ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 151 (2018). С. 10–20

УДК 517.983, 517.986

# СЛЕД И КОММУТАТОРЫ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

© 2018 г. **А. М. БИКЧЕНТАЕВ**

Аннотация. Установлены новые свойства пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$ интегрируемых (относительно следа $\tau$) операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Для самосопряженных $\tau$-измеримых операторов $A$, $B$ найдены достаточные условия $\tau$-интегрируемости оператора $\lambda I-AB$ и вещественности следа $\tau(\lambda I-AB)$, где $\lambda\in\mathbb{R}$. При этих условиях $[A,B]=AB-BA\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau([A,B])=0$. Для $\tau$-измеримых операторов $A$, $B=B^2$ найдены условия, достаточные для выполнения равенства $\tau([A,B])=0$. Для изометрии $U\in\mathcal{M}$ и неотрицательного $\tau$-измеримого оператора $A$ доказано, что $U-A\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ тогда и только тогда, когда $I-A, I-U\in L_1(\mathcal{M},\tau)$. Для $\tau$-измеримого оператора $A$ найдены оценки следа самокоммутатора $[A^*,A]$. Пусть самосопряженные $\tau$-измеримые операторы $X\geqslant 0$ и $Y$ таковы, что $[X^{1/2},YX^{1/2}]\in L_1(\mathcal{M},\tau)$. Тогда $\tau([X^{1/2},YX^{1/2}])=it$, где $t\in\mathbb{R}$ и $t=0$ при $XY\in L_1(\mathcal{M},\tau)$.

***Ключевые слова:*** гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный полуконечный след, измеримый оператор, интегрируемый оператор, коммутатор, самокоммутатор.

***AMS Subject Classification:*** 47C15, 46L51

## СОДЕРЖАНИЕ



## 1. Введение

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. В работе установлены новые свойства пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$ интегрируемых операторов, присоединенных к алгебре $\mathcal{M}$. Для оператора $X\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ исследованы условия, когда $\tau(X)\in\mathbb{R}$ или $\tau(X)=0$. Для самосопряженных $\tau$-измеримых операторов $A$, $B$ найдены достаточные условия интегрируемости оператора $\lambda I-AB$ и вещественности следа $\tau(\lambda I-AB)$, где $\lambda\in\mathbb{R}$. При этих условиях коммутатор $[A,B]=AB-BA\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau([A,B])=0$ (теоремы 4.1 и 4.2 и предложения 4.1–4.4). Для $\tau$-измеримых операторов $A$, $B=B^2$ найдены условия, достаточные для выполнения равенства $\tau([A,B])=0$ (теорема 4.3). Пункт (ii) теоремы 4.3 обобщает теорему 2.26 из [4].

Для изометрии $U\in\mathcal{M}$ и неотрицательного $\tau$-измеримого оператора $A$ доказано, что $U-A\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ тогда и только тогда, когда $I-A, I-U\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ (теорема 4.5). Для $\tau$-измеримого оператора $A$ найдены оценки следа самокоммутатора $[A^*,A]$ (следствие 4.4, теорема 4.7).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433) и субсидий, выделенными Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проекты № 1.1515.2017/4.6 и 1.9773.2017/8.9).

 