КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В.В. Шурыгин, В.В. Шурыгин (мл.)

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ I

**Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия»**
**Часть I. Аналитическая геометрия плоскости**

Казань — 2018

**УДК 514.74**

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный
университет»
Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол №4 от 15 февраля 2018 г.
заседания кафедры геометрии
Протокол №3 от 29 ноября 2017 г.*

*Научный редактор:*
доктор физ.-мат. наук, доцент Е.Н. Сосов

*Рецензенты:*
кандидат физ.-мат. наук,
профессор ФГБОУ ВО ПГУ А.Я. Султанов,
доктор физ.-мат. наук,
зав. каф. теории относительности и гравитации КФУ
профессор С.В. Сушков

**Шурыгин Вадим Васильевич, Шурыгин Вадим Вадимович.**
**Аналитическая геометрия I. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть I. Аналитическая геометрия плоскости:** Учебное пособие / В.В. Шурыгин, В.В. Шурыгин (мл.). – Казань: Казанский федеральный университет, 2018. – 154 с.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ.

# 1 Векторы на плоскости и в пространстве

## 1.1 Свободные векторы

Векторная алгебра, лежащая в основе многих методов аналитической геометрии, представляет собой эффективный инструмент для решения различных геометрических задач. Но помимо применения при решении задач она может быть использована для построения геометрии на относительно простой аксиоматической базе, основанной на теории абстрактных векторных пространств.

В соответствии с этим в настоящем курсе с самого начала развивается теоретико-множественный подход к определению геометрических объектов, а само геометрическое пространство рассматривается как множество, наделенное некоторой структурой, которая и определяет его геометрические свойства.

Вектором геометрического пространства (геометрической плоскости) называется упорядоченная пара точек $(A, B)$ этого пространства или направленный отрезок.

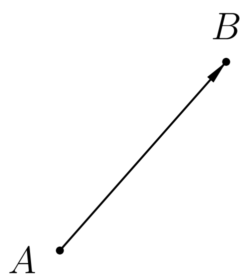


Рис. 1.

Точка $A$ называется началом вектора, а точка $B$ — концом. Вектор с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ принято обозначать следующим образом: $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AA}$, у которого совпадают начало и конец, называется нулевым вектором. В тех случаях, когда начало и конец вектора не заданы в явном виде (или не существенны), векторы обозначают полужирными буквами: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$, или буквами со стрелкой наверху: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ...

Длину отрезка $AB$ называют длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$. Обозначается модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ следующим образом: $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, расположенные на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

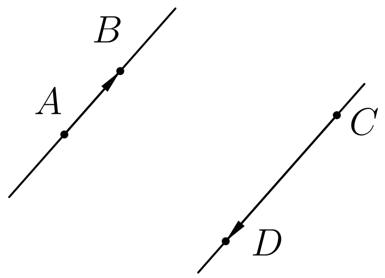


Рис. 2.

Коллинеарность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается следующим образом: $\mathbf{a}||\mathbf{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным всякому вектору: $\overrightarrow{AA}||\overrightarrow{CD}$.

Коллинеарные ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ могут быть направлены в одну и ту же сторону или в противоположные стороны. Это обозначается соответственно следующим образом: $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*, если 1) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и 2) $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ при $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$. Равенство векторов обозначается следующим образом: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

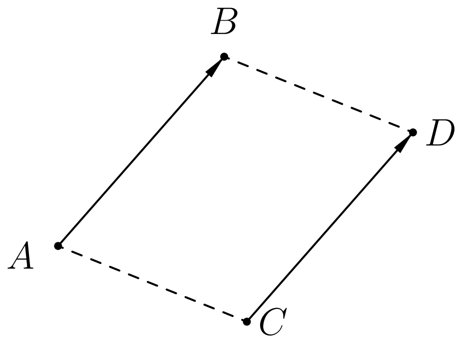


Рис. 3.

При этом все нулевые векторы равны между собой.

Имеет место следующее очевидное, но очень важное

**Предложение.** *Пусть $A$ — произвольная точка, а $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Тогда существует единственная точка $B$, такая* *что* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$.

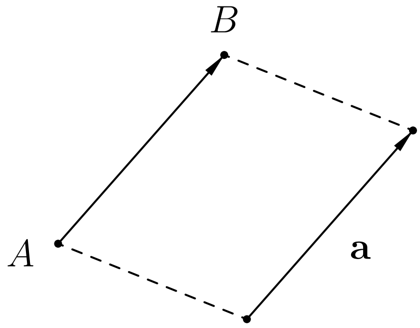


Рис. 4.

Отношение равенства разбивает все векторы на классы равных между собой векторов. Каждый такой класс называется *свободным вектором.* Свободный вектор можно представлять как вектор, у которого заданы длина и направление, но не зафиксирована начальная точка (точка приложения). В дальнейшем будет предполаться, что все рассматриваемые векторы являются свободными, а в том случае, когда нужно зафиксировать начальную точку $A$ некоторого вектора $\mathbf{a}$, будем говорить, что вектор $\mathbf{a}$ отложен от точки $A$. Согласно вышеприведенному утверждению всякий вектор (свободный!) можно единственным способом отложить от любой точки. Записывать это будем используя знак равенства: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ при этом будем называть представителем свободного вектора $\mathbf{a}$. Свободный вектор $\mathbf{a}$ однозначно определяется любым своим представителем $\overrightarrow{AB}$ как класс векторов, равных вектору $\overrightarrow{AB}$. Множества свободных векторов геометрического пространства и геометрической плоскости будем обозначать соответственно символами $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_2$.

### 1.2 Некоторые понятия теории множеств

Понятие множества является одним из исходных понятий математики. Множество представляет собой совокупность (набор) объектов той или иной природы, которые называются элементами этого множества. Например, можно говорить о множестве многочленов второй степени от двух переменных, о множестве точек геометрической плоскости, о множестве вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству $-1 < x < 1$. Множество можно задать, перечисляя все его элементы. Например,

$$A = \{a, b, c\}$$

— множество, состоящее из трех элементов $a$, $b$ и $c$. В записи элементы множества заключают в фигурные скобки.

Для некоторых часто встречающихся множеств принято использовать стандартные обозначения. Так, символом $\mathbf{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$, символом $\mathbf{Z}$ обозначается множество всех целых чисел

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\},$$

символами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ — множества всех вещественных и всех комплексных чисел соответственно, а символом $C[a;b]$ — множество непрерывных функций, определенных на отрезке $[a;b]$.

Тот факт, что $x$ является элементом множества $M$ (говорят также, что $x$ принадлежит $M$), обозначается следующим образом: $x \in M$ или $M \ni x$.

Множество называется *конечным*, если число элементов в этом множестве конечно. Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов. Например, $\{1, 2, \ldots, n\}$ — множество натуральных чисел от 1 до $n$. В этом множестве $n$ элементов. Множество называется *бесконечным*, если оно содержит бесконечное число элементов.

Формально определяется множество, у которого нет ни одного элемента. Такое множество называется *пустым множеством.* Для обозначения пустого множества используется символ $\emptyset$.

Если каждый элемент множества $M$ является одновременно и элементом множества $N$, то множество $M$ называется *подмножеством* множества $N$. Это обозначается следующим образом: $M \subset N$

или $N \supset M$. Например, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Символом $(a, b)$ при $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, обозначается множество вещественных чисел, больших $a$, но меньших $b$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x < b\}.$$

Два множества $M$ и $N$ считаются одинаковыми или совпадающими, если они состоят из одних и тех же элементов. Это обозначается следующим образом: $M = N$. Очевидно, $M = N$ тогда и только тогда, когда $M \subset N$ и $N \subset M$.

Из имеющихся множеств можно конструировать новые множества.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству $M$ и множеству $N$ (то есть представляющее собой общую часть этих двух множеств), называется *пересечением* $M$ и $N$. Пересечение множеств $M$ и $N$ обозначается следующим образом: $M \cap N$. Если множества $M$ и $N$ не имеют общих элементов, их пересечение является пустым множеством: $M \cap N = \emptyset$.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо множеству $M$ либо множеству $N$ (хотя бы одному из этих двух множеств), называется *объединением* $M$ и $N$. Объединение множеств $M$ и $N$ обозначается следующим образом: $M \cup N$.

Множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $(x, y)$, в которых первый элемент $x$ принадлежит множеству $M$, а второй элемент $y$ принадлежит множеству $N$, называется *произведением* $M$ и $N$. Произведение множеств $M$ и $N$ обозначается следующим образом: $M \times N$. В этом определении пары $(x, y)$ предполагаются упорядоченными. Это означает, что $(x, y) \neq (y, x)$, если $x \neq y$. Кратко определение произведения множеств $M$ и $N$ записывается следующим образом:

$$M \times N = \{(x, y) \,|\, x \in M,\ y \in N\}. \tag{1}$$

Аналогично произведению (1) двух множеств определяется произведение любого конечного числа множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$, $n \in \mathbf{N}$:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in M_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}. \quad (2)$$

В частности, если все множества $M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в произведении (2) совпадают, то есть, $M_i = M$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то их произведение обозначается как степень $M^n$. Например,

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$$

— числовая плоскость.

Пусть $M$ и $N$ — некоторые множества. *Отображением из* $M$ *в* $N$ называется соответствие $f$, относящее каждому элементу $x \in M$ некоторый элемент $y \in N$, называемый *образом* элемента $x$ при отображении $f$. То, что $y$ является образом элемента $x$ при отображении $f$, обозначается следующим образом: $y = f(x)$ или $x \mapsto y$. Для самого отображения $f$ при этом используются обозначения

$$f : M \to N \quad \text{или} \quad f : M \ni x \mapsto f(x) \in N.$$

Множество $M$ при этом называют *областью определения* отображения $f$, а множество $N$ — *областью значений* отображения $f$.

Например, отображение $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ относит каждому вещественному числу его квадрат, отображение

$$f : \mathbf{N} \ni n \mapsto f(n) = a_n \in \mathbf{R}$$

задает бесконечную последовательность вещественных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

а отображение

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbf{R}, \quad k \mapsto f(k) = a_k$$

представляет собой упорядоченный набор из $n$ вещественных чисел (конечную последовательность)

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Отображение $f : M \to N$ называется *сюръективным* отображением, или *сюръекцией*, или *отображением $M$ на $N$*, если для каждого $y \in N$ найдется хотя бы один *прообраз*, то есть такой $x \in M$, что $y = f(x)$. Например, отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbf{R}$ не являются сюръективными, поскольку у отрицательных чисел нет прообразов, а отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbf{R}$ являются сюръективными, поскольку уравнения $x^3 = a$ и $x^3 - x = a$ имеют решения при любом $a$.

*Образом* подмножества $K \subset M$ при отображении $f : M \to N$ называется подмножество в $N$, состоящее из образов всех элементов подмножества $K$. Для образа подмножества $K$ используется обозначение $f(K)$. Таким образом,

$$f(K) = \{y \in N \mid \exists x \in K, f(x) = y\}.$$

Символ $\exists$ означает существование и читается «существует». В частности, $f(M) \subset N$ — образ (всего) множества $M$ при отображении $f$. Отображение $f$ является сюръективным, если $f(M) = N$.

Отображение $f : M \to N$ называется *инъективным*, или *инъекцией*, или *взаимно однозначным отображением $M$ в $N$*, если из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Вместо слова «следует» используется также символ $\Rightarrow$. Условие инъективности отображения $f$ поэтому можно записать следующим образом:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Из рассмотренных выше отображений, $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbf{R}$ не являются инъективными, поскольку в первом случае $f(-a) = f(a)$ для любого $a \in \mathbf{R}$, а во втором случае $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbf{R}$ являются инъективными.

Отображение $f : M \to N$ называется *биективным*, или *биекцией*, или *взаимно однозначным отображением $M$ на $N$*, если оно является и сюръективным и инъективным, то есть устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $M$ и $N$. В этом случае каждому элементу $y \in N$ соответствует один и только один элемент $x \in M$, такой что $y = f(x)$. При этом отображение

$$f^{-1} : N \ni y = f(x) \mapsto x \in M,$$

относящее каждому элементу $y \in N$ его единственный прообраз $x \in M$, называется *обратным отображением* к отображению $f : M \to N$. Из рассмотренных выше примеров, биективным является только отображение $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbf{R}$. Биективным является также отображение

$$f : \mathbf{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbf{R}^+, \quad \text{где} \quad \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 0\}$$

— множество положительных вещественных чисел. Обратное к нему отображение имеет вид

$$f^{-1} : \mathbf{R}^+ \ni x \mapsto \log_2 x \in \mathbf{R}\,.$$

*Полным прообразом элемента* $a \in M$ при отображении $f : M \to N$ называется множество

$$f^{-1}(a) = \{x \in M \mid f(x) = a\} \subset M.$$

*Полным прообразом подмножества* $A \subset M$ при отображении $f : M \to N$ называется множество

$$f^{-1}(A) = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M.$$

Например, для отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbf{R}$ полный прообраз $f^{-1}(0)$ состоит из трех элементов: $f^{-1}(0) = \{-1; 0; 1\}$, а $f^{-1}(\mathbf{R}^+) = (-1; 0) \cup (1; \infty)$ — объединение двух интервалов.

Пусть даны три множества $M$, $N$ и $S$ и два отображения $f : M \to N$ и $g : N \to S$, тогда естественно возникает отображение $h : M \ni x \mapsto h(x) = g(f(x)) \in S$, образованное как сложная функция. Это отображение $h$ называется *композицией* отображений $f$

и $g$ и обозначается следующим образом: $h = g \circ f$. Для отображения $f : M \to N$ используется также следующая форма записи: $M \xrightarrow{f} N$. Композицию отображений $f$ и $g$ тогда можно изображать как сквозное отображение:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & N \arrow[r, "g"] & S. \end{tikzcd}$$

Если заданы три отображения

$$M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} S \xrightarrow{\gamma} T,$$

то из них можно образовать два отображения из $M$ в $T$:

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha : M \to T \quad \text{и} \quad \gamma \circ (\beta \circ \alpha) : M \to T. \tag{3}$$

Два отображения, определенные формулами (3) совпадают. Действительно, для всякого $x \in M$,

$$((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)(x) = (\gamma \circ \beta)(\alpha(x)) = \gamma(\beta(\alpha(x))) = \\ = \gamma((\beta \circ \alpha)(x)) = (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))(x).$$

Таким образом, композиция отображений *ассоциативна*:

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha),$$

и можно говорить о композиции трех отображений $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

Для любого множества $M$ отображение

$$id : M \ni x \mapsto x \in M, \quad x \in M,$$

называется *тождественным* отображением. Для его обозначения используется также символ $id_M$.

Для биекции $f : M \to N$ имеют место очевидные соотношения

$$f^{-1} \circ f = id_M, \quad f \circ f^{-1} = id_N.$$

Действительно, если $f : x \mapsto y$, то $f^{-1} : y \mapsto x$.

*Отношением на множестве* $M$ называется подмножество $\mathcal{R} \subset M \times M$. Если $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что элемент $x$ находится в отношении $\mathcal{R}$ к $y$. Вместо $(x, y) \in \mathcal{R}$ пишут также $x\mathcal{R}y$. Отношение $\mathcal{R}$ на множестве $M$ называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\mathcal{R}$ — рефлексивно, то есть $x\mathcal{R}x$ для всякого $x \in M$;

2) $\mathcal{R}$ — симметрично, то есть $x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; y\mathcal{R}x$;

3) $\mathcal{R}$ — транзитивно, то есть $x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \;\Rightarrow\; x\mathcal{R}z$.

Отношение эквивалентности часто обозначается символом $\sim$. При этом то, что элементы $x$ и $y$ находятся в отношении эквивалентности $\sim$, обозначается следующим образом: $x \sim y$. Множество

$$[x] = \{y \in M \mid y \sim x\}$$

всех элементов из $M$, эквивалентных элементу $x \in M$, называется *классом эквивалентности элемента* $x \in M$. Очевидно, два класса $[x]$ и $[z]$ либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если $w \in [x] \cap [z] \neq \emptyset$, то для всякого $y \in [z]$ имеем

$$y \sim z,\;\; z \sim w,\;\; w \sim x \quad\Longrightarrow\quad y \sim x \quad\Longrightarrow\quad y \in [x].$$

Поскольку $y$ — произвольный элемент из $[z]$, то $[z] \subset [x]$. Рассуждая аналогичным образом, приходим к тому, что $[x] \subset [z]$. Отсюда следует, что отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $M$ разбивает это множество на классы. Множество этих классов обозначается символом $M/\!\sim$ и называется *фактор-множеством* множества $M$ по отношению эквивалентности $\sim$. Каждый элемент фактор-множества (класс эквивалентности) $[x] \in M/\!\sim$ однозначно определяется любым своим *представителем* $y \in [x]$. Поэтому для задания элемента $[x]$ достаточно указать некоторый представитель этого класса — элемент множества $M$.

Следующие два примера показывают, как фактор-множества возникают естественным образом.

1. Если два вещественных числа $\alpha$ и $\beta$ отличаются на число, кратное $2\pi$, то значения тригонометрических функций на этих числах совпадают: $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = \cos\beta$. Поэтому естественно рассматривать аргументы тригонометрических функций с точностью до слагаемого $2\pi k$. Если ввести на множестве вещественных чисел $\mathbf{R}$ следующее отношение эквивалентности: $\alpha \sim \beta \iff \beta - \alpha = 2\pi k$, то фактор-множество $\mathbf{R}/\sim$ можно биективно отобразить на окружность единичного радиуса $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, полагая $f : \mathbf{R}/\sim \ni [\alpha] \mapsto (\cos\alpha; \sin\alpha) \in \mathbf{S}^1$.

2. На множестве целых чисел $\mathbf{Z}$ можно ввести следующее отношение эквивалентности: $b \sim c$, если $b - c$ делится на $n$. Два числа $b$ и $c$ при этом попадают в один класс тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки от деления на $n$. Пусть $a \in \mathbf{Z}$ — целое число такое, что $0 \leqslant a \leqslant n-1$, и $\overline{a} = \{b \in \mathbf{Z} \,|\, b = a + kn, k \in \mathbf{Z}\}$ — класс эквивалентности числа $a$, тогда фактор-множество

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

находится в биективном (взаимно однозначном) соответствии со множеством остатков при делении на $n$. При $n = 2$ фактор-множество состоит из двух классов — множеств четных и нечетных чисел.

3. Обозначим множество точек геометрического пространства символом $\mathcal{E}_3$. Тогда множество геометрических векторов (упорядоченных пар точек) представляет собой произведение $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$. Отношение равенства геометрических векторов является отношением эквивалентности $\sim$ на $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$. Поэтому множество свободных векторов представляет собой фактор-множество $\mathbf{V}_3 = (\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3)/\sim$.

## 1.3 Метод математической индукции

Одним из универсальных методов доказательства утверждений, в формулировку которых входит произвольное натуральное число $n$, является *метод (принцип) математической индукции.* Этот метод заключается в следующем.

*Предположим, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ сформулировано некоторое предложение $P_n$ и при этом справедливы следующие два утверждения:*

1°. *Предложение $P_1$ верно.*

2°. *Если предложение $P_k$ верно, то верно и предложение $P_{k+1}$. Тогда предложение $P_n$ верно при любом $n \in \mathbf{N}$.*

Обратим внимание на то, что второе утверждение означает только, что из предложения $P_k$ вытекает предложение $P_{k+1}$. Например, если $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — арифметическая прогрессия с разностью 2 и предложение $P_n$ утверждает, что $a_n$ делится на 2, то утверждение 2° справедливо: если $a_k = 2m$, то $a_{k+1} = a_k + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1)$.

Приведем обоснование метода математической индукции. Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $n \in \mathbf{N}$ предложение $P_n$ не верно. Тогда найдется наименьшее $n = n_0$, такое что $P_{n_0}$ не верно. Следовательно, предложение $P_{n_0-1}$ с номером $n_0 - 1$ является верным, но тогда из верного утверждения 2° должно следовать, что и предложение $P_{n_0}$ является верным. Одно и то же предложение $P_{n_0}$ не может быть и верным и неверным. Противоречие и доказывает справедливость метода математической индукции.

Отметим, что принцип математической индукции и утверждение о том, что во всяком множестве натуральных чисел есть наименьший элемент — это эквивалентные утверждения (каждое из них может быть выведено из другого), и любое из них может быть взято как аксиома, лежащая в определении множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Принцип математической индукции можно сформулировать также в следующей форме:

*Предположим, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ сформулировано некоторое предложение $P_n$ и при этом справедливы следующие два утверждения:*

1°. *Предложение $P_1$ верно.*

$2^\circ$. *Если предложение $P_n$ верно при всех $n \leqslant k$, то верно и предложение $P_{k+1}$.*
*Тогда предложение $P_n$ верно при любом $n \in \mathbf{N}$.*

В качестве примера применения метода математической индукции, докажем следующее тождество:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}.$$

При $n = 2$ это тождество выполняется очевидным образом. Докажем справедливость перехода от $n = k$ к $n = k + 1$. Обозначим сумму в левой части символом $\Sigma_n$. Имеем:

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{(k^2-1)+1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Сформулируем несколько задач для самостоятельного решения.

**Задача 1.** Доказать, что

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом $n \in \mathbf{N}$;

3) $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ при $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, $n > 1$;

4) композиция

$$f_n \circ f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ \ldots \ \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

отображений

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

не зависит от расстановки скобок.

## 1.4 Линейные операции над векторами

**Определение.** *Пусть даны два свободных вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$. *Отложим вектор* $\mathbf{a}$ *от некоторой точки $A$, то есть возьмем вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, а затем отложим вектор $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ от конца вектора $\overrightarrow{AB}$. Назовем суммой векторов* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *свободный вектор* $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$.

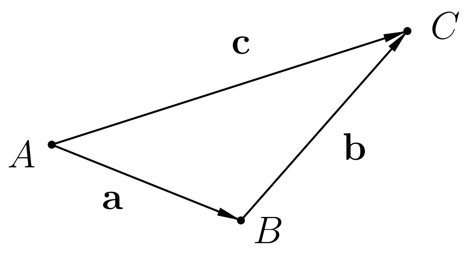


Рис. 5.

Легко проверить, что вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ не зависит от выбора начальной точки $A$.

Сформулированное правило сложения свободных векторов называется *правилом треугольника.* Оно выражается следующей формулой:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Отображение $+ : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$, относящее паре свободных векторов их сумму, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \mathbf{a}+\mathbf{b}$, называется *операцией сложения векторов.* Эта операция обладает следующими свойствами:

1°. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (коммутативность);

2°. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (ассоциативность);

3°. существует вектор $\mathbf{0}$, называемый *нулевым вектором*, такой что для любого вектора $\mathbf{a}$ выполняется $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;

4°. для любого вектора $\mathbf{a}$ существует вектор $\mathbf{b}$, такой что $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, этот вектор обозначается $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ и называется *противоположным к* $\mathbf{a}$ *вектором.*

Доказательства свойств 1° и 2° очевидны из следующих рисунков 6 и 7. Формально, исходя из определения операции сложения векторов, эти свойства доказываются следующим образом:

1°. $$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC};$$

2°. $$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).$$

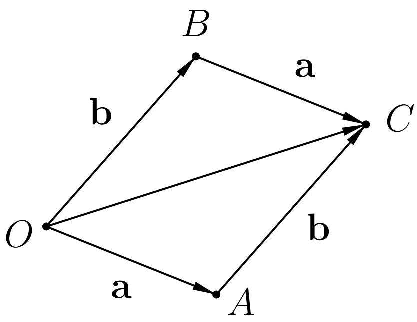


Рис. 6.

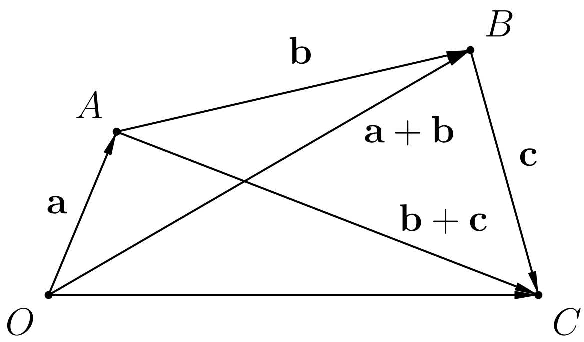


Рис. 7.

Из рисунка 6 легко усматривается *правило параллелограмма* для сложения векторов: сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$ — диагональ параллелограмма $OACB$ со сторонами $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

Вектор $\mathbf{0}$ — это класс нулевых векторов, а вектор $-\mathbf{a}$ имеет ту же длину, что и вектор $\mathbf{a}$, и противоположное направление, то есть, если $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, то $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$.

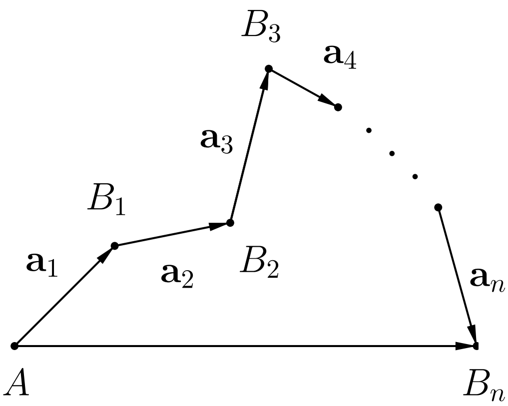


Рис. 8.

Из свойства 2° следует, что результат вычисления суммы $n$ векторов $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n$ не зависит от расстановки скобок (по определению мы можем складывать только два вектора!), и для нахождения суммы $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ можно воспользоваться следующим *правилом замыкания ломаной*: отложить вектор $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AB_1}$ от некоторой точки $A$, затем от конца вектора $\mathbf{a}_1$ отложить вектор $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{B_1B_2}$, затем от конца вектора $\mathbf{a}_2$ отложить вектор $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{B_2B_3}$ и так далее $\ldots$, от конца вектора $\mathbf{a}_k$ отложить вектор $\mathbf{a}_{k+1} = \overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ $(k = 3, 4, \ldots, n-1)$, тогда $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \overrightarrow{AB_n}$. См. рисунок 8.

Из свойства 4° следует, что для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ уравнение $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$, этот вектор называется *разностью* векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ и обозначается $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Из правила сложения векторов вытекает следующее правило для нахождения разности $\mathbf{b}-\mathbf{a}$: если отложить векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от одной точки: $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, то $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. См. рисунок 9.

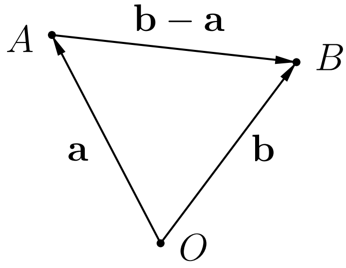


Рис. 9.

**Определение.** *Произведением вещественного числа* $\lambda$ *и вектора* $\mathbf{a}$ *называется вектор* $\lambda\mathbf{a}$, *однозначно определяемый следующими условиями:* 1) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, 2) $\lambda\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, *если* $\lambda > 0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *и* $\lambda\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, *если* $\lambda < 0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Отображение $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$, относящее паре, состоящей из вещественного числа и вектора, их произведение, $\{\lambda, \mathbf{a}\} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, называется *операцией умножения вектора на число.* Не трудно проверить, что эта операция обладает свойствами

5°. $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

6°. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

7°. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$;

8°. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$,

которые мы выделим особо, а также следующими свойствами:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}, \tag{4}$$

которые можно вывести формально из свойств 5°—8°.

Из определения операции умножения числа на вектор вытекает, кроме того, следующее свойство коллинеарных векторов:

**Предложение.** *Если* $\mathbf{b}||\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *то существует единственное число* $\lambda \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Действительно,

$$\mathbf{b} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \quad \text{при} \quad \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \quad \text{при} \quad \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}.$$

**Определение.** *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *и* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, *то число* $\lambda$ *называется отношением коллинеарных векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{a}$. *Это отношение обозначается следующим образом:*

$$\lambda = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\,.$$

**Рекомендуемая литература:** [11], лекции 1, 2; [1], глава I, §1.

# 2 Координаты векторов

## 2.1 Векторное пространство

Понятие вектора оказывается очень удобным для аксиоматизации геометрии. Рассмотренные выше свойства $1^\circ$—$8^\circ$ операций сложения векторов и умножения вектора на число приводят к следующему определению:

**Определение.** *Векторным пространством (над полем вещественных чисел) называется тройка* $(\mathbf{V}, +, \,\cdot\,)$, *состоящая из некоторого множества* $\mathbf{V}$ *и двух отображений: отображения*

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{V},$$

*относящего паре элементов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *из* $\mathbf{V}$ *некоторый третий элемент* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *этого множества, называемый суммой* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *и отображения*

$$\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \ni \{\lambda, \mathbf{a}\} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \in \mathbf{V},$$

*относящего паре* $\{\lambda, \mathbf{a}\}$, *состоящей из вещественного числа* $\lambda$ *и элемента* $\mathbf{a}$ *множества* $\mathbf{V}$, *некоторый элемент* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ *множества* $\mathbf{V}$, *называемый произведением* $\lambda$ *и* $\mathbf{a}$, *которые обладают вышеуказанными свойствами* $1^\circ$—$8^\circ$.

Элементы множества $\mathbf{V}$ при этом называют *векторами* (в абстрактном смысле слова). Для краткости записи векторное пространство $(\mathbf{V}, +, \,\cdot\,)$ обозначают одним символом $\mathbf{V}$.

Таким образом, свойства $1^\circ$— $8^\circ$ являются аксиомами в абстрактном векторном пространстве $\mathbf{V}$.

Помимо свойств $1^\circ$— $8^\circ$, которыми операции сложения векторов и умножения вектора на число в абстрактном векторном пространстве $\mathbf{V}$ обладают по определению, эти операции обладают и другими свойствами операций сложения векторов и умножения вектора на число в геометрическом пространстве. Но эти (другие) свойства в абстрактном векторном пространстве вытекают из свойств $1^\circ$— $8^\circ$, то есть являются формальными следствиями свойств $1^\circ$— $8^\circ$.

**Предложение.** *В векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *имеется только один нулевой вектор* $\mathbf{0}$*, то есть если два вектора* $\mathbf{0}_1$ *и* $\mathbf{0}_2$ *удовлетворяют аксиоме* $3^\circ$*, то* $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

**Доказательство.** Так как каждый из векторов $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяет аксиоме $3^\circ$, а сложение векторов коммутативно (аксиома $1^\circ$), то

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2.$$

**Предложение.** *В векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *имеется только один вектор* $-\mathbf{a}$*, противоположный вектору* $\mathbf{a}$*, то есть если два вектора* $(-\mathbf{a})_1$ *и* $(-\mathbf{a})_2$ *удовлетворяют аксиоме* $4^\circ$*, то* $(-\mathbf{a})_1 = (-\mathbf{a})_2$.

**Доказательство.** Так как каждый из векторов $(-\mathbf{a})_1$ и $(-\mathbf{a})_2$ удовлетворяет аксиоме $4^\circ$, а сложение векторов ассоциативно (аксиома $2^\circ$), то

$$(-\mathbf{a})_1 = (-\mathbf{a})_1 + \mathbf{0} = (-\mathbf{a})_1 + (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})_2) = \\ = ((-\mathbf{a})_1 + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a})_2 = \mathbf{0} + (-\mathbf{a})_2 = (-\mathbf{a})_2.$$

Из аксиомы $4^\circ$ следует, что (как и в случае геометрического пространства) для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ уравнение $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$. В частности, равенство $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$ влечет $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Предложение.** *Операция умножения вектора на число в векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *обладает свойствами* (4), *то есть для любого* $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ *и любого* $\lambda \in \mathbf{R}$ *имеют место следующие равенства:*

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}. \tag{5}$$

**Доказательство.** Первое равенство (5) следует из аксиом 8°, 6° и единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} = (1 + 0)\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a}.$$

Второе равенство (5) следует из аксиомы 7° и первого равенства (5):

$$\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda(0 \cdot \mathbf{a}) = (\lambda \cdot 0)\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Третье равенство (5) доказывается следующим образом:

$$(-1) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{a} = ((-1) + 1) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} \;\; \Rightarrow \;\; (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

**Задача 2.** Докажите, используя метод математической индукции, что результат вычисления суммы $n$ векторов

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n \tag{6}$$

в произвольном векторном пространстве $\mathbf{V}$ не зависит от расстановки скобок.

**Указание.** Основанием индукции (при $n = 3$) является аксиома 2° ассоциативности сложения векторов. Переход от суммы $k$ векторов к сумме $k + 1$ вектора осуществляется следующим образом. В зависимости от порядка осуществления действий (сложения двух векторов), всего имеется $k!$ способов вычисления суммы (6) при $n = k+1$. По тому, какое действие осуществляется первым, все эти способы разбиваются на $k$ классов $C_1, \ldots, C_k$ (в классе $C_i$ первое действие — сложение $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}$). По предположению индукции все способы вычисления суммы, принадлежащие одному классу, дают один и тот же результат. Но по предположению индукции один и тот же результат дают также любые два способа, начинающиеся с $(\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_{i+1})+\mathbf{a}_{i+2}$ и с $\mathbf{a}_i+(\mathbf{a}_{i+1}+\mathbf{a}_{i+2})$, то есть любые два способа из классов $C_i$ и $C_{i+1}$ приводят к одному результату.

### 2.2 Линейная зависимость векторов

Продолжаем рассматривать произвольное векторное пространство $\mathbf{V}$.

**Определения.** *Линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *с коэффициентами* $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$ *называется вектор*

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k.$$

*Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю:* $\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^k = 0$, *называется тривиальной. Очевидно, тривиальная линейная комбинация любых векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *является нулевым вектором* $\mathbf{0}$.

*Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулевому вектору:*

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

*Если же нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, *то эти векторы называются линейно независимыми.*

В соответствии с определением линейной независимости векторов, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^k = 0. \quad (7)$$

Во многих случаях линейная независимость векторов доказывается именно установлением импликации (7).

**Свойства линейно зависимых систем векторов**

1) *Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других.*

Доказательство.

«$\Leftarrow$» Если $\mathbf{a}_1 = \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k$, то $(-1)\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$.

«$\Rightarrow$» Если $\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ и, например, $\lambda^1 \neq 0$, то $\mathbf{a}_1 = -(\lambda^2/\lambda^1)\mathbf{a}_2 - \ldots - (\lambda^k/\lambda^1)\mathbf{a}_k$.

2) *Если среди векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *имеется нулевой, то эти векторы являются линейно зависимыми.*

Доказательство этого свойства очевидно: если, например, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, то $1\cdot\mathbf{a}_1 + 0\cdot\mathbf{a}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

3) *Если к линейно зависимым векторам* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *добавить любые векторы* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$*, то система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$*,* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ *будет линейно зависимой.*

Действительно, если $\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация, то $\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k + 0\cdot\mathbf{b}_1 + \ldots + 0\cdot\mathbf{b}_m = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

4) *Один вектор* $\mathbf{a}$ *линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой:* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Действительно, $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, поэтому нулевой вектор линейно зависим. Если же $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и $\lambda \neq 0$, то $\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

В пространстве $\mathbf{V}_3$ свободных векторов геометрического пространства, кроме того, выполняются следующие свойства:

5) *Два вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны:* $\mathbf{a}_1 || \mathbf{a}_2$.

6) *Три вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они параллельны одной плоскости.*

Такие векторы называются *компланарными.* Нулевой вектор считается параллельным всякой плоскости.

7) *Любые четыре вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ *линейно зависимы.* При

доказательстве этого свойства можно считать, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — линейно независимы (в случае, когда они линейно зависимы, утверждение очевидно). Отложим все четыре вектора от одной точки $O$. Пусть $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Спроектируем затем точку $A_4$ на каждую из прямых $OA_1$, $OA_2$ и $OA_3$ параллельно плоскости, содержащей две другие прямые. Пусть проекциями точки $A_4$ являются соответственно точки $B_1$, $B_2$ и $B_3$. По правилу замыкания ломаной получаем

$$\mathbf{a}_4 = \overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_4} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{OB_i}$ и $\overrightarrow{OA_i}$ коллинеарны, то найдутся такие числа $\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, что $\overrightarrow{OB_i} = \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Тогда $\mathbf{a}_4 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

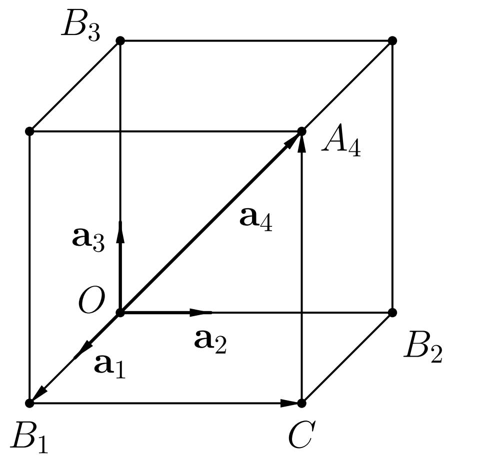


Рис. 10.

**Предложение (Основная лемма о линейной зависимости векторов).** *Пусть в векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *заданы два набора векторов* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *и* $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$, *и пусть при этом каждый вектор первого набора линейно выражается через векторы второго набора, то есть* $\mathbf{a}_\alpha = \lambda_\alpha^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_\alpha^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_\alpha^m \mathbf{b}_m$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *или, в подробной записи,*

$$
\begin{cases}
\mathbf{a}_1 = \lambda_1^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_1^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_1^m \mathbf{b}_m \\
\mathbf{a}_2 = \lambda_2^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_2^m \mathbf{b}_m \\
\ldots \\
\mathbf{a}_n = \lambda_n^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_n^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n^m \mathbf{b}_m \,.
\end{cases}
\tag{8}
$$

*Тогда при $n > m$ векторы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ линейно зависимы.*

**Доказательство.** Применим метод математической индукции по числу $m$ векторов в наборе $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$.

При $m = 1$ имеем $\mathbf{a}_\alpha = \lambda_\alpha^1 \mathbf{b}_1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Если $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, то векторы $\mathbf{a}_\alpha$ линейно зависимы по свойству 2). Если же $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, то из $\mathbf{a}_1 = \lambda_1^1 \mathbf{b}_1$ следует, что $\lambda_1^1 \neq 0$ и $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, но тогда из равенств $\mathbf{a}_1 = \lambda_1^1 \mathbf{b}_1$ и $\mathbf{a}_2 = \lambda_2^1 \mathbf{b}_1$ следует, что $\lambda_1^1 \mathbf{a}_2 - \lambda_2^1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Предположим теперь, что утверждение справедливо при всех $m \leqslant k$, и докажем, что оно справедливо и при $m = k+1$. Пусть имеет место набор линейных комбинаций (8), где $m = k+1$ и $n > m$. Если все коэффициенты при векторе $\mathbf{b}_1$ в линейных комбинациях (8) равны нулю: $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \ldots = \lambda_{k+1}^1 = 0$, то векторы $\mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, являются линейными комбинациями $k$ векторов $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k+1}$ и, следовательно, линейно зависимы по предположению индукции. Пусть теперь среди коэффициентов $\lambda_\alpha^1$ в комбинациях (8) имеется ненулевой. Можно считать, что $\lambda_1^1 \neq 0$ (в противном случае перенумеруем векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}$ таким образом, чтобы выполнялось $\lambda_1^1 \neq 0$). Рассмотрим набор векторов

$$
\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha - \frac{\lambda_\alpha^1}{\lambda_1^1} \mathbf{a}_1, \quad \alpha = 2, \ldots, n. \tag{9}
$$

Подставляя в формулы (9) линейные комбинации (8), получим представления векторов $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ в виде линейных комбинаций векторов

$\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k+1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_2 = \mu_2^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \mu_2^{k+1} \mathbf{b}_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{c}_n = \mu_n^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \mu_n^{k+1} \mathbf{b}_{k+1}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Поскольку набор $\{\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ состоит из $(n-1)$-го вектора, а набор $\{\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k+1}\}$ состоит из $k$ векторов, и $n-1 > k$, то по предположению индукции векторы $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ являются линейно зависимыми, то есть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов этого набора, равная нулю:

$$\nu^2 \mathbf{c}_2 + \ldots + \nu^n \mathbf{c}_n = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражения (9) для векторов $\mathbf{c}_\alpha$, получим равенство

$$\nu^2 \left( \mathbf{a}_2 - \frac{\lambda_2^1}{\lambda_1^1} \mathbf{a}_1 \right) + \ldots + \nu^n \left( \mathbf{a}_n - \frac{\lambda_n^1}{\lambda_1^1} \mathbf{a}_1 \right) = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Раскрывая скобки в левой части равенства (12), получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Подробное рассмотрение свойств систем векторов можно найти в рекомендуемой ниже литературе.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 2; [1], глава XI, §1; [7], глава II, §1; [5], глава I.

**Определение.** *Векторное пространство* $\mathbf{V}$ *называется* $n$*-мерным (пространством размерности* $n$*), если в этом пространстве выполняются две следующие аксиомы:*

9°. *Существуют* $n$ *линейно независимых векторов.*

10°. *Любой набор из* $(n+1)$*-го вектора является линейно зависимым.*

Число $n$ называется *размерностью* пространства $\mathbf{V}$ и обозначается следующим образом: $n = \dim \mathbf{V}$.

Если для любого $n$ в векторном пространстве $\mathbf{V}$ существуют $n$ линейно независимых векторов, это пространство называется *бесконечномерным.* Векторное пространство, имеющее конечную размерность, называют также *конечномерным.* Для обозначения векторного пространства размерности $n$ принято использовать символ $\mathbf{V}_n$.

Таким образом, свободные векторы геометрического пространства образуют 3-мерное векторное пространство, свободные векторы геометрической плоскости — 2-мерное векторное пространство, а свободные векторы прямой — 1-мерное векторное пространство.

Примером бесконечномерного векторного пространства может служить множество $C[a;b]$ непрерывных функций, определенных на отрезке $[a;b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. При любом $n \in \mathbf{N}$ многочлены $x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему.

Множество $\mathbf{R}[x]$ всех многочленов от одного переменного $x$ с вещественными коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a_i \in \mathbf{R},\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

и обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число также является бесконечномерным векторным пространством.

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{V}$ *— векторное пространство. Подмножество* $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ *называется подпространством в* $\mathbf{V}$*, если для любых* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{W}$ *и для любого* $\lambda \in \mathbf{R}$ *выполняется:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{W}, \quad \lambda\mathbf{a} \in \mathbf{W}.$$

Из этого определения следует, что операции

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V} \ \text{ и } \ \cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

индуцируют отображения

$$+ : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W} \ \text{ и } \ \cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}$$

(точнее было бы обозначить эти отображения $+_{\mathbf{W}}$ и $\cdot_{\mathbf{W}}$), и тройка $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ является векторным пространством. Если $\dim \mathbf{V} = n$, то, как это следует из свойств линейно зависимых систем, $\dim \mathbf{W} \leqslant \dim \mathbf{V}$.

Например, множество всех многочленов, степень которых не превышает данного числа $m \in \mathbf{N}$, образует подпространство в пространстве всех многочленов $\mathbf{R}[x]$.

Пусть $\pi$ — некоторая плоскость, а $\ell$ — некоторая прямая в геометрическом пространстве, тогда векторы пространства, параллельные плоскости $\pi$, образуют двумерное подпространство $\mathbf{V}_2(\pi) \subset \mathbf{V}_3$, а векторы, параллельные $\ell$, — одномерное подпространство $\mathbf{V}_1(\ell) \subset \mathbf{V}_3$. Эти подпространства называются *направляющими подпространствами* плоскости $\pi$ и прямой $\ell$ соответственно.

### 2.3 Базис в векторном пространстве

**Определение.** *Базисом в $n$-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}_n$ называется упорядоченный набор $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, из $n$ линейно независимых векторов.*

Любой вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$ образует с векторами базиса систему, состоящую из $(n+1)$-го вектора, которая является линейно зависимой по аксиоме 10°. Отсюда следует, что существует нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda^n \mathbf{e}_n + \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

В этой линейной комбинации $\lambda$ не может равняться нулю. Поделив ее на $\lambda$, представим вектор $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + a^n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i. \tag{13}$$

Из основной леммы о линейной зависимости следует, что в $n$-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}_n$ не может существовать набора из $m < n$ векторов, через которые линейно выражается любой вектор из $\mathbf{V}_n$.

**Замечание (Правило суммирования Эйнштейна).** В геометрии и линейной алгебре принято суммы вида (13) записывать, опуская знак суммирования: $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$. В дальнейшем всюду в выражениях вида

$$a^i\mathbf{e}_i, \quad a^ib_i, \quad g_{ij}a^ib^j$$

по каждой паре одинаковых индексов, из которых один стоит внизу, а другой наверху, предполагается суммирование по всей их области изменения.

Коэффициенты $\{a^1, a^2, \ldots, a^n\} = \{a^i\}$ разложения (13) вектора $\mathbf{a}$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$ называются *координатами вектора* $\mathbf{a}$ в базисе (или относительно базиса) $\{\mathbf{e}_i\}$.

**Предложение.** *Координаты вектора относительно данного базиса определяются однозначно.*

Действительно, предположив, что $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i = b^i\mathbf{e}_i$, получим $a^i\mathbf{e}_i - b^i\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, откуда $(a^i - b^i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ и, следовательно, так как векторы базиса не могут быть линейно зависимыми, $a^i - b^i = 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Следующее утверждение немедленно следует из однозначной определенности координат векторов:

**Предложение.** *Имеют место следующие соотношения*:
1) $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \iff c^i = a^i + b^i, \quad i = 1, \ldots, n$;
2) $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \iff a^i = \lambda b^i, \quad i = 1, \ldots, n$;
3) $\mathbf{b} = \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k \iff b^i = \lambda^1a^i_1 + \lambda^2a^i_2 + \ldots + \lambda^ka^i_k$, $i = 1, \ldots, n$.

Для каждого натурального числа $n$ имеется «стандартное» векторное пространство размерности $n$. Это пространство $\mathbf{R}^n$, элементами которого являются $n$-строки $\{a^i\} = \{a^1, \ldots, a^n\}$, состоящие из вещественных чисел, со следующими операциями сложения и умножения на число:

$$\{a^i\} + \{b^i\} = \{a^i + b^i\}, \quad \lambda\{a^i\} = \{\lambda a^i\}.$$

Стандартный базис в этом пространстве образуют следующие строки: $\{\mathbf{e}_i = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}\}$, где в строке $\mathbf{e}_i$ единица стоит на $i$-том месте, а остальные элементы этой строки нулевые. При этом $\{a^i\} = a^k\mathbf{e}_k = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n$.

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$ *— векторные пространства. Отображение* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *называется линейным, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

$$1)\ \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}); \quad 2)\ \varphi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\varphi(\mathbf{a}).$$

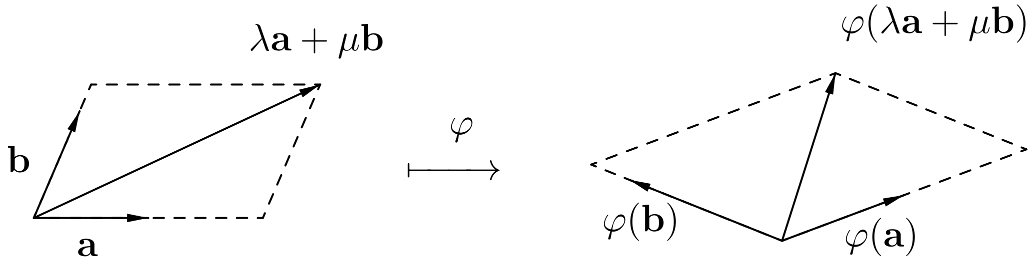


Рис. 11.

**Замечание.** Очевидно, отображение $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ является линейным тогда и только тогда, когда для любой линейной комбинации $\mathbf{b} = \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k$ выполняется $\varphi(\mathbf{b}) = \lambda^1\varphi(\mathbf{a}_1) + \lambda^2\varphi(\mathbf{a}_2) + \ldots + \lambda^k\varphi(\mathbf{a}_k)$.

Поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ с операциями сложения и умножения чисел является 1-мерным векторным пространством. Как следствие из доказанных выше предложений, получаем

**Предложение.** *Пусть* $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, *— базис в векторном пространстве* $\mathbf{V}_n$. *Тогда отображение* $\mathbf{e}^i : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto a^i \in \mathbf{R}$, *относящее вектору* $\mathbf{a}$ *его* $i$*-тую координату* $a^i$ *относительно этого базиса, является линейным отображением.*

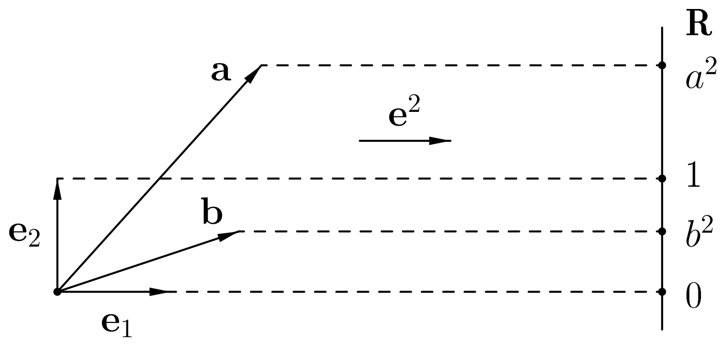


Рис. 12.

**Предложение.** *Пусть* $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ *и* $\mathbf{V}''$ *— векторные пространства, а* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *и* $\psi : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ *— линейные отображения. Тогда композиция* $\psi \circ \varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}''$ *также является линейным отображением.*

Действительно, первое условие линейности, например, проверяется следующим образом: $(\psi \circ \varphi)(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \psi(\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \psi(\varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})) = \psi(\varphi(\mathbf{a})) + \psi(\varphi(\mathbf{b})) = (\psi \circ \varphi)(\mathbf{a}) + (\psi \circ \varphi)(\mathbf{b})$.

**Определение.** *Взаимно однозначное линейное отображение* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *называется изоморфизмом. Если существует изоморфизм* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, *то векторные пространства* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$ *называются изоморфными.*

Имеет место следующее очевидное предложение.

**Предложение.**

1) *Пусть* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *и* $\psi : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ *— изоморфизмы векторных пространств. Тогда обратное отображение* $\varphi^{-1} : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}$ *и композиция* $\psi \circ \varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}''$ *— изоморфизмы векторных пространств.*

2) *Отображение* $\{\mathbf{e}^i\} : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \{a^i\} = \{a^1, \dots, a^n\} \in \mathbf{R}^n$, *относящее вектору* $\mathbf{a}$ *набор его координат* $\{a^i\}$ *относительно некоторого базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$, *— изоморфизм.*

**Следствие.** *Любые два векторных пространства одной размерности* $\mathbf{V}_n$ *и* $\mathbf{W}_n$ *изоморфны.*

Действительно, каждое из них изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$. Выбирая базисы $\{\mathbf{e}_i\}$ в пространстве $\mathbf{V}_n$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$ в пространстве $\mathbf{W}_n$, изоморфизм между $\mathbf{V}_n$ и $\mathbf{W}_n$ можно получить, устанавливая соответствие между векторами с одинаковыми координатами по отношению к выбранным базисам:

$$\mathbf{V}_n \ni a^i \mathbf{e}_i \mapsto a^i \mathbf{e}'_i \in \mathbf{W}_n.$$

Таким образом, с точностью до изоморфизма, существует только одно векторное пространство размерности $n$. В частности, все векторные пространства размерности 3 изоморфны пространству свободных векторов геометрического пространства и векторному пространству $\mathbf{R}^3$.

В геометрическом пространстве базис образуют любые три некомпланарных вектора $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, а на плоскости — любые два неколлинеарных вектора $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Произвольный вектор $\mathbf{a}$ при этом может быть представлен соответственно в виде $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$.

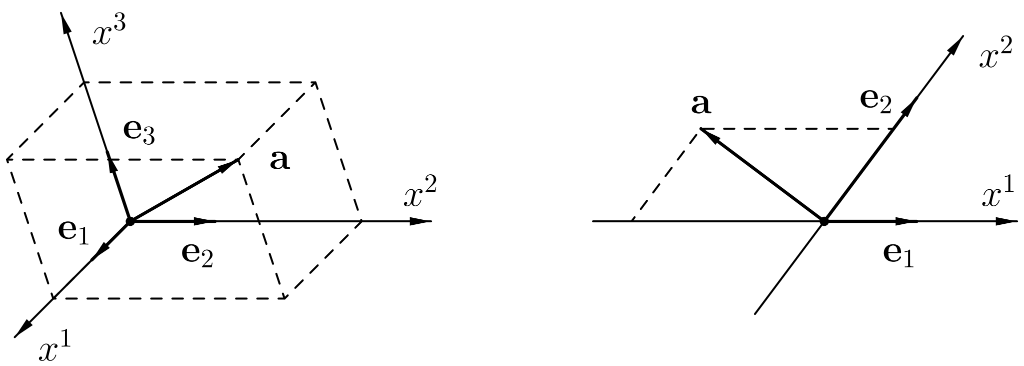


Рис. 13.

Первый из двух представленных выше рисунков представляет на самом деле линейное отображение (проекцию) трехмерного векторного пространства на плоскость. Линейно независимые векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ трехмерного пространства отображены на три вектора (необходимо линейно зависимые), лежащие на плоскости. Пользуясь линейными отображениями, можно отобразить на плоскость и четырехмерное векторное пространство.

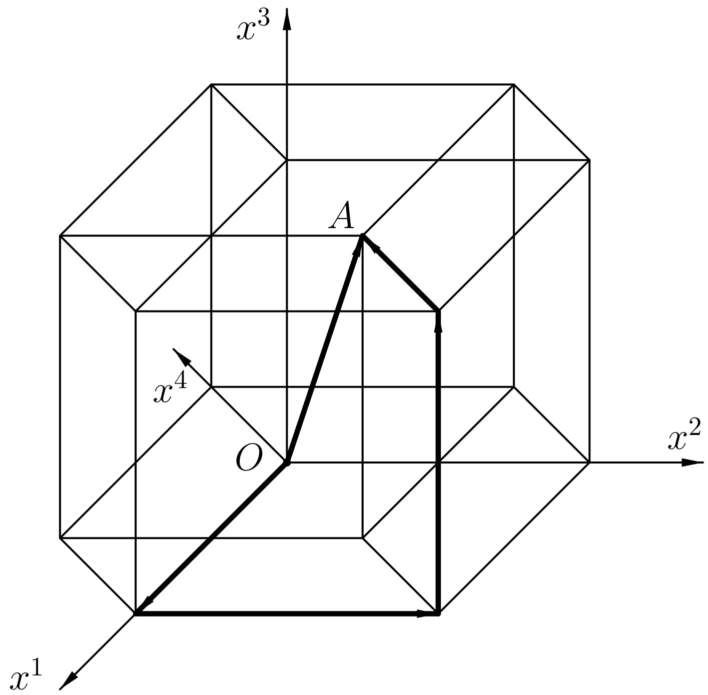


Рис. 14.

На рисунке 14 представлена проекция прямоугольной системы координат в четырехмерном пространстве и координатного четырехмерного куба с ребром длины единица на плоскость.

## 2.4 Примеры

Основной идеей при отыскании неизвестного вектора $\overrightarrow{AB}$ является, в соответствии с правилом замыкания ломаной, нахождение цепочки $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{M_kB}$, состоящей из известных векторов. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_kB}$.

**Задача 3.** В треугольнике $ABC$: $AF$ — медиана, а $E$ — центр тяжести (точка пересечения медиан). Выразить векторы $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AE}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

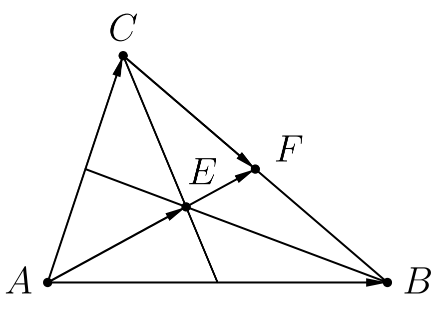


Рис. 15.

**Решение.** См. рисунок 15.

Имеем $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Отсюда находим $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

**Задача 4.** Дан треугольник $ABC$. Найти точку $O$, такую что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

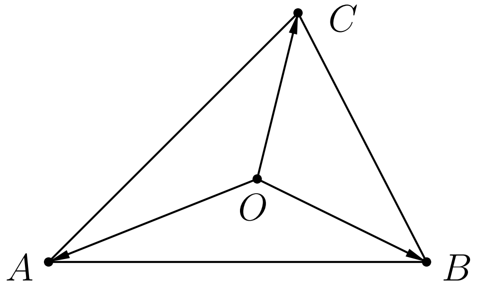

Рис. 16.

**Решение.** См. рисунок 16. Имеем: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ и, следовательно, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет одна точка — центр тяжести треугольника $ABC$.

**Задача 5.** На векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ построен параллелепипед. Доказать, что диагональ $OD$ этого параллелепипеда проходит через центр тяжести $E$ треугольника $ABC$.

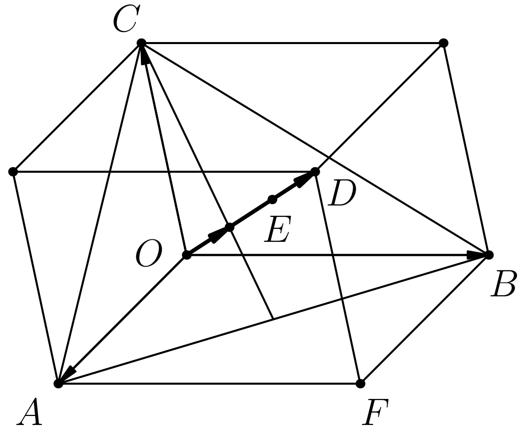

Рис. 17.

**Решение.** См. рисунок 17. Пусть $F$ — четвертая вершина параллелепипеда, лежащая в плоскости $OAB$. Имеем: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Таким образом, $\overrightarrow{OE} || \overrightarrow{OD}$.

**Задача 6.** Доказать, что стороны $AB$ и $DC$ четырехугольника $ABCD$ параллельны тогда и только тогда, когда отрезок $MN$, соединяющий середины их сторон, проходит через точку $O$ пересечения диагоналей.

**Решение.** См. рисунок 18. Рассмотрим базис на плоскости, состоящий из векторов $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$. Пусть $\overrightarrow{OC} = \lambda\mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{OD} = \mu\mathbf{e}_2$. По отношению к введенному базису, векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ имеют следующие координаты:

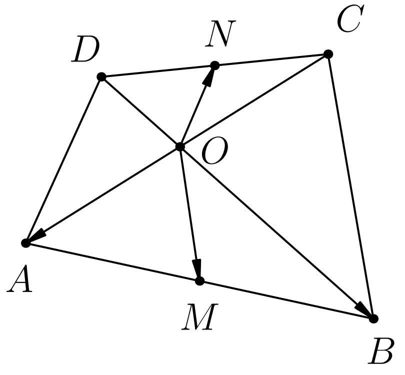


Рис. 18.

$$\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}, \ \overrightarrow{ON} = \left\{\frac{1}{2}\lambda; \frac{1}{2}\mu\right\},$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-1; 1\}, \ \overrightarrow{DC} = \{\lambda; -\mu\}.$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{OM} || \overrightarrow{ON} \ \Leftrightarrow \lambda = \mu \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} || \overrightarrow{DC}.$$

**Рекомендуемая литература:** [11], лекции 3, 4, 5; [1], глава I, §4; глава XI, §§2, 3, 4.

**Задачи и упражнения:** [3], 1159, 1160, 1162, 1164, 1171, 1172, 1184, 1186, 1191, 1192, 1193; [6], тема 1.

# 3 Аффинные системы координат на плоскости и в пространстве

## 3.1 Аффинный репер

**Определения.** *Репером (более точно, аффинным репером) в геометрическом пространстве называется набор* $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *состоящий из точки* $O$, *называемой началом репера, и базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}_3$ *свободных векторов геометрического пространства.*

*Радиус-вектором точки* $A$ *относительно репера* $\{O; \mathbf{e}_i\}$ *(или относительно точки* $O$*) называется вектор* $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$.

*Координатами точки* $A$ *относительно репера* $\{O; \mathbf{e}_i\}$ *называются координаты* $\{x^i_A\} = \{x^1_A; x^2_A; x^3_A\}$ *ее радиус-вектора* $\mathbf{r}_A$ *относительно базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}_3$.

Таким образом,

$$\mathbf{r}_A = x^i_A \mathbf{e}_i = x^1_A \mathbf{e}_1 + x^2_A \mathbf{e}_2 + x^3_A \mathbf{e}_3.$$

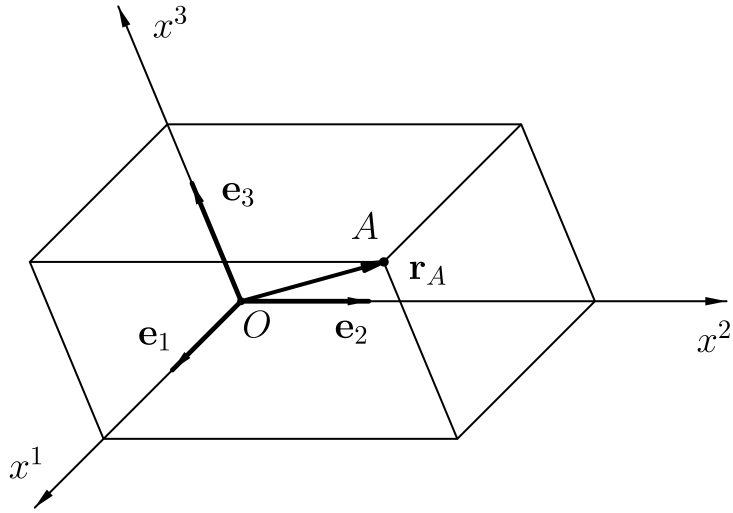


Рис. 19.

Чтобы отличать в координатной записи точки от векторов, координаты точек будем заключать в круглые скобки: $A(x^1_A; x^2_A; x^3_A)$.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$, тогда имеют место следующие формулы, связывающие координаты точек и векторов:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \quad x^i_B = x^i_A + v^i, \quad v^i = x^i_B - x^i_A. \quad (14)$$

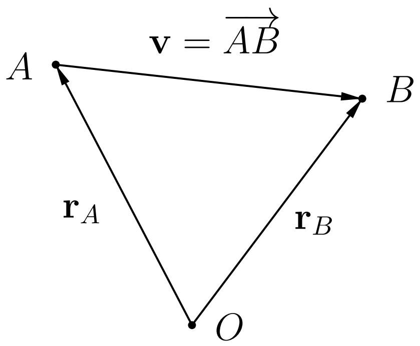


Рис. 20.

**Замечание.** Все вышеуказанные формулы справедливы и на плоскости, только в случае плоскости индекс $i$ принимает два значения, а не три: $\mathbf{r}_A = x^i_A \mathbf{e}_i = x^1_A \mathbf{e}_1 + x^2_A \mathbf{e}_2$. Эти же формулы справедливы и для прямой, рассматриваемой как самостоятельный геометрический объект размерности 1, при этом индекс $i$ будет принимать всего одно значение $i = 1$.

### 3.2 Простое отношение трех точек прямой

**Определение.** *Простым отношением трех точек $A$, $B$ и $C$, принадлежащих прямой (прямая может быть расположена в пространстве, на плоскости или рассматриваться сама по себе) и таких, что $B \neq C$, называется следующее число:*

$$(ABC) = (AB, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}. \tag{15}$$

*Это число $(ABC)$ называют также отношением, в котором точка $C$ делит (направленный) отрезок $AB$.*

Пусть точки $A$ и $B$ даны и требуется найти точку $C$, делящую отрезок $AB$ в отношении $(ABC) = \lambda$. Из (15) получаем $\lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)$, откуда

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda} \quad \Longrightarrow \quad x_C^i = \frac{x_A^i + \lambda x_B^i}{1 + \lambda}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Если точка $E$ является серединой отрезка $AB$, то $(ABE) = 1$ и

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}, \quad x_E^i = \frac{x_A^i + x_B^i}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

### 3.3 Аффинное пространство

Сформулированное выше понятие векторного пространства позволяет с помощью простого списка аксиом полностью описать свойства свободных векторов геометрического пространства. Следующее ниже определение аффинного пространства позволяет аксиоматически задать само геометрическое пространство как множество точек.

**Определение.** *Аффинным пространством называется тройка $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \psi)$, состоящая из некоторого множества $\mathcal{A}$, элементы которого называются точками, векторного пространства $\mathbf{V}$ и отображения $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$, относящего упорядоченной паре точек*

$\{A, B\}$ *множества* $\mathcal{A}$ *некоторый вектор из* $\mathbf{V}$, *обозначаемый* $\overrightarrow{AB}$, *такого, что выполняются следующие две аксиомы*:

1°. *Для любых* $A \in \mathcal{A}$ *и* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *существует единственная точка* $B$ *такая, что* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

2°. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *для любых* $A, B, C \in \mathcal{A}$ (*равенство треугольника*).

Аффинное пространство обычно обозначается одним символом $\mathcal{A}$. Векторное пространство $\mathbf{V}$ называется *ассоциированным* с аффинным пространством $\mathcal{A}$. *Размерностью* $\dim \mathcal{A}$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется размерность ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}$. Аффинное пространство размерности $n$ будем обозначать следующим образом: $\mathcal{A}_n$.

Из определения аффинного пространства легко выводятся следующие два соотношения:

1) $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Для их доказательства достаточно записать равенство треугольника 2° сначала при $B = C = A$, а затем при $C = A$.

С каждым векторным пространством можно ассоциировать аффинное пространство $(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \psi)$, полагая $\psi : \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Полагая затем $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, получим «стандартное» аффинное пространство $\mathbf{R}^n$ размерности $n$ для каждого $n$.

Из определения аффинного пространства следует, что множество точек геометрического пространства с множеством свободных векторов и отображением, относящим паре точек $A$ и $B$ свободный вектор, представителем которого является вектор $\overrightarrow{AB}$, является трехмерным аффинным пространством.

*Репером* в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ (как и в геометрическом пространстве) называется набор $\{O, \mathbf{e}_i\}$, состоящий из точки $O \in \mathcal{A}_n$, называемой началом репера, и базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_n$. *Радиус-вектором* точки $A$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$ называется вектор $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$. Так же, как и в случае геометрического пространства, имеют место формулы (14).

**Определение.** *Пусть* $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \psi)$ *и* $(\mathcal{A}', \mathbf{V}', \psi')$ *— два аффинных пространства. Взаимно однозначное отображение* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *называется изоморфизмом аффинных пространств, если* $\Phi$ *индуцирует изоморфизм ассоциированных векторных пространств, то есть если существует изоморфизм* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$*, такой что*

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{\textit{при}} \quad A' = \Phi(A), \quad B' = \Phi(B). \tag{16}$$

*Если существует изоморфизм* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$*, то аффинные пространства* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}'$ *называются изоморфными.*

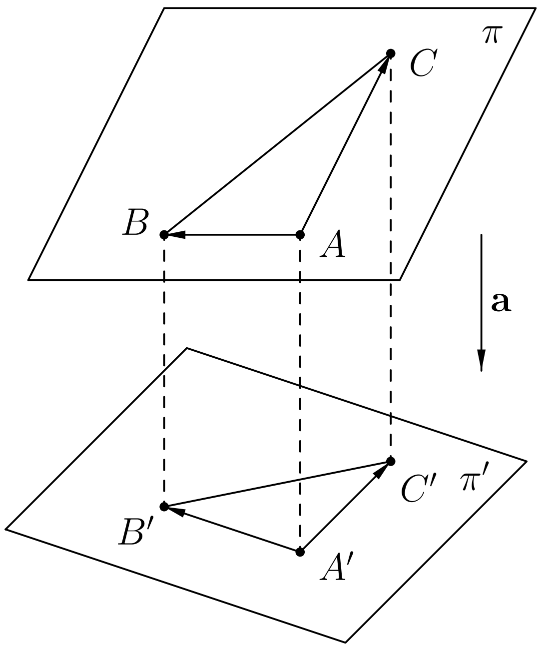


Рис. 21.

В аффинном пространстве не определены такие понятия евклидовой геометрии как расстояние между точками и угол между прямыми, поэтому аффинный изоморфизм между двумя евклидовыми (геометрическими) плоскостями может не сохранять расстояния между точками и углы между прямыми. Однако аффинные изоморфизмы между плоскостями в трехмерном пространстве появляются естественным образом. Рассмотрим две плоскости $\pi$ и $\pi'$ в пространстве, такие что $\pi \nparallel \pi'$, и вектор $\mathbf{a}$, не параллельный ни одной из этих плоскостей. Тогда проектирование $pr : \pi \to \pi'$ плоскости $\pi$ на плоскость $\pi'$ параллельно вектору $\mathbf{a}$, то есть отображение, относящее точке $M \in \pi$ точку $M' \in \pi'$, такую что $\overrightarrow{MM'} \parallel \mathbf{a}$, является изоморфизмом этих плоскостей как двумерных аффинных пространств (см. рисунок 21).

Если $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — изоморфизм аффинных пространств, то изоморфизм векторных пространств $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, определяемый соотношением (16), называется изоморфизмом, *ассоциированным* с изоморфизмом $\Phi$.

Следует отметить, что из условия (16) прежде всего следует, что если $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$, $D' = \Phi(D)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}. \tag{17}$$

Только при выполнении условия (17) отображение $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ индуцирует некоторое отображение $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$.

**Предложение.** *Любые два аффинных пространства одной размерности $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}'_n$ изоморфны.*

*В частности, всякое аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ изоморфно аффинному пространству $\mathbf{R}^n$.*

**Доказательство.** Пусть $\{O, \mathbf{e}_i\}$ — произвольный репер в $\mathcal{A}_n$, а $\{O', \mathbf{e}'_i\}$ — произвольный репер в $\mathcal{A}'_n$, тогда отображение $\Phi$, относящее точке $M \in \mathcal{A}_n$, имеющей координаты $(x^i_M)$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$, точку $M' \in \mathcal{A}'_n$, имеющую те же самые координаты $(x^i_M)$ относительно репера $\{O', \mathbf{e}'_i\}$, является изоморфизмом $\Phi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_n$. $\square$

Из этого предложения следует, что, с точностью до изоморфизма, существует только одно аффинное пространство данной размерности $n$. В частности, все аффинные пространства размерности 3 изоморфны геометрическому пространству и аффинному пространству $\mathbf{R}^3$.

**Замечание.** Введение аффинных пространств позволяет не только строго описать геометрическое трехмерное пространство и геометрическую плоскость, но и рассматривать их многомерные аналоги. Отметим, что остается еще определить такие геометрические понятия как расстояние между точками и угол между прямыми. Это будет осуществлено ниже с помощью операции скалярного произведения векторов.

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{W}_m \subset \mathbf{V}_n$ *— подпространство в векторном пространстве* $\mathbf{V}_n$*, ассоциированном с* $n$*-мерным аффинным пространством* $\mathcal{A}_n$*. Плоскостью размерности* $m$ *(*$m$*-плоскостью) в* $\mathcal{A}_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$*, проходящей через точку* $A$ *и имеющей направляющее векторное подпространство* $\mathbf{W}_m$*, называется следующее подмножество в* $\mathcal{A}_n$:

$$\pi_m = \{M \in \mathcal{A}_n \mid \overrightarrow{AM} \in \mathbf{W}_m\}.$$

В геометрическом пространстве 1-плоскости — это прямые, а 2-плоскости — это обычные плоскости.

Из этого определения следует, что тройка $(\pi_m, \mathbf{W}_m, \psi|_\pi)$, где $\psi|_\pi$ — ограничение отображения $\psi$ на $\pi_m \times \pi_m$, — $m$-мерное аффинное пространство. Такое пространство называется *подпространством* в $\mathcal{A}_n$.

### 3.4 Примеры

Следующие примеры показывают, как аффинные координаты и простое отношение трех точек могут использоваться при решении геометрических задач.

**Задача 7.** (Теорема Менелая). На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ даны точки $C_0$, $A_0$ и $B_0$, такие что $(BCA_0) = \lambda_1$, $(CAB_0) = \lambda_2$ и $(ABC_0) = \lambda_3$. Доказать, что точки $A_0$, $B_0$ и $C_0$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

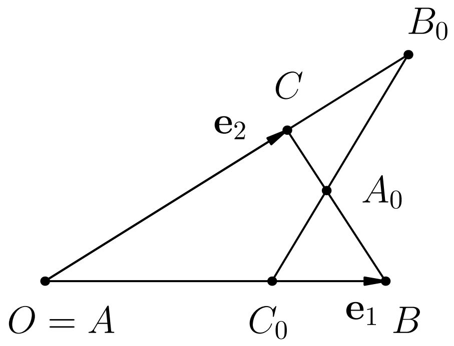


Рис. 22.

**Решение.** См. рисунок 22. Рассмотрим аффинный репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$, где $O = A$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. В этом репере вершины треугольника и рассматриваемые на его сторонах точки имеют следующие координаты: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A_0\left(\frac{1}{1+\lambda_1}; \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)$, $B_0\left(0; \frac{1}{1+\lambda_2}\right)$, $C_0\left(\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}; 0\right)$.

Простые вычисления показывают, что

$$\overrightarrow{C_0A_0} || \overrightarrow{C_0B_0} \iff \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1.$$

**Задача 8.** В пространстве заданы четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$. Точка $E$ — середина $AB$, а точка $F$ — середина $CD$. Доказать, что

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

**Решение.** См. рисунок 23.

$$\overrightarrow{EF} = \mathbf{r}_F - \mathbf{r}_E = \frac{(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D) - (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)}{2} =$$
$$= \frac{(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) + (\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B)}{2} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}.$$

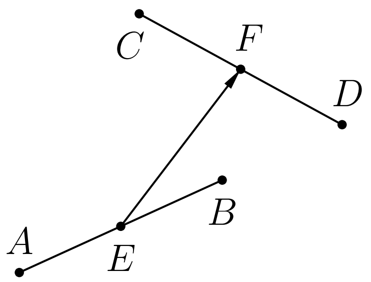


Рис. 23.

**Задача 9.** Найти радиус-вектор точки $E$ — центра тяжести треугольника $ABC$, если известны радиус-векторы его вершин.

**Решение.** См. рисунок 24. Пусть $F$ — середина $BC$, тогда $(BCF) = 1$ и $(AFE) = 2$. Отсюда

$$\mathbf{r}_F = \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{2},$$

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + 2\mathbf{r}_F}{3} = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{3}.$$

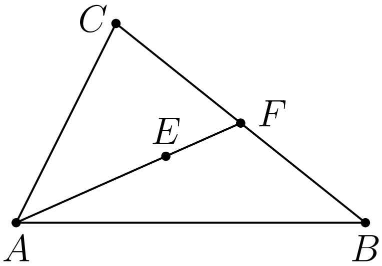


Рис. 24.

**Задача 10.** Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Доказать, что в этой же точке пересекаются и прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней.

**Решение.** См. рисунок 25. Обозначим вершины тетраэдра буквами $A$, $B$, $C$, $D$. Пусть $E$ — середина $AB$, $F$ — середина $CD$, а $G$ — середина $EF$. Имеем:

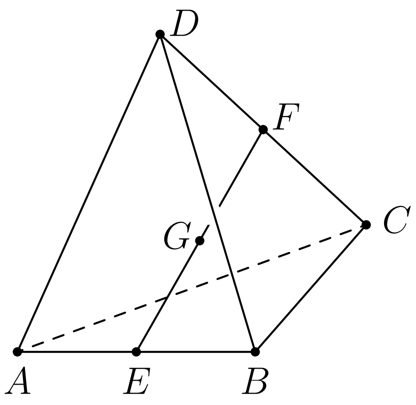


Рис. 25.

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}, \quad \mathbf{r}_F = \frac{\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D}{2},$$

$$\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{r}_E + \mathbf{r}_F}{2} = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D}{4}.$$

Точка $G$ — центр тяжести тетраэдра. Очевидно, что это и есть указанная в задаче точка.

Второе утверждение задачи доказывается аналогично:

$$\mathbf{r}_H = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{r}_D + 3\,\mathbf{r}_H}{4}.$$

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 5; [1], глава I, §4; глава XII, §§1, 2, 3.

**Задачи и упражнения:** [3], 1175, 1176, 1180, 1181, 68, 69, 70, 73, 75, 79, 80, 52, 54, 1274, 1276; [6], темы 2–5.

# 4 Скалярное произведение векторов

## 4.1 Проекции векторов на прямую и плоскость

Рассмотрим в геометрическом пространстве плоскость $\pi$ и прямую $\ell$, пересекающую $\pi$ в одной точке. Обозначим символами $\mathbf{V}_1(\ell)$ и $\mathbf{V}_2(\pi)$ подпространства в $\mathbf{V}_3$, состоящие соответственно из векторов, параллельных прямой $\ell$ и плоскости $\pi$. Проектируя векторы на $\ell$

параллельно $\pi$ и на $\pi$ параллельно $\ell$, получим отображения $\mathrm{pr}_\ell : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_1(\ell)$ и $\mathrm{pr}_\pi : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_2(\pi)$.

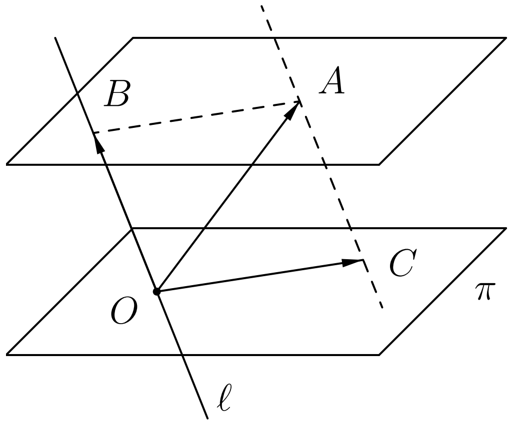


Рис. 26.

**Предложение.** $\mathrm{pr}_\ell : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_1(\ell)$ *и* $\mathrm{pr}_\pi : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_2(\pi)$ *— линейные отображения.*

**Доказательство.** Выберем в $\mathbf{V}_3$ базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ такой, что $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{V}_1(\ell)$, а $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в $\mathbf{V}_2(\pi)$. Тогда

$$\mathrm{pr}_\ell(v^i\mathbf{e}_i) = v^1\mathbf{e}_1, \quad \mathrm{pr}_\pi(v^i\mathbf{e}_i) = v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3.$$

Для $\mathrm{pr}_\pi$ имеем:

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}_\pi(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \mathrm{pr}_\pi(\lambda v^i\mathbf{e}_i + \mu w^i\mathbf{e}_i) = \mathrm{pr}_\pi((\lambda v^i + \mu w^i)\mathbf{e}_i) = \\ = (\lambda v^2 + \mu w^2)\mathbf{e}_2 + (\lambda v^3 + \mu w^3)\mathbf{e}_3 = \lambda(v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3) + \\ + \mu(w^2\mathbf{e}_2 + w^3\mathbf{e}_3) = \lambda\,\mathrm{pr}_\pi(\mathbf{v}) + \mu\,\mathrm{pr}_\pi(\mathbf{w}).\end{gathered}$$

Аналогично доказывается линейность отображения $\mathrm{pr}_\ell$.

**Определение.** *Осью в геометрическом пространстве называют ориентированную прямую, то есть прямую, на которой зафиксировано одно из двух возможных направлений. Направляющим вектором оси называется всякий ненулевой вектор, направление которого совпадает с направлением оси.*

Для обозначения оси будем использовать символ $\ell\uparrow$.

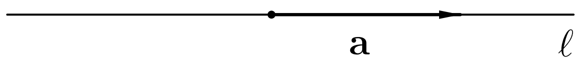

Рис. 27.

**Замечания.**

1. Интуитивно ясное понятие направления, используемое в определении оси, можно следующим образом формализовать для случая произвольного векторного пространства $\mathbf{V}_n$ (а, значит, и для любого аффинного пространства). На множестве $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ненулевых векторов пространства $\mathbf{V}_n$ введем отношение эквивалентности, полагая $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ и $\lambda > 0$. Тогда *направление* в $\mathbf{V}_n$ — это элемент фактор-множества $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$. В пространстве $\mathbf{V}_3$ свободных векторов геометрического пространства каждый такой класс эквивалентности содержит ровно один *единичный вектор* (так называют векторы длины единица). Поэтому множество направлений в геометрическом пространстве находится во взаимно однозначном соответствии со множеством единичных векторов. Если отложить все единичные векторы от одной точки, то их концы опишут сферу единичного радиуса. Поэтому множество направлений в геометрическом пространстве находится во взаимно однозначном соответствии со множеством точек сферы единичного радиуса. Аналогичным образом, множество направлений на геометрической плоскости находится во взаимно однозначном соответствии со множеством точек окружности единичного радиуса.

2. В случае неориентированной прямой $\ell$ (прямой линии в обычном смысле), ее направление задается любым ненулевым вектором, параллельным этой прямой. В этом случае термин *направление* в $\mathbf{V}_n$ означает элемент фактор-множества $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$ по отношению эквивалентности, определенному следующим образом: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Множество направлений в этом смысле в геометриче-

ском пространстве находится во взаимно однозначном соответствии со множеством прямых пространства, проходящих через фиксированную точку, или множеством пар диаметрально противоположных точек сферы единичного радиуса. У этого множества есть свое название: проективная плоскость. Изложению начал проективной геометрии посвящена последняя глава третьей части настоящего учебного пособия [15].

3. Как элемент фактор-множества $\mathbf{V}_n \backslash \{\mathbf{0}\}/\sim$, направление задается любым своим представителем — ненулевым вектором. Поэтому в дальнейшем, говоря о некотором направлении, будем обозначать его любым представляющим его вектором.

**Определение.** *Пусть $\ell\uparrow$ — ось с направляющим вектором $\mathbf{a}$, а $\mathbf{b} \in \mathbf{V}_3$ — произвольный вектор. Ортогональной проекцией ненулевого вектора $\mathbf{b}$ на ось $\ell\uparrow$ называется число $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Для нулевого вектора $\mathbf{0} \in \mathbf{V}_3$ проекция на любую ось полагается равной нулю, $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}(\mathbf{0}) = 0$.*

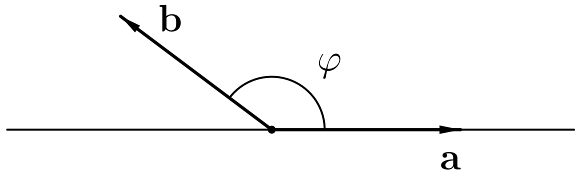


Рис. 28.

**Предложение.** *Отображение $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow} : \mathbf{V}_3 \ni \mathbf{b} \mapsto \mathrm{pr}_{\ell\uparrow}(\mathbf{b}) \in \mathbf{R}$ — линейное отображение.*

**Доказательство.** Рассмотрим в $\mathbf{V}_3$ базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, а $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — неколлинеарные векторы ортогональные вектору $\mathbf{e}_1$. Тогда $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow} : \mathbf{b} \mapsto b^1$, следовательно, $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}$ — линейное отображение. $\square$

Поскольку проекции на все оси $\ell\uparrow$ с фиксированным направляющим вектором $\mathbf{a}$ — это одно и то же отображение, то для отображения $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}$ будем использовать также обозначение $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}$.

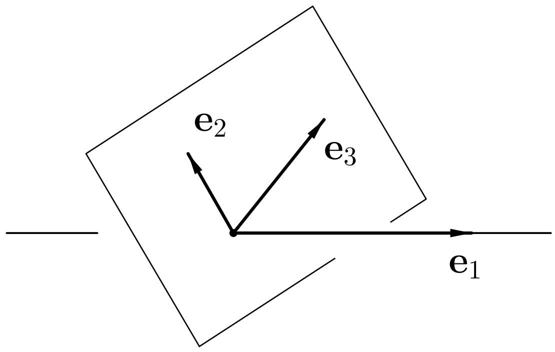


Рис. 29.

## 4.2 Скалярное произведение

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *— ненулевые векторы из* $\mathbf{V}_3$*, а* $\varphi$ *— угол между ними. Скалярным произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется число*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

*Если один из векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *является нулевым (или оба являются нулевыми), то их скалярное произведение полагается равным нулю:*

$$(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0.$$

**Геометрические свойства скалярного произведения.**

Следующие свойства скалярного произведения векторов вытекают непосредственно из определения:

1) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ (по определению считается, что $\mathbf{0} \perp \mathbf{b}$ для любого $\mathbf{b} \in \mathbf{V}_3$).

2) Предполагая, что угол $\varphi$ между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ удовлетворяет соотношению $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, имеем:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0 \iff \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0 \iff \varphi > \frac{\pi}{2}.$$

3) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$.

4) $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$.

5) Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые векторы, то угол $\varphi \in [0, \pi]$ между ними можно найти из уравнения

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\,.$$

**Алгебраические свойства скалярного произведения.**

$1^\circ$. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

$2^\circ$. $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

$3^\circ$. $(\mathbf{c}, \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c}, \mathbf{b})$.

$4^\circ$. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \implies (\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$.

**Доказательство.** $1^\circ$ и $4^\circ$ вытекают непосредственно из определения. $3^\circ$ следует из $1^\circ$ и $2^\circ$. Докажем $2^\circ$.

Если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, то $2^\circ$ выполняется очевидным образом. Если $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, то $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{c}|\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{c}|\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})+\mu|\mathbf{c}|\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{c})+\mu(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$ *— векторные пространства. Отображение* $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *называется билинейным, если*

$\varphi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \mu\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$,

$\varphi(\mathbf{c}, \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\varphi(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + \mu\varphi(\mathbf{c}, \mathbf{b})$.

Таким образом, $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — билинейно, если при произвольном фиксированном $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ каждое из отображений $\mathbf{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathbf{W}$, $\mathbf{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{a}) \in \mathbf{W}$, является линейным.

**Следствие.** *Свойства* $2^\circ$ *и* $3^\circ$ *в совокупности эквивалентны билинейности отображения* $g : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$.

## 4.3 Примеры

Следующие примеры показывают как скалярное произведение может применяться при решении различных геометрических задач.

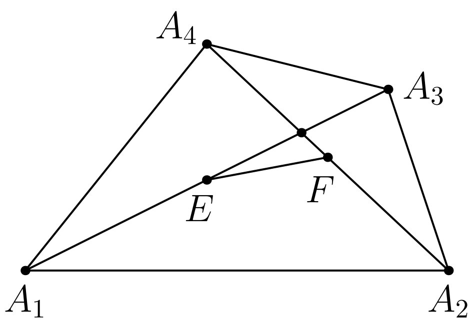


Рис. 30.

**Задача 11.** (Теорема Эйлера). Доказать, что сумма квадратов сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ равна сумме квадратов его диагоналей и учетверенного квадрата расстояния между серединами диагоналей.

**Решение.** См. рисунок 30. Обозначим середины диагоналей $A_1A_3$ и $A_2A_4$, соответственно, буквами $E$ и $F$, и пусть $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор вершины $A_i$. В задаче требуется доказать, что имеет место следующее равенство:

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2+(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)^2+(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_3)^2+(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)^2=$$
$$=(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_2)^2+(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)^2+4\left(\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3)}{2}-\frac{(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4)}{2}\right)^2.$$

Для доказательства этого равенства достаточно раскрыть скобки и собрать подобные члены.

**Задача 12.** Точка $M$ расположена внутри выпуклого $n$-угольника $P=A_1A_2\dots A_n$. Доказать, что найдется такая сторона $A_iA_{i+1}$ этого $n$-угольника, что основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на $A_iA_{i+1}$ является внутренней точкой отрезка $A_iA_{i+1}$.

**Решение.** См. рисунок 31. Для удобства обозначений будем считать, что индекс $i=1,2,\dots,n$ представляет собой остаток от деления на $n$, то есть, $n\sim 0$, $n+1\sim 1$ и так далее. Так как многоугольник $P$ — выпуклый, то он является объединением непересекающихся треугольников $MA_iA_{i+1}$, $i=1,2,\dots,n$. Требуется доказать, что найдется такая сторона $A_kA_{k+1}$, что в треугольнике $MA_kA_{k+1}$ углы $\angle MA_kA_{k+1}$ и $\angle MA_{k+1}A_k$ оба являются острыми. Предположим, что существует такой многоугольник, что в каждом треугольнике $MA_iA_{i+1}$, $i=1,2,\dots,n$ один из углов $\angle MA_iA_{i+1}$ или $\angle MA_{i+1}A_i$ больше или равен $\frac{\pi}{2}$. Пусть при этом, для определенности, $\angle MA_2A_1\geqslant\frac{\pi}{2}$, тогда $\angle MA_2A_3<\frac{\pi}{2}$, поэтому $\angle MA_3A_2\geqslant\frac{\pi}{2}$, откуда следует, что

$\angle MA_{i+1}A_i \geqslant \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Выберем точку $M$ за начало репера: $M = O$ и пусть $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{MA_i}$ — радиус-вектор вершины $A_i$. Имеем: $(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \leqslant 0$. Но тогда $2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \leqslant 0 \iff 2\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i) \leqslant 0 \iff \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^2 \leqslant 0$.

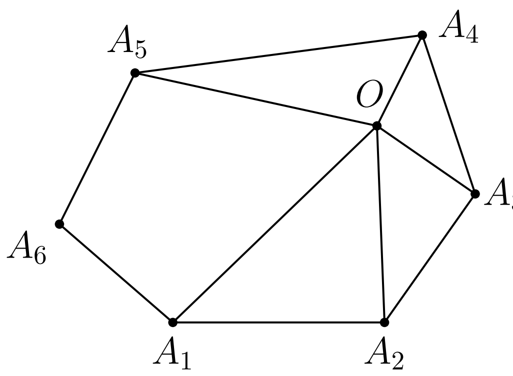

Рис. 31.

## 4.4 Скалярное произведение в координатах

Пусть в пространстве $\mathbf{V}_3$ (или $\mathbf{V}_2$, если рассматриваются векторы на геометрической плоскости) выбран некоторый базис $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (в случае плоскости $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$). Вычислим скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^j\mathbf{e}_j$. Имеем:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i\mathbf{e}_i, b^j\mathbf{e}_j) = a^ib^j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}a^ib^j, \tag{18}$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i, j = 1, 2 \text{ в случае } \mathbf{V}_2). \tag{19}$$

Из формулы (18) следует, что для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, необходимо сначала вычислить матрицу

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

составленную из скалярных произведений (19) векторов базиса. Для пространства $\mathbf{V}_3$ в развернутом виде формула (18) выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + \\ + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + g_{23}a^2b^3 + g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3. \tag{20}$$

В случае плоскости $\mathbf{V}_2$ соответственно имеем:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2. \qquad (21)$$

**Определение.** *Базис* $\{\mathbf{e}_i\}$ *называется ортонормированным, если* $|\mathbf{e}_i| = 1,\ i, j = 1, 2, 3$ $(i, j = 1, 2$ *в случае* $\mathbf{V}_2)$, *и* $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$ *при* $i \neq j$.

В случае ортонормированного базиса матрица $(g_{ij})$ — единичная, $g_{ij} = \delta_{ij}$, и скалярные произведения векторов в $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_2$ находятся соответственно по следующим формулам:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3,$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2.$$

## 4.5 Примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие применение формулы (18).

**Задача 13.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ медианы $AA_1$ и $BB_1$, проведенные к боковым (равным) сторонам $CB$ и $CA$, пересекаются под прямым углом. Найти углы этого треугольника.

**Решение.** См. рисунок 32. Поскольку все треугольники, удовлетворяющие условиям задачи, подобны, будем считать, что $|\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{BB_1}| = 3$. Пусть $O$ — точка пересечения медиан. Введем на плоскости ортонормированный репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$, выбрав за векторы базиса $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB_1}$. Тогда $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{A_1B} = 2(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB}) = 2\{-1; -2\} = \{-2; -4\}$, $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{B_1A} = 2(\overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{OA}) = 2\{-2; -1\} = \{-4; -2\}$. Отсюда находим $\cos\angle C = \frac{16}{(\sqrt{20})(\sqrt{20})} = \frac{4}{5}$.

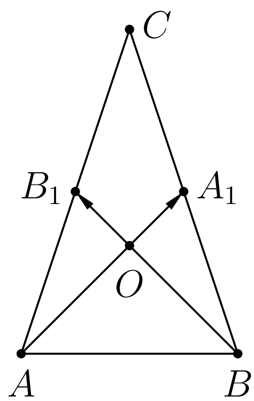

Рис. 32.

**Задача 14.** В треугольнике $ABC$ длины сторон $CA$ и $CB$ равны, соответственно, 4 и 6, а угол при вершине $C$ равен $\frac{\pi}{3}$. 1) Найти угол $\varphi$ между медианами $AA_1$ и $BB_1$. 2) Найти длину медианы $CC_1$.

**Решение.** См. рисунок 33. Введем на плоскости репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, полагая $O = C$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{CB}$. Вычислим элементы матрицы $(g_{ij})$ для выбранного базиса: $g_{11} = 16$, $g_{12} = g_{21} = 12$, $g_{22} = 36$. Формула (21) принимает вид

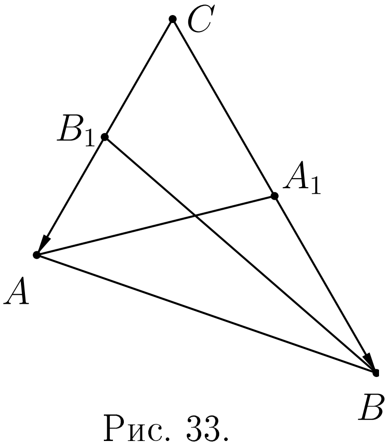


Рис. 33.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 16a^1b^1 + 12a^1b^2 + 12a^2b^1 + 36a^2b^2.$$

Векторы медиан имеют в этом базисе следующие координаты: $\mathbf{m}_a = \overrightarrow{AA_1} = \{-1; \frac{1}{2}\}$, $\mathbf{m}_b = \overrightarrow{BB_1} = \{\frac{1}{2}; -1\}$, $\mathbf{m}_c = \overrightarrow{CC_1} = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$.

Имеем: $\mathbf{m}_a^2 = 16(-1)^2 + 2 \cdot 12(-1)(\frac{1}{2}) + 36(\frac{1}{2})^2 = 13$, $\mathbf{m}_b^2 = 16(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot 12(\frac{1}{2})(-1) + 36(-1)^2 = 28$, $(\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b) = 16(-1)(\frac{1}{2}) + 12(-1)(-1) + 12(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + 36(\frac{1}{2})(-1) = -11$. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{28}}$.

Аналогично, $\mathbf{m}_c^2 = 16(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot 12(\frac{1}{2})^2 + 36(\frac{1}{2})^2 = 19$, поэтому $|\mathbf{m}_c| = \sqrt{19}$.

**Задача 15.** Доказать, что из медиан треугольника, рассматриваемых как направленные отрезки (то есть только с помощью параллельных переносов) можно составить треугольник.

**Решение.** В базисе на плоскости, используемом в предыдущей задаче, векторы медиан имеют следующие координаты: $\mathbf{m}_a = \overrightarrow{AA_1} = \{-1; \frac{1}{2}\}$, $\mathbf{m}_b = \overrightarrow{BB_1} = \{\frac{1}{2}; -1\}$, $\mathbf{m}_c = \overrightarrow{CC_1} = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$. Легко убедиться, что сумма $\mathbf{m}_a + \mathbf{m}_b + \mathbf{m}_c = \mathbf{0}$.

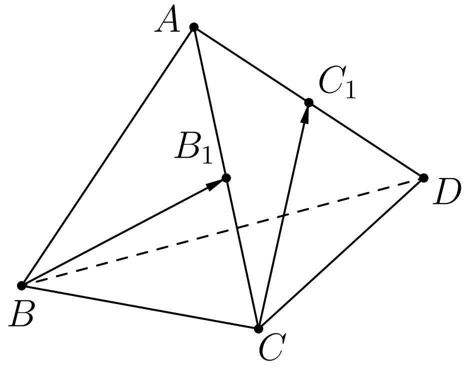


Рис. 34.

**Задача 16.** В правильном тетраэдре $ABCD$ найти угол $\psi$ между медианами $BB_1$ и $CC_1$ граней $ABC$ и $ACD$.

**Решение.** См. рисунок 34. Будем считать, что длина ребра рассматриваемого тетраэдра $ABCD$ равна 1. Введем в пространстве репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, полагая $O = A$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AD}$. Элементы матрицы $(g_{ij})$ для выбранного базиса имеют вид: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = \frac{1}{2}$. Формула (20) принимает вид $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + \frac{1}{2}a^1b^2 + \frac{1}{2}a^1b^3 + \frac{1}{2}a^2b^1 + a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{1}{2}a^3b^1 + \frac{1}{2}a^3b^2 + a^3b^3$. Векторы медиан имеют в этом базисе следующие координаты: $\mathbf{u} = \overrightarrow{BB_1} = \{-1; \frac{1}{2}; 0\}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{CC_1} = \{0; -1; \frac{1}{2}\}$. Тогда $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(-1)(-1) + \frac{1}{2}(-1)(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$. Так как $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\cos\psi = -\frac{1}{6}$.

## 4.6 Евклидовы пространства

**Определение.** *Евклидовым векторным пространством размерности $n$ называется пара $(\mathbf{E}_n, g)$, состоящая из $n$-мерного векторного пространства $\mathbf{E}_n$ и билинейного отображения*

$$g : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \to \mathbf{R},$$

*удовлетворяющего аксиомам:*

*1°. $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ при любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$ (симметричность $g$).*

*2°. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \implies g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ (положительная определенность $g$).*

*Евклидовым аффинным пространством размерности $n$ называется аффинное пространство $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$, ассоциированное с $n$-мерным евклидовым векторным пространством $\mathbf{E}_n$.*

*Значение $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ отображения $g$ на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется скалярным произведением этих векторов и обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.*

Для обозначения евклидовых пространств $(\mathbf{E}_n, g)$ и $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ в дальнейшем будем использовать, для краткости, только символы $\mathbf{E}_n$ и $\mathcal{E}_n$ соответственно.

**Замечание.** Билинейные отображения вида $\varphi : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{R}$ называют *билинейными формами.* Со всякой симметричной билинейной формой $\varphi$ ассоциируется отображение

$$\psi : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \psi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R},$$

называемое *квадратичной формой, ассоциированной с симметричной билинейной формой* $\varphi$.

Если $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — базис в евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$, то скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^j\mathbf{e}_j$ вычисляется по формулам, аналогичным (18):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i\mathbf{e}_i, b^j\mathbf{e}_j) = a^ib^j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}a^ib^j, \tag{22}$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Примером $n$-мерного евклидова векторного пространства служит векторное пространство $\mathbf{R}^n$ со «стандартным» скалярным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2 + \ldots + a^nb^n$, где $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, \dots, a^n\}$, $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, \dots, b^n\}$.

Аффинное пространство $\mathbf{R}^n$, ассоциированное с евклидовым векторным пространством $\mathbf{R}^n$, является примером $n$-мерного евклидова аффинного пространства.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ евклидова векторного пространства $\mathbf{E}_n$ называются (взаимно) *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Ортогональность векторов обозначается следующим образом: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Из этого определения ортогональности векторов следует, что нулевой вектор ортогонален всякому вектору, $\mathbf{0} \perp \mathbf{b}$. Вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{E}_n$, скалярный квадрат которого равен единице, то есть такой, что $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$, называется *единичным*. Базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, в $\mathbf{E}_n$ называется *ортонормированным*, если входящие в него векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ являются единичными и взаимно ортогональными. Это эквивалентно тому, что матрица $(g_{ij})$, составленная из скалярных произведений векторов базиса $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ является единичной: $g_{ij} = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij}$ — так называемые символы Кронекера: $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

**Предложение.** *Во всяком евклидовом векторном пространстве* $(\mathbf{E}_n, g)$ *имеется ортонормированный базис.*

**Доказательство.** Построить ортонормированный базис в $\mathbf{E}_n$ можно следующим образом. Пусть $\mathbf{a}_1$ — произвольный ненулевой вектор. Поделив его на $\sqrt{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}$, получим единичный вектор $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}}$. Если $n = 1$, то вектор $\mathbf{e}_1$ образует ортонормированный базис в $\mathbf{E}_1$.

Если $n > 1$, возьмем произвольный вектор $\mathbf{a}_2$, такой что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы. Рассмотрим линейную комбинацию $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{e}_1$. Можно найти такое число $\lambda$, что вектор $\mathbf{b}_2$ будет ортогонален вектору $\mathbf{e}_1$. Действительно, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) + \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) + \lambda$. Поэтому, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{e}_1) = 0$ при $\lambda = -(\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)$. Очевидно, вектор $\mathbf{b}_2$ ненулевой, поэтому, полагая $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\sqrt{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}}$, получим два единичных взаимно ортогональных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Если $n = 2$, то они образуют ортонормированный базис в $\mathbf{E}_2$.

Если $n > 2$, применим метод математической индукции.

Заметим сначала, что всякий набор единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ является линейно независимым. Действительно, если $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$, то $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) = \lambda_1 = 0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2) = \lambda_2 = 0$, …, $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_k) = \lambda_k = 0$.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$, $k < n$, — единичные и взаимно ортогональные. Поскольку $k < n$, то найдется такой вектор $\mathbf{a}_{k+1}$, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ являются линейно независимыми (иначе всякий вектор из $\mathbf{E}_n$ будет являться линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$, что противоречит основной лемме о линейной зависимости векторов). Рассмотрим линейную комбинацию

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{e}_k. \tag{23}$$

Можно найти такие числа $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$, при которых вектор (23) ортогонален каждому из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$. Имеем $(\mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{e}_i) + \lambda_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \lambda_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_i) + \ldots + \lambda_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{e}_i) + \lambda_i$. Поэтому $(\mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = 0$ при $\lambda_i = -(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{e}_i)$. Полагая

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{b}_{k+1}}{\sqrt{(\mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+1})}},$$

получим набор единичных взаимно ортогональных векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k+1}\}$. $\square$

Если $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — ортонормированный базис в евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$, то $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ и формула (22) для вычисления скалярного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n. \tag{24}$$

**Определение.** *Пусть $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{E}'_n$ — евклидовы векторные пространства. Изоморфизм $\Phi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ векторных пространств называется изоморфизмом евклидовых векторных пространств, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$ выполняется*

$$(\Phi(\mathbf{a}), \Phi(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

**Предложение.** *Любые два евклидовых векторных пространства одной размерности $(\mathbf{E}_n, g)$ и $(\mathbf{E}'_n, g')$ изоморфны.*

**Доказательство.** Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — ортонормированный базис в пространстве $(\mathbf{E}_n, g)$, а $\{\mathbf{e}'_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — ортонормированный базис в пространстве $(\mathbf{E}'_n, g')$. Изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \mapsto \Phi(\mathbf{a}) = a^i \mathbf{e}'_i \in \mathbf{E}'_n$$

является изоморфизмом евклидовых векторных пространств, поскольку (см. (24))

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n = (\Phi(\mathbf{a}), \Phi(\mathbf{b})). \qquad \square$$

В частности, отображение

$$\{\mathbf{e}_i\} : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \{a^i\} = \{a^1, \dots, a^n\} \in \mathbf{R}^n,$$

относящее вектору $\mathbf{a}$ набор его координат $\{a^i\}$ относительно ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, — изоморфизм евклидовых векторных пространств.

Таким образом, с точностью до изоморфизма, имеется только одно евклидово векторное пространство данной размерности $n$. В частности, все евклидовы векторные пространства размерности 3 изоморфны пространству свободных векторов геометрического пространства со скалярным произведением векторов, определенным формулой $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$.

Всякое подпространство в евклидовом векторном пространстве само является евклидовым векторным пространством.

**Предложение.** *Пусть* $(\mathbf{E}_n, g)$ *— евклидово векторное пространство,* $\mathbf{E}'_m \subset \mathbf{E}_n$ *— подпространство в* $\mathbf{E}_n$ *и*

$$g' = g|_{\mathbf{E}'_m \times \mathbf{E}'_m} : \mathbf{E}'_m \times \mathbf{E}'_m \ni \{\mathbf{a},\mathbf{b}\} \;\mapsto\; g(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbf{R}$$

*есть ограничение билинейного отображения* $g$ *на подпространство* $\mathbf{E}'_m$*. Тогда* $(\mathbf{E}'_m, g')$ *— евклидово векторное пространство.*

**Доказательство.** Пара $(\mathbf{E}'_m, g')$ очевидным образом удовлетворяет всем условиям определения евклидова векторного пространства. □

**Определение.** *Пусть* $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ *и* $(\mathcal{E}'_n, \mathbf{E}'_n, \psi')$ *— евклидовы аффинные пространства одной и той же размерности. Изоморфизм аффинных пространств* $\Phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_n$ *называется изоморфизмом евклидовых аффинных пространств, если ассоциированный изоморфизм векторных пространств* $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ *является изоморфизмом евклидовых векторных пространств.*

**Предложение.** *Любые два евклидовых аффинных пространства одной размерности* $\mathcal{E}_n$ *и* $\mathcal{E}'_n$ *изоморфны.*

**Доказательство.** Пусть $\{O, \mathbf{e}_i\}$ — произвольный ортонормированный репер в $\mathcal{E}_n$, а $\{O', \mathbf{e}'_i\}$ — произвольный ортонормированный репер в $\mathcal{E}'_n$, тогда отображение $\Phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_n$, относящее точке $M \in \mathcal{E}_n$, имеющей координаты $x^i_M$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$, точку $M' \in \mathcal{E}'_n$, имеющую те же самые координаты $x^i_M$ относительно репера $\{O', \mathbf{e}'_i\}$, является изоморфизмом евклидовых аффинных пространств. □

Из этого предложения следует, что, с точностью до изоморфизма, существует только одно евклидово аффинное пространство данной размерности $n$. В частности, все евклидовы аффинные пространства размерности 3 изоморфны геометрическому пространству и евклидову аффинному пространству $\mathbf{R}^3$.

Очевидно, всякая $m$-плоскость $\pi_m$ в $\mathcal{E}_n$ является $m$-мерным евклидовым аффинным пространством.

**Замечание.** На всяком векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, задав произвольным образом симметричную положительно определенную билинейную форму $g : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{R}$, можно ввести структуру евклидова векторного пространства. Это можно осуществить, например, следующим образом: выбрав произвольный базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{V}_n$, положить $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \delta_{ij} a^i b^j = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n$. Указанным способом можно ввести также новое скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве (в котором одно скалярное произведение уже есть). Если ввести структуру евклидова пространства на векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, ассоциированном с аффинным пространством $\mathcal{A}_n$, то тем самым на пространстве $\mathcal{A}_n$ будет введена структура евклидова аффинного пространства.

Введение структуры евклидова пространства в аффинном пространстве может быть использовано при решении конкретных задач. Примером может служить следующая задача.

**Задача 17.** На аффинной плоскости $\mathcal{A}_2$ дана трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами $AB$ и $CD$. Доказать, что точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ лежит на прямой, проходящей через середины оснований $AB$ и $CD$.

**Решение.** Пусть $O$ — середина $AB$, а $E$ — середина $CD$ (см. рисунок 35). Введем на плоскости $\mathcal{A}_2$ скалярное произведение, по отношению к которому $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ — единичные взаимно ортогональные векторы. Снабженная этим скалярным произведением, $\mathcal{A}_2$ превращается в евклидову плоскость $\mathcal{E}_2$, на которой трапеция $ABCD$ является равнобочной и, следовательно, симметричной относительно прямой $OE$.

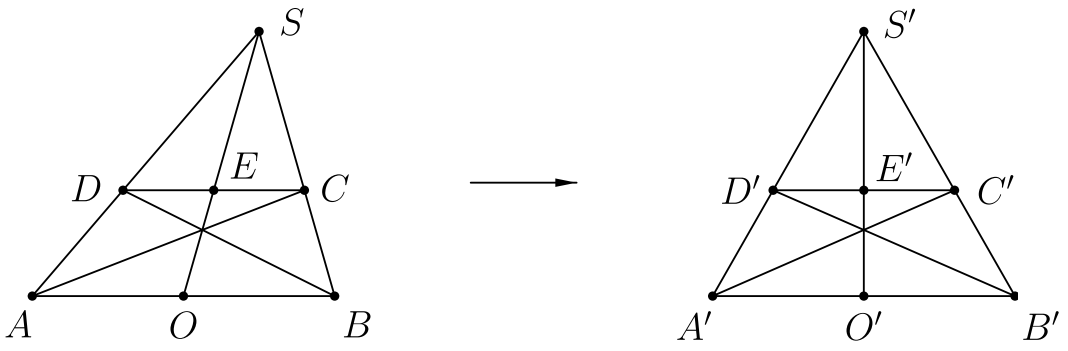


Рис. 35.

В евклидовых пространствах вводятся понятия модуля вектора, угла между векторами и расстояния между точками.

*Модулем* вектора $\mathbf{a}$ в $\mathbf{E}_n$ называется число

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

*Углом* между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в $\mathbf{E}_n$ называется число $\varphi \in [0, \pi]$, однозначно определяемое соотношением

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{25}$$

Формула (25) корректно определяет угол между векторами. Действительно, выберем ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{E}_n$ таким образом, что $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1$, а $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2$. Тогда

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |a^1 b^1| \leqslant |a^1|\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

Если считать, что геометрическая плоскость корректно определена независимо от теории евклидовых векторных пространств, то в данном случае можно здесь рассуждать и следующим образом: все линейные комбинации векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют двумерное подпространство $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_n \,|\, \mathbf{v} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ в $\mathbf{E}_n$, называемое *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Это подпространство является двумерным евклидовым векторным пространством, которое изоморфно геометрической векторной плоскости, на которой формула (25) уже корректно определена.

*Расстоянием* между точками $A$ и $B$ в $\mathcal{E}_n$ называется число

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|.$$

Сформулированные в настоящем параграфе определения позволяют аксиоматизировать геометрическое пространство и геометрическую плоскость, определяя их соответственно как трехмерное и двумерное евклидовы аффинные пространства. В дальнейшем для геометрических пространства и плоскости будем использовать, соответственно, обозначения $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{E}_2$. Ассоциированные пространства векторов будем обозначать следующим образом: $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{E}_2$.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекции 13, 14; [1], глава I, §4, глава XVI, §2; [7], глава 2, §§1, 2.

**Задачи и упражнения:** [3], 1198, 1199, 1201, 1202, 11203, 1204, 1208, 1210, 1211, 1215, 1216, 1219, 55, 63, 65, 154, 155, 156, 159, 160; [6], темы 6–8.

# 5 Операция поворота вектора на угол $\alpha$ на плоскости

## 5.1 Поворот вектора на угол $\alpha$ на ориентированной плоскости

Геометрическая (евклидова) плоскость $\mathcal{E}_2$ называется *ориентированной*, если на ней зафиксировано положительное направление отсчета углов. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ называется *правым*, если направление кратчайшего поворота от вектора $\mathbf{e}_1$ к вектору $\mathbf{e}_2$ является положительным. Репер $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ называется *правым*, если правым является базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Базисы и реперы, не являющиеся правыми, называются *левыми*. На чертежах принято считать положительным направление отсчета углов против часовой стрелки.

Правый ортонормированный репер на плоскости принято обозначать следующим образом: $\{O;\, \mathbf{i},\, \mathbf{j}\}$. Координаты вектора $\mathbf{a}$ и точки

$A$ в этом случае обозначают соответственно следующим образом: $\{x_{\mathbf{a}}; y_{\mathbf{a}}\}$ и $(x_A; y_A)$.

Формула для скалярного произведения принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_{\mathbf{a}} x_{\mathbf{b}} + y_{\mathbf{a}} y_{\mathbf{b}}.$$

Вектор $\mathbf{e}(\varphi)$, получающийся поворотом вектора $\mathbf{i}$ на (ориентированный) угол $\varphi$, имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi.$$

Используя этот вектор, произвольный вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi_{\mathbf{a}}),$$

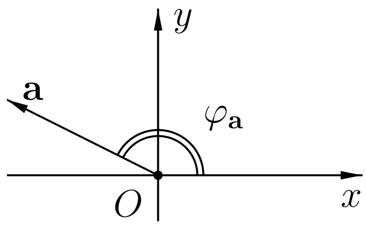

Рис. 36.

где $\varphi_{\mathbf{a}}$ — угол, на который нужно повернуть вектор $\mathbf{i}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\mathbf{a}$. При этом

$$x_{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|\cos\varphi_{\mathbf{a}}, \quad y_{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|\sin\varphi_{\mathbf{a}}.$$

Рассмотрим отображение

$$\Phi_\alpha : \ \mathbf{E}_2 \ni \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi_{\mathbf{a}}) \mapsto \Phi_\alpha(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi_{\mathbf{a}} + \alpha) \in \mathbf{E}_2,$$

поворачивающее векторы плоскости на угол $\alpha$.

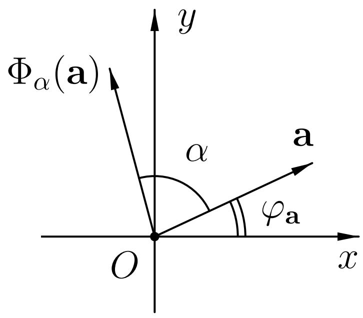

Рис. 37.

Имеем:

$$\Phi_\alpha(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\Big(\mathbf{i}\cos(\varphi_\mathbf{a}+\alpha) + \mathbf{j}\sin(\varphi_\mathbf{a}+\alpha)\Big) =$$
$$|\mathbf{a}|\Big(\mathbf{i}(\cos\varphi_\mathbf{a}\cos\alpha - \sin\varphi_\mathbf{a}\sin\alpha) + \mathbf{j}(\sin\varphi_\mathbf{a}\cos\alpha + \cos\varphi_\mathbf{a}\sin\alpha)\Big) =$$
$$= \mathbf{i}\Big((|\mathbf{a}|\cos\varphi_\mathbf{a})\cos\alpha - (|\mathbf{a}|\sin\varphi_\mathbf{a})\sin\alpha\Big) +$$
$$+\mathbf{j}\Big((|\mathbf{a}|\sin\varphi_\mathbf{a})\cos\alpha + (|\mathbf{a}|\cos\varphi_\mathbf{a})\sin\alpha)\Big) =$$
$$= \mathbf{i}(x_\mathbf{a}\cos\alpha - y_\mathbf{a}\sin\alpha) + \mathbf{j}(y_\mathbf{a}\cos\alpha + x_\mathbf{a}\sin\alpha).$$

Таким образом, в координатах отображение $\Phi_\alpha$ имеет вид

$$\Phi_\alpha : \{x_\mathbf{a}; y_\mathbf{a}\} \mapsto \{x_\mathbf{a}\cos\alpha - y_\mathbf{a}\sin\alpha;\ x_\mathbf{a}\sin\alpha + y_\mathbf{a}\cos\alpha\}. \qquad (26)$$

**Предложение.** $\Phi_\alpha : \mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_2$ — *изоморфизм евклидовых векторных пространств.*

Это утверждение очевидно из геометрических соображений, для его доказательства можно также воспользоваться формулой (26).

Формулу (26) удобно записывать в следующем матричном виде:

$$\Phi_\alpha : \begin{pmatrix} x_\mathbf{a} \\ y_\mathbf{a} \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\mathbf{a} \\ y_\mathbf{a} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

В линейной алгебре матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора $\Phi_\alpha$ в данном базисе (см. [1], глава XIII, §2). Ее столбцы состоят из координат векторов $\Phi_\alpha(\mathbf{i})$ и $\Phi_\alpha(\mathbf{j})$.

**Замечание.** Пусть $\Phi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ — произвольное линейное отображение и $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторый базис в $\mathbf{V}_n$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{a}) = \Phi(a^i\mathbf{e}_i) = a^i\Phi(\mathbf{e}_i) = \Phi_i^k a^i \mathbf{e}_k, \quad \text{где} \quad \Phi(\mathbf{e}_i) = \Phi_i^k \mathbf{e}_k.$$

Таким образом, если $\mathbf{b} = \Phi(\mathbf{a})$, то

$$b^k = \Phi_i^k a^i. \qquad (28)$$

Записывая координаты $\{a^i\}$ и $\{b^i\}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ столбцами и рассматривая матрицу

$$(\Phi_i^k) = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \dots & \Phi_n^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \dots & \Phi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^n & \Phi_2^n & \dots & \Phi_n^n \end{pmatrix}, \tag{29}$$

столбцы которой состоят из координат образов $\Phi(\mathbf{e}_i)$ векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ относительно этого же базиса, соотношение (28) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \dots & \Phi_n^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \dots & \Phi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^n & \Phi_2^n & \dots & \Phi_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Матрица (29) называется *матрицей линейного отображения* (*оператора*) $\Phi$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$.

**Задача 18.** Вывести формулу (27) как частный случай общей формулы (30).

Для операции поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$ принято использовать следующее обозначение:

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{a}) = [\mathbf{a}].$$

Формула (26) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ принимает вид

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}} : \{x_{\mathbf{a}}; y_{\mathbf{a}}\} \mapsto \{-y_{\mathbf{a}}; x_{\mathbf{a}}\}. \tag{31}$$

Ее можно также представить в следующем виде:

$$[\mathbf{a}] = \begin{vmatrix} x_{\mathbf{a}} & \mathbf{i} \\ y_{\mathbf{a}} & \mathbf{j} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

**Задача 19.** Вычислить матрицу линейного оператора $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и записать соответствующую формулу (27).

**Ответ.**

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}}:\begin{pmatrix} x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{a}} \end{pmatrix}.$$

## 5.2 Применение операции поворота вектора при решении задач

**Задача 20.** Даны две вершины $A(2;1)$ и $B(6;3)$ равностороннего треугольника $ABC$. Найти третью его вершину, если известно, что обход вершин треугольника в порядке $A \to B \to C \to A$ является движением по часовой стрелке. Система координат прямоугольная.

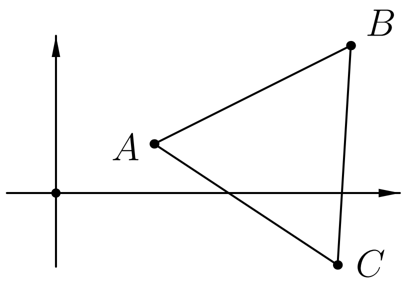


Рис. 38.

**Решение.** См. рисунок 38. Поскольку на геометрической плоскости положительным считается вращение против часовой стрелки, то $\overrightarrow{AC} = \Phi_{-\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{AB})$. Имеем: $\overrightarrow{AB} = \{4;2\}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = \{(4\cos(-\frac{\pi}{3}) - 2\sin(-\frac{\pi}{3}); 2\cos(-\frac{\pi}{3}) + 4\sin(-\frac{\pi}{3})\} = \{2+\sqrt{3}; 1-2\sqrt{3}\}$. Пользуясь формулой $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AC}$, находим $\mathbf{r}_C = \{4+\sqrt{3}; 2-2\sqrt{3}\}$.

**Задача 21.** Составить уравнения траектории, описываемой точкой $M$, лежащей на окружности $\omega$ радиуса $R$, катящейся без скольжения по данной прямой $\ell$ (циклоида).

**Решение.** См. рисунок 39.

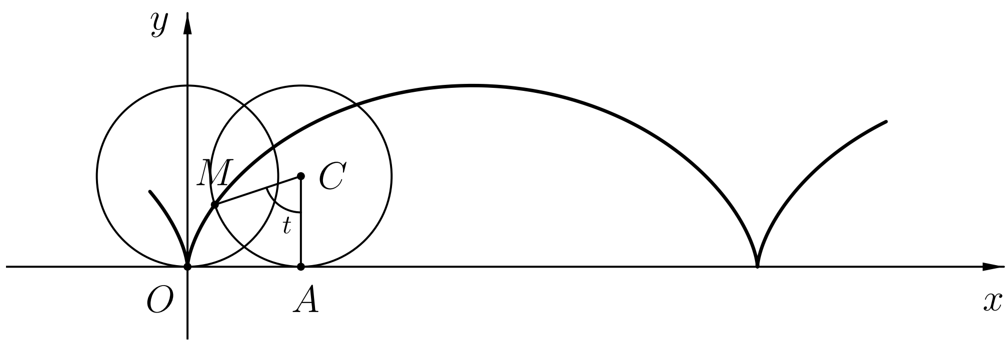


Рис. 39.

Выберем ортонормированный репер $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ на плоскости следующим образом: за начало репера возьмем одно из положений точки

$M$, когда она оказывается на прямой $\ell$, в качестве вектора $\mathbf{i}$ возьмем единичный направляющий вектор прямой $\ell$, и будем предполагать, что вектор $\mathbf{j}$ направлен от прямой $\ell$ в ту сторону, где расположена окружность. Пусть $C$ — центр окружности в фиксированный момент времени, $A$ — точка касания $\omega$ и $\ell$, а $t = \angle ACM$. Имеем: $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ (руководствуемся правилом замыкания ломаной!), $|\overrightarrow{OA}| = |\smile AM| = Rt$, следовательно, $\overrightarrow{OA} = Rt\,\mathbf{i}$. Далее, $\overrightarrow{AC} = R\,\mathbf{j}$, $\overrightarrow{CM} = R\,\mathbf{e}(\frac{3\pi}{2} - t)$. Поэтому $\mathbf{r}_M = Rt\,\mathbf{i} + R\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{e}(\frac{3\pi}{2} - t) = \{Rt - R\sin t; R - R\cos t\}$.

**Задача 22.** По окружности $\omega$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, катится без скольжения прямая $\ell$, начальное положение которой $x = R$. Составить уравнения траектории, описываемой точкой $M$, лежащей на $\ell$, принимая за начальное ее положение точку $M_0(R; 0)$ (эвольвента окружности).

**Решение.** См. рисунок 40. Пусть $A$ — точка касания $\omega$ и $\ell$, а $t = \angle M_0OA$. Имеем: $\overrightarrow{OA} = R\,\mathbf{e}(t)$, $|\overrightarrow{AM}| = |\smile AM_0| = Rt$, следовательно, $\overrightarrow{AM} = Rt\,\mathbf{e}(t - \frac{\pi}{2})$. Поэтому $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = R\,\mathbf{e}(t) + Rt\,\mathbf{e}(t - \frac{\pi}{2}) = \{R\cos t + Rt\sin t; R\sin t - Rt\cos t\}$.

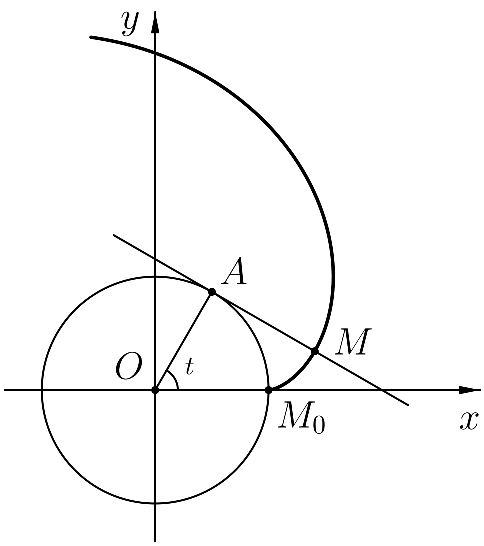

Рис. 40.

**Задачи и упражнения:** [3], 146, 147, 149, 151, 152, 153, 372, 374, 382, 380, 383, 384; [6], тема 9.

## 6 Косое произведение векторов на плоскости

**Определение.** *Косым произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *на ориентированной плоскости называется следующее число*:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = ([\mathbf{a}], \mathbf{b}).$$

В системе координат, определяемой правым ортонормированным репером $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, учитывая (9), получаем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -y_{\mathbf{a}} x_{\mathbf{b}} + x_{\mathbf{a}} y_{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} x_{\mathbf{a}} & y_{\mathbf{a}} \\ x_{\mathbf{b}} & y_{\mathbf{b}} \end{vmatrix}. \tag{33}$$

**Алгебраические свойства косого произведения.**

$1^\circ$ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ (кососимметричность).

$2^\circ$ $\varepsilon : \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_2 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbf{R}$ — билинейное отображение.

Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться или координатной формулой (33) или свойствами скалярного произведения и операции поворота на угол $\frac{\pi}{2}$.

Из $1^\circ$, в частности, следует, что $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$.

Пользуясь свойствами $1^\circ$ и $2^\circ$, легко получить формулу для вычисления косого произведения в произвольном аффинном репере $\{O; \mathbf{e}_i\}$ на $\mathcal{E}_2$: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j \rangle = a^i b^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \varepsilon_{ij} a^i b^j = \varepsilon_{12} a^1 b^2 + \varepsilon_{21} a^2 b^1$, где $\varepsilon_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. Таким образом,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \varepsilon_{12} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

**Геометрические свойства косого произведения.**

Для косого произведения имеется следующая формула, аналогичная формуле, по которой определяется скалярное произведение векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi, \tag{34}$$

где $\varphi = \varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}$ — угол *от вектора* $\mathbf{a}$ *до вектора* $\mathbf{b}$.

Действительно,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = ([\mathbf{a}], \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\varphi_{\mathbf{a}} + \frac{\pi}{2} - \varphi_{\mathbf{b}}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}).$$

Из формулы (34) вытекают следующие свойства косого произведения:

1) $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0 \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — правый базис.
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0 \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — левый базис.
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \iff \mathbf{a} || \mathbf{b}$.

3) Имеет место следующая формула для площади треугольника $ABC$ на плоскости:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.$$

4) Для треугольника $ABC$ на плоскости: $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle > 0$, если обход вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ представляет собой движение вокруг треугольника в положительном направлении (против часовой стрелки), и $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle < 0$, если обход вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ является движением по часовой стрелке.

**Замечания.**

1. На ориентированной евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ параллелограмм $ABCD = \mathrm{P}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ с заданным направлением обхода вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ называется *ориентированным* параллелограммом. Число

$$\widetilde{S}_{ABCD} = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle \tag{35}$$

при этом называют *ориентированной* или *относительной* площадью ориентированного параллелограмма $ABCD$.

2. Аналогично, для *ориентированного* треугольника $ABC$, то есть треугольника с заданным направлением обхода вершин, на ориентированной плоскости $\mathcal{E}_2$ определено число

$$\widetilde{S}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle, \tag{36}$$

называемое *ориентированной* или *относительной* площадью этого ориентированного треугольника.

**Задача 23.** Проверить, что значения ориентированных площадей (35) и (36) не меняются при циклической перестановке вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ и $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ соответственно.

**Задача 24.** Найти высоту $h_c$ треугольника $ABC$ с вершинами $A(1;-2)$, $B(4;2)$, $C(2;4)$.

**Решение.** $h_c = 2S_{\triangle ABC}/|\overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} / 5 = \dfrac{14}{5}$.

**Задача 25.** Векторы медиан треугольника $\Delta\, ABC$ образуют треугольник $\Delta_1$ (см. задачу на с. 52): $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}$. Доказать, что $S_{\Delta_1} = \frac{3}{4} S_{\Delta\, ABC}$.

**Решение.** В базисе, образованном векторами $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{CB}$ векторы медиан $\mathbf{m}_a = \overrightarrow{AA_1}$ и $\mathbf{m}_b = \overrightarrow{BB_1}$ имеют соответственно координаты $\{-1; \frac{1}{2}\}$ и $\{\frac{1}{2}; -1\}$. Поэтому

$$S_{\Delta_1} = \tfrac{1}{2}|\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle| \cdot \mathrm{mod} \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2}|\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle|\right) = \tfrac{3}{4} S_{\Delta\, ABC}.$$

То, что косое произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ представляет собой площадь ориентированного параллелограмма, которая может быть и положительной и отрицательной, является очень важным фактом. Это подтверждается в частности следующим утверждением.

**Задача 26.** Пусть $P = A_1 A_2 \ldots A_k$ — произвольный многоугольник на плоскости (в частности, не обязательно выпуклый). Доказать, что площадь многоугольника $P = A_1 A_2 \ldots A_k$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$S_P = \frac{1}{2}\,|\langle\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \,\rangle + \langle\, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \,\rangle + \ldots + \langle\, \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_k \,\rangle + \langle\, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_1 \,\rangle|.$$

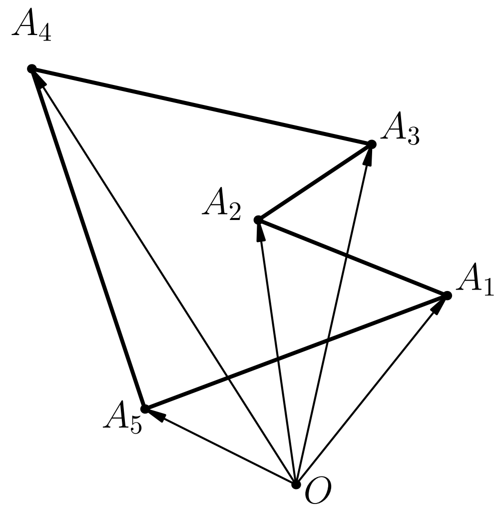


Рис. 41.

Эта формула легко распространяется на случай площади области, ограниченной замкнутой кривой на плоскости, определенной дифференцируемой векторной функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \text{где} \quad t \in (\alpha, \beta), \quad \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta).$$

А именно, поскольку $\langle\, \mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}\,\rangle = \langle\, \mathbf{r}, d\mathbf{r}\,\rangle$, то

$$S = \int_\alpha^\beta \langle\, \mathbf{r}, d\mathbf{r}\,\rangle.$$

**Задачи и упражнения:** [3], 98, 99, 101, 102, 103; [6], тема 10.

# 7 Прямая линия на аффинной плоскости

## 7.1 Различные виды уравнений прямой на аффинной плоскости

Прямая $\ell$ на аффинной плоскости $\mathcal{A}_2$ однозначно определяется произвольной своей точкой $M_0 \in \ell$ и одномерным направляющим подпространством $\mathbf{V}_1(\ell)$, состоящим из векторов, параллельных $\ell$. Всякий ненулевой вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_1(\ell)$ называется *направляющим вектором* прямой $\ell$. При этом пара $\{M_0; \mathbf{a}\}$ является аффинным репером на прямой $\ell$, рассматриваемой как одномерное аффинное пространство.

Пусть $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathcal{A}_2$ по отношению к реперу $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{O; \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2$.

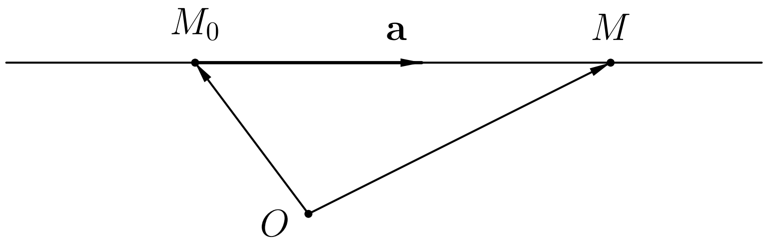


Рис. 42.

Имеем: $M \in \ell \iff \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{V}_1(\ell) \iff \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}$ для некоторого $t \in \mathbf{R} \iff \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}$. Отсюда получаем уравнения прямой, называемые *параметрическими*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \iff x^i = x^i_0 + ta^i, \ i = 1, 2. \tag{37}$$

Отметим, что в уравнениях (37) параметр $t$ представляет собой координату точки $M$ в репере $\{M_0; \mathbf{a}\}$ на прямой $\ell$.

Исключая параметр $t$ из уравнений (37), получаем так называемое *каноническое* уравнение прямой

$$\frac{x^1 - x^1_0}{a^1} = \frac{x^2 - x^2_0}{a^2}.$$

Уравнение прямой $\ell$ можно получить также, записывая условия линейной зависимости векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$:

$$\begin{vmatrix} x^1 - x^1_0 & x^2 - x^2_0 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Раскрывая определитель в уравнении (38), получаем $a^2(x^1 - x^1_0) - a^1(x^2 - x^2_0) = 0$, что позволяет задать прямую $\ell$ уравнением первой степени

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0, \tag{39}$$

где $A_1 = a^2$, $A_2 = -a^1$. Уравнение (39) называют *общим уравнением прямой* $\ell$.

**Предложение.** *Уравнение первой степени* (39) $((A_1)^2 + (A_2)^2 \neq 0)$ *задает прямую на* $\mathcal{A}_2$ *с направляющим вектором* $\mathbf{a} = \{-A_2; A_1\}$.

**Доказательство.** Пусть $(x_0^1; x_0^2)$ — произвольное решение уравнения (39), то есть $A_1 x_0^1 + A_2 x_0^2 + A_3 = 0$. Вычитая это соотношение из (39), получим $A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) = 0$, что является уравнением прямой $\ell$, имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = \{-A_2; A_1\}$ и проходящей через точку $M_0$ с координатами $(x_0^1; x_0^2)$.

**Следствия.** *Вектор* $\mathbf{a}$ *параллелен прямой* $\ell$*, заданной уравнением* (39)*, тогда и только тогда, когда*

$$A_1 a^1 + A_2 a^2 = 0.$$

*Прямая* $\ell$*, заданная уравнением* (39)*, параллельна координатной оси* $Ox^1$ *тогда и только тогда, когда* $A_1 = 0$.

*Прямая* $\ell$*, заданная уравнением* (39)*, параллельна координатной оси* $Ox^2$ *тогда и только тогда, когда* $A_2 = 0$.

Пусть две прямые $\ell$ и $\ell'$ заданы соответственно уравнениями $A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 = 0$ и $A_1' x^1 + A_2' x^2 + A_3' = 0$. Тогда:

Прямые $\ell$ и $\ell'$ параллельны в строгом смысле слова тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} \neq \frac{A_3'}{A_3}.$$

Прямые $\ell$ и $\ell'$ совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} = \frac{A_3'}{A_3}.$$

Прямые $\ell$ и $\ell'$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1'}{A_1} \neq \frac{A_2'}{A_2}.$$

**Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.**

Для составления *уравнения прямой* $\ell$*, проходящей через две точки* $A(x_A^1; x_A^2)$ и $B(x_B^1; x_B^2)$, достаточно взять точку $A$ за $M_0$, а вектор

$\overrightarrow{AB}$ за направляющий вектор $\mathbf{a}$. В результате получим следующие уравнения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + t(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \quad \Longleftrightarrow \quad x^i = x^i_A + t(x^i_B - x^i_A), \quad i = 1, 2, \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{x^1 - x^1_A}{x^1_B - x^1_A} = \frac{x^2 - x^2_A}{x^2_B - x^2_A} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x^1 - x^1_A & x^2 - x^2_A \\ x^1_B - x^1_A & x^2_B - x^2_A \end{vmatrix} = 0.$$

**Уравнение прямой в отрезках.**

Если известны точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$ пересечения прямой $\ell$ с осями координат $Ox^1$ и $Ox^2$ ($a$ и $b$ — отрезки, отсекаемые прямой $\ell$ на осях координат), то уравнение прямой $\ell$ можно записать в виде

$$\frac{x^1}{a} + \frac{x^2}{b} = 1. \tag{40}$$

Уравнение (40) называется *уравнением прямой в отрезках.*

## 7.2 Взаимное расположение двух точек относительно прямой

Пусть задана прямая $\ell$ с уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$ и пара точек $P(x^i_P)$ и $Q(x^i_Q)$, не лежащих на прямой $\ell$. Введем функцию $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, полагая $\alpha(x^1, x^2) = A_1x^1 + A_2x^2 + A_3$.

**Предложение.** *Точки $P(x^i_P)$ и $Q(x^i_Q)$ лежат по одну сторону от прямой $\ell$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{sgn}\alpha(x^i_P) = \operatorname{sgn}\alpha(x^i_Q)$.

**Доказательство.** Предположим сначала, что $P$ и $Q$ лежат по разные стороны от прямой $\ell$. Пусть $K$ — точка пересечения прямых $\ell$ и $PQ$. Тогда $\lambda = (PQK) > 0$ и $x^i_K = \frac{x^i_P + \lambda x^i_Q}{1+\lambda}$. Так как $K \in \ell$, то

$$\alpha(x^i_K) = A_1\frac{x^1_P + \lambda x^1_Q}{1+\lambda} + A_2\frac{x^2_P + \lambda x^2_Q}{1+\lambda} + A_3 = 0, \tag{41}$$

что эквивалентно тому, что $\alpha(x^i_P) + \lambda\alpha(x^i_Q) = 0$, откуда $-\frac{\alpha(x^i_P)}{\alpha(x^i_Q)} = \lambda > 0$, следовательно, $\operatorname{sgn}\alpha(x^i_P) = -\operatorname{sgn}\alpha(x^i_Q)$.

Пусть теперь $P$ и $Q$ лежат по одну сторону от $\ell$, а $S$ — некоторая точка, лежащая по другую сторону от $\ell$. Тогда $\operatorname{sgn}\alpha(x^i_P) = -\operatorname{sgn}\alpha(x^i_S) = \operatorname{sgn}\alpha(x^i_Q)$. $\square$

**Задача 27.** Пусть, как в доказанном выше предложении, $\ell$ — прямая с уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$, точки $P(x^i_P)$, $Q(x^i_Q)$ и $K(x^i_K)$ принадлежат некоторой прямой, не параллельной прямой $\ell$, и $(PQK) = \lambda$. Вывести из формулы (41) следующие соотношения

$$\alpha(x^i_K) = \frac{\alpha(x^i_P) + \lambda\alpha(x^i_Q)}{1+\lambda}, \quad (PQK) = \frac{\alpha(x^i_K) - \alpha(x^i_P)}{\alpha(x^i_Q) - \alpha(x^i_K)}. \qquad (42)$$

**Задача 28.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(x^1_0; x^2_0)$ параллельно данной прямой $\ell$ с уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$.

**Решение.** Очевидно, что искомое уравнение имеет вид

$$A_1(x^1 - x^1_0) + A_2(x^2 - x^2_0) = 0.$$

**Задача 29.** Определить положение прямой $\ell$, имеющей уравнение $x^1 - 7x^2 + 5 = 0$, относительно треугольника $ABC$ с вершинами $A(3;1)$, $B(-2;4)$, $C(1;0)$.

**Решение.** См. рисунок 43. Пусть $\alpha(x^1, x^2) = x^1 - 7x^2 + 5$. Имеем: $\alpha(x^i_A) = 1 > 0$, $\alpha(x^i_B) = -25 < 0$, $\alpha(x^i_C) = 6 > 0$. Следовательно, $\ell$ пересекает стороны $AB$ и $BC$ в их внутренних точках, а сторону $AC$ во внешней точке. Пусть $K$ — точка пересечения $\ell$ с прямой $AC$. Используя формулу (42), получаем

$$(ACK) = -\frac{\alpha(x^i_A)}{\alpha(x^i_C)} = -\frac{1}{6},$$

откуда следует, что прямая $\ell$ пересекает продолжение стороны $AC$ за точку $A$.

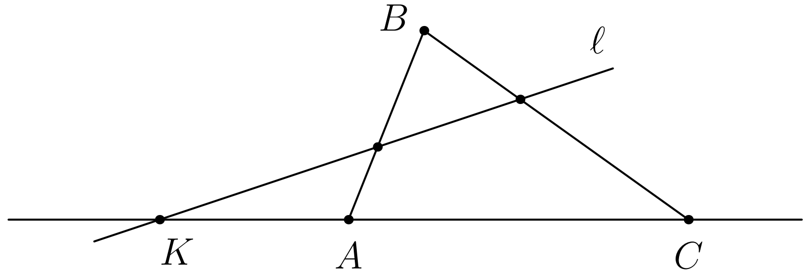


Рис. 43.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекции 5, 6; [1], глава I, §5; [7], глава 5, §1.

**Задачи и упражнения:** [3], 173, 174, 178, 181, 187, 189, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 201, 202, 206, 207, 209, 236, 237, 238, 246, 247; [6], тема 12.

### 7.3 Уравнение пучка прямых и его применение

Пусть даны две пересекающиеся (различные) прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, заданные соответственно уравнениями $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$ и $B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0$. Решение $x^1 = x_0^1$, $x^2 = x_0^2$ системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0 \\ B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0, \end{cases}$$

которое в данном случае существует и единственно, определяет точку $M(x_0^1; x_0^2)$ пересечения $\ell_1$ и $\ell_2$. При любых $\lambda$ и $\mu$, не равных нулю одновременно, числа $x^1 = x_0^1$ и $x^2 = x_0^2$ являются решением уравнения

$$\lambda(A_1x^1 + A_2x^2 + A_3) + \mu(B_1x^1 + B_2x^2 + B_3) = 0, \tag{43}$$

поэтому уравнение (43) задает некоторую прямую $\ell$, проходящую через точку $M(x_0^1; x_0^2)$. Поскольку направляющий вектор прямой $\ell$ является линейной комбинацией $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ направляющих векторов $\mathbf{a} = \{-A_2; A_1\}$ и $\mathbf{b} = \{-B_2; B_1\}$ прямых $\ell_1$ и $\ell_2$, образующих базис векторного пространства $\mathbf{V}_2$, ассоциированного с $\mathcal{A}_2$, уравнение всякой прямой, проходящей через точку $M(x_0^1; x_0^2)$, можно представить в виде (43) при некоторых $\lambda$ и $\mu$.

Совокупность прямых, проходящих через одну точку $M(x_0^1; x_0^2)$, называется *пучком прямых*. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ называются *базисными* прямыми пучка (43). Очевидно, в качестве базисных прямых можно взять любые две различные прямые пучка. Уравнение (43) называется уравнением пучка прямых. Коэффициенты $\lambda$ и $\mu$ в уравнении (43) существенны с точностью до пропорциональности $\lambda : \mu$. Точка $M(x_0^1; x_0^2)$ называется *центром пучка*.

Пучок прямых с центром $M(x_0^1;x_0^2)$ можно задать уравнением

$$A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) = 0, \tag{44}$$

где $A_1$ и $A_2$ произвольны. В уравнении (44) прямые с уравнениями $x^1 - x_0^1 = 0$ и $x^2 - x_0^2 = 0$ играют роль базисных прямых, а коэффициенты $A_1$ и $A_2$ роль коэффициентов $\lambda$ и $\mu$.

Пусть прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$, среди которых имеются две не параллельные, заданы соответственно уравнениями: $A_1x^1+A_2x^2+A_3 = 0$, $B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0$ и $C_1x^1 + C_2x^2 + C_3 = 0$. Эти три прямые принадлежат некоторому пучку, то есть, пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда совместна система уравнений

$$\begin{cases} A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0 \\ B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0 \\ C_1x^1 + C_2x^2 + C_3 = 0\ . \end{cases} \tag{45}$$

Условием совместности системы (45) является равенство нулю определителя основной матрицы этой системы:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{46}$$

Если прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ с уравнениями $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$ и $B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0$ параллельны (но не совпадают), то всякая прямая, имеющая уравнение (43) при некоторых $\lambda$ и $\mu$, параллельна $\ell_1$ и $\ell_2$. Нетрудно показать, что в этом случае всякая прямая $\ell$, параллельная $\ell_1$ и $\ell_2$, может быть задана уравнением (43) при некоторых $\lambda$ и $\mu$. Всю совокупность прямых (43) при этом также называют пучком — пучком параллельных прямых или *несобственным* пучком. Термин *несобственный*, применяемый к пучку, в данном случае подразумевает, что центр пучка находится в бесконечности. Точный смысл этому можно придать в рамках проективной геометрии [15].

Убедиться в том, что если прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны, то всякая прямая $\ell$, параллельная $\ell_1$ и $\ell_2$, может быть задана уравнением (43) при некоторых $\lambda$ и $\mu$, можно следующим образом. Умножив, если необходимо, уравнения прямых на некоторые коэффициенты, можно прийти к такой ситуации, когда прямые заданы соответственно уравнениями

$$\begin{gathered} \ell : A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0, \\ \ell_1 : A_1x^1 + A_2x^2 + B_3 = 0, \quad \ell_2 : A_1x^1 + A_2x^2 + C_3 = 0, \end{gathered} \tag{47}$$

где $B_3 \neq C_3$. Умножим теперь второе и третье уравнения (47) на $\lambda$ и $1 - \lambda$ соответственно и сложим. Приравнивая коэффициенты полученного уравнения коэффициентам первого уравнения (47), получим

$$\lambda B_3 + (1 - \lambda C_3) = A_3, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{A_3 - C_3}{B_3 - C_3}.$$

Из всего вышеизложенного следует, что три прямые, заданные уравнениями $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$, $B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0$ и $C_1x^1 + C_2x^2 + C_3 = 0$, принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда каждое из уравнений является линейной комбинацией уравнений базисных прямых пучка, что эквивалентно тому, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов этих уравнений меньше трех, что в свою очередь эквивалентно условию (46). Таким образом, обращение в нуль определителя (46) является необходимым и достаточным условием принадлежности трех прямых одному пучку.

Следующие примеры показывают, как пучки могут эффективно применяться при решении геометрических задач.

**Задача 30.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x^1 + 2x^2 + 5 = 0$ и $2x^1 - 3x^2 - 2 = 0$ и параллельной прямой $8x^1 + 2x^2 + 7 = 0$.

**Решение.** Уравнение искомой прямой $\ell$ можно записать в виде:

$$\lambda(x^1 + 2x^2 + 5) + \mu(2x^1 - 3x^2 - 2) = 0 \iff$$

$$\iff (\lambda + 2\mu)x^1 + (2\lambda - 3\mu)x^2 + (5\lambda - 2\mu) = 0.$$

Так как $\ell$ параллельна прямой $8x^1 + 2x^2 + 7 = 0$, то $\frac{\lambda+2\mu}{8} = \frac{2\lambda-3\mu}{2}$, откуда $\lambda = 2$, $\mu = 1$ ($\lambda$ и $\mu$ существенны с точностью до пропорциональности $\lambda : \mu$, поэтому выбираем числа, удобные для вычислений) и, следовательно, искомая прямая имеет уравнение $4x^1 + x^2 + 8 = 0$.

**Задача 31.** (Теорема Чевы). На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ даны точки $C_0$, $A_0$ и $B_0$, такие что $(BCA_0) = \lambda_1$, $(CAB_0) = \lambda_2$ и $(ABC_0) = \lambda_3$. Доказать, что прямые $AA_0$, $BB_0$ и $CC_0$ принадлежат одному пучку (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

**Решение.** См. рисунок 44. Рассмотрим аффинный репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$ с началом в точке $O = A$ и векторами базиса $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. В этом репере вершины треугольника и рассматриваемые на его сторонах точки имеют следующие координаты: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A_0\left(\frac{1}{1+\lambda_1}; \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)$, $B_0\left(0; \frac{1}{1+\lambda_2}\right)$, $C_0\left(\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}; 0\right)$. Пользуясь уравнением прямой в отрезках, получаем соответственно следующие уравнения прямых $AA_0$, $BB_0$ и $CC_0$:

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}x^1 - \frac{1}{1+\lambda_1}x^2 = 0, \quad x^1 + (1+\lambda_2)x^2 = 1, \quad \frac{1+\lambda_3}{\lambda_3}x^1 + x^2 = 1.$$

Эти три прямые принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda_2 & -1 \\ 1+\lambda_3 & \lambda_3 & -\lambda_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda_3 \end{vmatrix} = 0 \iff$$
$$\iff \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

При преобразованиях определителя к первому и второму столбцу был прибавлен третий.

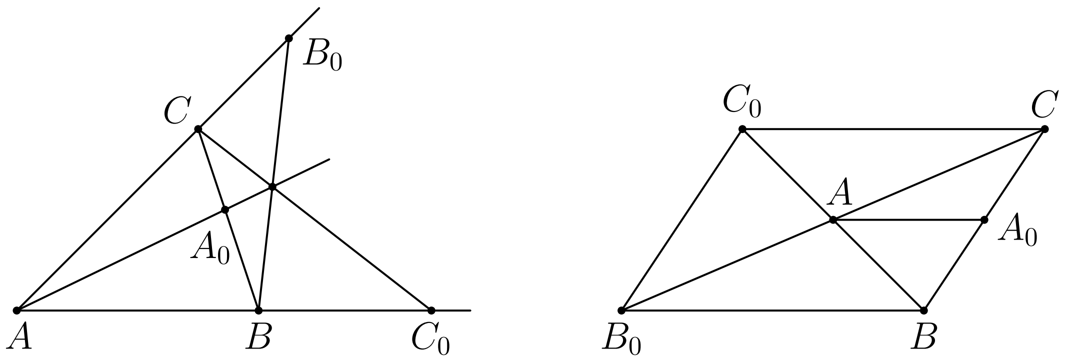


Рис. 44.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 24; [3], глава III; [7], глава 5, §1.

**Задачи и упражнения:** [3], 251, 252, 253, 254, 255, 257; [6], тема 13.

# 8 Прямая линия на евклидовой плоскости

## 8.1 Нормальный вектор прямой

На евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ одномерное направляющее подпространство $\mathbf{V}_1(\ell)$ прямой $\ell$ однозначно определяется одномерным подпространством $\mathbf{V}_1^{\perp}(\ell) \subset \mathbf{E}_2$, состоящим из векторов, ортогональных прямой $\ell$. Всякий ненулевой вектор из подпространства $\mathbf{V}_1^{\perp}(\ell)$ называется *нормальным вектором* прямой $\ell$.

**Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{N}$.**

Пусть $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathcal{E}_2$ по отношению к (аффинному) реперу $\{O; \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2$. Тогда $M \in \ell \iff \overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{N} \iff (\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{N}) = 0 \iff$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0. \tag{48}$$

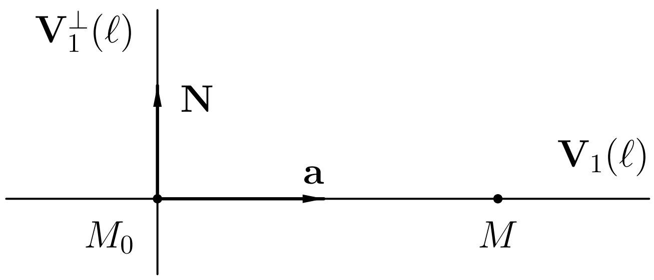


Рис. 45.

В координатах уравнение (48) принимает вид

$$g_{ij}(x^i - x_0^i)N^j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_i(x^i - x_0^i) = 0, \quad \text{где} \quad A_i = g_{ij}N^j. \quad (49)$$

Если $\{O; \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}\}$ — ортонормированный репер, то $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), и в координатах $\mathbf{N}\{A; B\}$, $M(x; y)$, $M_0(x_0; y_0)$ уравнение (49) принимает вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (50)$$

Раскрывая скобки в (50), приходим к общему уравнению

$$Ax + By + C = 0 \quad (51)$$

прямой $\ell$ в прямоугольной системе координат.

Как следствие, получаем следующее

**Предложение.** *Для прямой $\ell$, имеющей уравнение* (51) *в ортонормированном репере, вектор $\mathbf{N}\{A; B\}$ является нормальным вектором, а вектор $\mathbf{a}\{-B; A\}$ направляющим вектором.*

**Замечание.** Пара чисел $\{A_1; A_2\}$ имеет геометрический смысл и для прямой в аффинном пространстве, а именно, она является парой координат линейной функции $\xi : \mathbf{V}_2 \to \mathbf{R}$ на векторном пространстве $\mathbf{V}_2$. В случае евклидовой плоскости эта функция $\xi$ имеет вид $\xi(\mathbf{v}) = (\mathbf{N}, \mathbf{v})$. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться при рассмотрении прямых и плоскостей в трехмерном пространстве.

## 8.2 Расстояние от точки до прямой

В зависимости от того, как задана прямая $\ell$ на евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$, расстояние $\operatorname{dist}(M_1, \ell)$ от точки $M_1 \in \mathcal{E}_2$ до $\ell$ может быть найдено следующими способами.

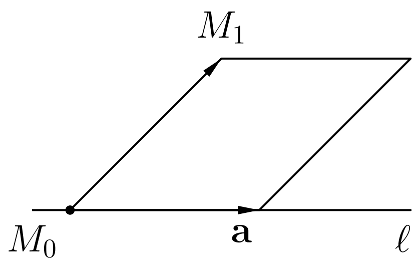


Рис. 46.

**1**. Предположим, что прямая $\ell$ задана точкой $M_0 \in \ell$ и направляющим вектором $\mathbf{a}\{x_\mathbf{a}; y_\mathbf{a}\}$. Тогда расстояние $\operatorname{dist}(M_1, \ell)$ находится как высота параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ (см. рисунок 46):

$$\operatorname{dist}(M_1, \ell) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{a} \rangle|}{|\mathbf{a}|} = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_\mathbf{a} & y_\mathbf{a} \end{vmatrix}}{\sqrt{x_\mathbf{a}^2 + y_\mathbf{a}^2}}. \qquad (52)$$

**2**. Предположим, что прямая $\ell$ задана точкой $M_0 \in \ell$ и нормальным вектором $\mathbf{N}$ с координатами $\{A; B\}$. Тогда расстояние $\operatorname{dist}(M_1, \ell)$ находится как абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на ось с направляющим вектором $\mathbf{N}$ (см. рисунок 47):

$$\operatorname{dist}(M_1, \ell) = |\operatorname{pr}_\mathbf{N}(\overrightarrow{M_0M_1})| = \\ = \frac{|(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (53)$$

Если прямая задана уравнением (51), то формулу (53) можно переписать, раскрывая скобки, в виде

$$\operatorname{dist}(M_1, \ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

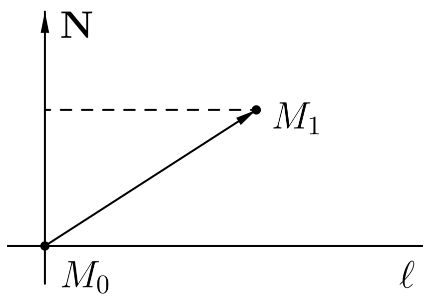


Рис. 47.

В аффинной системе координат, определяемой аффинным репером на $\mathcal{E}_2$, формулы (52) и (53) принимают соответственно вид

$$\operatorname{dist}(M_1,\ell) = \frac{|\varepsilon_{ij}(x_1^i - x_0^i)a^j|}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}} = \frac{|\varepsilon_{12}| \bmod \begin{vmatrix} x_1^1 - x_0^1 & x_1^2 - x_0^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}} \tag{54}$$

и

$$\operatorname{dist}(M_1,\ell) = \frac{|g_{ij}(x_1^i - x_0^i)N^j|}{\sqrt{g_{km}N^kN^m}}. \tag{55}$$

### 8.3 Угол между двумя прямыми линиями

Углом между ориентированными прямыми $\ell_1\uparrow$ и $\ell_2\uparrow$ называется угол $\varphi \in [0,\pi]$ между их направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Этот угол находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}\,.$$

Пусть теперь $\ell_1$ и $\ell_2$ — неориентированные прямые с направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ соответственно. Пусть $\varphi_1$ — угол между $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а $\varphi_2$ — угол между $-\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Один из этих углов принадлежит интервалу $[0,\frac{\pi}{2}]$, он и является (по определению) углом между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$. Угол $\varphi$ между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}.$$

Если известны нормальные векторы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ этих прямых, то угол $\varphi$ можно находить также по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2)|}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|}\,.$$

В случае, если прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ заданы соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,.$$

**Уравнение прямой с угловым коэффициентом.**

Если на евклидовой плоскости задан ортонормированный репер $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и прямая $\ell$ не параллельна оси ординат, то в качестве ее направляющего вектора можно выбрать вектор $\mathbf{a}\{1; k\}$. Если точка пересечения прямой $\ell$ с осью ординат имеет координаты $(0; b)$, то прямую $\ell$ можно задать параметрическими уравнениями

$$x = t, \quad y = kt + b$$

или одним уравнением

$$y = kx + b. \tag{56}$$

Уравнение (56) называется *уравнением с угловым коэффициентом* или *уравнением, разрешенным относительно ординаты*. Число $k$ в уравнении (56) называется *угловым коэффициентом*, а число $b$ — *отрезком, отсекаемым прямой на оси ординат.*

Угловой коэффициент $k$ равен тангенсу угла $\varphi$ от направляющего вектора оси абсцисс $\mathbf{i}$ до вектора $\mathbf{a}\{1; k\}$. Действительно,

$$\sin\varphi = \frac{\langle \mathbf{i}, \mathbf{a} \rangle}{|\mathbf{i}|\,|\mathbf{a}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{(\mathbf{i}, \mathbf{a})}{|\mathbf{i}|\,|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = k.$$

Угол $\varphi$ от вектора $\mathbf{i}$ до вектора $\mathbf{a}\{1; k\}$ называют также *углом наклона прямой к оси абсцисс.*

Приведем некоторые формулы для случая, когда прямые заданы уравнениями вида (56).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{k} \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0).$$

Для нахождения угла $\alpha$ между двумя прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$, заданными уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ можно воспользоваться формулами

$$\cos\alpha = \frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{a}_2|} = \frac{|1 + k_1 k_2|}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{|\langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle|}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{a}_2|} = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}} = \frac{|k_2 - k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|k_2 - k_1|}{|1 + k_1 k_2|}\,.$$

## 8.4 Примеры

**Задача 32.** Составить уравнение перпендикуляра к прямой $5x - 2y + 3 = 0$, проходящего через точку $M(2;3)$.

**Решение.** Направляющим вектором искомого перпендикуляра является вектор с координатами $\{5; -2\}$. Поэтому перпендикуляр имеет следующие параметрические уравнения: $x = 2 + 5t$; $y = 3 - 2t$.

Другой вариант рассуждений: нормальным вектором искомого перпендикуляра является вектор с координатами $\{2; 5\}$, поэтому перпендикуляр имеет уравнение $2(x - 2) + 5(y - 3) = 0$.

**Задача 33.** Составить уравнение биссектрисы угла $A$ треугольника $ABC$ с вершинами $A(3;1)$, $B(-2;4)$ и $C(1;0)$.

**Решение.** Из известного свойства диагоналей ромба следует, что для того, чтобы получить вектор, делящий пополам угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, достаточно взять сумму векторов, коллинеарных векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и имеющих одинаковую длину, например, $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ или $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$. Таким образом, биссектриса угла $A$ имеет следующее уравнение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + (|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})\,t\,.$$

**Задача 34.** Найти расстояние от точки $M(2;1)$ до прямой $\ell$, заданной уравнением $2x^1 - 3x^2 - 5 = 0$ в некоторой правой аффинной системе координат, если известны $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

**Решение.** Пусть $\omega$ — угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Тогда

$$\cos\omega = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \sin\omega = \frac{3}{5}\,.$$

Отсюда получаем $|\varepsilon_{12}| = |\langle\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle| = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|\sin\omega = 6$.

Далее, $M_0(1;-1) \in \ell$, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\{1;2\}$, направляющим вектором прямой $\ell$ является вектор $\mathbf{a}\{3;2\}$, откуда по формуле (54) находим

$$\operatorname{dist}(M,\ell) = \frac{6\cdot \operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4\cdot 9 + 2\cdot 8\cdot 6 + 25\cdot 4}} = \frac{12}{\sqrt{58}}\,.$$

Чтобы воспользоваться формулой (55), сначала нужно найти нормальный вектор $\mathbf{N}\{N^1;N^2\}$ прямой $\ell$ из уравнения $g_{ij}a^iN^j = 0$ $\iff$ $4\cdot 3\cdot N^1 + 8\cdot 3\cdot N^2 + 8\cdot 2\cdot N^1 + 25\cdot 2\cdot N^2 = 0$.

**Задача 35.** Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (принадлежат одному пучку прямых).

**Решение.** Высоты $AA'$, $BB'$ и $CC'$ треугольника $ABC$ имеют, соответственно, уравнения

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A, \overrightarrow{BC}) = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B, \overrightarrow{CA}) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C, \overrightarrow{AB}) = 0. \tag{57}$$

Система трех уравнений (57) совместна, поскольку, как легко проверить, их сумма есть тождество $0 = 0$.

**Задача 36.** Диагональ $BD$ ромба $ABCD$ равна его стороне. Точка $M$ лежит на прямой $AB$ и $(MAB) > 0$, точка $N$ — точка пересечения прямых $MC$ и $AD$, точка $K$ — точка пересечения прямых $BN$ и $CD$. Доказать, что угол между прямыми $MD$ и $BK$ не зависит от выбора точки $M$ и вычислить его.

**Решение.** Считая, что сторона ромба равна единице, выберем репер $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$, полагая $O = A$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$. Матрица скалярного произведения в этом репере имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть точка $M$ имеет координаты $(x; 0)$. Тогда точка $N$ имеет координаты $(0; \frac{-x}{1-x})$. Нужно найти угол между вектором $\overrightarrow{MD} = \mathbf{a}\{-x; 1\}$ и вектором $\overrightarrow{BN}$ с координатами $\{-1; \frac{-x}{1-x}\}$, коллинеарным вектору $\mathbf{b}\{x-1; -x\}$. Имеем:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -x^2 + x + \tfrac{1}{2}(x^2 + x - 1) - x = \tfrac{1}{2}(-x^2 + x - 1),$$
$$\mathbf{a}^2 = x^2 - x + 1, \quad \mathbf{b}^2 = (x-1)^2 - x^2 + x + x^2 = x^2 - x + 1,$$

откуда следует, что угол между прямыми $MD$ и $BK$ равен $60°$.

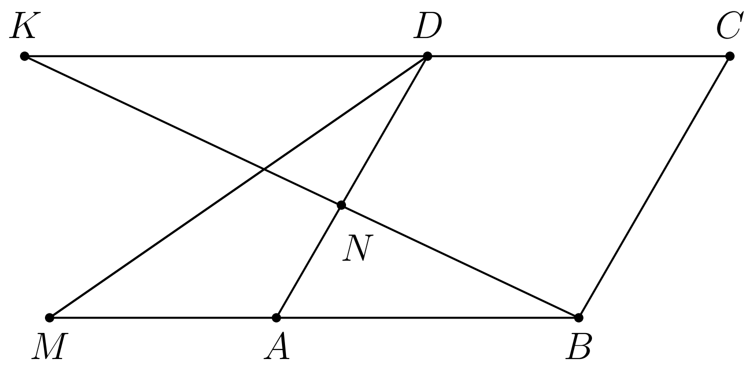


Рис. 48.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 15; [1], глава I, §5; [7], глава 5, §§1, 2.

**Задачи и упражнения:** [3], 210, 211, 212, 213, 214, 217, 224, 258, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 275, 283, 291, 293, 300, 301; [6], тема 14.

## 9 Окружность

Окружностью радиуса $R$ с центром в точке $C$ называется множество $\Phi$ всех точек евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$, удаленных от точки $C$ на расстояние $R$, то есть

$$\Phi = \{M \in \mathcal{E}_2 \,|\, |\overrightarrow{CM}| = R\}. \tag{58}$$

Окружность (58) может быть задана уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)^2 = R^2, \tag{59}$$

которое в ортонормированном репере принимает вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{60}$$

где $(a;b)$ — координаты центра окружности $C$.

Всякая прямая $\ell$, удаленная от центра окружности на расстояние меньшее радиуса, пересекает окружность в двух точках, координаты которых можно найти, решая квадратное уравнение

$$(l^2+m^2)t^2+2\big(l(x_0-a)+m(y_0-b)\big)t+ \\ +(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2=0, \tag{61}$$

получающееся при подстановке параметрических уравнений прямой $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$ в уравнение (60).

Если точка $M_0(x_0;y_0)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из центра окружности на прямую $\ell$, то

$$l(x_0-a)+m(y_0-b)=0, \tag{62}$$

а если к тому же $M_0(x_0;y_0)$ лежит на окружности, то уравнение (61) принимает вид $(l^2+m^2)t^2=0$ и имеет два совпадающих решения $t_1=t_2=0$. В этом случае говорят, что точка $M_0$ является двойной точкой пересечения прямой $\ell$ и окружности $\Phi$, а прямая $\ell$ называется *касательной* к окружности $\Phi$ в точке $M_0$. Будем обозначать эту прямую следующим образом: $\ell_{M_0}\Phi$.

Направляющий вектор касательной $\ell_{M_0}\Phi$ удовлетворяет уравнению (62), а поскольку точка $M(x;y)$ лежит на касательной $\ell_{M_0}\Phi$ тогда и только тогда, когда векторы $\{l;m\}$ и $\{x-x_0;y-y_0\}$ коллинеарны, то уравнение касательной $\ell_{M_0}\Phi$ имеет вид

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0. \tag{63}$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{CM_0}$ является нормальным вектором касательной. Нетрудно убедиться, что уравнение касательной можно представить также в виде

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2,$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$M \in \ell_{M_0}\Phi \iff \mathrm{pr}_{\overrightarrow{CM_0}}\overrightarrow{CM} = R.$$

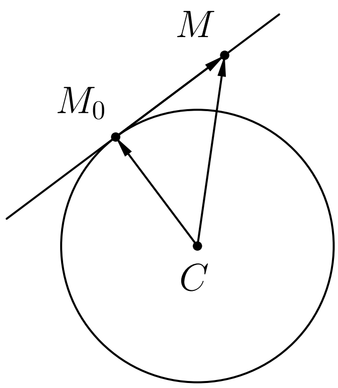


Рис. 49.

Если уравнение (60) умножить на некоторое ненулевое число $A$ и затем раскрыть скобки, то получится уравнение вида

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0. \tag{64}$$

Обратно, поделив уравнение (64) на $A$ и выделив полные квадраты, его можно привести к виду

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2}. \tag{65}$$

Предположим, что задано уравнение (64), где коэффициенты произвольны, за одним исключением, что $A \neq 0$. Из (65) следует, что это уравнение определяет окружность при $B^2 + C^2 - AD > 0$. Если $B^2 + C^2 - AD = 0$, то уравнение (64) задает пару совпадающих точек. В этом случае говорят, что уравнение (64) задает окружность нулевого радиуса. Если же $B^2 + C^2 - AD < 0$, то уравнением (64) определяется пустое множество точек плоскости. Допуская, что координаты точек плоскости могут принимать комплексные значения, в этом случае говорят об окружности чисто мнимого радиуса. Для того, чтобы придать этим словам точный смысл, нужно перейти от евклидовой плоскости к ее комплексификации (см. [15]).

**Пучки окружностей и их применение при решении задач.**

Пусть две различные окружности $\Phi_1$ и $\Phi_2$ заданы соответственно уравнениями вида (64)

$$x^2 + y^2 + 2B_1x + 2C_1y + D_1 = 0 \tag{66}$$

и

$$x^2 + y^2 + 2B_2x + 2C_2y + D_2 = 0. \tag{67}$$

Линейная комбинация уравнений (66) и (67)

$$\lambda(x^2+y^2+2B_1x+2C_1y+D_1)+\mu(x^2+y^2+2B_2x+2C_2y+D_2) = 0 \tag{68}$$

с коэффициентами $\lambda$ и $\mu$, не равными нулю одновременно и такими, что $\lambda+\mu \neq 0$, является уравнением некоторой окружности (возможно нулевого или мнимого радиуса). Если же $\lambda + \mu = 0$, уравнение (68) является уравнением некоторой прямой.

Совокупность окружностей, определяемых уравнениями (68) при различных $\lambda$ и $\mu$, не равных нулю одновременно, называется *пучком окружностей*. Прямая, которая задается уравнением (68) при $\lambda + \mu = 0$ называется *радикальной осью* этого пучка окружностей. Удобно рассматривать радикальную ось пучка окружностей как окружность «бесконечного радиуса» и считать, что она принадлежит этому пучку. Окружности (66) и (67) называются *базисными* окружностями пучка (68).

Если задан пучок окружностей, то через каждую точку плоскости проходит некоторая окружность этого пучка или его радикальная ось. Действительно, подставив координаты произвольной точки $M_0(x_0; y_0)$ плоскости, не принадлежащей базисным окружностям, в уравнение (68), получим уравнение

$$\lambda(x_0^2+y_0^2+2B_1x_0+2C_1y_0+D_1)+\mu(x_0^2+y_0^2+2B_2x_0+2C_2y_0+D_2) = 0,$$

из которого определятся значения параметров $\lambda$ и $\mu$, задающие окружность пучка, проходящую через точку $M_0$. Как и в случае пучков прямых, параметры $\lambda$ и $\mu$ в уравнении (68) существенны с точностью до пропорциональности $\lambda : \mu$.

В качестве базисных окружностей пучка можно взять любые две его окружности или любую его окружность и радикальную ось.

Базисные окружности $\Phi_1$ и $\Phi_2$ пучка могут пересекаться в некоторых двух точках $P$ и $Q$, могут не иметь общих точек и могут касаться одна другой в некоторой точке $P$.

В первом случае пучок состоит из всех окружностей, проходящих через точки $P$ и $Q$, а радикальной осью является прямая $PQ$. Такой пучок называется *эллиптическим.*

Во втором случае пучок состоит из попарно не пересекающихся окружностей. Такой пучок называется *гиперболическим.* Радикальная ось пучка не имеет общих точек с окружностями пучка.

В третьем случае пучок состоит из всех окружностей, касающихся некоторой прямой в одной и той же точке $P$. Сама прямая при этом является радикальной осью пучка. Такой пучок называется *параболическим.*

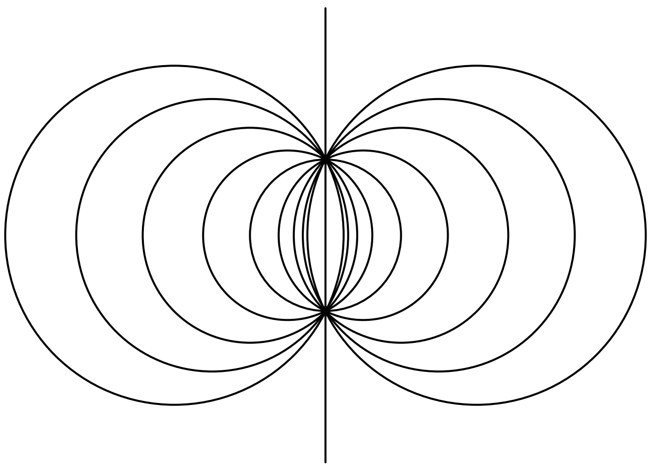

Рис. 50. Эллиптический пучок окружностей.

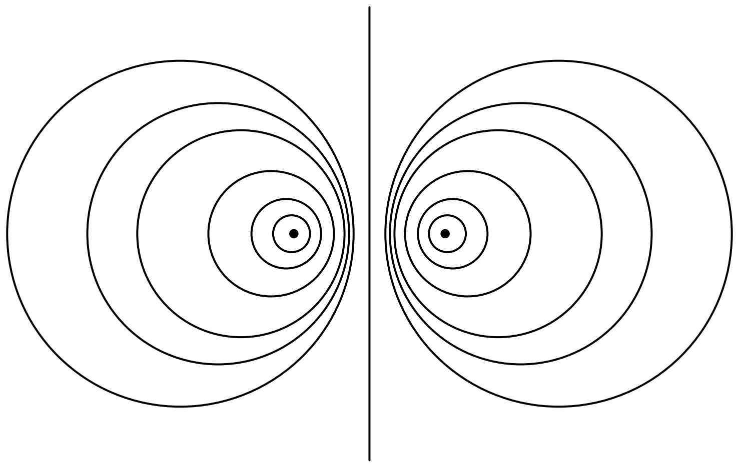

Рис. 51. Гиперболический пучок окружностей.

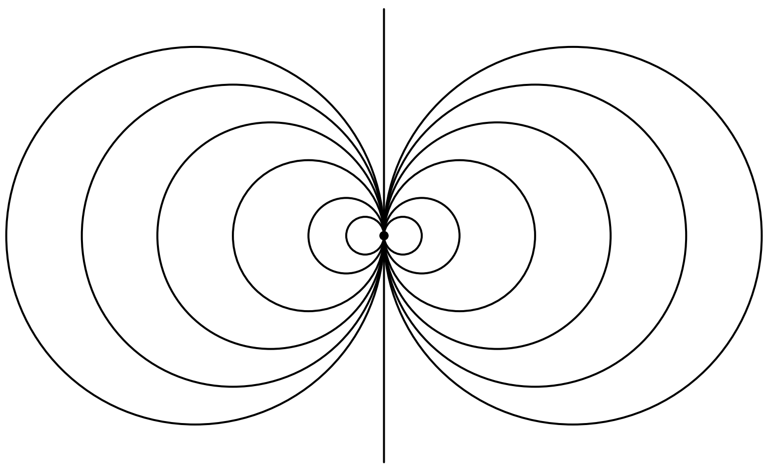

Рис. 52. Параболический пучок окружностей.

Если окружность $\Phi$ задана уравнением (60), а $M(x;y)$ — точка, лежащая вне окружности, то число

$$p_\Phi(M) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \tag{69}$$

равно квадрату касательной, проведенной из точки $M$ к окружности $\Phi$ (см. рисунок 49):

$$\overrightarrow{CM}^2 - \overrightarrow{CM_0}^2 = \overrightarrow{MM_0}^2.$$

Если же точка $M(x;y)$ — внутренняя точка окружности, то число

(69) отрицательно и по абсолютной величине равно произведению отрезков, на которые точка $M$ делит проходящую через нее хорду.

Число (69) называется *степенью точки $M$ относительно окружности* $\Phi$.

**Задача 37.** Доказать, что радикальная ось пучка окружностей состоит из точек, которые имеют одинаковую степень относительно всех окружностей пучка.

**Решение.** Если приравнять левые части уравнений (66) и (67), то получится как раз уравнение радикальной оси. Остается только заметить, что в качестве базисных окружностей пучка можно взять любые две окружности пучка.

**Задача 38.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0.$$

**Решение.** Вычитая из одного уравнения другое, получим уравнение радикальной оси эллиптического пучка $3x - 2y - 8 = 0$.

**Задача 39.** Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1;2)$ и точки пересечения прямой $x - 7y + 10 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

**Решение.** Искомая окружность принадлежит пучку

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20) + \mu(x - 7y + 10) = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки $A$, получим $-25\lambda + 25\mu = 0$, откуда $\lambda = \mu = 1$ и искомая окружность имеет уравнение $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$.

**Задача 40.** Доказать, что гиперболический пучок содержит две окружности нулевого радиуса $\Phi_1$ и $\Phi_2$. Доказать, что окружности эллиптического пучка, состоящего из всех окружностей, проходящих через точки $\Phi_1$ и $\Phi_2$ пересекают окружности гиперболического пучка под прямым углом.

**Решение.** Выберем систему координат на плоскости, по отношению к которой радикальная ось гиперболического пучка совпадает с осью ординат, а некоторая (базисная) окружность пучка имеет уравнение $(x-a)^2+y^2-R^2=0$, где $a^2>R^2$. Уравнение гиперболического пучка тогда можно записать в виде

$$(x-a)^2+y^2-R^2+2\mu x=0 \Leftrightarrow \bigl(x-(a-\mu)\bigr)^2+y^2+a^2-R^2-(a-\mu)^2=0.$$

Поскольку $a^2-R^2>0$, уравнение $(a-\mu)^2=a^2-R^2$ относительно неизвестного $\mu$ имеет два вещественных решения $\mu_1$ и $\mu_2$. Этим решениям соответствуют две окружности нулевого радиуса, представляющие собой две пары совпадающих точек $A_1(a-\mu_1,0)$ и $A_2(a-\mu_2,0)$, расположенных симметрично относительно оси ординат.

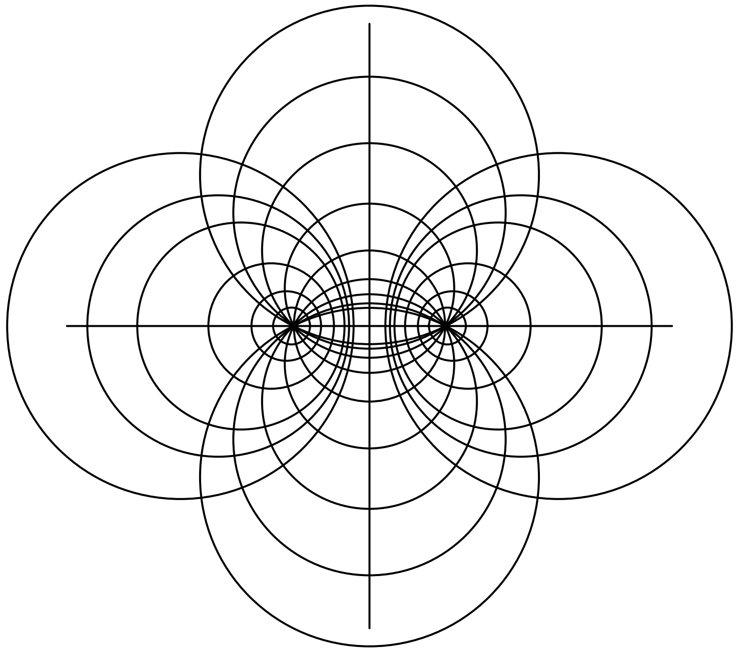

Рис. 53. Ортогональные пучки окружностей.

Произвольная точка оси ординат $B(0,y)$ имеет одинаковую степень относительно всех окружностей гиперболического пучка (ось ординат — радикальная ось гиперболического пучка), равную скалярному квадрату вектора $\overrightarrow{BA_1}$. Это значит, что все касательные, проведенные из точки $B$ к окружностям пучка имеют одинаковую длину, равную $|\overrightarrow{BA_1}|$. Поскольку эти касательные ортогональны радиусам окружностей гиперболического пучка, проведенным в точку касания, окружность радиуса $|\overrightarrow{BA_1}|$ с центром в точке $B(0, y)$ пересекает все окружности гиперболического пучка под прямым углом.

**Задача 41.** Доказать, что геометрическое место точек на плоскости, для которых отношение расстояния до точки $A$ к расстоянию до точки $B$ равно $\lambda = \mathrm{const}$, является окружностью, принадлежащей гиперболическому пучку, содержащему точки $A$ и $B$ как окружности нулевого радиуса.

**Решение.** Пусть $\lambda = \operatorname{tg} \alpha$. Окружности нулевого радиуса $\Phi_1 = A$ и $\Phi_2 = B$ с уравнениями

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)^2 = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B)^2 = 0$$

можно взять за базисные окружности гиперболического пучка. Тогда искомое геометрическое место представляет собой окружность пучка, уравнение которой имеет вид

$$\cos^2 \alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)^2 - \sin^2 \alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B)^2 = 0.$$

**Рекомендуемая литература:** [4], §10.9, [8], §17.

**Задачи и упражнения:** [3], 390, 392, 397, 402, 404, 410, 411, 413, 414, 427, 431, 433, 437, 441, 442, 450, 451, 452, 453, 455, 461,462; [13], 323, 342, 349, 360; [6], тема 15.

## 10 Конические сечения

Рассмотрим в $\mathcal{E}_3$ две прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, пересекающиеся в точке $S$ под углом $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Прямую $\ell_1$ зафиксируем, а прямую $\ell_2$ будем вращать вокруг $\ell_1$. При этом прямая $\ell_2$ опишет поверхность $\widetilde{\Phi}$ в $\mathcal{E}_3$, называемую *конусом*. Прямая $\ell_1$ является осью симметрии конуса $\widetilde{\Phi}$ и называется *осью* этого конуса. Точка $S$ называется вершиной конуса. Конус $\widetilde{\Phi}$ представляет собой объединение прямых, проходящих через вершину $S$, получающихся поворотом начальной прямой $\ell_2$. Каждая прямая этого семейства называется (прямолинейной) *образующей* конуса $\widetilde{\Phi}$.

Множество $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$, по которому конус $\widetilde{\Phi}$ пересекается плоскостью $\pi$, не проходящей через его вершину $S$, называется *коническим сечением*. Коническое сечение $\Phi$ является подмножеством плоскости $\pi$. Выясним, что представляет собой это подмножество $\Phi \subset \pi$.

Обозначим через $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ угол между плоскостью $\pi$ и осью конуса. Рассмотрим по отдельности следующие три возможных случая: 1) $\beta > \alpha$, 2) $\beta = \alpha$, 3) $\beta < \alpha$.

**Случай 1)** $\beta > \alpha$**.**

При $\beta = \frac{\pi}{2}$ коническое сечение $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$ представляет собой окружность. Далее будем предполагать, что $\beta < \frac{\pi}{2}$. Осуществим следующие построения (см. рисунок 54). Впишем в конус $\widetilde{\Phi}$ две сферы $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, касающиеся плоскости $\pi$. Точки касания сфер $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ с плоскостью $\pi$ обозначим соответственно через $F_1$ и $F_2$. Каждая из сфер $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ касается конуса $\widetilde{\Phi}$ по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси конуса. Обозначим указанные окружности через $\omega_1$ и $\omega_2$, а плоскости через $\rho_1$ и $\rho_2$ соответственно. Обозначим также через $D_1$ и $D_2$ прямые, по которым плоскость $\pi$ пересекает соответственно плоскости $\rho_1$ и $\rho_2$.

Пусть $M$ — произвольная точка конического сечения $\Phi$. Обозначим через $A_1$ и $A_2$ точки пересечения образующей $SM$ с окружностями $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. Обозначим затем через $C_1$ и $C_2$ основания перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на прямые $D_1$ и $D_2$, а через $P_1$ и $P_2$ основания перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на плоскости $\rho_1$ и $\rho_2$.

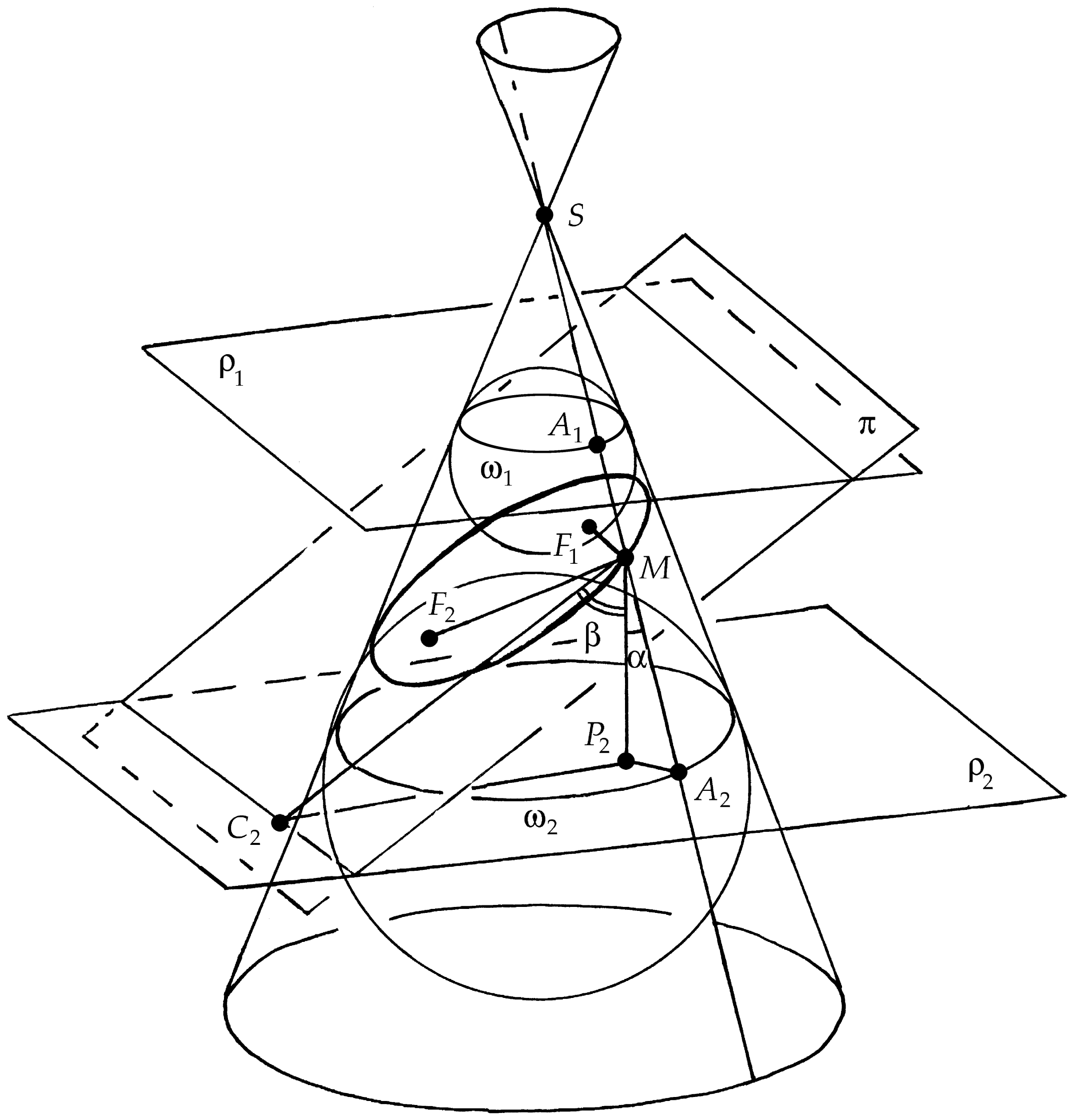


Рис. 54.

Поскольку всякие две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны, то $|\overrightarrow{MF_1}| = |\overrightarrow{MA_1}|$, а $|\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|$. Отсюда следует, что

$$|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_1}| + |\overrightarrow{MA_2}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|.$$

Но величина $|\overrightarrow{A_1A_2}|$, представляющая собой длину отрезка образующей $SM$ конуса, лежащего между окружностями $\omega_1$ и $\omega_2$, не зависит от выбора точки $M \in \Phi$. Таким образом, каждая точка $M$ конического сечения $\Phi$ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему условию:

$$|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = \mathrm{const}. \tag{70}$$

Множество точек евклидовой плоскости, удовлетворяющих условию (70), называется *эллипсом.* Точнее, сформулируем следующее определение.

**Определение.** *Пусть на плоскости $\mathcal{E}_2$ даны две точки $F_1$ и $F_2$, расстояние между которыми равно $2c$. Эллипсом с фокусами $F_1$ и $F_2$ называется множество $\Phi$ всех точек $M$ плоскости, сумма расстояний от которых до $F_1$ и $F_2$ равна некоторому постоянному числу $2a > 2c$, то есть*

$$\Phi = \{M \in \mathcal{E}_2 \mid |\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = 2a\}. \tag{71}$$

С точностью до положения на плоскости эллипс определяется двумя параметрами $2a$ и $2c$. Отношение этих параметров

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

называется *эксцентриситетом* эллипса.

Для эллипса, являющегося коническим сечением, параметр $2a$ равен длине отрезка $A_1A_2$ внешней общей касательной прямой к сферам $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, а параметр $2c$ равен длине отрезка $F_1F_2$ внутренней общей касательной прямой к этим сферам. Поскольку $|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}| \cos\alpha$, а $|\overrightarrow{F_1F_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}| \cos\beta$, то (см. рисунок 55)

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{72}$$

В случае, когда фокусы эллипса (71) совпадают: $F_1 = F_2 = O$, эллипс представляет собой множество всех точек, находящихся на расстоянии $a$ от точки $O$, то есть окружность радиуса $a$ с центром в точке $O$. Эксцентриситет окружности равен нулю.

Пусть эллипс $\Phi$ не является окружностью и $M \in \Phi$. Числа $r_1 = |\overrightarrow{MF_1}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{MF_2}|$ называются *фокальными радиусами* точки $M$.

Из рассмотрения прямоугольных треугольников $MP_2A_2$ и $MP_2C_2$ для эллипса $\Phi$, являющегося коническим сечением (рисунок 54), получаем, что

$$|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MC_2}| \cos\beta,$$
$$|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MA_2}| \cos\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e. \tag{73}$$

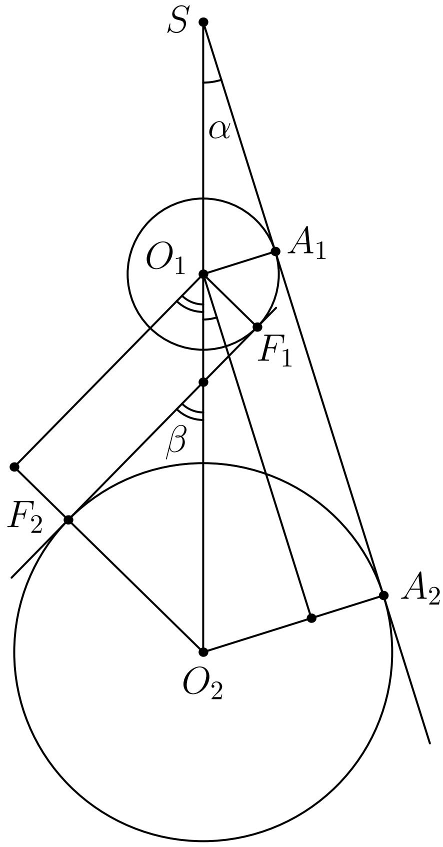


Рис. 55.

Рассматривая прямоугольные треугольники $MP_1A_1$ и $MP_1C_1$, придем к аналогичному соотношению

$$\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = e. \tag{74}$$

Прямые $D_2$ и $D_1$ называются *директрисами* эллипса $\Phi$. Расстояния от точки $M$ эллипса до его директрис обозначают следующим образом: $d_1 = |\overrightarrow{MC_1}|$, $d_2 = |\overrightarrow{MC_2}|$.

Из полученных соотношений (73) и (74) вытекает следующее свойство эллипса.

*Отношение фокального радиуса точки $M$ эллипса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы не зависит от выбора точки $M$ и равно эксцентриситету эллипса*:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{75}$$

**Замечание.** Вышеприведенные рассуждения относятся к эллипсу, являющемуся коническим сечением. Ниже будет указано, как находятся директрисы произвольного эллипса, определенного условием (71).

**Каноническое уравнение эллипса.**

Рассмотрим эллипс $\Phi$, определенный как множество точек (71). Из этого определения следует, что прямая $F_1F_2$ и перпендикуляр к $F_1F_2$, делящий отрезок $F_1F_2$ пополам, являются осями симметрии эллипса. Выберем прямоугольную систему координат на плоскости $\mathcal{E}_2$, в которой эти прямые являются соответственно осями абсцисс и ординат (см. рисунок 56). В этой системе координат фокусы эллипса и произвольная точка плоскости имеют соответственно координаты $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$, $M(x;y)$, а соотношение (71) принимает вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{76}$$

Перенесем второй радикал в правую часть равенства и возведем обе части равенства в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

После приведения подобных членов и деления на 4 это равенство принимает вид

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{77}$$

Возведем обе части равенства (77) в квадрат и приведем подобные члены. Имеем:

$$a^2\left(\left(x^2-2cx+c^2\right)+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Вводя обозначение $b^2=a^2-c^2$, перепишем последнее уравнение в следующем виде $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. После деления на $a^2b^2$, получим следующее уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{78}$$

являющееся следствием исходного уравнения (76).

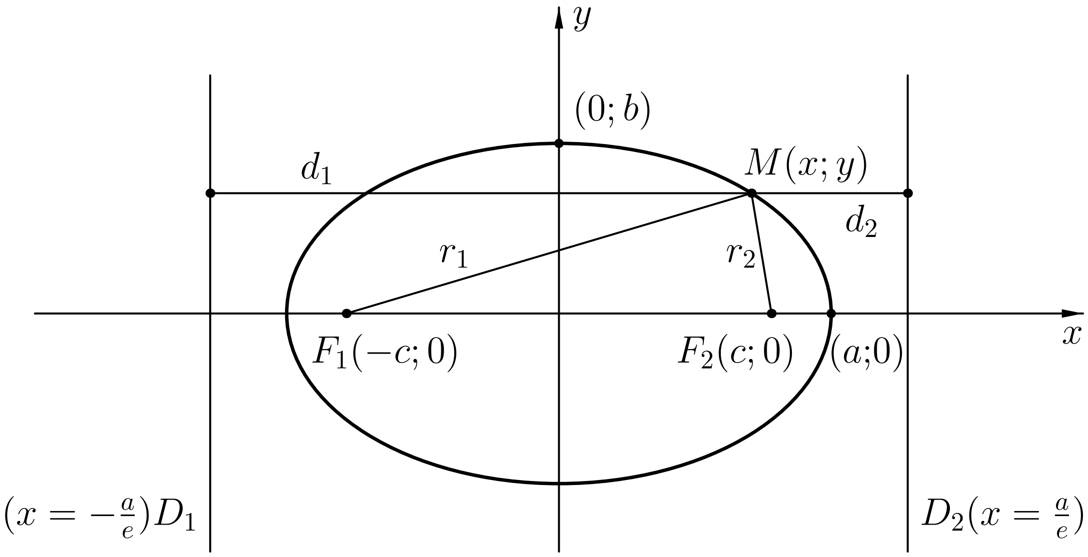


Рис. 56.

Нетрудно убедиться, что всякая точка $M(x;y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (78), принадлежит рассматриваемому эллипсу (71). Действительно, уравнение (78) эквивалентно следующему:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2.$$

Подставляя это выражение для $y^2$ в формулы для расстояния от $M$ до фокусов, получим:

$$|\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}\,x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}\,x^2+2cx+b^2+c^2} = \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2} = a+\frac{c}{a}\,x.$$

При извлечении квадратного корня был выбран знак «+», поскольку для точки $M(x;y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (78), выполняется соотношение $|x|<a$.

Аналогично,

$$|\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}\,x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}\,x^2-2cx+b^2+c^2} = \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2} = a-\frac{c}{a}\,x,$$

откуда следует, что $|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}| = 2a$, то есть $M \in \Phi$.

Таким образом, всякий эллипс может быть задан в некоторой прямоугольной системе координат уравнением (78)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{78}$$

Это уравнение называется *каноническим*. Система координат, в которой эллипс имеет уравнение (78), называется *канонической* для этого эллипса.

Отметим, что в процессе выводе канонического уравнения эллипса были найдены следующие выражения для фокальных радиусов точки $M(x;y)$, принадлежащей эллипсу $\Phi$, заданному уравнением (78):

$$r_1 = a+ex, \quad r_2 = a-ex. \tag{79}$$

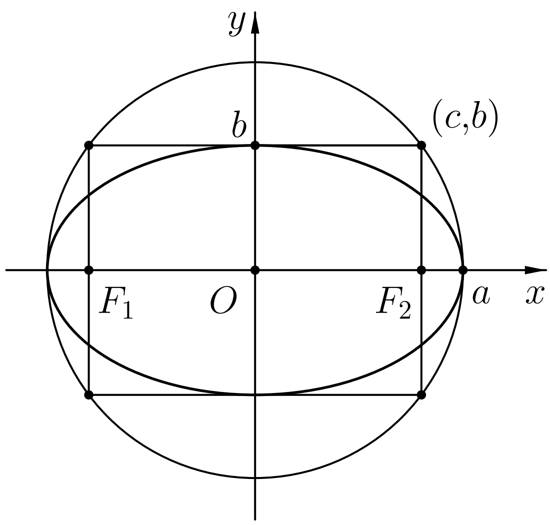


Рис. 57.

**Задача 42.** Если эллипс с каноническим уравнением (78) и оси соответствующей канонической системы координат изображены на плоскости, то расположение фокусов этого эллипса можно найти с помощью построений, указанных на рисунке 57.

**Подобие эллипсов с одинаковым эксцентриситетом.**

*Гомотетией* на евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ с центром в точке $O$ и коэффициентом $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, называется (взаимно однозначное) отображение

$$h : \mathcal{E}_2 \ni M \mapsto M' \in \mathcal{E}_2, \quad \text{такое что} \quad \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}.$$

*Подобием* на плоскости $\mathcal{E}_2$ называется отображение $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, представляющее собой композицию гомотетии и движения.

Аналогичным образом гомотетии и подобия определяются и в пространстве $\mathcal{E}_3$, а если определить движение евклидова аффинного пространства $\mathcal{E}_n$ как изоморфизм этого пространства на себя, то и в пространстве $\mathcal{E}_n$.

Из уравнения (78) следует, что *два эллипса* $\Phi_1$ *и* $\Phi_2$*, имеющие одинаковый эксцентриситет* $e_1 = e_2 = e$*, подобны.*

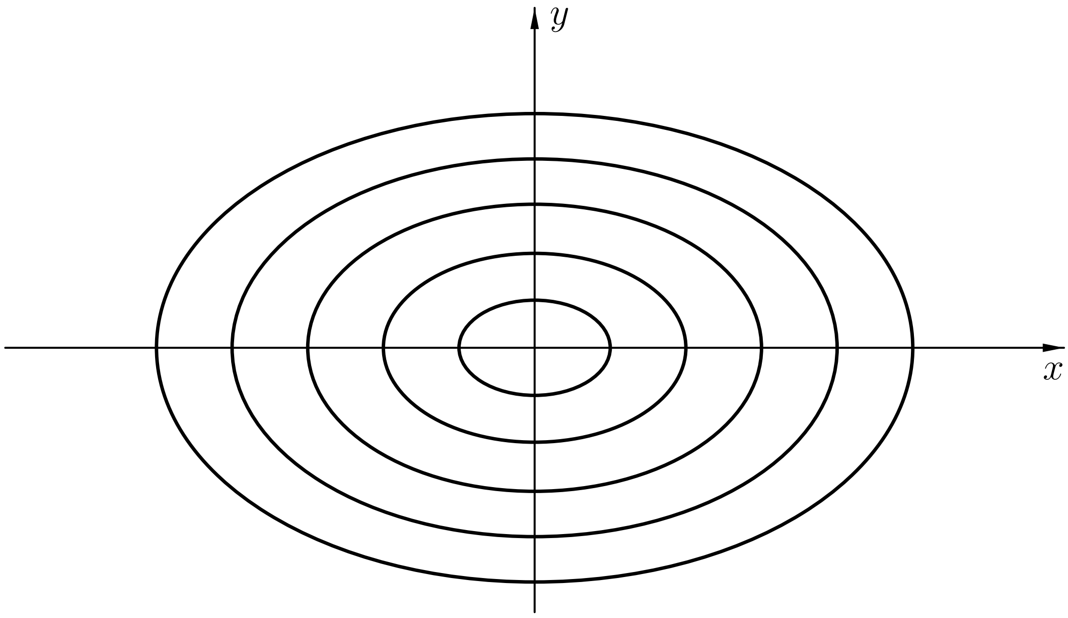


Рис. 58.

Действительно, пусть два эллипса $\Phi_1$ и $\Phi_2$ имеют одинаковый эксцентриситет $e_1 = e_2 = e$. Совместим движением оси канонических систем координат этих эллипсов. Тогда эллипсы $\Phi_1$ и $\Phi_2$ будут иметь уравнения

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1.$$

Пусть $k$ — отношение параметров $a_2$ и $a_1$, тогда

$$a_2 = ka_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = ea_2 = kea_1 = kc_1 \quad \Rightarrow$$
$$b_2 = \sqrt{(a_2)^2 - (c_2)^2} = k\sqrt{(a_1)^2 - (c_1)^2} = kb_1.$$

Поэтому, если точка $M_1$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM_1}$ принадлежит эллипсу $\Phi_1$, то точка $M_2$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM_2} = k\,\overrightarrow{OM_1}$ принадлежит эллипсу $\Phi_2$ и наоборот.

Очевидно и обратное, если эллипсы подобны, то их параметры пропорциональны: $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1$ и эксцентриситеты совпадают.

Очевидно, что при пересечении конуса параллельными плоскостями получаются подобные эллипсы. Центр подобия при этом совпадает с вершиной конуса.

Очевидно, для каждого числа $e < 1$ можно подобрать два таких угла $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, что будет выполняться соотношение (72), поэтому всякий эллипс, определяемый произвольными значениями параметров $a$ и $c$, можно реализовать как пересечение конуса с плоскостью. В частности, отсюда следует, что всякий эллипс имеет директрисы.

**Директрисы эллипса.**

Нетрудно убедиться, что прямые $D_1$ и $D_2$, определяемые соответственно уравнениями

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{e},$$

являются директрисами эллипса. Действительно, расстояния от точки $M(x; y)$ до прямых $D_1$ и $D_2$ могут быть найдены по формулам

$$\operatorname{dist}(M, D_1) = \frac{a}{e} + x \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(M, D_2) = \frac{a}{e} - x,$$

откуда следует, что

$$\frac{r_1}{\operatorname{dist}(M, D_1)} = \frac{r_2}{\operatorname{dist}(M, D_2)} = \frac{a \pm ex}{\frac{a}{e} \pm x} = e. \tag{80}$$

Свойство эллипса, выражаемое соотношениями (75) или (80), является свойством, определяющим эллипс. Точнее, имеет место следующее предложение.

**Предложение.** *Пусть на евклидовой плоскости заданы прямая $D$ и точка $F$, не принадлежащая прямой $D$, и пусть задано положительное число $e < 1$. Тогда множество точек плоскости, для которых отношение расстояния до точки $F$ к расстоянию до прямой $D$ равно числу $e$, является эллипсом с эксцентриситетом $e$. При этом $F$ — это один из фокусов этого эллипса, а $D$ — директриса, соответствующая фокусу $F$.*

**Задача 43.** Доказать это предложение.

**Указание.** Пусть расстояние от точки $F$ до прямой $D$ равно $h$. Из системы уравнений

$$\frac{a}{e} - c = h, \quad \frac{c}{a} = e$$

однозначно находятся числа $a$ и $c$. Теперь на плоскости можно выбрать систему координат, в которой прямая $D$ имеет уравнение $x = -\frac{a}{e}$, а точка $F$ имеет координаты $(-c\,;0)$. Остается записать уравнение $|\overrightarrow{MF}| = e \cdot \operatorname{dist}(M, D)$ и показать, что оно совпадает с уравнением (78).

**Окружность как эллипс с эксцентриситетом, равным нулю.**

Если угол $\beta$, образуемый плоскостью $\pi$ с осью конуса, устремить к $\frac{\pi}{2}$, то фокусы эллипса устремятся навстречу друг другу и сольются при $\beta = \frac{\pi}{2}$ в одну точку, которая окажется и точкой касания сфер $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$. Эксцентриситет эллипса при этом обратится в нуль и эллипс превратится в окружность. Плоскости $\pi$, $\rho_1$ и $\rho_2$ окажутся параллельны, и директрисы устремятся к бесконечности.

Таким образом, окружность может рассматриваться как эллипс с нулевым эксцентриситетом.

**Термины, используемые при рассмотрении эллипса.**

Число $a$ называется *большой полуосью* эллипса.

Число $b$ называется *малой полуосью* эллипса.

Число $2c$ называется *фокусным расстоянием.*

Начало канонической системы координат, являющееся центром симметрии эллипса, называется *центром* эллипса.

Оси канонической системы координат, являющиеся осями симметрии эллипса, называются *осями* эллипса.

Ось абсцисс канонической системы координат называется *большой* или *фокальной осью* эллипса.

Ось ординат канонической системы координат называется *малой осью* эллипса.

Точки пересечения эллипса с его осями, имеющие координаты $(\pm a; 0)$ и $(0; \pm b)$, называются *вершинами* эллипса.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 17; [1], глава II, §2; [7], глава 6, §§1, 2, 3.

**Задачи и упражнения:** [3], 392, 397, 401, 403, 410, 411, 413, 437, 438, 452, 453, 464, 465, 468, 471, 472, 473, 476, 477; [6], темы 15, 16.

**Случай 2)** $\beta = \alpha$**.**

В этом случае плоскость $\pi$ параллельна одной из образующих конуса и поэтому пересекает все образующие кроме одной. Осуществим следующие построения (см. рисунок 58).

Впишем в конус $\widetilde{\Phi}$ сферу $\Sigma$, касающуюся плоскости $\pi$. Пусть $F$ — точка касания сферы $\Sigma$ с плоскостью $\pi$. Сфера $\Sigma$ касается конуса $\widetilde{\Phi}$ по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси конуса. Обозначим указанные окружность и плоскость через $\omega$ и $\rho$ соответственно. Обозначим также через $D$ прямую, по которой плоскость $\pi$ пересекает плоскость $\rho$.

Пусть $M$ — произвольная точка конического сечения $\Phi$, $A$ — точка пересечения образующей $SM$ с окружностью $\omega$, $C$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на прямую $D$, а $P$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на плоскость $\rho$.

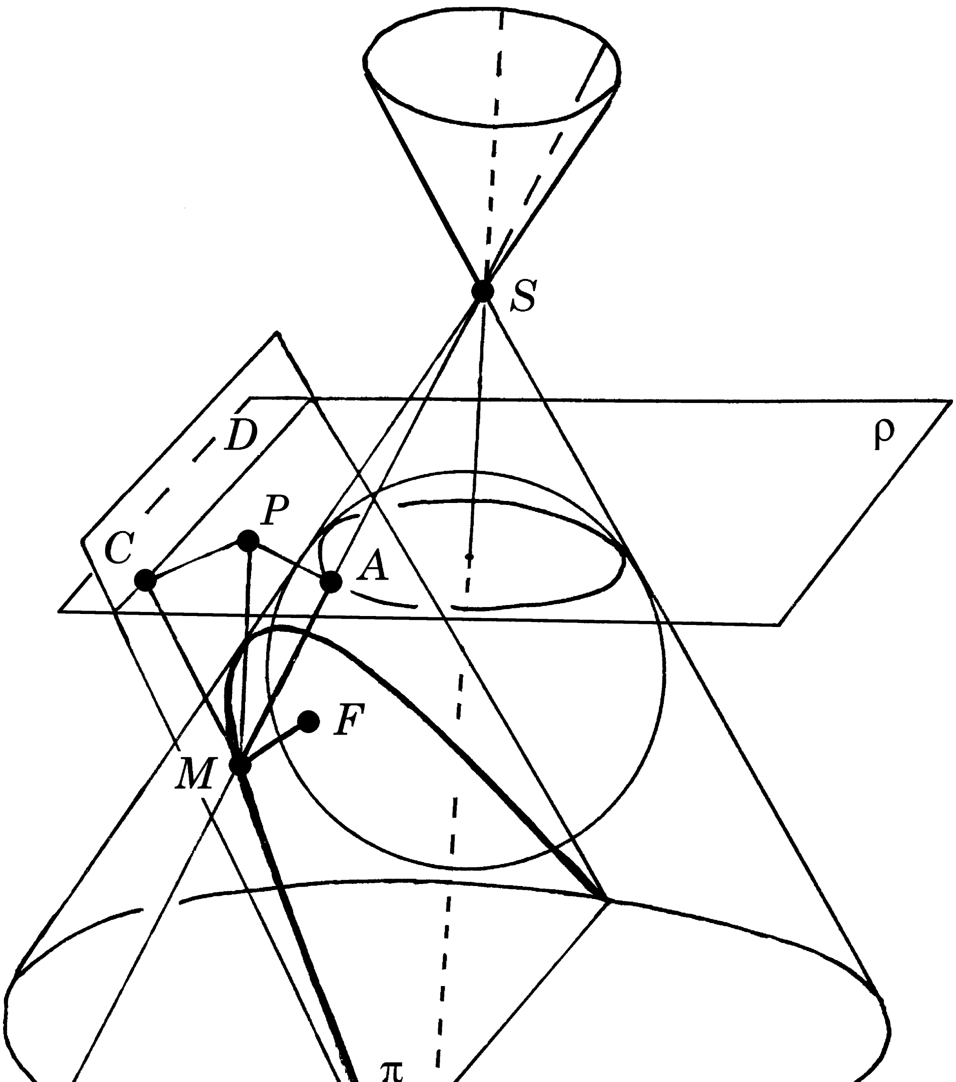


Рис. 59.

Поскольку всякие две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны, то $|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MA}|$, а поскольку $\alpha = \beta$, то прямоугольные треугольники $MPA$ и $MPC$ равны, откуда следует, что $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$. Таким образом, каждая точка $M$ конического сечения $\Phi$ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему

условию:
$$|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MC}|. \tag{81}$$

Множество точек евклидовой плоскости, удовлетворяющих условию (81), называется *параболой*. Точнее, сформулируем следующее определение.

**Определение.** *Пусть на плоскости $\mathcal{E}_2$ даны прямая $D$ и точка $F$, не принадлежащая прямой $D$. Параболой с фокусом $F$ и директрисой $D$ называется множество $\Phi$ всех точек $M$ плоскости, для которых расстояние до точки $F$ равно расстоянию до прямой $D$, то есть*
$$\Phi = \{M \in \mathcal{E}_2 \mid |\overrightarrow{MF}| = \operatorname{dist}(M, D)\}. \tag{82}$$

Пусть точка $M$ лежит на параболе $\Phi$. Число $r = |\overrightarrow{MF}|$ называется *фокальным радиусом* точки $M$.

Пусть $d$ означает расстояние от точки $M \in \Phi$ до директрисы. Поскольку для всякой параболы отношение фокального радиуса ее точки $M$ к расстоянию от этой точки до директрисы не зависит от выбора точки $M$ и равно 1, то по определению считаем, что всякая парабола имеет *эксцентриситет* $e = 1$. Это определение согласуется и с формулой (72), поскольку в рассматриваемом случае $\cos\beta = \cos\alpha$.

**Каноническое уравнение параболы.**

Рассмотрим параболу $\Phi$, определенную как множество точек (82). Пусть расстояние от фокуса $F$ параболы $\Phi$ до ее директрисы $D$ равно $p$, то есть $\operatorname{dist}(F, D) = p$. Прямая, проходящая через фокус $F$ и перпендикулярная директрисе, является осью симметрии параболы. Выберем прямоугольную систему координат на плоскости $\mathcal{E}_2$, в которой эта прямая является осью абсцисс, начало координат равноудалено от фокуса и директрисы, а направление оси абсцисс совпадает с направлением от директрисы к фокусу (см. рисунок 60). В этой системе координат фокус параболы имеет координаты $F_1\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка параболы. Соотношение (82) принимает вид

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{83}$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и приводя подобные члены, получим следующее уравнение, эквивалентное уравнению (83):

$$y^2=2px. \tag{84}$$

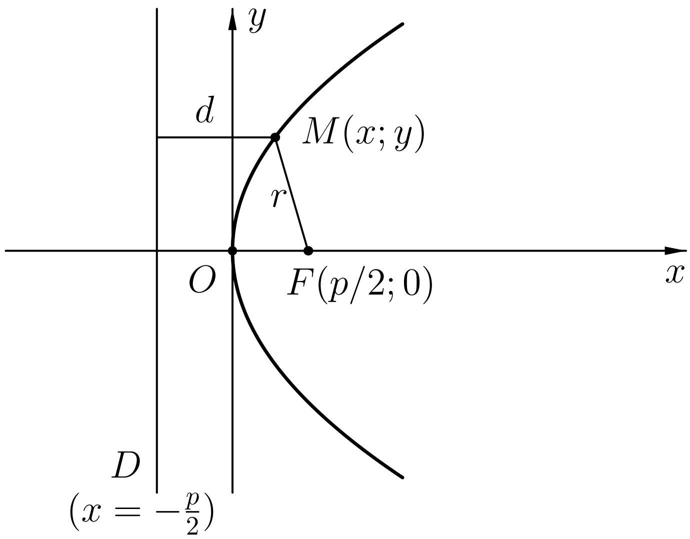


Рис. 60.

Это уравнение называется *каноническим* уравнением параболы. Система координат, в которой парабола имеет уравнение (84), называется *канонической* для этой параболы.

Из уравнений (83) и (84) следует, что в канонической системе координат фокальный радиус точки $M(x;y)$ параболы $\Phi$ имеет следующее выражение:

$$r=x+\frac{p}{2}.$$

Если плоскость $\pi$, пересекающую конус $\widetilde{\Phi}$ по параболе $\Phi$, перемещать параллельно себе, то при этом, очевидно, можно найти такое ее положение, при котором параметр $\operatorname{dist}(F,D)=p$ примет любое наперед заданное значение. Поэтому любую параболу, определяемую произвольным значением параметра $p$, можно реализовать как пересечение конуса с плоскостью.

**Подобие парабол.**

Из уравнения (84) следует, что любые две параболы $\Phi_1$ и $\Phi_2$ подобны.

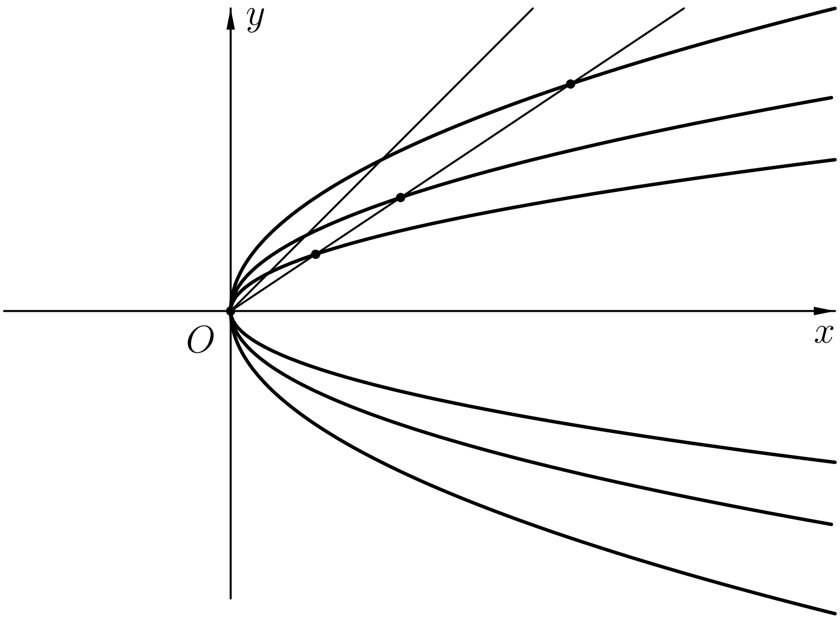


Рис. 61.

Действительно, если движением совместить канонические системы координат парабол $\Phi_1$ и $\Phi_2$, то они окажутся гомотетичными с центром гомотетии, расположенном в начале координат $O$, и коэффициентом гомотетии

$$k = \frac{p_2}{p_1}.$$

Для проверки этого факта достаточно установить, что прямая $x = \ell t$, $y = mt$ пересекает параболы, заданные уравнениями

$$y^2 = 2p_1 x \quad \text{и} \quad y^2 = 2p_2 x,$$

соответственно в точках с координатами

$$\left(\frac{2p_1\ell^2}{m^2}; \frac{2p_1\ell}{m}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{2p_2\ell^2}{m^2}; \frac{2p_2\ell}{m}\right).$$

Поскольку параллельные плоскости, очевидно, гомотетичны с центром гомотетии в любой, не принадлежащей им точке, и, в частности, с центром гомотетии в вершине $S$ конуса $\widetilde{\Phi}$ (рисунок 58), то параболы, высекаемые конусом $\widetilde{\Phi}$ на этих плоскостях, гомотетичны, а следовательно, и подобны.

**Термины, используемые при рассмотрении параболы.**

Число $p$ в каноническом уравнении параболы совпадает с половиной хорды параболы, проходящей через фокус параболы перпендикулярно ее оси. Это число называется *фокальным параметром* параболы.

Ось ординат канонической системы координат, являющаяся осью симметрии параболы, называется *осью* параболы.

Начало канонической системы координат $(0; 0)$, являющееся точкой пересечения параболы с ее осью, называется *вершиной* параболы.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 17; [1], глава II, §1; [7], глава 6, §§1, 2, 3.

**Задачи и упражнения:** [3], 627, 628, 629, 630, 631, 635, 636, 637; [6], тема 18.

**Случай 3)** $\beta < \alpha$**.**

В этом случае плоскость $\pi$ пересекает конус $\widetilde{\Phi}$ по обе стороны от его вершины. Как и в первом случае, впишем в конус две сферы $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, касающиеся плоскости $\pi$ (см. рисунок 61), и введем обозначения: $F_1$ и $F_2$ для точек касания сфер $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ с плоскостью $\pi$, $\omega_1$ и $\omega_2$ для окружностей, по которым сферы $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ касаются конуса $\widetilde{\Phi}$, $\rho_1$ и $\rho_2$ для плоскостей, в которых расположены окружности $\omega_1$ и $\omega_2$, $D_1$ и $D_2$ для прямых, по которым плоскость $\pi$ пересекает плоскости $\rho_1$ и $\rho_2$ соответственно.

Рассмотрим произвольную точку $M$ конического сечения $\Phi$, расположенную в той же части конуса $\widetilde{\Phi}$, что и окружность $\omega_2$. Обозначим через $A_1$ и $A_2$ точки пересечения образующей $SM$ с окружностями $\omega_1$ и $\omega_2$, через $C_1$ и $C_2$ основания перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на прямые $D_1$ и $D_2$, а через $P_1$ и $P_2$ основания перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на плоскости $\rho_1$ и $\rho_2$.

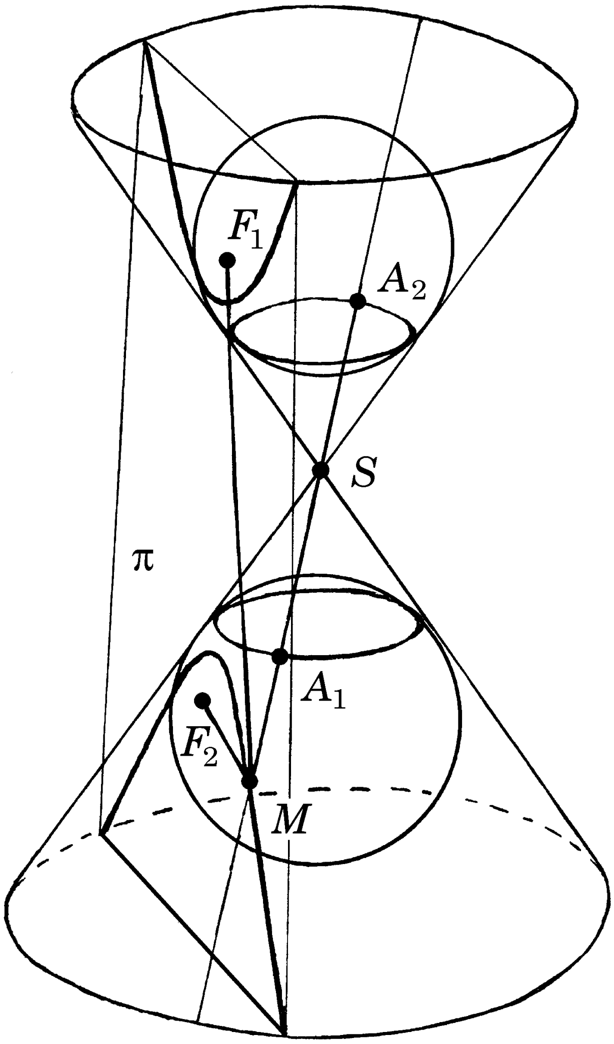


Рис. 62.

Поскольку всякие две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны, то $|\overrightarrow{MF_1}| = |\overrightarrow{MA_1}|$, а $|\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|$. Отсюда следует, что

$$|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_1}| - |\overrightarrow{MA_2}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|.$$

Для произвольной точки $M \in \Phi$, расположенной в той же части конуса $\widetilde{\Phi}$, что и окружность $\omega_2$, аналогично получим

$$|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|.$$

Так как величина $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ представляет собой длину отрезка образующей $SM$ конуса, лежащего между окружностями $\omega_1$ и $\omega_2$, и не зависит от выбора точки $M \in \Phi$, то каждая точка $M$ конического сечения $\Phi$ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему условию:

$$\Big||\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}|\Big| = \text{const}. \tag{85}$$

Множество точек евклидовой плоскости, удовлетворяющих условию (85), называется *гиперболой*. Точнее, сформулируем следующее определение.

**Определение.** *Пусть на плоскости $\mathcal{E}_2$ даны две точки $F_1$ и $F_2$, расстояние между которыми равно $2c$. Гиперболой с фокусами $F_1$ и $F_2$ называется множество $\Phi$ всех точек $M$ плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до $F_1$ и $F_2$ равна некоторому постоянному числу $2a < 2c$, то есть*

$$\Phi = \Big\{M \in \mathcal{E}_2 \,\Big|\, \big||\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}|\big| = 2a\Big\}. \tag{86}$$

С точностью до положения на плоскости гипербола определяется параметрами $2a$ и $2c$. Отношение этих параметров

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Для гиперболы, являющейся коническим сечением, параметр $2a$ равен длине отрезка $A_1A_2$ внутренней общей касательной прямой к сферам $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, а параметр $2c$ равен длине отрезка $F_1F_2$ внешней общей касательной прямой к этим сферам. Поскольку (см. рисунок 63) $|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}|\cos\alpha$, а $|\overrightarrow{F_1F_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}|\cos\beta$, то

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{87}$$

Числа $r_1 = |\overrightarrow{MF_1}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{MF_2}|$ называются *фокальными радиусами* точки $M$.

Из рассмотрения прямоугольных треугольников $MP_2A_2$ и $MP_2C_2$ для гиперболы Ф, являющейся коническим сечением (рисунок 63), получаем, как и в случае эллипса, что $|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MC_2}|\cos\beta$, $|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|\cos\alpha$. Отсюда следует, что

$$\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e. \tag{88}$$

Рассматривая прямоугольные треугольники $MP_1A_1$ и $MP_1C_1$, придем к аналогичному соотношению

$$\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = e. \tag{89}$$

Прямые $D_2$ и $D_1$ называются *директрисами* гиперболы Ф. Обозначим расстояния от точки $M$ гиперболы до директрис через $d_1 = |\overrightarrow{MC_1}|$, $d_2 = |\overrightarrow{MC_2}|$. Из соотношений (88) и (89) вытекает следующее свойство гиперболы.

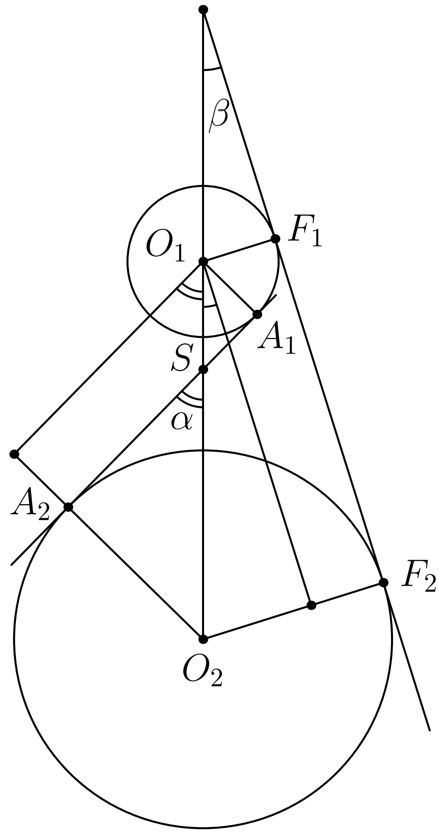

Рис. 63.

*Отношение фокального радиуса точки $M$ гиперболы к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы не зависит от выбора точки $M$ и равно эксцентриситету гиперболы*:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{90}$$

**Замечание.** Вышеприведенные рассуждения относятся к гиперболе, являющейся коническим сечением. Ниже будет указано, как находятся директрисы произвольной гиперболы, определенной условием (86).

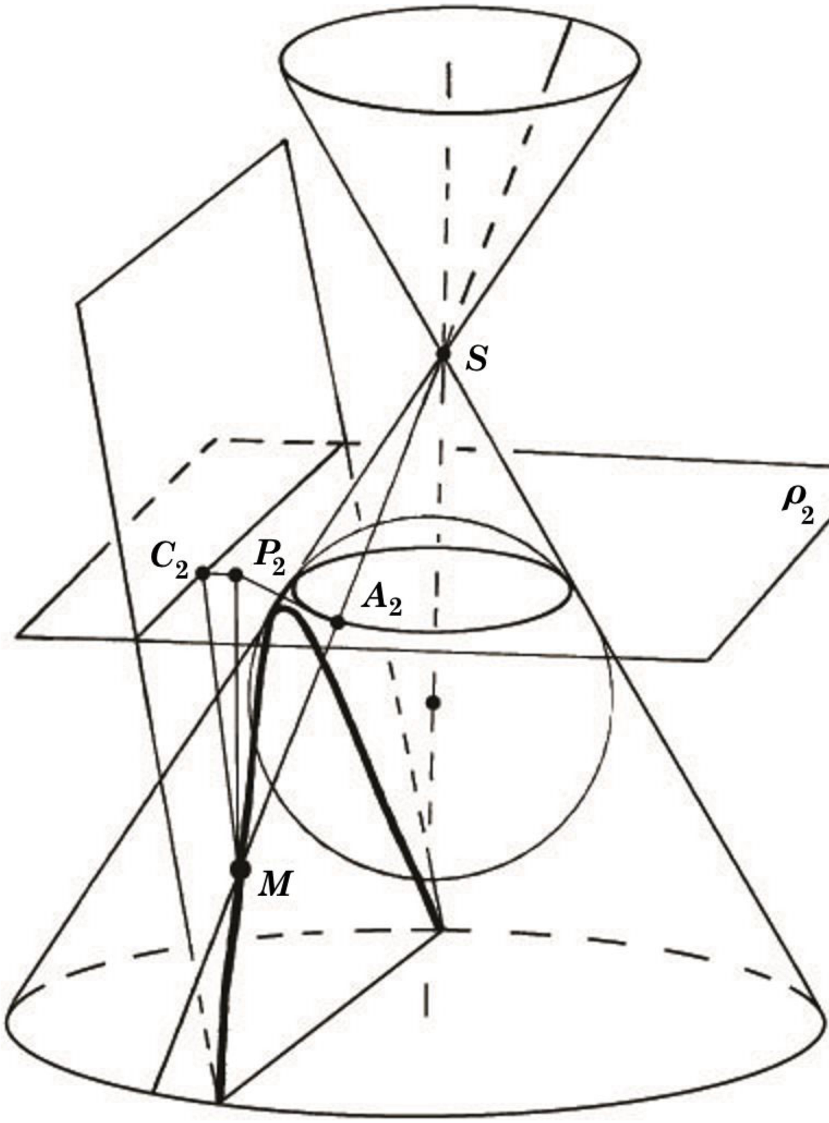


Рис. 64.

**Каноническое уравнение гиперболы.**

Рассмотрим гиперболу Ф, определенную как множество точек (86). Из этого определения следует, что прямая $F_1F_2$ и перпендикуляр к $F_1F_2$, делящий отрезок $F_1F_2$ пополам, являются осями симметрии гиперболы. Выберем прямоугольную систему координат на плоскости $\mathcal{E}_2$, в которой эти прямые являются соответственно осями абсцисс и ординат (см. рисунок 65). В этой системе координат фокусы гиперболы и произвольная точка плоскости имеют соответственно координаты $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$, $M(x;y)$, а соотношение (86) принимает вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{91}$$

Перенося второй радикал в правую часть равенства и возводя затем два раза в квадрат, освобождаемся от иррациональности. После несложных преобразований получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнения (91):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{92}$$

где $b^2=c^2-a^2$.

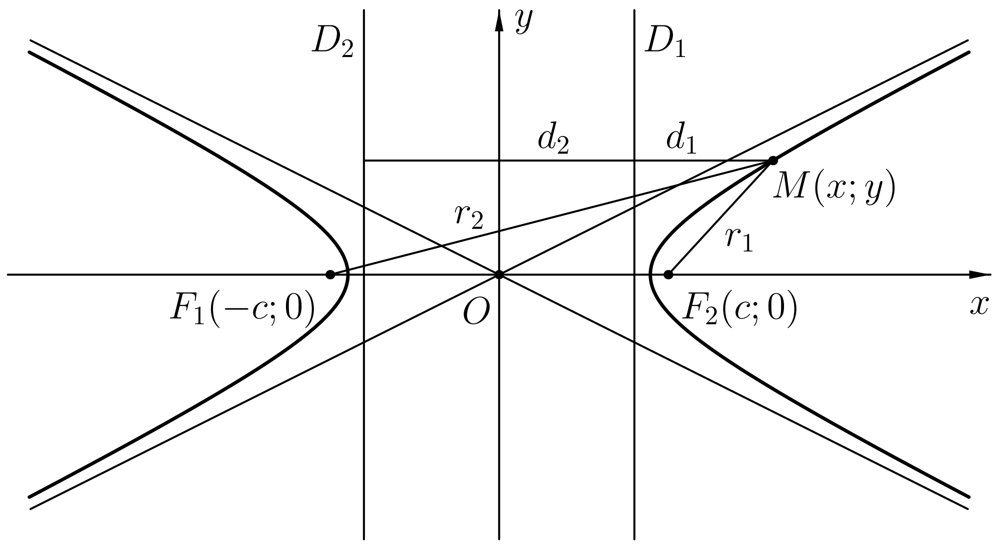


Рис. 65.

Нетрудно убедиться, что всякая точка $M(x;y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (92), принадлежит рассматриваемой гиперболе (86). Действительно, уравнение (92) эквивалентно следующему: $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$. Подставляя это выражение для $y^2$ в формулы для расстояния от $M$ до фокусов $|\overrightarrow{MF_1}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ и $|\overrightarrow{MF_2}|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, после приведения подобных членов получим, что для точек гиперболы с абсциссой $x\leqslant -a$

$$|\overrightarrow{MF_1}| = -a - \frac{c}{a}x, \quad |\overrightarrow{MF_2}| = a - \frac{c}{a}x, \tag{93}$$

а для точек гиперболы с абсциссой $x \geqslant a$

$$|\overrightarrow{MF_1}| = a + \frac{c}{a}x, \quad |\overrightarrow{MF_2}| = -a + \frac{c}{a}x, \tag{94}$$

откуда следует, что $|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = \pm 2a$, то есть $M \in \Phi$.

Таким образом, всякая гипербола может быть задана в некоторой прямоугольной системе координат уравнением (92). Это уравнение называется *каноническим*. Система координат, в которой гипербола имеет уравнение (92), называется *канонической* для этой гиперболы.

Из уравнения (92) следует, что гипербола состоит из двух *ветвей*, определяемых в канонической системе координат соотношениями $x \leqslant -a$ и $x \geqslant a$ соответственно. По отношению к канонической системе координат первая из них называется *левой ветвью*, а вторая *правой ветвью*.

Поскольку всякая точка $M$, удовлетворяющая соотношениям (93) или (94), принадлежит гиперболе, имеющей уравнение (92), то формулы (93) представляют собой выражения для фокальных радиусов точки $M(x; y)$, принадлежащей левой ветви гиперболы $\Phi$, заданной уравнением (92):

$$r_1 = -a - ex, \quad r_2 = a - ex, \tag{95}$$

а формулы (94) представляют собой выражения для фокальных радиусов точки $M(x; y)$, принадлежащей правой ветви этой гиперболы:

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = -a + ex. \tag{96}$$

**Задача 44.** Если гипербола с каноническим уравнением (92) и оси соответствующей канонической системы координат изображены на плоскости, то расположение фокусов этой гиперболы можно найти с помощью построений, указанных на рисунке 66.

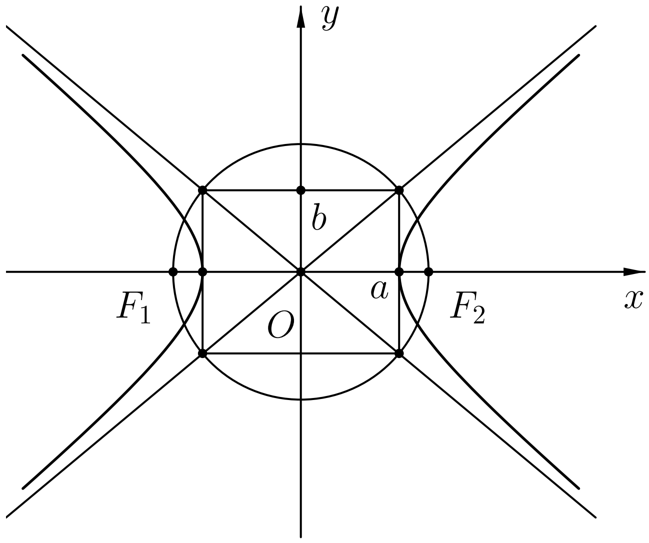


Рис. 66.

**Подобие гипербол с одинаковым эксцентриситетом.**

Из уравнения (92) следует, что *две гиперболы* $\Phi_1$ *и* $\Phi_2$*, имеющие одинаковый эксцентриситет* $e_1 = e_2 = e$*, подобны*. Это доказывается рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при рассмотрении эллипсов. Пусть две гиперболы $\Phi_1$ и $\Phi_2$ имеют одинаковый эксцентриситет $e_1 = e_2 = e$. Совместим движением оси канонических систем координат этих гипербол. Тогда гиперболы $\Phi_1$ и $\Phi_2$ будут иметь уравнения

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1.$$

Пусть $k$ — отношение параметров $a_2$ и $a_1$, тогда

$$a_2 = ka_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = ea_2 = kea_1 = kc_1 \quad \Rightarrow$$
$$b_2 = \sqrt{(c_2)^2 - (a_2)^2} = k\sqrt{(c_1)^2 - (a_1)^2} = kb_1.$$

Поэтому, если точка $M_1$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM_1}$ принадлежит гиперболе $\Phi_1$, то точка $M_2$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM_2} = k\,\overrightarrow{OM_1}$ принадлежит гиперболе $\Phi_2$ и наоборот.

Очевидно и обратное, если гиперболы подобны, то их параметры пропорциональны: $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1$ и эксцентриситеты совпадают.

Как и в случае эллипсов, при пересечении конуса параллельными плоскостями получаются подобные гиперболы. Центр подобия при этом совпадает с вершиной конуса.

Для каждого числа $e > 1$ можно подобрать два таких угла $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, что будет выполняться соотношение (87), поэтому всякая гипербола, определяемая произвольными значениями параметров $a$ и $c$, может быть реализована как пересечение некоторого конуса с плоскостью. В частности, отсюда следует, что всякая гипербола имеет директрисы.

**Директрисы гиперболы.**

Аналогично случаю эллипса, не трудно убедиться (в данном случае необходимо отдельно рассматривать точки, принадлежащие левой и правой ветвям гиперболы), что прямые $D_1$ и $D_2$, имеющие соответственно уравнения $x = -\frac{a}{e}$ и $x = \frac{a}{e}$, являются директрисами гиперболы, то есть что для любой точки гиперболы выполняются соотношения (90).

Свойство гиперболы, выражаемое соотношениями (90), является свойством, определяющим гиперболу. Точнее, имеет место следующее предложение.

**Предложение.** *Пусть на евклидовой плоскости заданы прямая $D$ и точка $F$, не принадлежащая прямой $D$, и пусть задано положительное число $e > 1$. Тогда множество точек плоскости, для которых отношение расстояния до точки $F$ к расстоянию до прямой $D$ равно числу $e$, является гиперболой с эксцентриситетом $e$. При этом $F$ — это один из фокусов этой гиперболы, а $D$ — директриса, соответствующая фокусу $F$.*

**Задача 45.** Доказать это предложение, воспользовавшись указанием к задаче 43 (см. с. 103).

**Термины, используемые при рассмотрении гиперболы.**

Число $a$ называется *действительной полуосью* гиперболы.

Число $b$ называется *мнимой полуосью* гиперболы.

Число $2c$ называется *фокусным расстоянием.*

Начало канонической системы координат, являющееся центром симметрии гиперболы, называется *центром* гиперболы.

Оси канонической системы координат, являющиеся осями симметрии гиперболы, называются *осями* гиперболы.

Ось абсцисс канонической системы координат называется *действительной* или *фокальной осью* гиперболы.

Ось ординат канонической системы координат называется *мнимой осью* гиперболы.

Точки пересечения гиперболы с ее действительной осью, имеющие координаты $(\pm a; 0)$, называются *вершинами* гиперболы.

**Асимптоты гиперболы.**

Рассмотрим плоскость $\pi'$, проходящую через вершину $S$ конуса $\widetilde{\Phi}$ и параллельную плоскости $\pi$, в которой лежит гипербола $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$. Эта плоскость $\pi'$ пересекает конус $\widetilde{\Phi}$ по двум его образующим $\ell_1$ и $\ell_2$, которые, очевидно, не пересекают гиперболу. Проведем теперь через образующие $\ell_1$ и $\ell_2$ касательные плоскости к конусу $\widetilde{\Phi}$. Обозначим их соответственно через $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Прямые $\ell_1' = \gamma_1 \cap \pi$ и $\ell_2' = \gamma_2 \cap \pi$, по которым эти плоскости пересекают плоскость $\pi$, очевидно, лежат в плоскости $\pi$ и не имеют общих точек с конусом (поскольку конус пересекается с $\gamma_1$ и $\gamma_2$ по прямым $\ell_1 \| \ell_1'$ и $\ell_2 \| \ell_2'$). Следовательно, прямые $\ell_1'$ и $\ell_2'$ не имеют общих точек с гиперболой $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$. Эти две прямые называются *асимптотами* гиперболы.

Удобнее, однако, в настоящий момент изучения гиперболы определить асимптоты гиперболы как прямые, которые в канонической для гиперболы системе координат имеют уравнения

$$bx - ay = 0 \qquad \text{и} \qquad bx + ay = 0. \tag{97}$$

С алгебраической точки зрения асимптоты гиперболы будут рассмотрены в следующем параграфе.

Прямые с уравнениями (97) не имеют с гиперболой общих точек, поскольку каждая точка этих прямых удовлетворяет уравнению

$$b^2x^2 = a^2y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что при удалении точки гиперболы от ее вершины расстояние от этой точки до одной из асимптот неограниченно убывает. Действительно, рассмотрим части ветви гиперболы и одной из асимптот, расположенные в первом квадранте $\{M(x;y) \in \mathcal{E}_2 \,|\, x > 0, y > 0\}$. Асимптота имеет уравнение $bx - ay = 0$. Расстояние от точки гиперболы с координатами $(x_1; y_1)$ до этой асимптоты равно

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части на $bx_1 + ay_1$. Поскольку $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$, то

$$d = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}(bx_1 + ay_1)}.$$

Очевидно, знаменатель последнего выражения стремится к бесконечности при возрастании $x_1$ и $y_1$.

**Замечание.** Рассмотрим некоторую образующую $\ell$ конуса $\widetilde{\Phi}$, пересекающую коническое сечение $\Phi$ (которое может быть как гиперболой, так и эллипсом или параболой), и проведем через нее касательную плоскость $\gamma$ к конусу $\widetilde{\Phi}$. Эта касательная плоскость пересечет плоскость $\pi$ по прямой $\ell' = \gamma \cap \pi$, касательной к коническому сечению $\Phi$. В этом смысле, асимптоты гиперболы представляют собой касательные к гиперболе в ее «бесконечноудаленных» точках. Точный смысл этим понятиям можно придать в рамках проективной геометрии [15].

Асимптоты гиперболы можно также рассматривать как предельные положения касательных прямых к гиперболе при неограниченном удалении точки касания от вершины гиперболы. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе будут рассматриваться в следующих параграфах.

**Рекомендуемая литература:** [11], лекция 17; [1], глава II, §3; [7], глава 6, §§1, 2, 3.

**Задачи и упражнения:** [3], 531, 532, 533, 534, 535, 536, 538, 539, 540, 541, 542; [6], тема 17.

Поскольку эллипсы, гиперболы и параболы задаются уравнениями второй степени, их называют также *кривыми второго порядка*. Эта терминология будет использоваться в последующих параграфах. Общая теория кривых второго порядка рассматривается в третьей части настоящего учебного пособия [15].

## 11 Диаметры эллипса и гиперболы

Пусть $\Phi$ — эллипс или гипербола, заданные соответственно каноническими уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{98}$$

а $\ell$ — прямая с направляющим вектором $\mathbf{u} = \{l; m\}$, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \tag{99}$$

Предположим, что прямая $\ell$ пересекает кривую $\Phi$. Для нахождения точек пересечения $\ell$ с $\Phi$ подставим уравнения (99) в (98). Будем рассматривать сразу обе кривые — и эллипс, и гиперболу. При этом во всех выражениях, где стоят двойные знаки «$\pm$» или «$\mp$», верхний знак будет относиться к тому случаю, когда рассматривается эллипс, а нижний к тому случаю, когда рассматривается гипербола. Итак, точки прямой $\ell$, принадлежащие кривой $\Phi$, определяются значениями параметра $t$, удовлетворяющими уравнению

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} \pm \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1. \tag{100}$$

Раскрывая в уравнении (100) скобки и собирая подобные члены, получим уравнение

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2}\pm\frac{m^2}{b^2}\right)+2t\left(\frac{lx_0}{a^2}\pm\frac{my_0}{b^2}\right)+\frac{x_0^2}{a^2}\pm\frac{y_0^2}{b^2}-1=0. \qquad (101)$$

Уравнение (101) — это квадратное уравнение относительно $t$, за исключением того случая, когда $\Phi$ — гипербола и

$$\frac{l^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}=0. \qquad (102)$$

**Определение.** *Всякий ненулевой вектор* $\mathbf{u}\{l,m\}$*, удовлетворяющий соотношению* (102)*, называется вектором асимптотического направления для гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$*, а прямая* $\ell$ *с направляющим вектором, удовлетворяющим соотношению* (102)*, называется прямой асимптотического направления для этой гиперболы.*

Из (102) следует, что гипербола имеет два асимптотических направления, и эти направления задаются векторами с координатами $\{a;b\}$ и $\{a;-b\}$. Прямыми асимптотического направления являются асимптоты гиперболы — прямые с уравнениями $bx\pm ay=0$ (см. с. 118). Асимптоты можно задать параметрическими уравнениями $x=at$, $y=\mp bt$ (точка $M_0(x_0;y_0)$ при этом — начало координат), Уравнение (101) в случае асимптот превращается в противоречие. Прямая асимптотического направления, не являющаяся асимптотой, пересекает гиперболу в одной точке (в этом случае уравнение (101) является уравнением первой степени).

В дальнейшем предполагаем, что направление рассматриваемой прямой $\ell$ не является асимптотическим и что пересечение $\ell$ и $\Phi$ не пусто. Поскольку (101) — квадратное уравнение относительно $t$, то это уравнение имеет два вещественных решения $t_1$ и $t_2$. Подставляя эти решения в (99), можно найти две общие точки $M_1(x_1=x_0+lt_1;y_1=y_0+mt_1)$ и $M_2(x_2=x_0+lt_2;y_2=y_0+mt_2)$ кривой $\Phi$ и прямой $\ell$.

**Определение.** *Отрезок* $M_1M_2$ *прямой* $\ell$ *называется хордой кривой* $\Phi$*. Хордой называют также и всю прямую* $\ell$*.*

Точка $A$, являющаяся серединой хорды $M_1M_2$, соответствует значению параметра $t$, равному $t_A = (t_1 + t_2)/2$.

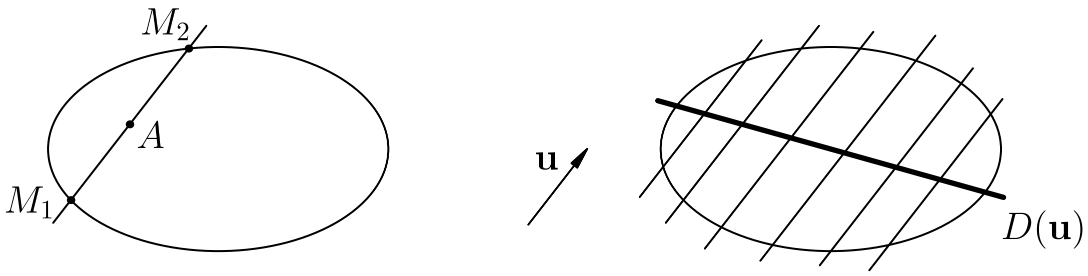


Рис. 67.

Во всех рассуждениях, проведенных выше, точка $M_0(x_0; y_0)$ — это произвольная точка рассматриваемой прямой $\ell$. В частности, можно положить $M_0 = A$. При этом $t_A = 0$ и, следовательно, $t_1 + t_2 = 0$. По теореме Виета в этом случае коэффициент при $t$ в квадратном уравнении (101) равен нулю:

$$\frac{lx_A}{a^2} \pm \frac{my_A}{b^2} = 0. \tag{103}$$

Уравнению (103) удовлетворяют координаты середины $A$ любой хорды $M_1M_2$, имеющей данное неасимптотическое направление $\mathbf{u}\{l; m\}$ (направления обозначаются представляющими их векторами). Отсюда следует, что середины всех хорд, имеющих данное направление $\mathbf{u}\{l; m\}$, лежат на прямой с уравнением

$$\frac{lx}{a^2} \pm \frac{my}{b^2} = 0. \tag{104}$$

**Определение.** *Прямая $D(\mathbf{u})$, имеющая уравнение* (104)*, называется диаметром кривой $\Phi$, сопряженным хордам данного неасимптотического направления $\mathbf{u}\{l; m\}$, или, просто, диаметром, сопряженным неасимптотическому направлению $\mathbf{u}\{l; m\}$.*

Из уравнения (104) следует, что диаметр $D(\mathbf{u})$ кривой $\Phi$ проходит через ее центр и имеет направляющий вектор $\mathbf{v}\{l'; m'\}$, где

$$\{l'; m'\} = \left\{\mp\frac{m}{b^2}; \frac{l}{a^2}\right\}. \tag{105}$$

Направление, задаваемое вектором $\mathbf{v}$, не является асимптотическим. Действительно, предположив, что $\Phi$ — гипербола и вектор $\mathbf{v}\{l';m'\}$ — вектор асимптотического направления, получим

$$\frac{m^2}{a^2b^4} - \frac{l^2}{b^2a^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{m^2}{b^2} - \frac{l^2}{a^2}\right) = 0,$$

откуда следует, что и вектор $\mathbf{u}\{l;m\}$ имеет асимптотическое направление.

Найдем диаметр $D(\mathbf{v})$, сопряженный направлению $\mathbf{v}\{l';m'\}$. Подставляя в уравнение (104) $l'$ и $m'$ вместо $l$ и $m$, найдем уравнение диаметра $D(\mathbf{v})$:

$$\frac{l'x}{a^2} \pm \frac{m'y}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mp\frac{mx}{a^2b^2} \pm \frac{ly}{a^2b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mx - ly = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что направляющим вектором диаметра $D(\mathbf{v})$ является первоначально заданный направляющий вектор хорд $\mathbf{u}\{l;m\}$.

**Определение.** *Диаметры $D(\mathbf{u})$ и $D(\mathbf{v})$ называются сопряженными диаметрами кривой $\Phi$, их направления (и направляющие векторы) $\mathbf{u}\{l;m\}$ и $\mathbf{v}\{l';m'\}$ называются сопряженными относительно кривой $\Phi$.*

Выведем условие сопряженности двух векторов $\mathbf{u}\{l;m\}$ и $\mathbf{v}\{l';m'\}$ относительно кривой $\Phi$. Из соотношений (105) следует, что направления $\mathbf{u}\{l;m\}$ и $\mathbf{v}\{l';m'\}$ сопряжены относительно кривой $\Phi$ тогда и только тогда, когда коллинеарны векторы с координатами $\{l';m'\}$ и $\{\mp m/b^2, l/a^2\}$. Записывая пропорциональность их координат, получаем искомые условия сопряженности:

$$\frac{l'b^2}{\mp m} = \frac{m'a^2}{l} \iff ll'b^2 = \mp mm'a^2 \iff \frac{ll'}{a^2} \pm \frac{mm'}{b^2} = 0. \quad (106)$$

Из предыдущих рассуждений следует, что всякая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр кривой $\Phi$, является диаметром, сопряженным некоторому направлению. Это направление можно найти из уравнения (106).

**Определение.** *Главными направлениями кривой* $\Phi$ *называются два направления* $\mathbf{u}\{l; m\}$ *и* $\mathbf{v}\{l'; m'\}$*, которые одновременно сопряжены относительно* $\Phi$ *и ортогональны одно другому.*

Для нахождения главных направлений кривой $\Phi$ надо найти пару направлений $\mathbf{u}\{l; m\}$ и $\mathbf{v}\{l'; m'\}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$ll' + mm' = 0, \qquad \frac{ll'}{a^2} \pm \frac{mm'}{b^2} = 0. \tag{107}$$

Из первого уравнения (107) следует $ll' = -mm'$. Подставляя это соотношение во второе уравнение (107), получаем

$$mm' \left( \frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{a^2} \right) = 0. \tag{108}$$

Из уравнений (108) и (107) следует, что, за исключением случая, когда $\Phi$ — окружность и, следовательно, $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0$, во всех остальных случаях либо $m' = 0$ и $l = 0$, либо $m = 0$ и $l' = 0$. Таким образом, единственной парой главных направлений эллипсов (не вырождающихся в окружность) и гипербол являются направления координатных осей канонических систем координат (осей симметрии). Что касается окружности, то для нее любая пара взаимно ортогональных направлений является парой главных направлений.

**Касательные к эллипсу и гиперболе.**

Пусть $M_0(x_0; y_0) \in \Phi$. Диаметр $D$ кривой $\Phi$, проходящий через $M_0(x_0; y_0)$, имеет уравнения $x = x_0 t$, $y = y_0 t$ (напомним, что диаметр проходит через центр $O(0; 0)$). Прямая $\ell_{M_0}\Phi$, проходящая через $M_0$ и имеющая направление, сопряженное направлению диаметра $D$, пересекает кривую $\Phi$ в двух точках $M_1$ и $M_2$, и точка $M_0$, являющаяся серединой отрезка $M_1M_2$, также принадлежит кривой $\Phi$. При этом $t_1$, $t_2$ и $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ — решения квадратного уравнения (101). Это возможно только в том случае, когда $t_1 = t_2 = t_0$, то есть две точки пересечения прямой $\ell_{M_0}\Phi$ и кривой $\Phi$ совпадают.

**Определение.** *Если уравнение* (101) *имеет два совпадающих решения* $t_1 = t_2$*, то говорят, что прямая* $\ell$ *пересекает кривую* $\Phi$ *в двух совпадающих точках. Точку* $M_1(t_1) = M_2(t_2)$ *называют при этом двойной точкой пересечения* $\ell$ *и* $\Phi$.

**Определение.** *Прямая* $\ell_{M_0}\Phi$*, проходящая через точку* $M_0 \in \Phi$ *и имеющая направление, сопряженное направлению диаметра* $D$*, проходящего через эту точку, называется касательной к* $\Phi$ *в точке* $M_0$.

Из предыдущих рассуждений следует, что прямая $\ell$ является касательной к кривой $\Phi$ в точке $M_0$ тогда и только тогда, когда точка $M_0$ является двойной точкой пересечения $\ell$ и $\Phi$.

Направляющим вектором диаметра $D$, проходящего через точку $M_0$, является вектор $\mathbf{u}\{x_0; y_0\}$. Поскольку направляющий вектор $\mathbf{v}\{l; m\}$ касательной $\ell_{M_0}\Phi$ сопряжен вектору $\mathbf{u}\{x_0; y_0\}$, из условия сопряженности (106) получаем соотношение

$$\frac{lx_0}{a^2} \pm \frac{my_0}{b^2} = 0, \qquad (109)$$

которому удовлетворяет направляющий вектор касательной $\ell_{M_0}\Phi$. Условие (109) также следует из уравнения (101), в котором в рассматриваемой ситуации коэффициент при $t$ и свободный член должны равняться нулю. Из условия (109) определяются нормальный вектор $\mathbf{N}_{M_0}\Phi\{A; B\}$ касательной $\ell_{M_0}\Phi$ и ее направляющий вектор $\mathbf{v}\{l; m\}$. Они имеют соответственно следующие координаты:

$$\{A; B\} = \left\{\frac{x_0}{a^2}; \pm\frac{y_0}{b^2}\right\} \quad \text{и} \quad \{l; m\} = \left\{\mp\frac{y_0}{b^2}; \frac{x_0}{a^2}\right\}.$$

Теперь можно записать параметрические и общее уравнения касательной. Параметрические уравнения касательной $\ell_{M_0}\Phi$ имеют вид

$$x = x_0 \mp \frac{y_0}{b^2}t, \quad y = y_0 + \frac{x_0}{a^2}t, \qquad (110)$$

а общее уравнение имеет вид

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} \pm \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0. \qquad (111)$$

Отметим однако, что при составлении уравнения касательной наиболее естественно воспользоваться тем, что точка $M$ лежит на касательной $\ell_{M_0}\Phi$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0;y-y_0\}$ является касательным вектором к $\Phi$ и, следовательно, сопряжен вектору $\overrightarrow{OM_0}\{x_0,y_0\}$. Поэтому уравнение касательной (111) можно получить, сразу подставляя координаты векторов $\overrightarrow{OM_0}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ в условия сопряженности (106).

Раскрывая в уравнениях (111) скобки и учитывая, что координаты $(x_0;y_0)$ точки $M_0$ удовлетворяют каноническому уравнению кривой (98), получаем, что уравнение касательной к эллипсу, заданному каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1, \tag{112}$$

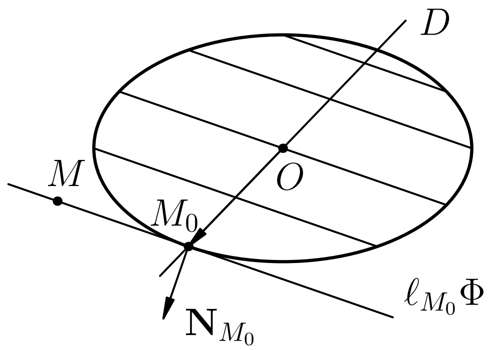


Рис. 68.

а уравнение касательной к гиперболе, заданной каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \tag{113}$$

Нормальный вектор касательной $\mathbf{N}_{M_0}\Phi\left\{\frac{x_0}{a^2};\pm\frac{y_0}{b^2}\right\}$ называют также *нормальным вектором кривой* $\Phi$.

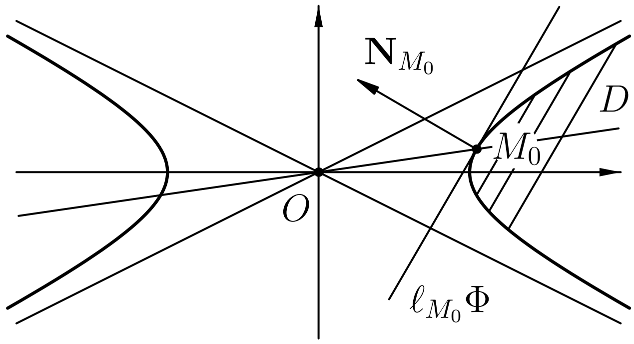


Рис. 69.

**Задача 46.** Прямая $Ax + By + C = 0$ является касательной к кривой $\Phi$, заданной каноническим уравнением (78) или (92), тогда и только тогда, когда

$$A^2a^2 \pm B^2b^2 = C^2c^2. \tag{114}$$

**Решение.** Если прямая $Ax + By + C = 0$ является касательной к кривой $\Phi$, то имеется точка касания $M_0(x_0; y_0)$, и тогда эта же касательная может быть задана уравнением (см. (112), (113)) $(xx_0)/a^2 \pm (yy_0)/b^2 - 1 = 0$. Поскольку коэффициенты этих уравнений должны быть пропорциональны, то

$$\frac{Aa^2}{x_0} = \pm\frac{Bb^2}{y_0} = -\frac{C}{1} \iff x_0 = -\frac{Aa^2}{C}, \quad y_0 = \mp\frac{Bb^2}{C}. \tag{115}$$

Далее, точка $M_0(x_0; y_0)$, где $x_0$ и $y_0$ имеют выражения (115), принадлежит $\Phi$ тогда и только тогда, когда (подставляем эти значения $x_0$ и $y_0$ в каноническое уравнение кривой $\Phi$)

$$\frac{A^2a^4}{a^2C^2} \pm \frac{B^2b^4}{b^2C^2} = 1 \iff A^2a^2 \pm B^2b^2 = C^2c^2. \tag{116}$$

Обратно, если выполняется условие (114), то из (116) следует, что точка $M_0(x_0; y_0)$ с координатами, имеющими выражение (115), принадлежит $\Phi$. Но тогда касательная к $\Phi$ в этой точке имеет уравнение (см. (112), (113))

$$-\frac{xAa^2}{a^2C} \mp \frac{yBb^2}{b^2C} = 1 \iff Ax + By + C = 0.$$

Условием (114) удобно пользоваться при решении некоторых задач, например следующей.

**Задача 47.** Эллипс с фокусами в точках $F_1(-3;0)$ и $F_2(3;0)$ касается прямой $x+y-5=0$. Составить уравнение этого эллипса.

**Решение.** Из условия (114) следует, что полуоси эллипса удовлетворяют уравнению $a^2+b^2=25$. Поскольку $a^2-b^2=c^2=9$, то $a^2=17$, а $b^2=8$.

**Оптические (фокальные) свойства эллипса и гиперболы.**

Следующее свойство эллипсов и гипербол находит применение в оптике при изготовлении отражателей.

**Предложение.** *Касательные $\ell_{M_0}\Phi$ к эллипсам и гиперболам образуют равные углы с фокальными радиусами $F_1M_0$ и $F_2M_0$, проведенными в точку касания.*

**Доказательство.** Воспользуемся следующим свойством биссектрис внешнего и внутреннего углов треугольника (см., например, [8], §2.4): биссектриса внутреннего или внешнего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Поскольку прямая, соединяющая вершину треугольника с точкой противоположной стороны (или ее продолжения) однозначно определяется отношением, в котором эта точка делит противоположную сторону, справедливо и обратное утверждение: если прямая, проходящая через вершину треугольника, делит противоположную сторону (внутренним или внешним образом) в отношении прилежащих сторон, то она является биссектрисой (внутреннего или внешнего) угла треугольника.

Найдем координаты точки $P$ пересечения касательной $\ell_{M_0}\Phi$ с осью абсцисс. Имеем:

$$\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1,\ y=0 \quad\Longrightarrow\quad x_P=\frac{a^2}{x_0},\ y_P=0.$$

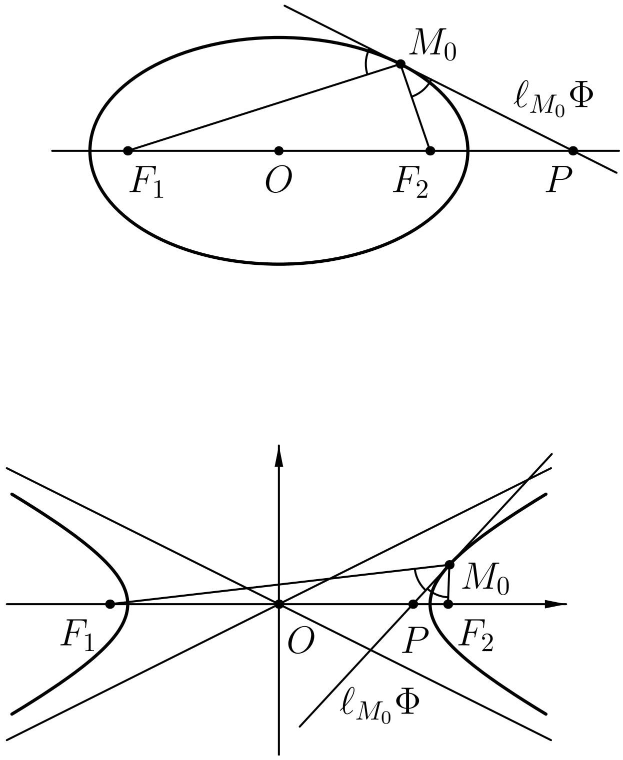


Рис. 70.

Убедимся, что точка $P$ делит отрезок $F_1F_2$, являющийся основанием треугольника $F_1F_2M_0$, в отношении прилежащих сторон $F_1M_0$ и $F_2M_0$. Проверку осуществим для эллипса и для правой ветви гиперболы (для левой ветви гиперболы утверждение будет следовать из симметричности гиперболы относительно оси ординат). Используя выражения (79) и (96) для фокальных радиусов, соотношение $c = ea$ и то, что длины отрезков $F_1M_0$ и $F_2M_0$ равны соответственно $|x_P + c|$ и $|x_P - c|$, получаем

$$\frac{F_1M_0}{F_1P} = \frac{a + ex_0}{\left|\frac{a^2}{x_0} + c\right|} = \frac{x_0}{a} = \frac{|a - ex_0|}{\left|\frac{a^2}{x_0} - c\right|} = \frac{F_2M_0}{F_2P}.$$

□

Доказанному предложению можно дать следующую интерпретацию, относящуюся к области теоретической физики:

*Луч света, выходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса направится во второй фокус.*

*Луч света, выходящий из фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы направится по прямой, проходящей через второй фокус.*

Непосредственно в технике применяются так называемые эллипсоиды и гиперболоиды вращения [14] — поверхности, получаемые вращением эллипсов и гипербол вокруг их осей, содержащих фокусы. Вместо потока света, исходящего из точечного источника, при этом можно рассматривать поток каких-либо частиц, а также электромагнитные или звуковые волны, испускаемые точечным источником.

Отметим еще одно следствие, вытекающее из доказанного предложения.

**Предложение.** *Софокусные (т. е. имеющие общие фокусы) эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.*

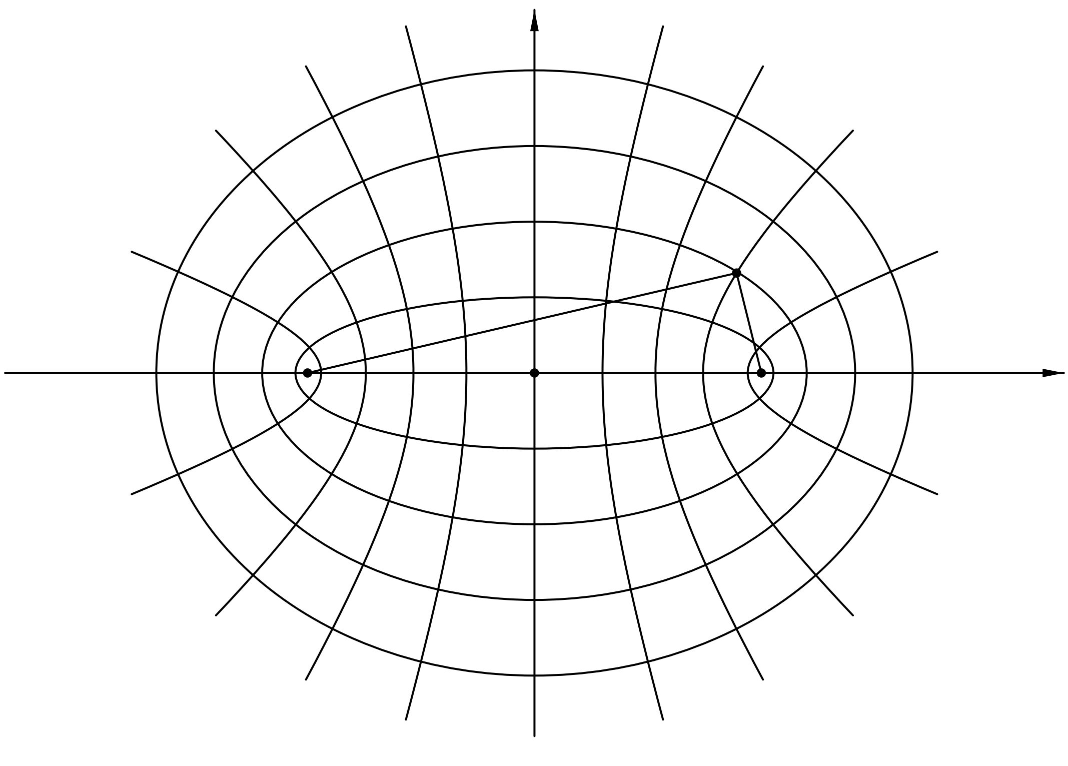

Рис. 71.

Доказательство очевидно из рисунка 71.

То, что касательные к эллипсам и гиперболам образуют одинаковые углы с фокальными радиусами, можно доказать, пользуясь только определениями этих кривых, не используя никаких уравнений [9]. Этот метод доказательства содержится в следующих задачах.

**Задача 48.** Пусть заданы прямая $\ell$ и две различные точки $A$ и $B$, лежащие по одну сторону от прямой $\ell$, и пусть $M$ — произвольная точка прямой $\ell$. Доказать, что сумма $AM + MB$ принимает наименьшее значение тогда, когда отрезки $AM$ и $MB$ образуют равные углы с прямой $\ell$.

**Решение.** Доказательство очевидно из рисунка 72, где $B'$ — точка, симметричная точке $B$ относительно прямой $\ell$, и того, что всякая сторона в треугольнике меньше суммы двух других сторон.

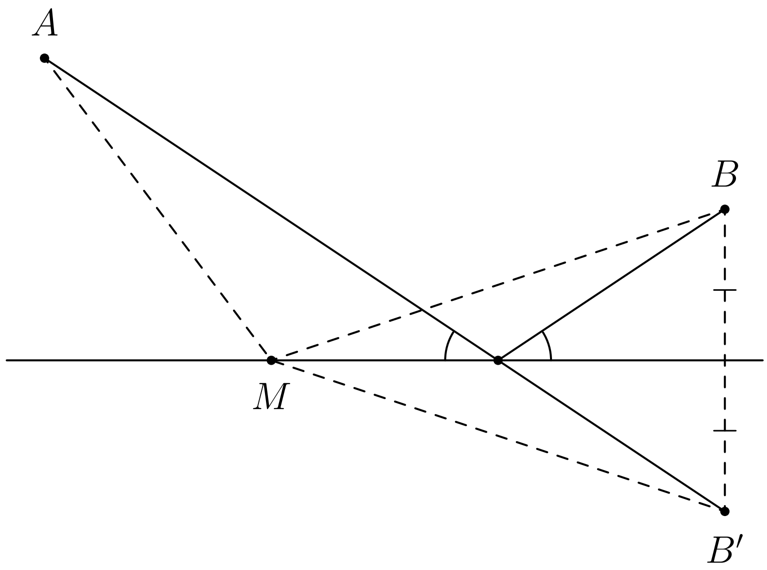


Рис. 72.

**Задача 49.** В условиях предыдущей задачи, взяв в качестве прямой $\ell$ касательную $\ell_{M_0}\Phi$ к эллипсу в точке $M_0$, а в качестве точек $A$ и $B$ фокусы эллипса, доказать, что касательная к эллипсу образует одинаковые углы с фокальными радиусами.

**Задача 50.** Пусть заданы прямая $\ell$ и две различные точки $A$ и $B$, лежащие по разные стороны от прямой $\ell$, и пусть $M$ — произвольная точка прямой $\ell$. Доказать, что модуль разности $|AM - MB|$ принимает наибольшее значение тогда, когда отрезки $AM$ и $MB$ образуют равные углы с прямой $\ell$.

**Решение.** Доказательство очевидно из рисунка 73, где $B'$ — точка, симметричная точке $B$ относительно прямой $\ell$, и того, что всякая сторона в треугольнике больше разности двух других сторон.

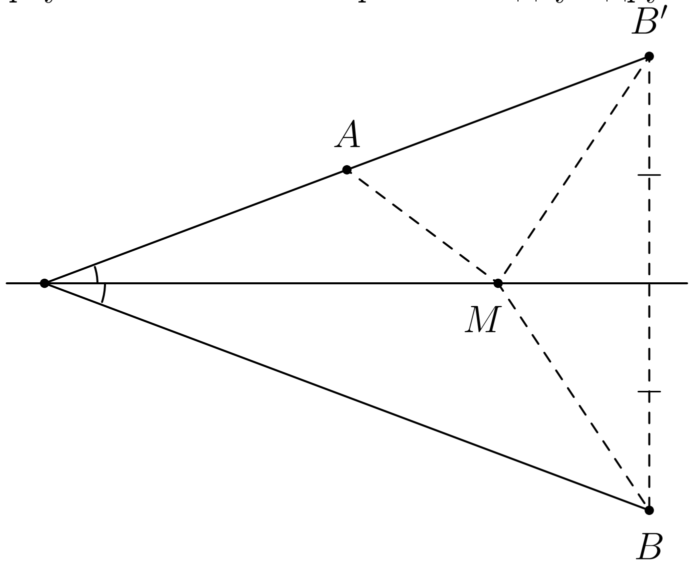


Рис. 73.

**Задача 51.** В условиях предыдущей задачи, взяв в качестве прямой $\ell$ касательную $\ell_{M_0}\Phi$ к гиперболе в точке $M_0$, а в качестве точек $A$ и $B$ фокусы гиперболы, доказать, что касательная к гиперболе образует одинаковые углы с фокальными радиусами.

Эллипс и гипербола обладают многими другими замечательными свойствами, которые можно найти сформулированными в задачах, содержащихся в сборниках задач [3], [12], [13], из которых здесь рассмотрим только некоторые.

**Задача 52.** Доказать, что площадь треугольника, сторонами которого являются асимптоты и касательная, не зависит от выбора точки касания.

**Решение.** Поскольку площадь треугольника, сторонами которого являются асимптоты и касательная, равна половине произведения отрезков, высекаемых касательной на асимптотах, на синус угла между асимптотами, то достаточно показать, что постоянным является произведение указанных отрезков. Поскольку каждый из этих отрезков равен модулю абсциссы точки пересечения касательной с асимптотой, деленному на косинус половины угла между асимптотами, то достаточно показать, что произведение модулей абсцисс точек пересечения касательной с асимптотами не зависит от выбора точки касания.

Подставляя параметрические уравнения асимптот $x = at$, $y = \pm bt$ в уравнение касательной $xx_0/a^2 - yy_0/b^2 = 1$, находим значения параметра $t$, соответствующие точкам пересечения асимптот с касательной и абсциссы этих точек:

$$t_{1,2} = \frac{1}{(x_0/a) \mp (y_0/b)} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{a}{(x_0/a) \mp (y_0/b)},$$

откуда следует, что $x_1 x_2 = a^2$. Рассмотрев треугольник, образуемый асимптотами и касательной в вершине гиперболы, легко установить, что площадь, о которой идет речь в задаче, равна $ab$.

**Задача 53.** Пусть $\Phi$ — это эллипс или гипербола, $F$ — один из фокусов кривой $\Phi$, а $\ell$ — прямая, проходящая через фокус $F$ и не проходящая через центр кривой $\Phi$. Пусть $M_1$ и $M_2$ — точки пересечения прямой $\ell$ с кривой $\Phi$. Доказать, что касательные $\ell_{M_1}\Phi$ и $\ell_{M_2}\Phi$ к кривой $\Phi$ в точках $M_1$ и $M_2$ пересекаются в точке, принадлежащей директрисе, соответствующей фокусу $F$.

**Решение.** Ограничимся рассмотрением правого по отношению к канонической системе координат фокуса эллипса. Случай гиперболы рассматривается аналогично. Очевидно, что утверждение задачи эквивалентно следующему: если касательные $\ell_{M_1}\Phi$ и $\ell_{M_2}\Phi$ к кривой $\Phi$ в некоторых ее точках $M_1$ и $M_2$ пересекаются в точке, принадлежащей директрисе, то точки $F$, $M_1$ и $M_2$ лежат на одной прямой. Подставив в уравнение (112) координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ точек $M_1$ и $M_2$, получим следующие уравнения касательных $\ell_{M_1}\Phi$ и $\ell_{M_2}\Phi$:

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0 \quad \text{и} \quad b^2 x_2 x + a^2 y_2 y - a^2 b^2 = 0.$$

Подставив в полученные уравнения $x = a/e$, найдем ординаты точек пересечения касательных $\ell_{M_1}\Phi$ и $\ell_{M_2}\Phi$ с директрисой. Приравнивая найденные ординаты, получаем соотношение

$$\frac{(ea - x_1)b^2}{eay_1} = \frac{(ea - x_2)b^2}{eay_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x_1 - c)}{y_1} = \frac{(x_2 - c)}{y_2},$$

эквивалентное коллинеарности векторов $\overrightarrow{FM_1}$ и $\overrightarrow{FM_2}$.

**Замечание.** Свойством, аналогичным свойству фокуса, сформулированному в задаче 53, обладает всякая точка $G$ плоскости $\mathcal{E}^2$, отличная от центра кривой $\Phi$. А именно, имеет место следующее утверждение. Пусть $\ell$ — произвольная прямая, проходящая через точку $G$ и не проходящая через центр кривой $\Phi$, а $M_1$ и $M_2$ — точки пересечения $\ell$ и $\Phi$, тогда касательные $\ell_{M_1}\Phi$ и $\ell_{M_2}\Phi$ к кривой $\Phi$ в точках $M_1$ и $M_2$ пересекаются в точке, которая принадлежит некоторой прямой (одной и той же для всех прямых $\ell$). Эта прямая называется *полярой* точки $G$ относительно $\Phi$. Таким образом, из утверждения задачи 53 следует, что директриса является полярой соответствующего ей фокуса.

Многие другие замечательные свойства эллипса и гиперболы можно найти в задачах из сборников задач [3], [12], [13].

**Рекомендуемая литература:** [1], глава II, §§2, 3; [7], глава 6, §4.

**Задачи и упражнения:** [3], 479, 480, 481, 482, 483, 485, 487, 489, 490, 491, 492, 493, 504, 510, 549, 551, 551, 555, 556, 557, 558, 570, 576; [6], темы 16, 17.

## 12 Диаметры параболы

Пусть $\Phi$ — парабола, заданная каноническим уравнением

$$y^2 = 2px, \tag{117}$$

а $\ell$ — прямая с направляющим вектором $\mathbf{u}\{l; m\}$, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \tag{118}$$

Предположим, что прямая $\ell$ пересекает параболу $\Phi$. Для нахождения точек пересечения $\ell$ с $\Phi$ подставляем уравнения (118) в (117). В результате получаем

$$(y_0+mt)^2 = 2p(x_0+lt) \;\Leftrightarrow\; m^2t^2+2t(my_0-pl)+y_0^2-2px_0 = 0. \tag{119}$$

При $m \neq 0$ уравнение (119) — квадратное относительно $t$, поэтому в этом случае прямая $\ell$ пересекает параболу $\Phi$ в двух точках (возможно совпадающих). При $m = 0$ прямая $\ell$ параллельна оси параболы. В этом случае (119) — уравнение первой степени и, следовательно, имеет единственное решение относительно $t$, поэтому прямая $\ell$ пересекает параболу $\Phi$ в одной точке.

**Определение.** *Всякий ненулевой вектор* $\mathbf{u}\{l; 0\}$ *называется вектором асимптотического направления для параболы* $y^2 = 2px$, *а прямая* $\ell$, *параллельная оси параболы, называется прямой асимптотического направления для параболы.*

Пусть направление рассматриваемой прямой $\ell$ не является асимптотическим. Тогда уравнение (119) имеет два вещественных решения (мы предположили, что $\ell$ и $\Phi$ пересекаются) $t_1$ и $t_2$, которым соответствуют две общие точки $M_1$ и $M_2$ кривой $\Phi$ и прямой $\ell$. Точка $A$, являющаяся серединой хорды $M_1M_2$, соответствует значению параметра $t$, равному $t_A = (t_1 + t_2)/2$.

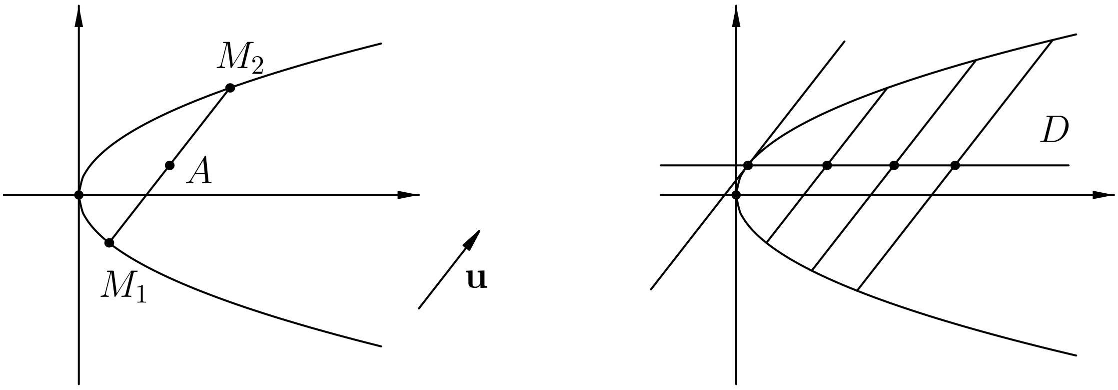


Рис. 74.

Положим $M_0(x_0; y_0) = A$. Тогда $t_A = 0$ и, следовательно, $t_1 + t_2 = 0$. По теореме Виета в этом случае коэффициент при $t$ в квадратном уравнении (119) равен нулю:

$$my_A - pl = 0. \tag{120}$$

Итак, координаты середины хорды $M_1M_2$ удовлетворяют уравнению (120). Поскольку $M_1M_2$ — это произвольная хорда, имеющая данное неасимптотическое направление $\mathbf{u}\{l; m\}$, то множество середин всех хорд, имеющих направление $\mathbf{u} = \{l; m\}$, удовлетворяет уравнению

$$my - pl = 0 \iff y = \frac{lp}{m}. \tag{121}$$

Уравнением (121) задается некоторая прямая, параллельная оси параболы Φ.

**Определение.** *Прямая* $D(\mathbf{u})$, *имеющая уравнение* (121), *называется диаметром параболы* Φ, *сопряженным хордам данного неасимптотического направления* $\mathbf{u}\{l; m\}$, *или, просто, диаметром, сопряженным неасимптотическому направлению* $\mathbf{u}\{l; m\}$.

Все диаметры параболы параллельны ее оси. Из уравнения (121) следует также, что всякая прямая $y = y_0$, параллельная оси параболы, является диаметром, сопряженным некоторому направлению, а именно, направлению $\mathbf{u}\{y_0; p\}$. Действительно, уравнение $y = y_0$

совпадает с уравнением (121) при

$$y_0 = \frac{lp}{m} \iff my_0 - lp = 0, \quad \text{то есть при } \{l; m\} = \{y_0; p\}. \quad (122)$$

**Касательные к параболе.**

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит параболе $\Phi$. Диаметр $D$ параболы $\Phi$, проходящий через $M_0(x_0; y_0)$, имеет уравнение $y = y_0$. Сохраняя терминологию, использованную ранее для эллипса и гиперболы (см. с. 124), заключаем, что, как и в случае эллипса и гиперболы, прямая, проходящая через точку $M_0$ параболы и имеющая направление, сопряженное диаметру $D$, проходящему через эту точку, пересекает параболу $\Phi$ в двух совпадающих точках.

**Определение.** *Прямая $\ell_{M_0}\Phi$, проходящая через точку $M_0$ параболы $\Phi$ и имеющая направление, сопряженное диаметру $D$, проходящему через эту точку, называется касательной к $\Phi$ в точке $M_0$.*

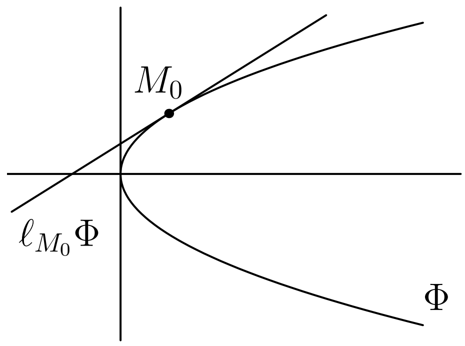


Рис. 75.

Как и в случае эллипса и гиперболы, прямая $\ell$ является касательной к параболе $\Phi$ в точке $M_0$ тогда и только тогда, когда точка $M_0$ является двойной точкой пересечения $\ell$ и $\Phi$.

Направлением, сопряженным диаметру $y = y_0$, проходящему через точку $M_0(x_0; y_0)$ параболы, является направление, определяемое вектором $\mathbf{u}\{y_0; p\}$ (см. (122)). Следовательно, вектор $\mathbf{u}\{y_0; p\}$ является направляющим вектором касательной $\ell_{M_0}\Phi$, поэтому вектор $\mathbf{N}\{-p; y_0\}$ является нормальным вектором касательной $\ell_{M_0}\Phi$, и касательная имеет следующее уравнение:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0. \tag{123}$$

Как и в случае эллипса и гиперболы, при составлении уравнения касательной к параболе наиболее естественно воспользоваться тем, что точка $M$ лежит на касательной $\ell_{M_0}\Phi$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0\}$ является касательным вектором к $\Phi$ и, следовательно, сопряжен диаметру, проходящему через точку $M_0\{x_0, y_0\}$. Поэтому уравнение касательной (123) можно получить, сразу подставляя координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ вместо $l$ и $m$ в условия сопряженности (122).

Раскрывая в уравнении (123) скобки и учитывая, что координаты $(x_0; y_0)$ точки $M_0$ удовлетворяют уравнению (117), получаем, что уравнение касательной к параболе, заданной каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{124}$$

**Оптическое (фокальное) свойство параболы.**

Следующее свойство параболы находит многочисленные применения в технике при изготовлении отражателей, на нем основываются, в частности, конструкции параболических антенн. Непосредственно в технике применяются параболоиды вращения [14] — поверхности, получаемые вращением парабол вокруг их осей.

**Предложение.** *Касательная $\ell_{M_0}\Phi$ к параболе $\Phi$ в точке $M_0$ образует равные углы с фокальным радиусом $FM_0$ и осью параболы.*

**Доказательство.** Подставляя $y = 0$ в уравнение касательной (124), находим координаты $(-x_0; 0)$ точки $P$ пересечения касательной с осью абсцисс канонической системы координат. Расстояние от точки $P$ до фокуса равно $\dfrac{p}{2} + x_0$ и совпадает с фокальным радиусом $r = FM_0$. Следовательно, треугольник $PFM_0$ — равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны. См. рисунок 76. □

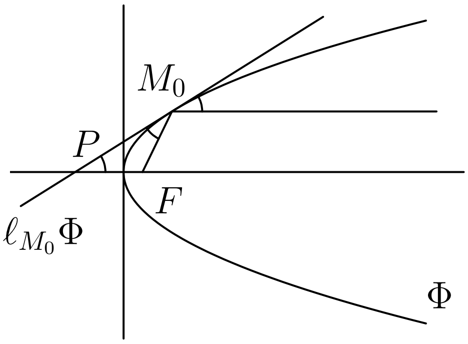


Рис. 76.

Доказанному предложению можно дать следующую интерпретацию, относящуюся к области теоретической физики:

*Луч света, выходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы направится параллельно ее оси.*

Отметим еще одно следствие из оптического свойства параболы, относящееся к физике.

Линию, которой достигают лучи света, испускаемого точечным источником, за определенный промежуток времени, называют фронтом волны этого источника (см. [7], гл. 6, §4). Если на своем пути лучи света отражаются от некоторой кривой, то говорят о фронте отраженной волны.

В случае параболы фронт отраженной волны источника света, расположенного в фокусе параболы, представляет собой прямую линию, параллельную директрисе параболы (см. рисунок 77). Это следует из того, что расстояние от точки параболы до ее фокуса совпадает с расстоянием от этой точки до директрисы.

В случае эллипса и гиперболы фронт отраженной волны источника света, расположенного в фокусе, представляет собой окружность с центром в другом фокусе.

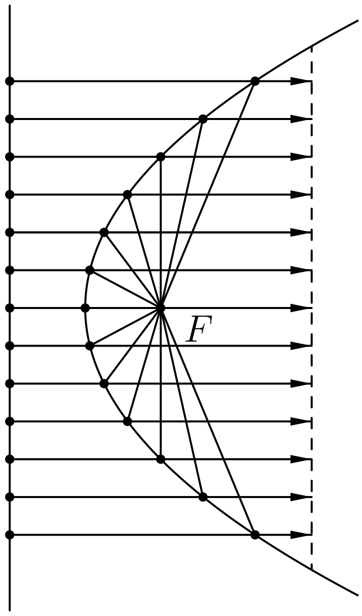


Рис. 77.

Непосредственным следствием доказанного выше предложения является следующее утверждение.

**Предложение.** *Софокусные (то есть имеющие общий фокус) параболы, направления осей которых противоположны (то есть противоположны направления осей абсцисс канонических систем координат), пересекаются под прямым углом.*

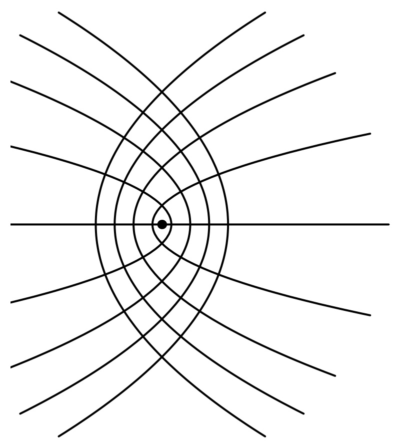

Рис. 78.

Как и фокальные свойства эллипса и гиперболы, фокальное свойство параболы можно доказать, пользуясь только определением паработы и не используя никаких уравнений [9]. Это доказательство можно вывести из следующей задачи.

**Задача 54.** Пусть $F$ — фокус параболы $\Phi$, $M_0$ — произвольная ее точка, а $M_0M$ — биссектриса угла $\angle FM_0B$ между $M_0F$ и перпендикуляром $M_0B$, опущенным из точки $M_0$ на директрису. Доказать, что расстояние от произвольной точки $M$ биссектрисы $M_0M$, отличной от точки $M_0$, до директрисы меньше расстояния от этой точки до фокуса (см. рисунок 79), и следовательно, $M_0$ — единственная общая точка параболы $\Phi$ и прямой $M_0M$.

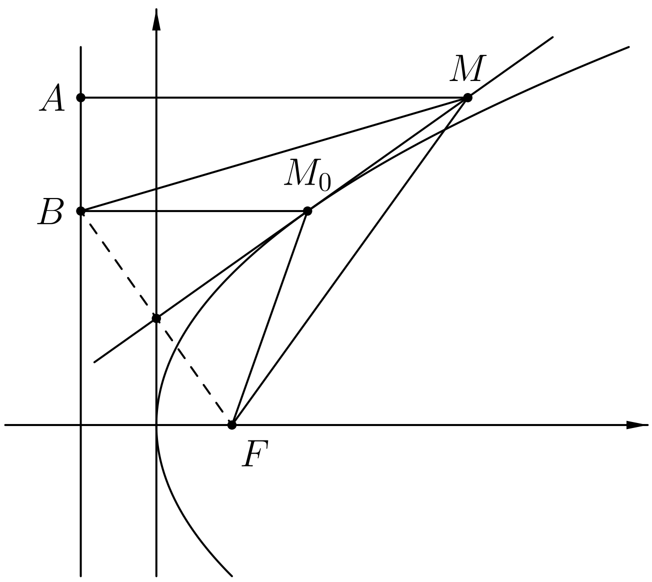


Рис. 79.

**Задача 55.** Известно, что касательные к параболе в точках $M_1$ и $M_2$ перпендикулярны. Доказать, что точка их пересечения принадлежит директрисе.

**Решение.** Пусть точки $M_1$ и $M_2$ имеют соответственно координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, тогда уравнения касательных в этих точках можно представить в следующем виде

$$px - y_1y + px_1 = 0 \quad \text{и} \quad px - y_2y + px_2 = 0. \tag{125}$$

Приравнивая нулю скалярное произведение нормальных векторов прямых (125), получаем $p^2+y_1y_2=0$. Выражая теперь координаты $x_1$,

$y_2$ и $x_2$ через $y_1$ и подставляя в систему уравнений (125), приводим эту систему к следующему виду

$$px - y_1 y + \frac{y_1^2}{2} = 0, \quad px + \frac{p^2}{y_1} + \frac{p^4}{2y_1^2} = 0.$$

Сложив второе уравнение с первым, умноженным на $p^2/y_1^2$, найдем абсциссу точки пересечения касательных: $x = -p/2$.

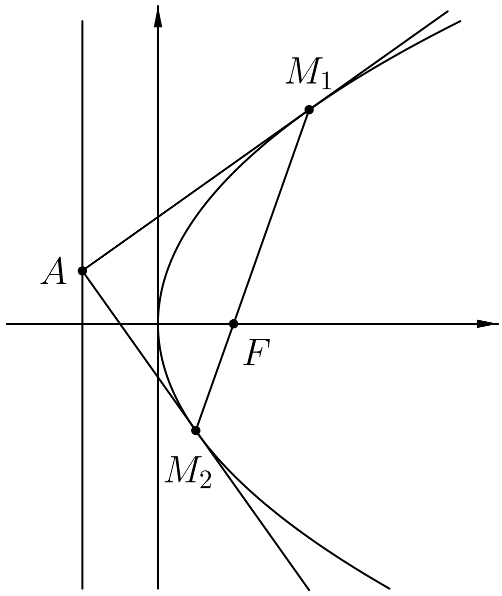


Рис. 80.

**Задача 56.** Прямая, проведенная через фокус параболы, пересекла параболу в точках $M_1$ и $M_2$. Доказать, что касательные к параболе в точках $M_1$ и $M_2$ пересекаются в точке, принадлежащей директрисе.

**Решение.** Достаточно проверить, что если точка пересечения касательных принадлежит директрисе, то точки $F$, $M_1$ и $M_2$ лежат на одной прямой. Подставляя в уравнения (125) $x = -p/2$ и приравнивая найденные из этих уравнений ординаты точек пересечения касательных с директрисой, получаем

$$\frac{px_1 - p^2/2}{y_1} = \frac{px_2 - p^2/2}{y_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1 - p/2}{y_1} = \frac{x_2 - p/2}{y_2},$$

что эквивалентно коллинеарности векторов $\overrightarrow{FM_1}$ и $\overrightarrow{FM_2}$.

Как и в случае эллипса и гиперболы (см. замечание на с. 134) аналогичным свойством обладает любая точка $G$, не принадлежащая параболе. Если прямая, проходящая через точку $G$, пересекает параболу в точках $M_1$ и $M_2$, то точка пересечения касательных к параболе в этих точках принадлежит некоторой прямой, называемой *полярой* точки $G$ относительно параболы. Таким образом, директриса параболы является полярой фокуса.

Помимо прямоугольных и аффинных систем координат, на плоскости можно вводить различные криволинейные системы координат, которые оказываются полезными при решении тех или иных задач. Одной из таких систем координат является полярная система координат, рассматриваемая в §13. Два семейства парабол из предложения на с. 140 (см. рисунок 78) можно использовать для введения на плоскости так называемой параболической системы координат, рассматриваемой в задаче, следующей ниже.

**Задача 57.** С прямоугольной системой координат $Oxy$ на плоскости, определяемой некоторым ортонормированным репером, можно связать параболическую систему координат, в которой положение точки на плоскости определяется двумя числами $u$ и $v$, связанными с прямоугольными координатами $x$ и $y$ соотношениями

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv. \tag{126}$$

Проверить, что координатные линии этой системы координат, определяемые уравнениями $v = v_0$ и $u = u_0$ соответственно, представляют собой два семейства парабол из предложения на с. 140 (см. рисунок 78).

Другие замечательные свойства параболы можно найти в задачах из сборников задач [3], [12], [13].

**Рекомендуемая литература:** [1], глава II, §1; [7], глава 6, §4.

**Задачи и упражнения:** [3], 639, 640, 641, 649, 650, 655, 659, 660, 668; [6], тема 18.

## 13 Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Полярная система координат на ориентированной евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ задается точкой $O \in \mathcal{E}_2$, называемой *полюсом*, и ориентированной прямой (осью) $\ell\!\uparrow$, проходящей через точку $O$, называемой *полярной осью*. Положение точки $M \in \mathcal{E}_2$ определяется двумя числами $(\rho;\varphi)$, которые находятся следующим образом: $\rho = |\overrightarrow{OM}|$, а $\varphi$ — это угол, на который нужно повернуть направляющий вектор $\mathbf{a}$ оси $\ell\!\uparrow$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (см. рисунок 81).

С полярной системой координат естественно ассоциируется правый ортонормированный репер $\{O;\mathbf{i},\mathbf{j}\}$, где $\mathbf{i} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ — единичный направляющий вектор полярной оси. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки $M$ следующим образом выражается через ее полярные координаты $(\rho;\varphi)$:

$$\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}(\varphi), \quad \text{где} \quad \mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi.$$

Поэтому прямоугольные координаты точки $M$ относительно репера $\{O;\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ связаны с ее полярными координатами следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{127}$$

Из уравнений (127) видно, что прямоугольные координаты точки $M$ однозначно определяются по ее полярным координатам. Однако обратное не имеет места. Если $M \neq O$, то $\varphi$ определяется с точностью до слагаемого, кратного $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а если $M = O$, то $\varphi$ может быть любым вещественным числом. Кроме того, иногда удобно считать, что $\rho$ может принимать и отрицательные значения. При этом считается, что координаты $(\rho;\varphi)$ и $(-\rho;\varphi+\pi)$ задают одну и ту же точку (это можно объяснить следующим образом: чтобы найти на плоскости точку $M$ с полярными координатами $(\rho;\varphi)$, нужно повернуть полярную ось вокруг полюса на угол $\varphi$ и затем взять на ней точку с координатой $\rho$).

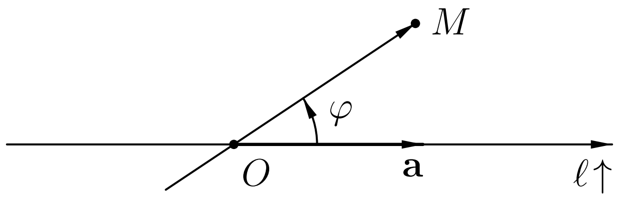


Рис. 81.

При выборе полярной системы координат для изучения эллипса, гиперболы или параболы естественно располагать полюс или в начале канонической системы координат, или в фокусе рассматриваемой кривой, а в качестве полярной оси естественно брать ось абсцисс канонической системы координат.

В этом параграфе для изучения эллипса, гиперболы и параболы мы выбираем следующие полярные системы координат: полюс $O$ помещаем соответственно в фокус параболы, левый фокус эллипса и в правый фокус гиперболы (относительно канонической системы координат), а в качестве полярной оси выбираем во всех трех случаях ось абсцисс канонической системы координат (см. рисунок 82). Такие полярные системы координат находят применение в астрономии, поскольку траекториями небесных тел, обнаруживающихся в солнечной системе, являются эллипсы, гиперболы и параболы, в одном из фокусов которых находится солнце (небесные тела рассматриваются как материальные точки).

Удобно считать, что полярная система задана на плоскости первоначально, а затем движением данные эллипс, гипербола и парабола располагаются на плоскости таким образом, чтобы их оси совпали с полярной осью, а фокусы расположились, как это указано выше, тогда все рассматриваемые кривые (используем для них, как и ранее, обозначение $\Phi$) будут задаваться уравнением

$$r = de, \tag{128}$$

где $r$ — это фокальный радиус точки $M \in \Phi$, $d$ — расстояние от точки $M \in \Phi$ кривой до соответствующей директрисы, а $e$ — эксцентриситет.

Пусть $D$ — директриса, соответствующая фокусу, расположенному в полюсе. Фокальным параметром кривой Ф называется половина фокальной хорды, перпендикулярной оси кривой. Обозначается этот параметр буквой $p$. Очевидно, фокальный параметр совпадает с фокальным радиусом точки $A \in \Phi$, для которой вектор $\overrightarrow{FA}$ перпендикулярен оси абсцисс канонической системы координат. Если обозначить расстояние от фокуса до директрисы символом

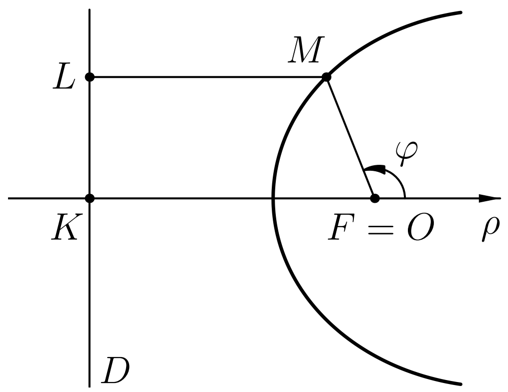

Рис. 82.

$$\delta = \operatorname{dist}(F, D), \quad \text{то} \quad p = \delta e.$$

В случае параболы фокальный параметр $p$ совпадает с параметром $p$ в ее каноническом уравнении, а для эллипса и гиперболы $p = b^2/a$.

Пусть, далее, $K$ — точка пересечения полярной оси и директрисы $D$, $M$ — произвольная точка кривой Ф, $L$ — проекция точки $M$ на директрису, $r$ — фокальный радиус точки $M$, $d$ — расстояние от $M$ до директрисы. Имеем:

$$\begin{aligned} d = |\overrightarrow{LM}| = (\overrightarrow{LM}, \mathbf{i}) = (\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{FM}, \mathbf{i}) \ = \\ = \ 0 + \delta + (r\mathbf{e}(\varphi), \mathbf{i}) = \delta + r\cos\varphi. \end{aligned} \tag{129}$$

Подставляя выражение (129) для $d$ в уравнение (128), получаем

$$r = \delta e + re\cos\varphi, \quad \text{откуда} \quad r(1 - e\cos\varphi) = \delta e = p.$$

Окончательно, уравнение, задающее при соответствующих значениях эксцентриситета эллипс, параболу или правую ветвь гиперболы, принимает вид

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{130}$$

**Задача 58.** Вывести следующее уравнение левой ветви гиперболы в той же самой полярной системе координат (полюс находится в правом фокусе, а полярная ось совпадает с осью абсцисс канонической системы координат, см. рисунок 83):

$$\rho = \frac{-p}{1 + e\cos\varphi}.$$

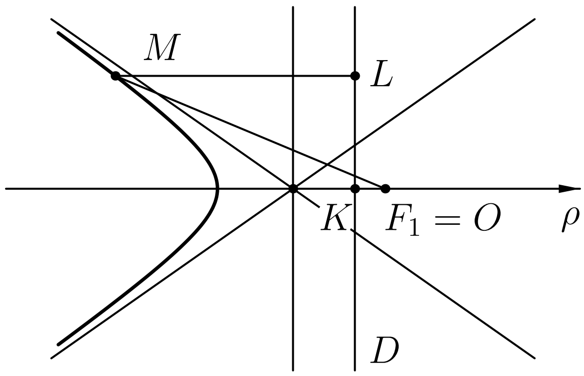


Рис. 83.

**Рекомендуемая литература:** [1], глава II, §5; [7], глава 6, §3.

**Задачи и упражнения:** [3], 106, 107, 109, 111, 112, 114, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 380, 382, 383, 384, 385, 388; [6], тема 11.

## 14 Параметрические уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Параметрическим уравнением линии $\Gamma \subset \mathcal{A}_n$ в аффинном пространстве называют уравнение вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $t$ — вещественный параметр, принимающий значения из некоторого интервала $(\alpha;\beta) \subset \mathbf{R}$, а $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор некоторой точки линии $\Gamma$ при любом значении $t \in (\alpha;\beta)$. Область значений функции $\mathbf{r}(t)$ может не совпадать со всей линией $\Gamma$, то есть эта функция может параметризовать только часть линии. В геометрии, как правило, предполагается, что функция $\mathbf{r}(t)$ является кусочно-дифференцируемой. Очевидно, параметрическое уравнение линии определяется неоднозначно. Например, если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — параметрическое уравнение некоторой линии $\Gamma \subset \mathcal{A}_n$, а $t = t(\tau)$ — некоторая взаимно однозначная кусочно-дифференцируемая функция, $(\gamma; \delta) \ni \tau \mapsto t(\tau) \in (\alpha; \beta)$, то уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))$ также является параметрическим уравнением линии $\Gamma$.

Если в пространстве $\mathcal{A}_n$ выбран репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, то, разложения $\mathbf{r}(t) = x^i(t)\mathbf{e}_i$ определяют координатные параметрические уравнения $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, линии $\Gamma$. Они также определены неоднозначно, зависят от выбора уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и от выбора репера.

Эллипс, гиперболу и параболу на плоскости $\mathcal{E}_2$ также можно задавать различными параметрическими уравнениями. Например, можно получить параметрические уравнения этих линий, переходя в их полярных уравнениях (130) от полярных координат к прямоугольным по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. В качестве параметра, задающего точку параболы, естественно взять ее ординату, тогда парабола будет задаваться параметрическими уравнениями

$$x = t^2/2p, \quad y = t.$$

В этом параграфе рассматриваются параметрические уравнения эллипса и гиперболы, в которых параметр, значения которого определяют положение точки кривой, имеет естественный геометрический смысл.

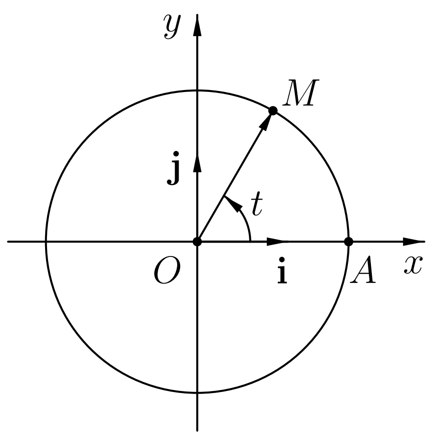

Рис. 84.

Рассмотрим сначала окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Точка $M$ этой окружности имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = a\mathbf{e}(t)$, где $t$ — угол, на который надо повернуть направляющий вектор $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$ оси абсцисс, чтобы его направление совпало с направлением радиуса-вектора точки $M$, а $\mathbf{e}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t$ — круговая векторная функция (см. рисунок 84). Таким образом, окружность может быть задана параметрическими уравнениями

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(t) \qquad \iff \qquad x = a\cos t, \quad y = a\sin t. \tag{131}$$

Область $(\alpha;\beta)$ изменения параметра $t$ выбирается в зависимости от условий задачи. Например, если точка $M(t)$ непрерывно вращается вокруг точки $O$, можно считать, что $t \in (-\infty;+\infty)$.

Параметр $t$ в уравнениях (131) имеет также следующий геометрический смысл: число $a^2 t$ — это удвоенная ориентированная площадь сектора $OAM$, где $A(a;0)$ — точка пересечения окружности с положительной частью оси абсцисс.

В основе параметрических уравнений окружности (131) лежит тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Это же тождество позволяет параметризовать эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{132}$$

следующим образом:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \tag{133}$$

Геометрический смысл параметра $t$ в уравнениях (133) ясен из рисунка 85, демонстрирующего тот факт, что эллипс (132) может быть получен из окружности радиуса $a$ сжатием к оси абсцисс с коэффициентом $b/a$ или растяжением окружности радиуса $b$ от оси ординат с коэффициентом $a/b$.

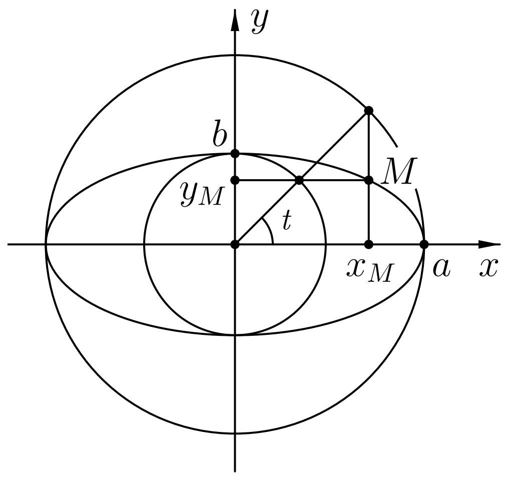

Рис. 85.

Вычислим теперь для эллипса площадь $S(t)$ сектора $OAM$, где $A(a;0)$ — точка пересечения эллипса с положительной частью оси абсцисс (вершина эллипса), а $M(t)$ — точка эллипса, определяемая соответствующим значением параметра $t$. Производная функция $S'(t)$ представляет предел отношения площади сектора $OMM'$, где $M'$ — точка эллипса, соответствующая значению параметра $t+\Delta t$, к $\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Поскольку площадь сектора $OMM'$ отличается от площади треугольника $OMM'$ на бесконечно малую величину более высокого порядка чем $\Delta t$, то производная $S'(t)$ равна пределу отношения площади треугольника $OMM'$ к $\Delta t$ при $\Delta t \to 0$.

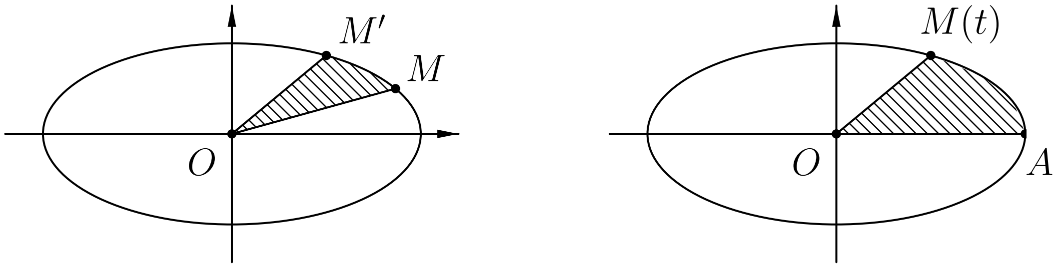


Рис. 86.

Поэтому

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ a\cos(t+\Delta t) & b\sin(t+\Delta t) \end{vmatrix}}{\Delta t} = \tag{134}$$

$$= \frac{ab}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} = \frac{ab}{2}.$$

Отсюда

$$S(t) = \int_0^t S'(t)\,dt = \int_0^t \frac{ab}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\,t. \tag{135}$$

Таким образом, параметр $t$ в уравнениях (133) — это ориентированная площадь сектора $OAM$, взятая с коэффициентом $\dfrac{2}{ab}$.

Гиперболические функции $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ и $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ удовлетворяют тождеству $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Это тождество дает возможность параметризовать правую ветвь гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{136}$$

следующим образом:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t. \tag{137}$$

Геометрический смысл параметра $t$ в уравнениях (137) аналогичен геометрическому смыслу параметра $t$ в уравнениях эллипса (133). Вычисляя производную $S'(t)$ от функции $S(t)$, представляющей собой площадь сектора $OAM$, где $A(a;0)$ — вершина гиперболы, а $M(t)$ — точка гиперболы, определяемая соответствующим значением параметра $t$, аналогично случаю эллипса получим

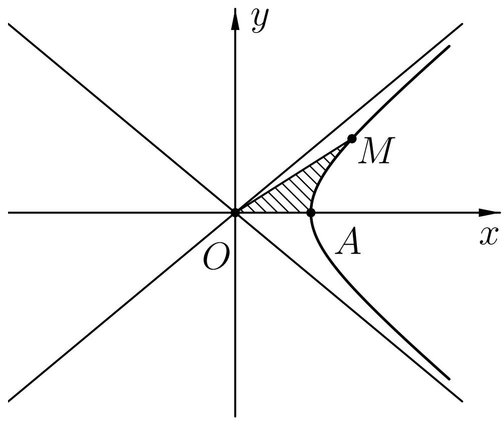


Рис. 87.

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a\,\mathrm{ch}\,t & b\,\mathrm{sh}\,t \\ a\,\mathrm{ch}\,(t+\Delta t) & b\,\mathrm{sh}\,(t+\Delta t) \end{vmatrix}}{\Delta t} = \tag{138}$$

$$= \frac{ab}{2}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\mathrm{sh}\,\Delta t}{\Delta t} = \frac{ab}{2},$$

откуда аналогично (135) получаем $S(t) = \dfrac{ab}{2}\,t$. Таким образом, параметр $t$ в уравнениях (137) — это ориентированная площадь сектора $OAM$, ограниченного гиперболой, взятая с коэффициентом $\dfrac{2}{ab}$.

**Задача 59.** Использование тригонометрического тождества $\sec^2 t - \mathrm{tg}^2\, t = 1$ позволяет получить следующие параметрические уравнения для правой ветви гиперболы (136):

$$x = \sec t, \quad y = \mathrm{tg}\, t, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{139}$$

1) Используя две концентрические окружности радиусов $a$ и $b$, как на рисунке 85, указать точку гиперболы, соответствующую данному значению параметра $t$.

2) Записать аналогичные параметрические уравнения для левой ветви гиперболы (136).

## Список литературы


[1] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* – М.: Наука, 1979. – 512 с.

[2] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия I.* – М.: Просвещение, 1974. – 352 с.

[3] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии.* – СПб.: Лань, 2009. – 384 с.

[4] Берже М. *Геометрия.* Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.

[5] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* – М.: Наука, 1970. – 528 с.

[6] Игудесман К.Б. *Задачи по аналитической геометрии. Часть I.* Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». – Казань: Казанск. ун-т., 2003. – 63 с.

[7] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* – М.: Наука, 1981. – 232 с.

[8] Понарин Я.П. *Элементарная геометрия. Т. 1. Планиметрия, преобразования плоскости.* – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.

[9] Протасов Я.П. *Максимумы и минимумы в геометрии.* – М.: МЦНМО, 2005. – 56 с.

[10] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* – М.: Наука, 1971. – 432 с.

[11] Постников М.М. *Аналитическая геометрия* (*Лекции по геометрии. Семестр I*). – М.: Наука, 1979. – 336 с.

[12] *Сборник задач по геометрии.* Под ред. В.Т. Базылева. – М.: Просвещение, 1980. – 240 с.

[13] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* – М.: Наука, 1964. – 336 с.

[14] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия II. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть II. Аналитическая геометрия пространства.* – Казань: КФУ, 2012. – 120 с.

[15] Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.) *Аналитическая геометрия III. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть III. Многомерные пространства. Гиперповерхности второго порядка.* – Казань: КФУ, 2014. – 160 с.

# Содержание