КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра высшей математики и математического моделирования

И.Б. ГАРИПОВ, Н.В. ЗАЙЦЕВА, Р.М. МАВЛЯВИЕВ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для студентов направления подготовки: Педагогическое образование (профиль: математика, информатика и информационные технологии)

Учебно-методическое пособие

Казань – 2018

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 1 от 24 октября 2018 года
Заседания кафедры высшей математики и математического моделирования
Протокол № 2 от 17 сентября 2018 года

Рецензенты:

доктор физико–математических наук, профессор
А.М. Елизаров;
доктор физико–математических наук, профессор
Н.Б. Плещинский

Гарипов И.Б., Зайцева Н.В., Мавлявиев Р.М.
Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб.-методич. пособие / И.Б. Гарипов, Н.В. Зайцева, Р.М. Мавлявиев. – Казань: Казан. ун-т, 2018. – 49 с.

Настоящее пособие составлено в соответствии с образовательной программой дисциплины «Дифференциальные уравнения» для студентов направления подготовки Педагогическое образование (профиль: математика, информатика и информационные технологии). Пособие содержит основные теоретические сведения по изучаемой теме курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», типовые примеры с решениями, задачи и упражнения для выполнения самостоятельной работы, а также список рекомендуемой литературы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения – одна из фундаментальных математических дисциплин, включенная в раздел основной образовательной программы 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки) и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на втором курсе, в четвертом семестре. Раздел «Обыкновенные дифференциальные уравнения» является первой темой рабочей программы дисциплины («Дифференциальные уравнения первого порядка», «Дифференциальные уравнения высших порядков», «Системы дифференциальных уравнений»). На изучение данного раздела отводится 24 часа лекционных занятий, 26 часов лабораторных занятий и 26 часов самостоятельной работы студентов, которая включает в себя изучение лекционного материала, подготовку к лабораторным занятиям и контрольным работам, выполнение индивидуальных заданий.

В результате освоения данного раздела дисциплины студент должен знать: основные понятия теории дифференциальных уравнений, области применения дифференциальных уравнений, как инструмента математического описания естественно-научной картины мира, основные классы обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения; должен уметь: классифицировать дифференциальные уравнения и применять необходимые методы для решения этих уравнений; должен владеть: профессиональным языком предметной области знания, основными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений, способами построения и решения математических моделей явлений различной природы при помощи дифференциальных уравнений; должен демонстрировать способность и готовность применять полученные знания на практике.

Настоящее пособие составлено в соответствии с учебной программой курса и включает в себя следующие главы:

Глава I. Дифференциальные уравнения первого порядка;

Глава II. Дифференциальные уравнения высших порядков;

Глава III. Системы дифференциальных уравнений.

Учебно-методическое пособие содержит конспекты тринадцати тем лабораторных занятий, каждый из которых включает четыре пункта, обозначенные как **A**, **B**, **C** и **D**.

В пункте **A** приведены без доказательства теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения практических задач. В пункте **B** разобраны типовые задачи, демонстрирующие различные приемы и методы решения. Пункт **C** предлагает задания для самостоятельной работы студентов, при выборе которых использовались различные задачники, представленные в списке рекомендуемой литературы. Пункт **D** содержит ответы к задачам пункта **C**.

ГЛАВА I
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Тема 1
Основные понятия и определения

А. Уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее первую производную y', называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Если уравнение (1) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

и называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.* Здесь $F(x, y, y')$ и $f(x, y)$ – заданные функции своих аргументов.

Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество относительно переменной x.

Если решение дифференциального уравнения задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется *интегралом* дифференциального уравнения.

Решение дифференциального уравнения может быть задано и в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Задачей Коши называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). *Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой ограниченной области $\overline{D} = \{|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ и удовлетворяет в ней двум условиям:*

1) непрерывна и, следовательно, ограничена, т.е. существует такое число $M > 0$, что выполняется $|f(x, y)| \leqslant M$;

2) удовлетворяет относительно переменной y условию Липшица, т.е. для любых точек $(x, \overline{y})$ и $\left(x, \overline{\overline{y}}\right)$ из области $\overline{D}$ существует такое число $N > 0$, что $\left|f(x, \overline{y}) - f\left(x, \overline{\overline{y}}\right)\right| \leqslant N\left|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\right|$,

то уравнение (2) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию (4), определенное и один раз непрерывно дифференцируемое в промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\{a, b/M\}$.

Общим решением дифференциального уравнения (2) называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от одной произвольной постоянной C и удовлетворяющая двум условиям:

1) она удовлетворяет уравнению (2) при любых допустимых значениях C;

2) каково бы ни было начальное условие (4), можно подобрать значение C_0 произвольной постоянной C, такое, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (4).

Частным решением дифференциального уравнения (2) называется решение, которое получается из общего решения при определенном значении C.

Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\psi(x, y) = C$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

Соотношение, получаемое из общего интеграла при определенном значении C, называется *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Задача решения (интегрирования) дифференциального уравнения состоит в нахождении общего решения или общего интеграла данного дифференциального уравнения. Если дополнительно задано начальное условие, то требуется выделить частное решение или частный интеграл, удовлетворяющие поставленному начальному условию.

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Показать, что функция $y = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ является решением дифференциального уравнения $xy' - y = x^2 \sin x^2$.

`Решение.` Вычислим производную данной функции

$$y' = \int\limits_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$$

Отсюда следует, что

$$xy' - y = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt + x^2 \sin x^2 - x\int\limits_0^x \sin t^2 dt = x^2 \sin x^2,$$

т. е. данная функция является решением дифференциального уравнения.

`Пример 2.` Доказать, что при любом $C \in \mathbb{R}$ функция $y = \varphi(x)$, определяемая соотношением $y = \operatorname{arctg}(x + y) + C$, является решением дифференциального уравнения

$$(x + y)^2 y' = 1.$$

`Решение.` Применив к данному соотношению правило дифференцирования неявной функции, получим

$$y' = \frac{1 + y'}{1 + (x + y)^2}.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{(x + y)^2}.$$

Подставив найденное значение в данное дифференциальное уравнение, получим тождество

$$(x + y)^2 \frac{1}{(x + y)^2} = 1.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Выяснить, являются ли решениями (или интегралами) данных дифференциальных уравнений указанные функции.

1. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$

2. $(x+y)dx + xdy = 0, \quad y = \frac{C^2-x^2}{2x}$.
3. $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $xy' - y + x\sqrt{x^2-y^2} = 0, \quad \arcsin\frac{y}{x} = C - x$.
5. $(x+2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = C^2$.
6. $(x-y+1)y' = 1, \quad y = x + Ce^y$.
7. $y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$.
8. $(1+xy)y' + y^2 = 0, \quad x = te^t, \quad y = e^{-t}$.
9. $(xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0, \quad y = x + C\sqrt{1+x^2}$.
10. $xy' - y = xe^x, \quad y = x\left(1 + \int \frac{e^x}{x}dx\right)$.

Тема 2
Уравнения с разделяющимися переменными

А. Дифференциальное уравнение вида

$$\varphi(y)dy + \psi(x)dx = 0$$

называется *уравнением с разделенными переменными.*

Уравнение вида

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0,$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется *уравнением с разделяющимися переменными.* Путем деления на произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ оно приводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = C.$$

Замечание. Деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в ноль произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

Уравнение вида

$$y' = \varphi(x)\psi(y)$$

также называется *уравнением с разделяющимися переменными.* Разделив переменные, получим

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$$

Общим интегралом будет

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C.$$

Замечание. Деление на $\psi(y)$ может также привести к потере частных решений, обращающих в нуль $\psi(y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c),$$

где a, b и c – постоянные, заменой переменных $z = ax + by + c$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Решить уравнение

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0.$$

`Решение.` Разделив обе части этого дифференциального уравнения на $(1+x^2)(1+y^2)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C_1$$

или

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \frac{1}{2}\ln|C| \quad \left(\frac{1}{2}\ln|C| = C_1\right).$$

Отсюда получим $(1+x^2)(1+y^2) = C$ – общий интеграл.

`Пример 2.` Найти решение уравнения

$$x^2y^2y' + 1 = y,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y\,(1) = 2.$$

`Решение.` Перепишем уравнение в виде

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1.$$

Разделим уравнение на $x^2(y-1) \neq 0$:

$$\frac{y^2dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2}.$$

Получим уравнение с разделенными переменными. Проинтегрировав его, найдем

$$\int \frac{y^2dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2},$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на произведение $x^2(y-1)$ предполагалось, что ни один из множителей не обращается в нуль, т. е. могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убедимся, что $x = 0$ не является решением, а $y = 1$ является (особым) решением.

Из условия $y\,(1) = 2$ найдем

$$\frac{2^2}{2} + 2 + \ln|2-1| = -\frac{1}{1} + C,$$

т. е. $C = 5$. Искомое частное решение определяется в неявном виде

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + 5.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Решение. Замена $x - y - 1 = z$ приводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$1 - y' = z', \quad 1 - z' = \cos z.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx.$$

Отсюда

$$-\mathrm{ctg}\frac{z}{2} = x + C.$$

Подставив вместо z его значение, получим общий интеграл

$$-\mathrm{ctg}\frac{x - y - 1}{2} = x + C.$$

Кроме того, решением исходного уравнения являются функции $y = x - 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, которые найдем, решив уравнение $1 - \cos z = 0$.

Пример 4. Кривая $y = \varphi(x)$ проходит через точку (0,1) и обладает тем свойством, что в каждой ее точке тангенс угла наклона касательной к этой кривой равен удвоенному произведению координат точки касания. Найти кривую $y = \varphi(x)$.

Решение. Пусть (x, y) – произвольная точка на искомой кривой. Тангенс угла наклона касательной к кривой в точке (x, y) равен производной искомой функции в точке (x, y), т. е. y'. По условию $y' = 2xy$. Отсюда $y = Ce^{x^2}$. Так как $y(0) = 1$, то $C = 1$ и $y = e^{x^2}$.

С. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить дифференциальные уравнения (где указано, задачу Коши):

1. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$
2. $(1 + y^2)dx + xydy = 0.$
3. $y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$
4. $(1 + y^2)dx = xdy.$
5. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$
6. $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0, \quad y|_{x=0} = 1.$
7. $e^{-y}(1 + y') = 1.$
8. $y \ln y dx + xdy = 0, \quad y|_{x=1} = 1.$
9. $y' = a^{x+y}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$
10. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0.$

Решить дифференциальные уравнения, используя замену переменных:

11. $y' = (x + y)^2.$
12. $y' = (8x + 2y + 1)^2.$
13. $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$
14. $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0.$
15. $y' = \sin(x - y).$
16. Найдите кривую, проходящую через точку (0,2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке был равен ординате этой точки, увеличенной в три раза.
17. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.
18. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, построенного как в предыдущей задаче, есть величина постоянная, равная b.

19. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньше абсциссы точки касания.

20. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

D. *Ответы*

1. $\mathrm{arctg} x + \mathrm{arctg} y = C$. 2. $x^2(1+y^2) = C$. 3. $y = \sin x$. 4. $y = tg \ln Cx$.
5. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$. 6. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$; $y = 1$. 7. $e^x = C(1-e^{-y})$.
8. $y = 1$. 9. $a^x + a^{-y} = C$. 10. $1 + e^y = C(1+x^2)$. 11. $\mathrm{arctg}(x+y) = x + C$.
12. $8x + 2y + 1 = 2\mathrm{tg}(4x + C)$. 13. $x + 2y + 3\ln|2x + 3y - 7| = C$.
14. $5x + 10y + C = 3\ln|10x - 5y + 6|$. 15. $x + C = \mathrm{ctg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
16. $y' = 3y$; $y = 2e^{3x}$. 17. $(C \pm x)y = 2a^2$. 18. $b\ln y - y = \pm x + C$; $0 < y < b$.
19. $y = Cx^2$. 20. $a\ln\left(a \pm \sqrt{a^2-y^2}\right) \mp \sqrt{a^2-y^2} = x + C$.

Тема 3

Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним

A. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией k-ой степени*, если справедливо тождество
$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение вида
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
называется *однородным*, если коэффициенты $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени. Однородные уравнения могут быть записаны в виде
$$y' = f(x,y),$$
где $f(x,y)$ – однородная функция нулевой степени.

Однородное уравнение при помощи подстановки $y = ux$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Можно также принять подстановку $x = uy$.

Уравнение вида
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$
при условии $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, приводится к однородному с помощью замены переменных x и y по формулам $x = \xi + x_0$, $y = \eta + y_0$, где ξ, η – новые переменные, x_0, y_0 – решение системы уравнений
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если же $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$, следовательно, уравнение имеет вид $y' = F(a_1x + b_1y)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_1x + b_1y$ (или $z = a_1x + b_1y + c_1$).

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^\alpha$. Число α обычно заранее неизвестно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^\alpha$. Потребовав, чтобы уравнение было однородным, найдем число α, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

В. *Примеры решения задач.*

`Пример 1.` Решить уравнение

$$xdy = (x+y)dx.$$

`Решение.` Это уравнение однородное. Положим $y = ux$. Тогда $dy = udx + xdu$. Подставив это выражение в уравнение, получим

$$x(xdu + udx) = (x+ux)dx \quad \text{или} \quad xdu = dx.$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$du = \frac{dx}{x},$$

$$u = \ln|x| + C.$$

Вернувшись к старой переменной y, получим

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Кроме того, имеется решение $x = 0$, которое было потеряно при делении на x.

`Пример 2.` Решить уравнение

$$(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0.$$

`Решение.` Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-y+4=0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Сделаем замену $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$, значит, $dx = d\xi$, $dy = d\eta$. Тогда уравнение примет вид

$$(\xi + \eta)d\xi + (\xi - \eta)d\eta = 0.$$

Это уравнение является однородным. Положив $\eta = u\xi$, получим

$$(\xi + \xi u)d\xi + (\xi - \xi u)(\xi du + ud\xi) = 0.$$

Отсюда следует

$$(1+2u-u^2)d\xi + \xi(1-u)du = 0.$$

Разделим переменные

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{1-u}{1+2u-u^2}du = 0.$$

Проинтегрировав, найдем

$$\ln|\xi| + \frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right| = \ln C$$

или

$$\xi^2(1+2u-u^2) = C.$$

Возвращаясь к переменным x и y, будем иметь

$$(x+1)^2\left[1 + 2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = C$$

или

$$x^2 + 2yx - y^2 - 4x + 8y = C.$$

`Пример 3.` Решить уравнение

$$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0.$$

`Решение.` Сделаем подстановку $y = z^\alpha$, $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$, где α – пока неопределенное число, которое мы выберем позже. Подставив в уравнение выражения для y и dy, получим

$$\left(x^2z^{2\alpha} - 1\right)\alpha z^{\alpha-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0.$$

Полученное уравнение будет, возможно, однородным, если функция $x^2z^{2\alpha} - 1$ будет однородной, т. е. если $2 + 2\alpha = 0$ или $\alpha = -1$. Заменив в уравнении α на -1, получим

$$-\left(x^2z^{-2} - 1\right)z^{-2}dz + 2xz^{-3}dx = 0$$

или

$$\left(z^2 - x^2\right)dz + 2xzdx = 0.$$

Это уравнение однородное. Положим теперь $z = ux$, $dz = udx + xdu$. Тогда это уравнение примет вид

$$(u^2 - 1)(udx + xdu) + 2udx = 0,$$

откуда

$$u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u(u^2 + 1)}du = 0.$$

Проинтегрировав, найдем

$$\ln|x| + \ln\left|u^2 + 1\right| - \ln|u| = \ln C,$$

или

$$\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C.$$

Заменив u на $1/(xy)$, получим общий интеграл данного уравнения

$$1 + x^2y^2 = Cy.$$

`Пример 4.` Кривая проходит через точку (1,1). Расстояние до любой касательной к этой кривой от начала координат равно абсциссе точки касания. Составить уравнение указанной кривой.

`Решение.` Пусть точка (x, y) лежит на указанной кривой $y = y(x)$. Касательная к этой кривой, проведенная в точке (x, y), находится от начала координат на расстоянии

$$\frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

которое по условию задачи равно x. Поэтому указанная кривая является решением уравнения

$$\frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}} = x$$

или
$$y^2 - 2xyy' + x^2(y')^2 = x^2 + x^2(y')^2,$$
т. е.
$$2xyy' = y^2 - x^2.$$
Это однородное уравнение. Решим его, положив $y = xu$:
$$2x^2u(u'x + u) = x^2(u^2 - 1),$$
$$2xuu' + u^2 + 1 = 0,$$
$$\frac{2u}{u^2+1}du + \frac{dx}{x} = 0,$$
$$\ln(u^2+1) + \ln|x| = \ln C,$$
$$(u^2+1)x = C.$$
Согласно замене $u = y/x$ получим $y^2 + x^2 = Cx$. По условию кривая проходит через точку (1,1): $1 + 1 = C$, т. е. $C = 2$. Следовательно, уравнение искомой кривой $x^2 + y^2 = 2x$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

С. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить дифференциальные уравнения:

1. $xy' = y + x\cos^2\frac{x}{y}$.
2. $(x - y)dx + xdy = 0$.
3. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.
4. $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx$.
5. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.
6. $2x^2y' = x^2 + y^2$.
7. $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$.
8. $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$.
9. $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$.
10. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.
11. $(x + y)dx + (x - y - 2)dy = 0$.
12. $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$.
13. $(x - y - 1)dx + (y - x + 2)dy = 0$.
14. $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$.
15. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$.
16. $y\left(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1}\right)dx + 2xdy = 0$.
17. $\left(x + y^3\right)dx + 3\left(y^3 - x\right)y^2dy = 0$.
18. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy, к радиусу-вектору равно постоянной величине.
19. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной к какой-нибудь точке кривой, равна расстоянию до этой точки от начала координат.
20. Найти кривую, для которой произведение абсциссы какой-нибудь точки на величину отрезка, отсекаемого нормалью на оси Oy, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

D. *Ответы*

1. $\mathrm{tg}\frac{y}{x} = \ln Cx$. 2. $y = x(C - \ln|x|)$. 3. $y = xe^{1+Cx}$. 4. $(x - y)\ln Cx = x$.
5. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$; $y = x$; $y = -x$. 6. $2x = (x - y)\ln Cx$.
7. $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$. 8. $y^2 + 2xy - x^2 = C$. 9. $y = 1 + (x - 1)\ln C(x - 1)$.

10. $y^2 - 2xy - x^2 - 8y + 4x = C$. 11. $y^2 - 2xy - x^2 + 4y = C$.
12. $y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = C$. 13. $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. 14. $y^2 = x \ln Cy^2$.
15. $Cx^4 = y^6 + x^3$. 16. $\sqrt{x^2y^4 + 1} = Cx^2y^2 - 1$. 17. $2\operatorname{arctg}\frac{y^3}{x} = \ln(x^2 + y^6) + C$.
18. $y = \frac{1}{2}\left(Cx^{1-k} - \frac{1}{C}x^{1+k}\right)$. 19. $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right)$. 20. $x^2 + y^2 = Cx^4$.

Тема 4
Линейные уравнения первого порядка

А. Уравнение вида
$$y' + p(x)y = f(x) \tag{1}$$
называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид
$$y' + p(x)y = 0$$
и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение
$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа), который состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в виде
$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2}$$
Подставив (2) в (1), для определения $C(x)$ получим уравнение
$$\frac{dC(x)}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$
Отсюда следует
$$C(x) = \tilde{C} + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx, \tag{3}$$
где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная. Подставив $C(x)$ из (3) в (2), найдем общее решение уравнения (1)
$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\tilde{C} + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right].$$

Уравнение (1) может быть решено также методом подстановки (метод Бернулли). Положим
$$y = uv, \tag{4}$$
где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции от x, одна из которых, например, $v(x)$, может быть выбрана произвольно. Подставив (4) в (1), получим
$$vu' + (pv + v')\,u = f(x). \tag{5}$$

Определив $v(x)$ из условия $v' + pv = 0$, найдем затем из (5) функцию $u(x)$, следовательно, и решение $y = uv$ уравнения (1). В качестве $v(x)$ можно взять любое частное решение уравнения $v' + pv = 0$, $v \neq 0$.

Уравнение вида
$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha},$$
где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, называется *уравнением Бернулли.* Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$.

Замечание. Уравнение Бернулли может быть проинтегрировано также методом вариации постоянной, как и линейное уравнение, и с помощью подстановки $y = uv$.

B. *Примеры решения задач*

Пример 1. Решить уравнение

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным. Применим метод вариации произвольной постоянной. Сначала решим соответствующее однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{-x^2}, \quad C = const.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-x^2},$$

где $C(x)$ – неизвестная функция от x. Подставив y в исходное уравнение, получим

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

или

$$C'(x) = 2x.$$

Отсюда

$$C(x) = x^2 + C.$$

Таким образом, получили общее решение данного уравнения

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y},$$

$$y(-2) = 0.$$

Решение. Данное уравнение является линейным, если рассматривать x как функцию от переменной y:

$$x' - x\cos y = \sin 2y. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) ищем методом подстановки, т. е. в виде

$$x = uv.$$

Тогда

$$x' = u'v + uv'.$$

Подставив выражения для x и x' в уравнение (6), получим

$$u'v + uv' - uv\cos y = \sin 2y$$

или

$$u'v + u(v' - v\cos y) = \sin 2y. \tag{7}$$

Функцию $v = v(y)$ найдем как частное решение уравнения $v' - v\cos y = 0$, например, $v = e^{\sin y}$. Тогда из уравнения (7) найдем

$$u' e^{\sin y} = \sin 2y$$

или

$$u' = \sin 2y e^{-\sin y}.$$

Отсюда, проинтегрировав по частям, будем иметь

$$u = \int \sin 2y e^{-\sin y} dy = 2\left(-\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y}\right) + C.$$

Следовательно, общее решение уравнения (6), значит, и данного уравнения будет

$$x = uv = \left(2\left(-\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y}\right) + C\right) e^{\sin y} =$$

$$= Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y).$$

Использовав начальное условие, получим для нахождения C уравнение

$$-2 = Ce^{\sin 0} - 2(1 + \sin 0),$$

откуда $C = 0$; так что решением поставленной задачи Коши будет функция

$$x = -2(1 + \sin y).$$

`Пример 3.` Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}.$$

`Решение.` Это уравнение Бернулли. Умножим обе части уравнения на y^{-2}

$$y^{-2} y' + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Сделаем замену $z = y^{1-2} = y^{-1}$, тогда $z' = -y^{-2} y'$. После подстановки последнее обратится в линейное уравнение

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x},$$

общее решение которого имеет вид

$$z = 1 + \ln x + Cx.$$

Отсюда найдем общее решение данного уравнения

$$y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить линейные дифференциальные уравнения (где указано, задачу Коши):

1. $y' + 2y = e^{-x}$.
2. $x^2 + xy' = y, \quad y|_{x=1} = 0$.
3. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.
4. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

5. $y'\cos x - y\sin x = 2x, \quad y|_{x=0} = 0.$
6. $xy' - 2y = x^3\cos x.$
7. $y' - y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos^3 x}, \quad y|_{x=0} = 0.$
8. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x.$
9. $(2x - y^2)\,y' = 2y.$
10. $y' + y\cos x = \cos x, \quad y|_{x=0} = 1.$
11. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}.$
12. $\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy\right)dy - dx = 0.$

Решить уравнения Бернулли.
13. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$
14. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$
15. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}.$
16. $(x^3 + e^y)\,y' = 3x^2.$
17. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0.$

18. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, которой касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

19. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

20. Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

D. *Ответы*

1. $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$. 2. $y = x - x^2$. 3. $y = (C + x^2)\,e^{x^2}$. 4. $y = (C + x)\,e^{-x^2}$
5. $y = \frac{x^2}{\cos x}$. 6. $y = Cx^2 + x^2\sin x$. 7. $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. 8. $y = (C + x^3)\ln x$.
9. $x = Cy - \frac{y^2}{2}$. 10. $y = 1$. 11. $x = \frac{C}{y} + y\ln y$. 12. $x = (C + y)e^{-\frac{y^2}{2}}$.
13. $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$. 14. $y = \left(\frac{C + \ln\cos x}{x} + \mathrm{tg}x\right)^2$. 15. $y = \frac{e^{-x^2}}{C - x}$.
16. $x^3e^{-y} = C + y$. 17. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$. 18. $y = Cx - x^2$; $y - xy' = x^2$. 19. $y = C\sqrt{x} - x$; $y - xy' = \frac{x+y}{2}$ 20. $xy = a^2 + Cy^2$.

Тема 5

Уравнения в полных дифференциалах

A. Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$. Это имеет место, если

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию $u(x,y)$, полный дифференциал от которой $du(x,y) = u'_x dx + u'_y dy$ равен левой части уравнения (1). Тогда общий интеграл уравнения (1) можно записать в виде $u(x,y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Пусть уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах. Иногда удается найти функцию $\mu = \mu(x,y)$, при умножении на которую уравнение (1) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Такая функция $\mu = \mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем.* Однако нет общего метода его нахождения.

В некоторых случаях для решения уравнения (1) можно применить метод выделения полных дифференциалов и подстановки, использовав известные формулы

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad dF(x) = f(x)dx.$$

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Решить уравнение

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0.$$

`Решение.` В данном случае

$$M(x,y) = 2xy + 3y^2, \quad N(x,y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Таким образом, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, т. е. уравнение является уравнением в полных дифференциалах. По определению левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x,y)$.

Для искомой функции $u = u(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Из первого уравнения получим

$$u(x,y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ продифференцируем последнее равенство по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3y^2.$$

Отсюда $\varphi(y) = -y^3 + C$. Поэтому $u(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3$. Общий интеграл уравнения запишется в виде

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

`Пример 2.` Решить уравнение

$$\left(xy + y^4\right) dx + \left(x^2 - xy^3\right) dy = 0.$$

`Решение.` Сгруппируем члены так, чтобы выделить полные дифференциалы:

$$x(ydx + xdy) + y^3\,(ydx - xdy) = 0,$$

$$xd\,(xy) + y^5 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Разделив на x и сделав замену $xy = u$, $x/y = v$, получим уравнение

$$du + \frac{u^2}{v^3}dv = 0,$$

которое легко решается.

`Пример 3.` Решить уравнение

$$\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2ydy=0.$$

`Решение.` Интегрирующий множитель $\mu=\mu(x,y)$ найдем из требования, чтобы уравнение

$$\mu\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+\mu x\sin 2ydy=0$$

было уравнением в полных дифференциалах, т. е. имело место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(x^2-\sin^2 y\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu x\sin 2y\right]$$

или

$$\left(x^2-\sin^2 y\right)\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-x\sin 2y\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=2\sin 2y.$$

Пусть $\mu=\mu(x)$. Тогда

$$-x\sin 2y\frac{d\ln\mu}{dx}=2\sin 2y$$

или

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x},\quad \ln\mu=-2\ln x,\quad \mu=\frac{1}{x^2}.$$

Умножив уравнение на интегрирующий множитель $\mu=\frac{1}{x^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\frac{\sin 2y}{x}dy=0.$$

Его общий интеграл имеет вид $x+\frac{\sin^2 y}{x}=C$.

С. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

1. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$.
2. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.
3. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$.
4. $\left(3x^2\mathrm{tg}y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(\frac{x^3}{\cos^2 y}+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$.
5. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$.
6. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$.
7. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0$.
8. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)dy=0$.
9. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$.
10. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$.

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или методом введения под знак дифференциала и подстановки.

11. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$.
12. $(x^2+y)dx-xdy=0$.
13. $(x+y^2)dx-2xydy=0$.
14. $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$.
15. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$.
16. $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos ydy=0$.

17. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$.
18. $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$.
19. $(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0$.
20. $xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0$.

D. *Ответы*

1. $x^4+x^2y^2+y^4=C$. 2. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$. 3. $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=C$. 4. $x^3\mathrm{tg}y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$. 5. $x^3y+x^2-y^2=Cxy$. 6. $\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C$. 7. $x^3+y^3-xy+y^2-x^2=C$. 8. $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=C$. 9. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$. 10. $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=C$. 11. $xy^2-2x^2y-2=Cx$; $\mu=\frac{1}{x^2}$. 12. $x-\frac{y}{x}=C$; $\mu=\frac{1}{x^2}$. 13. $x\ln|x|-y^2=Cx$; $\mu=\frac{1}{x^2}$. 14. $5\mathrm{arctg}x+2xy=C$; $x=0$; $\mu=\frac{1}{1+x^2}$. 15. $y^3+x^3(\ln x-1)=Cx^2$; $\mu=\frac{1}{x^4}$. 16. $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C$; $\mu=e^x$. 17. $x^2-\frac{7}{y}-3xy=C$; $\mu=\frac{1}{y^2}$. 18. $(x+y^2)^2C=x-y^2$; $\mu=\frac{1}{(x+y^2)^3}$. 19. $1+y^2-x^2=Cx$; $\mu_1=\frac{1}{x^2}$; $\mu_2=\frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$. 20. $y-1=C\sqrt{x^2+y^2}$; $\mu=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Тема 6
Уравнения Лагранжа и Клеро

A. Уравнение вида
$$y=\varphi(y')x+\psi(y'),\quad \text{где}\quad \varphi(y')\not\equiv y',$$
в котором y является линейной функцией от x с коэффициентами, зависящими от y', причем коэффициент при x не равен y', называется *уравнением Лагранжа.*

Положив $y'=p$, продифференцировав по x и заменив dy на pdx, приведем это уравнение к линейному относительно x как функции p. Найдя решение последнего уравнения $x=f(p,C)$, получим общее решение исходного уравнения в параметрической форме
$$x=f(p,C),\quad y=\varphi(p)f(p,C)+\psi(p),\quad p--\text{параметр}.$$

Замечание. Уравнение Лагранжа может иметь еще особые решения вида
$$y=\varphi(p_i)x+\psi(p_i),$$
где p_i – корень уравнения $\varphi(p)-p=0$.

Уравнение вида
$$y=xy'+\psi(y'),$$
называется *уравнением Клеро.* Оно отличается от уравнения Лагранжа только тем, что в нем коэффициент при x равен y'.

Метод решения тот же, что и для уравнения Лагранжа. Общее решение уравнения Клеро имеет вид
$$y=xC+\psi(C),$$
т. е. общее решение уравнения Клеро получается заменой в нем y' на C.

Уравнение Клеро может иметь еще особые решения в параметрической форме
$$x=-\psi'(p),\quad y=-\psi'(p)p+\psi(p),\quad p--\text{параметр}.$$

B. *Примеры решения задач*

Пример 1. Проинтегрировать уравнение
$$y=xy'^2+y'^2.$$

`Решение.` Это уравнение Лагранжа. Положив $y' = p$, перепишем его в виде

$$y = xp^2 + p^2.$$

Продифференцировав последнее уравнение, найдем

$$dy = p^2 dx + x2pdp + 2pdp,$$

или, учтя, что $dy = pdx$,

$$pdx = p^2 dx + x2pdp + 2pdp,$$

откуда

$$(p^2 - p)dx + 2pxdp = -2pdp.$$

Считая далее $p \neq const$ $(dp \neq 0)$, поделим обе части предыдущего равенства на $(p^2 - p)dp$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = -\frac{2}{p-1}.$$

Решив полученное линейное дифференциальное уравнение, найдем x как функцию от p:

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1.$$

Подставив выражения для x в уравнение $y = xp^2 + p^2$, получим решение исходного уравнения в параметрическом виде

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Исключив параметр p из данных уравнений, найдем общее решение

$$y = (\sqrt{x+1} + C)^2.$$

При делении на dp теряются решения $p = p_i$, где p_i – корни уравнения $p^2 - p = 0$. Это уравнение имеет два корня: $p_1 = 0$ и $p_2 = 1$, которым соответствуют два решения $y = 0$ и $y = x + 1$. Первое из них является особым решением, а второе – частным.

`Пример 2.` Проинтегрировать уравнение

$$y = xy' - y'^2.$$

`Решение.` Это уравнение Клеро. Положив $y' = p$, получим

$$y = xp - p^2.$$

Продифференцировав последнее уравнение и заменив dy на pdx, найдем

$$pdx = pdx + xdp - 2pdp,$$

откуда

$$dp(x - 2p) = 0.$$

Приравняв к нулю первый множитель, получим $dp = 0$, откуда $p = C$, и общим решением исходного уравнения будет

$$y = xC - C^2.$$

Приравняв к нулю второй множитель, будем иметь

$$x = 2p.$$

Исключив p из этого уравнения и из уравнения $y = xp - p^2$, получим $y = \frac{x^2}{4}$ – это тоже решение нашего уравнения (особое решение).

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить уравнения:

1. $y = 2xy' + \ln y'$.
2. $y = x(1 + y') + y'^2$.
3. $y = 2xy' + \sin y'$.
4. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$.
5. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$.
6. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$.
7. $y = xy' + y'^2$.
8. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$.
9. $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$.
10. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

D. *Ответы*

1. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} - \ln p - 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 2(1 - p) + Ce^{-p}, \\ y = \left(2(1 - p) + Ce^{-p}\right)(1 + p) + p^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p, \end{cases}$ $y = 0$. 4. $\begin{cases} x = \frac{Cp^2+2p-1}{2p^2(p-1)}, \\ y = \frac{Cp^2+2p-1}{2(p-1)} - \frac{1}{p}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right), \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right). \end{cases}$ 6. $y = xC + \frac{a}{C^2}$; $4y^3 = 27ax^2$.

7. $y = xC + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. 8. $y = xC - \frac{C-1}{C}$; $(y + 1)^2 = 4x$.

9. $y = xC + a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$. 10. $x = yC + C^2$; $xy = \pm a^2$.

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Тема 7

Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

А. Уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$, называется *дифференциальным уравнением n-го порядка.* Оно имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

где F и f – заданные функции своих аргументов.

Решением уравнения (1) или (2) называется всякая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество относительно независимой переменной x.

Задачей Коши для уравнения (2) называется задача нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

где x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Теорема Коши–Пикара. *Если функция f непрерывна в области D и удовлетворяет условию Липшица по переменным y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, то уравнение (2) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (3), определенное и n раз непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки x_0.*

Общим решением уравнения (2) называется функция вида $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$, зависящая от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n и удовлетворяющая условиям:

1) она является решением уравнения (2) при любых значениях произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n;

2) как бы ни были заданы начальные условия (3), можно подобрать такие значения произвольных постоянных, при которых она удовлетворяет заданным начальным условиям.

Любое решение, получаемое из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением.*

Если общее решение задано неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{4}$$

то оно называется *общим интегралом* уравнения (2).

Аналогичным способом вводится понятие частного интеграла.

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1) Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x).$$

После n кратного интегрирования получим общее решение.

2) Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ...y^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой $y^{(k)} = z(x)$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$F(x, z, z', z'', ..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Из последнего уравнения найдем $z = f(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$, а затем y из уравнения $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ k-кратным интегрированием.

3) Уравнение не содержит независимую переменную:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Подстановка $y' = p(y)$ позволяет понизить порядок на единицу.

4) Уравнение $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, однородное относительно аргументов $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, т. е.

$$F(x, ty, ty', ty'', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}).$$

Порядок такого уравнения понижается на единицу подстановкой $y' = yz(x)$, где z – новая неизвестная функция.

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Найти общее решение уравнения

$$y'' - xy''' + y''^2 = 0.$$

`Решение.` Уравнение не содержит искомой функции и ее производной. Положив $y'' = z$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция, получим $z - xz' + z^2 = 0$. Разделив переменные, найдем

$$\frac{dz}{z(z+1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{z(z+1)} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1,$$

$$\ln|z| - \ln|z+1| = \ln C_1 |x|,$$

$$\frac{z}{z+1} = C_1 x,$$

откуда $z = y'' = \frac{C_1 x}{1 - C_1 x}$.

Последовательным интегрированием получим

$$y' = \int \frac{C_1 x}{1 - C_1 x} dx = -x - \frac{1}{C_1} \ln|1 - C_1 x| + C_2,$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{C_1} x \ln|1 - C_1 x| + \frac{1}{C_1} x + \frac{1}{C_1^2} \ln|1 - C_1 x| + C_2 x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

`Пример 2.` Проинтегрировать уравнение

$$yy'' - y'^2 = y^2 \ln y \quad \text{при} \quad y > 0, \quad y' > 0.$$

`Решение.` Уравнение не содержит явно независимой переменной x. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'y' = pp'$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция, получим

$$ypp' - p^2 = y^2 \ln y. \tag{6}$$

Умножив (6) на $2/y$, имеем

$$2pp' - \frac{2}{y} p^2 = 2y \ln y,$$

$$\left(p^2\right)' - \frac{2}{y} p^2 = 2y \ln y.$$

Получили линейное уравнение первого порядка относительно функции p^2. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$p^2 = y^2 \left(C_1 + \ln^2 y\right).$$

Так как $y > 0$, $y' = p > 0$, то $p = y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}$. Согласно произведенной замене имеем

$$y' = y\sqrt{C_1 + \ln^2 y},$$

$$\frac{dy}{y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}} = dx,$$

$$\ln y + \sqrt{C_1 + \ln^2 y} = C_2 e^x.$$

`Пример 3.` Проинтегрировать уравнение

$$x^2 y y'' - \left(y - xy'\right)^2 = 0.$$

`Решение.` Левая часть уравнения – однородная функция относительно переменных y, y', y''. Сделаем замену

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y\left(z^2 + z'\right),$$

где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция

$$x^2 y^2 \left(z^2 + z'\right) - \left(y - xyz\right)^2 = 0,$$

$$y^2 \left[x^2\left(z^2 + z'\right) - (1 - xz)^2\right] = 0.$$

При $y \neq 0$ имеем

$$x^2 z^2 + x^2 z' - 1 + 2xz - x^2 z^2 = 0,$$

откуда для функции $z(x)$ получим линейное неоднородное уравнение

$$z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}.$$

Общее решение этого уравнения

$$z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

В силу произведенной замены имеем

$$\frac{y'}{y} = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{C_1}{x} + \ln|x| + \ln C_2,$$

$$\ln|y| = -\frac{C_1}{x} + \ln|x| + \ln C_2,$$

или

$$y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

`Пример 4.` Решить задачу Коши

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Решение. Положив $y' = p(y)$, получим

$$pp' = 2y^3, \quad \left(p^2\right)' = 4y^3, \quad p^2 = y^4 + C_1, \quad y'^2 = y^4 + C_1.$$

Использовав начальное условие, найдем $1 = 1 + C_1$, $C_1 = 0$, так что $y' = y^2$, откуда, учтя первое начальное условие, получим

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить уравнения:

1. $x^2y'' = y'^2$.
2. $y^3y'' = 1$.
3. $y'' = 2yy'$.
4. $y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0$.
5. $yy'' = y'^2 - y'^3$.
6. $2yy'' = y^2 + y'^2$.
7. $y''^2 + y' = xy''$.
8. $xy''' = y'' - xy''$.
9. $y'' = e^y$.
10. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

В задачах 11–15 понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения:

11. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.
12. $\left(x^2 + 1\right)\left(y'^2 - yy''\right) = xyy'$.
13. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.
14. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.
15. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

В задачах 16–20 найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

16. $yy'' = 2xy', \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 0,5$.
17. $2y''' - 3y'^2 = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1$.
18. $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$.
19. $y''' = 3yy', \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4,5$.
20. $y''\cos y + y'^2\sin y = y', \quad y(-1) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2$.

D. *Ответы*

1. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$. 2. $C_1y^2 - 1 = \left(C_1x + C_2\right)^2$. 3. $y = C_1tg\left(C_1x + C_2\right)$; $\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right| = 2C_1x + C_2$; $y(C - x) = 1$; $y = C$. 4. $y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2$. 5. $y + C_1\ln|y| = x + C_2$; $y = C$.
6. $y = C_1\left[1 \pm \operatorname{ch}(x + C_2)\right]$; $y = Ce^{\pm x}$. 7. $y = C_1\frac{x^2}{2} - C_1^2 + C_2$; $y = \frac{x^3}{12} + C$.
8. $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3$. 9. $e^y\sin^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2$; $e^y\operatorname{sh}^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2$; $e^y(x + C)^2 = 2$. 10. $3C_1y = (x - C_1)^3 + C_2$; $y = C - x^2$; $y = C$.
11. $y = C_2e^{C_1x^2}$. 12. $y = C_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{C_1}$. 13. $y^2 = C_1x^3 + C_2$.
14. $y = C_2\left|x\right|^{C_1 - \frac{1}{2}\ln|x|}$. 15. $\ln C_2y = 4x^{\frac{5}{2}} + C_1x$. 16. $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$.
17. $y(x + 2) = -x - 6$. 18. $\left(1 - \ln x\right)^2y = x^2$. 19. $y = 3\operatorname{th}^2\frac{x\sqrt{3}}{2} - 2$.
20. $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$.

Тема 8

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

А. Рассмотрим основные понятия и определения, относящиеся к линейным дифференциальным уравнениям.

Уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производных до n-го порядка, называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.* Оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

или при $f(x) \equiv 0$:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{1_0}$$

Уравнение (1) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением (сокращенно ЛНДУ) n-го порядка*, а уравнение (1_0) – *линейным однородным дифференциальным уравнением (сокращенно ЛОДУ) n-го порядка* .

Система из n функций y_1, y_2, ..., y_n называется *линейно зависимой* на отрезке $[a;b]$, если существуют не все равные нулю числа α_1, α_2, ..., α_n, такие, что имеет место тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0. \tag{2}$$

Система из n функций y_1, y_2, ..., y_n называется *линейно независимой* на отрезке $[a;b]$, если тождество (2) имеет место на этом отрезке только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Пусть n функций y_1, y_2, ..., y_n имеют производные $(n-1)$-го порядка. Тогда определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для этих функций.

Теорема 1. *Если система функций y_1, y_2, ..., y_n линейно зависима на отрезке $[a;b]$, то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом отрезке.*

Теорема 2. *Для того чтобы система из n решений y_1, y_2, ..., y_n ЛОДУ n-го порядка была линейно независимой на отрезке $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского не обращался в нуль хотя бы в одной точке отрезка $[a;b]$.*

Любая система из n линейно независимых решений y_1, y_2, ..., y_n ЛОДУ n-го порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 3. *Если y_1, y_2, ..., y_n – фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка, то общее решение этого уравнения представляется в виде*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{3}$$

где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \quad a_i = const, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Найдем общее решение уравнения (4). Для этого составим характеристическое уравнение для уравнения (4):

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_n = 0. \tag{5}$$

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$ – корни уравнения (5). Возможны следующие случаи:

а) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$ – вещественные и различные.

Тогда фундаментальная система решений уравнения (4) имеет вид

$$e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \quad ..., \quad e^{\lambda_n x},$$

и общим решением ЛОДУ (4) будет

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

б) Корни характеристического уравнения вещественные, но среди них есть кратные. Пусть, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \tilde{\lambda}$, т. е. $\tilde{\lambda}$ – корень кратности k, а все остальные $n-k$ корней различные. Фундаментальная система решений в этом случае примет вид

$$e^{\tilde{\lambda} x}, \quad x e^{\tilde{\lambda} x}, \quad x^2 e^{\tilde{\lambda} x}, \quad ..., \quad x^{k-1} e^{\tilde{\lambda} x}, \quad e^{\lambda_{k+1} x}, \quad ..., \quad e^{\lambda_n x},$$

а общее решение – вид

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_k x^{k-1}) e^{\tilde{\lambda} x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

в) Среди корней характеристического уравнения есть комплексные. Пусть для определенности $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, остальные корни – различные вещественные. Фундаментальная система решений в этом случае будет иметь вид

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad e^{\lambda_3 x}, \quad e^{\lambda_4 x}, \quad ..., \quad e^{\lambda_n x},$$

а общее решение – вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

г) В случае, если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ является k-кратным корнем характеристического уравнения, то $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ также будет k-кратным корнем, и фундаментальная система решений будет иметь вид

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad ...,$$
$$x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad e^{\lambda_{2k+1} x}, \quad ..., \quad e^{\lambda_n x},$$

следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 x e^{\alpha x} \sin \beta x + ... +$$
$$+ C_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + + C_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x + C_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

В. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Найти фундаментальную систему решений и общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

`Решение.` Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Так как они действительные и различные, то фундаментальная система решений имеет вид 1, e^{-x}, e^{3x}, а общее решение – вид

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Корни действительные, причем один из них, а именно, $\lambda_1 = -1$, двукратный, поэтому фундаментальная система решений имеет вид e^{-x}, xe^{-x}, 1, а общее решение – вид

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$, поэтому фундаментальная система решений имеет вид 1, $e^{-2x}\cos 3x$, $e^{-2x}\sin 3x$, а общее решение – вид

$$y = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0.$$

Оно имеет двукратные корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$, $xe^{-x}\cos x$, $xe^{-x}\sin x$, а общее решение – вид

$$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + C_3xe^{-x}\cos x + C_4xe^{-x}\sin x.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

1. $y'' + y' - 2y = 0.$	11. $y^{IV} - y = 0.$
2. $y'' + 4y' + 3y = 0.$	12. $y^{IV} + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' = 0.$	13. $y^{VI} + 64y = 0.$
4. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$	14. $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0.$
5. $y'' - 4y' + 5y = 0.$	15. $y^V - 10y''' + 9y' = 0.$
6. $y'' + 2y' + 10y = 0.$	16. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$
7. $y'' + 4y = 0.$	17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$
8. $y'' - 2y' + y = 0.$	18. $y''' - y'' - y' + y = 0.$
9. $4y'' + 4y' + y = 0.$	19. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$
10. $y''' - 8y = 0.$	20. $y^V + 8y''' + 16y' = 0.$

D. *Ответы*

1. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. 2. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. 3. $y = C_1 + C_2e^{2x}$.
4. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{\frac{x}{2}}$. 5. $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.
6. $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. 7. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. 8. $y = e^x\left(C_1 + C_2x\right)$.
9. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 + C_2x\right)$. 10. $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x)$.
11. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.
12. $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4\sin x)$.

13. $y = e^{x\sqrt{3}}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + e^{-x\sqrt{3}}\left(C_5\cos x + C_6\sin x\right)$.
14. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}\left(C_4 + C_5x\right)$.
15. $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$.
16. $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$. 17. $y = e^{x}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)$.
18. $y = e^{x}\left(C_1 + C_2x\right) + C_3e^{-x}$. 19. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.
20. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$.

Тема 9

Решение ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных

А. Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка общего вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x). \tag{1}$$

Вместе с ним рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = 0, \tag{1_0}$$

которое называется ЛОДУ, соответствующим ЛНДУ (1).

Если известно общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

ЛОДУ (1_0), то общее решение ЛНДУ (1) всегда может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Суть этого метода состоит в следующем. Общее решение ЛНДУ ищем в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n, \tag{2}$$

где функции $C_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + ... + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{3}$$

Эта система имеет единственное решение, так как ее главный определитель отличен от нуля, как вронскиан фундаментальной системы решений. Пусть $C_i'(x) = \psi_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ – решение этой системы уравнений. Тогда

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx + \tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

где $\tilde{C}_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$ – произвольные постоянные. Учитывая равенства (2) и (4), найдем общее решение ЛНДУ

$$y = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_iy_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \psi_i(x)dx\right)y_i.$$

Таким образом, ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами всегда может быть решено в квадратурах методом вариации произвольных постоянных.

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

`Решение.` Соответствующее ЛОДУ будет $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и фундаментальная система решений имеет вид $\cos x$, $\sin x$. Таким образом, общее решение ЛОДУ будет

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение исходного ЛНДУ ищем в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \tag{5}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные функции. Они определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos x \, C_1'(x) + \sin x \, C_2'(x) = 0, \\ -\sin x \, C_1'(x) + \cos x \, C_2'(x) = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Разрешим эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -tgx, \quad C_2'(x) = 1.$$

Интегрированием найдем

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

Подставив выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (5), получим общее решение данного уравнения

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Здесь $\cos x \ln|\cos x| + x \sin x$ – частное решение исходного уравнения.

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Проинтегрировать методом вариации произвольных постоянных:

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
2. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$.
3. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.
4. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.
6. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.
7. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$.
8. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.
9. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.
10. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.
11. $y'' + 4y = 2\text{tg}x$.
12. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$.
13. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
14. $y''' + y'' = \frac{x - 1}{x^2}$.
15. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

D. *Ответы*

1. $y = (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln|\sin x|) \sin x$.
2. $y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1) \ln(1 + e^{-x})$.
3. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{2 \cos x}$.
4. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{3}{4} \cos x \sqrt{\text{ctg} x}$.
5. $y = (C_1 + C_2 x) e^x - e^x \ln\sqrt{1 + x^2} + x e^x \text{arctg} x$.
6. $y = (C_1 - x) e^{-x} \cos x + (C_2 + \ln|\sin x|) e^{-x} \sin x$.
7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x}$.
8. $y = C_1 e^x + C_2 - \cos e^x$.
9. $y = e^x (x \ln|x| + C_1 x + C_2)$.

10. $y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.
11. $y = \sin 2x \ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.
12. $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2 x\right)$.
13. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\left(xe^x + 1 - \ln(e^x + 1)(e^x + e^{-x})\right)$.
14. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + 1 - x + x\ln|x|$.
15. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln|\cos x| + \sin x(-\mathrm{tg} x + x)$.

Тема 10

Решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов

А. Пусть даны уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \tag{1}$$

– ЛНДУ и

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \tag{1_0}$$

– ЛОДУ с постоянными коэффициентами, соответствующее ЛНДУ (1). Пусть y_{oo} – общее решение уравнения (1_0), а $y_{\text{ч.р.}}$ – частное решение уравнения (1). Тогда общим решением y уравнения (1) будет $y = y_{oo} + y_{\text{ч.р.}}$. Общее решение уравнения (1_0) найдемм методом, использованным на занятии 8 (п. 2.2). Что касается частного решения уравнения (1), то оно находится методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

1) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$,

2) $f(x) = P_\mu^{(1)}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_\nu^{(2)}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,

где $P_m(x)$, $P_\mu^{(1)}(x)$, $P_\nu^{(2)}(x)$ – заданные многочлены степеней m, μ и ν соответственно; α, β – заданные числа.

В случае 1) частное решение ЛНДУ (1) ищем в виде

$$y = Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{2}$$

если α не является корнем характеристического уравнения, и в виде

$$y = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{3}$$

если α – корень характеристического уравнения кратности k. Здесь $Q_m(x)$ – многочлен m-ой степени с m неопределенными коэффициентами. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (2) или (3) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

В случае 2) частное решение следует искать в виде

$$y = Q_m^{(1)}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{4}$$

где $m = \max\{\mu, \nu\}$, если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, и в виде

$$y = x^k[Q_m^{(1)}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x], \tag{5}$$

если $\alpha \pm i\beta$ – корни характеристического уравнения кратности k. Здесь также $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ – многочлены m-степени с неопределенными коэффициентами. Чтобы их найти, надо подставить (4) или (5) в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

В. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Найти общее решение уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}.$$

`Решение.` Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0.$$

Отсюда $\lambda = -5$ – корень характеристического уравнения кратности 2, поэтому фундаментальная система решений ЛОДУ, соответствующего ЛНДУ, имеет вид e^{-5x}, xe^{-5x}, а общее решение ЛОДУ – вид

$$y_{oo} = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}.$$

Так как $\alpha = -5$ является корнем характеристического уравнения кратности 2, то частное решение уравнения следует искать в виде

$$y_{\text{ч.р.}} = Ax^2 e^{-5x},$$

тогда

$$y'_{\text{ч.р.}} = A\left(2x - 5x^2\right)e^{-5x},$$

$$y''_{\text{ч.р.}} = A\left(2 - 20x + 25x^2\right)e^{-5x}.$$

Подставив выражения для $y_{\text{ч.р.}}$, $y'_{\text{ч.р.}}$, $y''_{\text{ч.р.}}$ в исходное уравнение, получим $2Ae^{-5x} = 4e^{-5x}$, откуда $A = 2$, значит, $y_{\text{ч.р.}} = 2x^2 e^{-5x}$. Общее решение данного уравнения

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}.$$

`Пример 2.` Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x.$$

`Решение.` Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, так что фундаментальная система решений ЛОДУ, соответствующего ЛНДУ, имеет вид $e^{-x}\cos 2x$, $\quad e^{-x}\sin 2x$, а общее решение ЛОДУ:

$$y_{oo} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}.$$

Так как $\alpha \pm i\beta = -1 \pm 2i$ является простым корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{ч.р.}}$ надо искать в виде

$$y_{\text{ч.р.}} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}.$$

Тогда

$$y'_{\text{ч.р.}} = e^{-x}[(A - Ax + 2Bx)\cos 2x + (B - Bx - 2Ax)\sin 2x],$$

$$y''_{\text{ч.р.}} = e^{-x}[(-2A - 3Ax + 4B - 4Bx)\cos 2x +$$
$$+(-2B - 3Bx - 4A + 4Ax)\sin 2x].$$

Подставив выражения для $y_{\text{ч.р.}}$ и его производных в исходное уравнение и сократив на e^{-x}, будем иметь

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x,$$

откуда $A = 0$, $B = 1/4$, значит,

$$y_{\text{ч.р.}} = \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x} + \frac{1}{4} x e^{-x} \sin 2x.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

1. $y'' + 2y' + 2 = 0.$
2. $y'' + 9y - 9 = 0.$
3. $y''' + y'' = 1.$
4. $5y''' - 7y'' - 3 = 0.$
5. $y^{IV} - 6y''' + 6 = 0.$
6. $3y^{IV} + y''' = 2.$
7. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1.$
8. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$
9. $y'' + 8y' = 8x.$
10. $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x \, (k \neq 1)\,.$
11. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$
12. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x.$
13. $y'' - 2y' + y = x^3.$
14. $y^{IV} + y'' = x^2 + x.$
15. $y'' + y = x^2 \sin x.$
16. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x.$
17. $y''' - y = \sin x.$
18. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x.$
19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x.$
20. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \left(\sin x + 2\cos x\right).$

D. *Ответы*

1. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - x.$ 2. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1.$
3. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}.$ 4. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{7}{5}x} - \frac{3}{14}x^2.$
5. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{6x} + \frac{x^3}{6}.$ 6. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}.$
7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x)\, e^x + 1.$ 8. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}.$
9. $y = C_1 + C_2 e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}.$ 10. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}.$
11. $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \left(x^2 + 3x + 1\right).$
12. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2}{4} e^x.$
13. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24.$
14. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2.$
15. $y = \left(C_1 + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6}\right) \cos x + \left(C_2 + \frac{x^2}{4}\right) \sin x.$
16. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + \left[\left(6 - x^2\right) \cos x + 4x \sin x\right] e^{-x}.$
17. $y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \left(\cos x - \sin x\right).$
18. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + (C_3 + C_4 x)\, e^{-x} + \frac{1}{4} \cos x$
19. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^x - \frac{e^x}{8} \sin 2x.$
20. $y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x + x \sin x\right) e^{2x}$

ГЛАВА III
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 11

Нормальная система дифференциальных уравнений и ее решение методом исключения

А. Система дифференциальных уравнений

$$y'_k = f_k\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \quad k = \overline{1, n} \tag{1}$$

называется *нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Всякая совокупность n функций $y_k = \varphi_k\left(x\right)$, $k = \overline{1, n}$, определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b) называется *решением системы* (1) в этом интервале, если она обращает все уравнения системы в тождества относительно независимой переменной x.

Систему (1) можно интегрировать методом исключения, который заключается в приведении системы уравнений (1) к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией. Общая схема приведения состоит в следующем. Продифференцировав, например, первое уравнение системы (1) последовательно $n-1$ раз и подставив каждый раз вместо производных $\frac{dy_k}{dx}$, $k = \overline{1, n}$ их значения из остальных уравнений системы (1), имеем

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = F_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \end{cases} \tag{2}$$

Определив y_2, y_3, ..., y_n из первых $n-1$ уравнений системы (2), получим

$$y_k = \varphi_k\left(x, y_1, y'_1, y''_1, ..., y_1^{(n-1)}\right), \quad k = \overline{2, n}. \tag{3}$$

Подставив (3) в последнее уравнение системы (2), имеем

$$y_1^{(n)} = F\left(x, y_1, y'_1, y''_1, ..., y_1^{(n-1)}\right). \tag{4}$$

Пусть $y_1 = \psi_1\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ – общее решение уравнения (4). Подставив его в (3), найдем решение системы (1)

$$y_k = \psi_k\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Таким образом, нормальная система дифференциальных уравнений имеет бесконечное множество решений, зависящих от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n.

Задачей Коши для системы (1) называется задача нахождения решения

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad y_n = y_n(x) \tag{6}$$

этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1^0 = y_1(x_0), \quad y_2^0 = y_2(x_0), \quad y_n^0 = y_n(x_0), \tag{7}$$

где x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0 – заданные числа.

Теорема. *Пусть функции, стоящие в правых частях системы (1), определены в замкнутой области*

$$R = \left\{ |x - x_0| \leqslant a, \ \left| y_i - y_i^0 \right| \leqslant b, \ i = \overline{1, n} \right\}$$

и удовлетворяют в ней следующим двум условиям:

1. непрерывны и, следовательно, ограничены, т. е.

$$|f_k (x, y_1, y_2, ..., y_n)| \leqslant M, \quad k = \overline{1, n};$$

2. имеют ограниченные частные производные по аргументам y_1, y_2, ..., y_n, т. е.

$$\left| \frac{\partial f_k (x, y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial y_j} \right| \leqslant N, \quad k, j = \overline{1, n}.$$

Тогда система (1) имеет единственное решение (6), удовлетворяющее начальным условиям (7), определенное и один раз непрерывно-дифференцируемое в промежутке $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Общим решением системы дифференциальных уравнений (1) называется совокупность функций

$$y_k = \varphi_k (x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad k = \overline{1, n}, \tag{8}$$

зависящих от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n и удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) она является решением системы (1) при любых допустимых значениях C_1, C_2, ..., C_n;

2) как бы ни были заданы начальные условия (7), можно подобрать значения произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, при которых (8) удовлетворяет заданным начальным значениям.

Решение системы (1), которое получается из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением*.

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \tag{9}$$

$$x(0) = 6, \ y(0) = -2. \tag{10}$$

`Решение.` Из второго уравнения системы (9) найдем

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}, \tag{11}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в первое уравнение системы (9), получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0,$$

общее решение которого

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{13}$$

Подставив (13) в (11), найдем

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}.$$

Общее решение системы (9) имеет вид

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}, \quad y = C_1e^t + C_2e^{-t}. \tag{14}$$

Подставив в (14) начальное условие (10), получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2, \end{cases}$$

решив которую, найдем $C_1 = -1$, $C_2 = -1$. Подставив найденные значения C_1 и C_2 в (14), получим решение поставленной задачи Коши:

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \quad y = -e^t - e^{-t}.$$

`Пример 2.` Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}. \end{cases}$$

`Решение.` Продифференцировав второе уравнение, найдем

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{(x-t)^2}\left(\frac{dx}{dt} - 1\right).$$

Чтобы исключить из полученного уравнения y и y', заменим в нем $\frac{1}{(x-t)}$ и $x'-1$ их значениями из данной системы. Получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Проинтегрировав данное уравнение, найдем

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = C_1y,$$

откуда

$$y = C_2e^{C_1t}.$$

Для нахождения x воспользуемся вторым уравнением системы и найденным значением y. Имеем

$$x - t = \frac{1}{\frac{dy}{dt}}, \quad x - t = \frac{1}{C_1C_2e^{C_1t}},$$

откуда

$$x = t + \frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1t}.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Методом исключения решить следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \ x(0) = 1, \ y(0) = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \ x(0) = -2, \ y(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + z. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = 0, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt} + x, \ x(0) = 1, \ x'(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$

D. *Ответы*

1. $\begin{cases} x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t, \\ y = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t} \cos t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t, \\ y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3 e^t, \\ z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2, \\ y = -(C_1 + 2C_3)t - C_2 \frac{t^2}{2} - C_3 \frac{t^3}{3} + C_4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t} - e^{2t}. \end{cases}$

Тема 12

Линейные однородные системы дифференциальных уравнений

A. Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$y'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x) y_i, \quad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

называется *линейной однородной системой дифференциальных уравнений.*

Пусть

$$y_k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n} \tag{2}$$

– система n решений однородной системы (1).

Система n решений (2) системы (1) называется *линейно зависимой* на отрезке $[a, b]$, если существуют такие числа α_1, α_2, ..., α_n, среди которых хотя бы одно не равно нулю, что имеют место тождества

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_i^k \equiv 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

на этом отрезке. Если тождества (3) имеют место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$, то эта система называется *линейно независимой* на отрезке $[a, b]$.

С помощью решений (2) образуем определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & ... & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & ... & y_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^1 & y_n^2 & ... & y_n^n \end{vmatrix},$$

который называется *вронскианом* или *определителем Вронского* системы решений (2).

Теорема 1. *Для того чтобы система n решений (2) однородной системы (1) была линейно независимой на отрезке* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы ее вронскиан* $W(x)$ *не обращался в нуль хотя бы в одной точке отрезка* $[a, b]$.

Система, состоящая из n решений (2), называется *фундаментальной системой решений* системы (1) на отрезке $[a, b]$, если она линейно независима на этом отрезке.

Теорема 2. *Если система решений (2) однородной системы (1) является фундаментальной, то общее решение этой системы имеет вид*

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_k^i, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где C_1, C_2, ..., C_n *– произвольные постоянные.*

Теперь рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это система вида

$$y_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i, \quad k = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $a_{ki} = const$, $k, i = \overline{1,n}$.

Для интегрирования однородной системы с постоянными коэффициентами, кроме метода исключения, применяется также *метод Эйлера*, который заключается в следующем:

Решение системы (5) ищем в виде

$$y_k = m_k e^{\lambda x}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где m_1, m_2, ..., m_n и λ – некоторые постоянные. Подставив функции (6) в систему (5), сократив на $e^{\lambda x}$ и перенеся все члены вправо, получим для определения m_k, $k = \overline{1,n}$, следующую систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + ... + a_{1n}m_n = 0, \\ a_{21}m_1 + (a_{22} - \lambda)m_2 + a_{23}m_3 + ... + a_{2n}m_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + a_{n3}m_3 + ... + (a_{nn} - \lambda)m_n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Нас интересует ненулевое решение этой системы. Такое решение существует лишь при условии, что определитель системы равен нулю, т. е. при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) называется *характеристическим уравнением системы* (4), его корни – *характеристическими числами.*

Пусть корни λ_1, λ_2, ..., λ_n характеристического уравнения – вещественные и различные. Подставив в (7) вместо λ число λ_k и решив полученную систему, найдем числа m_1^k, m_2^k, ..., m_n^k, следовательно, соответствующее частное решение

$$y_k = \begin{pmatrix} m_1^k \\ m_2^k \\ \vdots \\ m_n^k \end{pmatrix} e^{\lambda_k x}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Если корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные, то последние входят сопряженными парами. Пусть $\alpha \pm i\beta$ – простые корни характеристического уравнения. Корню $\alpha + i\beta$ соответствует, согласно формуле (6), решение

$$y_k = m_k e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Здесь m_1, m_2, ..., m_n – комплексные числа. Положив $m_k = \left(\overline{m}_k + i\overline{\overline{m}}_k\right)$, $k = \overline{1, n}$, получим решение

$$y_k = \omega_k = \left(\overline{m}_k + i\overline{\overline{m}}_k\right) e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad k = \overline{1, n},$$

которое является комплексным. Отделив в нем действительные и мнимые части, получим, согласно четвертому свойству, решение однородной системы: два действительных решения: $y_k' = \mathrm{Re}\,\omega_k$, $y_k^2 = \mathrm{I}m\omega_k$, $k = \overline{1, n}$. Эти решения линейно независимы. Нетрудно убедиться, что сопряженный корень $\alpha - i\beta$ не порождает новых действительных линейно независимых частных решений.

Пусть теперь λ_1 – корень кратности k, который может быть как действительным, так и комплексным. В этом случае частные решения однородной системы (5) следует искать в виде

$$y_j = P_{k-1}^{(j)}(x) e^{\lambda_1 x}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{9}$$

где $P_{k-1}^{(j)}(x)$, $j = \overline{1, n}$ – различные многочлены степени $k-1$ с неопределенными коэффициентами. Чтобы найти эти неопределенные коэффициенты, надо подставить (9) в систему (5). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Надо найти общее решение этой системы. При этом $k(n-1)$ коэффициентов должны зависеть от k коэффициентов, которые остаются произвольными. Положив поочередно один из этих произвольных постоянных равным единице, а остальные равными нулю, мы построим k линейно независимых решений, следовательно, k частных решений, соответствующих корню λ_1 кратности k характеристического уравнения.

Если λ_1 – действительное число, то построенные выше k решений будут действительными.

Если же $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ – комплексное, то полученные k частных решений будут комплексными, и, отделив в них действительные и мнимые части, мы получим $2k$ действительных линейно независимых частных решений.

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases} \tag{10}$$

`Решение.` Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0.$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ – корни характеристического уравнения. Составим систему

$$\begin{cases} (3-\lambda)\, m_1 - m_2 + m_3 = 0, \\ -m_1 + (5-\lambda)m_2 - m_3 = 0, \\ m_1 - m_2 + (3-\lambda)m_3 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

При $\lambda = 2$ система (11) принимает вид

$$\begin{cases} m_1 - m_2 + m_3 = 0, \\ -m_1 + 3m_2 - m_3 = 0, \\ m_1 - m_2 + m_3 = 0, \end{cases}$$

эквивалентный системе

$$\begin{cases} m_1 - m_2 + m_3 = 0, \\ -m_1 + 3m_2 - m_3 = 0. \end{cases}$$

Положив $m_3 = 1$, получим

$$\begin{cases} m_1 - m_2 = -1, \\ -m_1 + 3m_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда имеем $m_1 = -1$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$.

При $\lambda = 3$ система (11) примет вид

$$\begin{cases} -m_2 + m_3 = 0, \\ -m_1 + 2m_2 - m_3 = 0, \\ m_1 - m_2 = 0, \end{cases}$$

эквивалентный системе

$$\begin{cases} -m_2 + m_3 = 0, \\ -m_1 + 2m_2 - m_3 = 0, \end{cases}$$

одно из решений которой есть $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Подставив корень $\lambda = 6$ в систему (11), получим эквивалентную ей систему

$$\begin{cases} 3m_1 + m_2 = m_3, \\ m_1 - m_2 = 3m_3. \end{cases}$$

Одно из ее решений есть $m_1 = 1$, $m_2 = -2$, $m_3 = 1$.

Таким образом, частные решения системы (10), соответствующие корням характеристического уравнения, имеют вид

$$\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} -e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \\ 0 & e^{3t} & -2e^{6t} \\ e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \end{vmatrix} = e^{11t} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e^{11t}(-6) \neq 0,$$

найденные частные решения являются линейно независимыми и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Поэтому общее решение исходной системы выразится формулами

$$\begin{cases} x = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{cases}$$

`Пример 2.` Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases} \tag{12}$$

`Решение.` Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Решение системы (12) ищем в виде

$$x = (a + bt)e^{2t}, \quad y = (c + dt)e^{2t} \tag{13}$$

Найдем a, b, c, d. Подставив (13) в (12), получим

$$\begin{cases} be^{2t} + 2(a+bt)e^{2t} = 3(a+bt)e^{2t} + (c+dt)e^{2t}, \\ de^{2t} + 2(c+dt)e^{2t} = -(a+bt)e^{2t} + (c+dt)e^{2t}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} b + 2a + 2bt = 3a + 3bt + c + dt, \\ d + 2c + 2dt = -a - bt + c + dt. \end{cases}$$

Приведя подобные члены, найдем

$$\begin{cases} b - a - bt - c - dt = 0, \\ d + c + dt + a + bt = 0. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t к нулю, получим

$$\begin{cases} b - a - c = 0, \\ d + c + a = 0, \\ -b - d = 0, \\ d + b = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -a + b - c = 0, \\ a + c + d = 0, \\ -b - d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} -a + b - c = 0, \\ a + c + d = 0. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$, $d = 0$. Тогда одно из нетривиальных решений системы (14) будут числа: $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$. При $c = 0$, $d = 1$ нетривиальным решением системы будет $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 1$. Таким образом, найдены два линейно независимых решения системы уравнений (12)

$$\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-1-t)\, e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение запишем в виде

$$x = -C_1 e^{2t} + C_2(-1-t)e^{2t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}.$$

`Пример 3.` Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

`Решение.` Найдем корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Найдем комплексное решение

$$x = (1-i)e^{(2-i)t}, \quad y = -e^{(2-i)t} \tag{15}$$

данной системы уравнений, соответствующее корню $\lambda_1 = 2-i$. Отделив в (15) действительные и мнимые части, получим два действительных решения

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t - \sin t) \\ -e^{2t}\cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e^{2t}(\cos t + \sin t) \\ e^{2t}\sin t \end{pmatrix},$$

которые составляют фундаментальную систему решений, так что общим решением будет

$$x = C_1 e^{2t}(\cos t - \sin t) - C_2 e^{2t}(\cos t + \sin t),$$

$$y = -C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - 8y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 5y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 3x + y = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

D. *Ответы*

1. $x = C_1e^t + C_2e^{5t},\ \ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.
2. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t},\ \ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.
3. $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t},\ \ y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.
4. $x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t),\ \ y = e^{2t}\left[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right]$.
5. $x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t),\ \ y = e^t\left(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t\right)$.
6. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t,\ \ y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$.
7. $x = (C_1 + C_2t)e^{3t},\ \ y = (C_1 + C_2 + C_2t)\,e^{3t}$.
8. $x = (C_1 + C_2t)e^t,\ \ y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)\,e^t$.
9. $x = (C_1 + 2C_2t)e^{-t},\ \ y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)\,e^{-t}$.
10. $x = (C_1 + 3C_2t)e^{2t},\ \ y = (C_2 - C_1 - 3C_2t)\,e^{2t}$.
11. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\ \ y = C_1e^t - 3C_3e^{-t},\ \ z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$.
12. $x = C_1 + 3C_2e^{2t},\ \ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\ \ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$.
13. $x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t},\ \ y = C_1e^t + C_2e^{2t},\ \ z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$.
14. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ \ y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ \ z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$.
15. $x = C_1e^t + C_3e^{-t},\ \ y = C_1e^t + C_2e^{2t},\ \ z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$.

Тема 13

Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

A. Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$y_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x)y_i + f_k(x), \quad k = \overline{1,n} \tag{1}$$

называется *линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений.* Система (1) при $f_k(x) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, примет вид

$$y_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x)y_i, \quad k = \overline{1,n} \tag{1_0}$$

и называется однородной системой, соответствующей неоднородной системе (1).

Теорема (о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Если*

$$y^k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,n} \tag{2}$$

– фундаментальная система решений однородной системы (1_0)*, соответствующей неод-*

нородной (1), и

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$$

– некоторое частное решение неоднородной системы (1), то общее решение этой системы представляется в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_k^i + \tilde{y}_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Систему (1) можно решать методом исключения и методом вариации произвольных постоянных. Последний метод применяется в том случае, если удается решить соответствующую однородную систему (1_0). Если (2) есть фундаментальная система решений однородной системы (1_0), то общее решение неоднородной системы (1) ищем в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_k^i, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ – неопределенные функции, определяемые из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_k^i = f_k(x), \quad k = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Пусть

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}$$

– решение системы (4). Тогда

$$C_i(x) = \int \psi_i(x) dx + \tilde{C}_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (3), найдем

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i y_k^i + \sum_{i=1}^{n} \left[\int \psi_i(x) dx \right] y_k^i, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, ..., $\tilde{C}_n$ – произвольные постоянные.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что вторая сумма в (6) представляет собой частное решение системы (1). По теореме о структуре общего решения выражение (6) представляет собой общее решение неоднородной системы.

Общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, так как фундаментальная система решений однородной системы, соответствующей неоднородной системе, определяется известным методом Эйлера по корням характеристического уравнения.

B. *Примеры решения задач*

`Пример 1.` Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} \tag{7}$$

`Решение.` Рассмотрим линейную однородную систему, соответствующую неоднородной системе (7)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \tag{7_0}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Положив в системе

$$\begin{cases} -\lambda m_1 + m_2 = 0, \\ m_1 - \lambda m_2 = 0 \end{cases}$$

сначала $\lambda = 1$, затем $\lambda = -1$, найдем $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ и $m_1 = 1$, $m_2 = -1$. Отсюда имеем фундаментальную систему решений однородной системы (7_0)

$$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (7) ищем в виде

$$x = C_1(t)\,e^t + C_2(t)\,e^{-t}, \quad y = C_1(t)\,e^t - C_2(t)\,e^{-t}. \tag{8}$$

Функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяют из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = 0, \\ C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Решив систему относительно $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$, получим

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right), \quad C_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right).$$

Проинтегрировав, найдем

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right) + \tilde{C}_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t} - \ln t\right) + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – произвольные постоянные. Подставив найденные выражения в (8), получим общее решение данной системы

$$x = \tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{-t} - \ln t, \quad y = \tilde{C}_1 e^t - \tilde{C}_2 e^{-t} - \frac{1}{t}.$$

C. *Задачи и примеры для самостоятельного решения*

Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \mathrm{tg} t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + \frac{1}{t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$

D. *Ответы*

1. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + tgt, \;\; y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2.$

2. $x = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\mathrm{arctg}e^t,$
$y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}\mathrm{arctg}e^t.$

3. $x = C_1 + 2C_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^t-1|\,, \;\; y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^t-1|\,.$

4. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|\,,$
$y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t.$

5. $x = (C_1 + 2C_2t - 8t^{\frac{5}{2}})e^t, \;\; y = (C_1 + 2C_2t - C_2 - 8t^{\frac{5}{2}} + 10t^{\frac{3}{2}})e^t.$

6. $x = \frac{8}{3}e^{2t} + 2C_1e^t + C_2e^{-t}, \;\; y = \frac{29}{3}e^{2t} + 3C_1e^t + C_2e^{-t}.$

7. $x = (1-t)\cos t - \sin t, \;\; y = (t-2)\cos t + t\sin t.$

8. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \cos t\ln|\cos t| + t\sin t,$
$y = -C_1\sin t + C_2\cos t - \sin t\ln|\cos t| + t\cos t.$

9. $x = (C_1 + C_2(1+t))e^{2t} + \ln t, \;\; y = -(C_1 + C_2t)e^{2t} + \ln t,$

10. $x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} - e^{2t}, \;\; y = -C_1e^t + C_2e^{4t} - e^{2t}.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица основных интегралов

$$1. \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1);$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \left(\int e^x dx = e^x + C\right);$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C \quad \left(\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C\right);$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \left(\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C\right);$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C\right);$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \left(\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C\right);$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

$$12. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$13. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t) dt.$$

Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – СПб. : Лань, 2011. – 304 с. URL: http://e.lanbook.com/book/1542

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2000. – 400 с. URL: http://e.lanbook.com/book/2363

3. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с. URL: http://e.lanbook.com/book/126

4. Ильин А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – М. : Физматлит, 2009. – 192 с. URL: http://e.lanbook.com/book/2181

5. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. 4-е изд., исправ. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е изд., доп. / Н.М. Матвеев. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 832 с.

7. Пантелеев А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков. – М.: Логос, 2010. – 384 с.

8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II / В.И. Смирнов. – Пред. Л.Д. Фаддеева, пред. и прим. Е.А. Грининой. – 24-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 848 с. URL: http://znanium.com/bookread.php?book=350203

9. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.А. Треногин. – М. : Физматлит, 2009. – 312 с. URL: http://e.lanbook.com/book/2341

10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.