим коэффициентом многочлена  $a_{n_k}^k(z)$  равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве

$$E_{n_0, n_1, \dots, n_k} = E_{n_0, \dots, n_k}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k; \rho) := \min_{\{a_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k} \left\| \sum_{p=0}^k a_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_\rho,$$

где  $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$ ,  $D_\rho = \{z : |z| \leq \rho\} \subset \mathbb{C}$ , а  $\rho$  – фиксированное положительное число меньшее  $\pi / (\lambda_k - \lambda_0)$ .

Сформулируем основные результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$  – произвольная фиксированная последовательность действительных чисел, а  $\rho < \pi / (\lambda_k - \lambda_0)$ . Тогда, если  $\min\{n_0, n_1, \dots, n_k\} \rightarrow \infty$ , то

$$E_{n_0, n_1, \dots, n_k} \sim \frac{n_k! \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{n_p+1}}{(n_0 + n_1 + \dots + n_k + k)!} \rho^{n_0+n_1+\dots+n_k+k}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$  – произвольный фиксированный набор различных комплексных чисел. Тогда при  $\min\{n_0, n_1, \dots, n_k\} \rightarrow \infty$  локально равномерно по  $z$

$$R_{n_0, n_1, \dots, n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0+n_1+\dots+n_k-1}}{(n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1)!} e^{\frac{n_0\lambda_0 + n_1\lambda_1 + \dots + n_k\lambda_k}{n_0+n_1+\dots+n_k} z}.$$

В частных случаях теоремы совпадают с известными ранее результатами Л. Трефезена [5], П. Борвейна [6], Д. Браесса [7], Ф. Вилонского [8], А.В. Астафьевой и А.П. Старовойтова [9] в диагональном случае, а в недиагональном случае – с результатом К. Драйвер [4].

Далее, мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочленов  $A_{n_p}^p(z)$ , в зависимости от выбора чисел  $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$  и  $\{n_p\}_{p=0}^k$ . В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [10] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [11] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде экспоненциальной функции. В частности, им принадлежит хорошо известная "теорема о кольце".

В работе [8] Ф. Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей диагональных многочленов Эрмита – Паде  $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$  системы экспонент  $\{e^{p^z}\}_{p=0}^k$ . В [12] аналогичный результат получен для произвольной системы экспонент  $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ . Г. Шталь [13] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода системы экспонент  $\{1, e^z, e^{2z}\}$  и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости. Эти исследования были продолжены им в [14].

Справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть  $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$  – произвольные различные комплексные числа. Тогда при  $n_p \geq 2$ ,  $p = 0, 1, \dots, k$ ,  $k \geq 1$  нули многочлена  $A_{n_p}^p$ ,  $0 \leq p \leq k$ , находятся в круге  $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$ , где

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^k \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}.$$

Теорема 3 согласуется со всеми ранее известными результатами и содержит их в качестве частных случаев. Кроме того, построенные примеры показывают, что как верхнюю, так и нижнюю оценки для границы области локализации нулей в теореме 3 существенно улучшить нельзя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

## Литература

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – V. 21. – P. 289–308.
2. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* – М.: Мир, 1986.
3. Mahler K. *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II* // J. Reine Angew. Math. – 1931. – V. 166. – P. 118–150.
4. Driver K. *Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential function* // J. of Comput. and Appl. Math. – 1995. – V. 65. – P. 125–134.

5. Trefethen L.N. *The asymptotic accuracy of rational best approximations to  $e^z$  on a disk* // J. Approx.Theory. – 1984. – V. 40. – № 4. – P. 380–384.
6. Borwein P.B. *Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function* // Const. Approx. – 1986. – V. 62. – P. 291–302.
7. Braess D. *On the conjecture of Meinardus on rational approximation of  $e^z$ , II* // J. Approx.Theory. – 1984. – V. 40. – № 4. – P. 375–379.
8. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to  $e^z$*  // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90. – № 2. – P. 283–298.
9. Астафьева А.В., Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций* // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.
10. Szegő G. *Über einige Eigenschaften der Exponentialreihe* // Sitzungsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – № 23. – P. 50–64.
11. Saff E., Varga R. *On the zeros and poles of Padé approximations to  $e^z$ , II*, in "Padé and Rational Approximations: Theory and Applications" (E. B. Saff and R. S. Varga, Eds.). – New York.: Academic Press, 1977.
12. Старовойтов А.П., Кечко Е.П. *Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.
13. Stahl H. *Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.
14. Stahl H. *Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Constr. Approx. – 2006. – V. 23. – № 2. – P. 193–220.

#### ON PROPERTIES HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov, E.P. Kechko

*We study extremal properties and localization of zeros of nondiagonal type I Hermite – Padé polynomials for exponential system  $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$  with arbitrary different complex  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Proven theorems complement and generalize known results by K. Mahler, E. Saff and R. Varga, H. Stahl, P. Borwein, F. Wielonsky and K. Driver.*

Keywords: Hermite – Padé polynomials, zeros of Hermite – Padé polynomials, asymptotic equality.