определяет действие аддитивной группы вещественных чисел на Λ *такое, что* $\rho(x, h_\tau(x)) = |h|$ *для каждого* $x \in \Lambda$. *Кроме того,* h_τ *на каждой прямой параболического пучка прямых с центром в* τ *является параллельным переносом и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей для такой прямой, а также пучок орисфер с центром в* τ.

Литература

1. Сосов Е. Н. *О действии мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского* // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012. – Т. 154. – № 4. – С. 156–160.

2. Сосов Е. Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: учебно-методическое пособие.* – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 84 с.

3. Сабинин Л. В. *Одули как новый подход к геометрии со связностью* // Докл. АН СССР, 1977. – Т. 233. – № 5. – С. 800–803.

ON THE ACTIONS OF REAL NUMBER GROUPS ON THE LOBACHEVSKY SPACE PRESERVING BUNDLES OF STRAIGHT LINES

E.N. Sosov

We consider the Lobachevsky space. In terms of the Beltrami–Klein model we obtain explicit expressions for the actions of real number groups on the Lobachevsky space preserving hyperbolic and parabolic bundles of straight lines.

Keywords: Lobachevsky space, Beltrami–Klein model, bundle of straight lines.

УДК 514.75; 517.95

ПРОЕКТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ 2-ТКАНЕЙ

И.С. Стрельцова[1]

1 *strelzova_is@mail.ru*; Астраханский государственный университет

В данной работе приводится описание поля рациональных проективных дифференциальных инвариантов плоских прямолинейных 2-тканей. Доказывается, что дифференциальные инварианты любого порядка могут быть получены из дифференциальных инвариантов второго и третьего порядка при помощи инвариантных дифференцирований

Ключевые слова: Проективные дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования.

В этой работе мы изучаем проективные инварианты плоских тканей. Напомним, что k-тканью на плоскости $M = \mathbb{R}^2(x, y)$, [1], называется семейство, состоящее из k-слоений, слои которых трансверсальны друг другу. Ткань называется прямолинейной, если слои всех слоений являются прямыми. Такие ткани могут быть заданы k-различными решениями уравнения Эйлера [2],[3]:

$$w_y = w w_x. \tag{1}$$

Группа проективных преобразований плоскости $SL_3(\mathbb{R})$ действует на множестве всех прямолинейных тканей, и это действие, в силу (1), переносится на пространство решений уравнения Эйлера. Представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$, отвечающее проективному действию группы Ли $SL_3(\mathbb{R})$, задается векторными полями X_A на плоскости, которые имеют вид:

$$X_A = (a_{13} + (a_{11} - a_{33})x + a_{12}y - a_{32}xy - a_{33}x^2)\partial_x + \\ + (a_{23} + a_{21}x + (a_{22} - a_{33})y - a_{31}xy - a_{32}y^2)\partial_y,$$

где матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,3} \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.

Следующее предложение описывает $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$-действие на пространстве решений (1).

Предложение 1. *Векторные поля*

$$\overline{X}_A = X_A + \lambda_A(w)\partial_w,$$

где

$$\lambda_A(w) = (a_{21} - a_{31}y)w^2 + (a_{11} - a_{22} - a_{31}x + a_{32}y)w + a_{32}x - a_{12},$$

задают представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ на тотальном пространстве расслоения

$$\pi' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \pi'(x, y, w) \mapsto (x, y).$$

Векторные поля $\overline{X}_A$ являются точечными симметриями уравнения Эйлера.

Прямолинейные плоские 2-ткани задаются двумя различными решениями u, v уравнения Эйлера, и $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$-действие на них, в силу предыдущего предложения, имеет следующий вид:

Предложение 2. *Векторные поля*

$$\overline{X}_A = X_A + \lambda_A(u)\partial_u + \lambda_A(v)\partial_v$$

задают представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ на тотальном пространстве расслоения

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, u, v) \mapsto (x, y).$$

Эти векторные поля являются точечными симметриями системы двух уравнений Эйлера

$$u_y = uu_x, \quad v_y = vv_x. \tag{2}$$

Система уравнений (2) определяет подмногообразие

$$E_1 \subset J^1(\pi), \quad E_1 = uu_x - u_y = 0, \quad vv_x - v_y = 0$$

в многообразии $J^1(\pi)$ 1-джетов сечений расслоения.

Пусть $E_k \subset J^k(\pi)$ – k-е продолжения этого уравнения.

Подмногообразия E_k являются неприводимыми алгебраическими многообразиями, а рациональные функции на E_k, инвариантные относительно продолженного $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$-действия, мы называем проективными рациональными дифференциальными инвариантами порядка $\leq k$ прямолинейных 2-тканей [4].

Пусть F_k – поле рациональных дифференциальных инвариантов порядка $\leq k$, а

$$F = \varprojlim F_k$$

– поле всех рациональных проективных дифференциальных инвариантов.

Легко видеть, что поле F_1 содержит только константы.

Решая систему дифференциальных уравнений

$$\overline{X}_A^{(2)}(I) = 0,$$

и используя теорему Розенлихта [5, 6], мы получаем следующий результат:

Теорема 1. *Поле F_3 проективных дифференциальных инвариантов порядка ≤ 3 порождено инвариантом второго порядка*

$$I_2 = \frac{u_{xx} v_{xx}}{(u_{xx})^2 + (v_{xx})^2}$$

и инвариантом третьего порядка

$$I_3 = I \times (3\Delta_x u_{xx} + \Delta \cdot u_{xxx})\,(3\Delta_x v_{xx} + \Delta \cdot v_{xxx}),$$

где

$$I = \frac{\Delta_{xx}\left((u_{xx})^2 + u_{xx} v_{xx} + (v_{xx})^2\right)}{\Delta \cdot (u_{xx})^3\,(v_{xx})^3}$$

и $\Delta = v - u$. Это поле разделяет регулярные $SL_3(\mathbb{R})$-орбиты в E_3.

Для описания поля всех проективных дифференциальных инвариантов плоских прямолинейных 2-тканей мы воспользуемся теоремой Ли–Трессе [3].

Инвариантные дифференцирования, существование которых утверждается в этой теореме, можно найти чисто геометрически. А именно, в данном случае они пропорциональны векторным полям, касающимся слоений, и имеют вид:

$$\nabla_1 = \left(\frac{dI_2}{dy} - u\frac{dI_2}{dx}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dy} - u\frac{d}{dx}\right),$$

$$\nabla_2 = \left(\frac{dI_2}{dy} - v\frac{dI_2}{dx}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dy} - v\frac{d}{dx}\right).$$

Окончательно, используя теорему Ли–Трессе [3], мы получаем следующее описание поля проективных инвариантов:

Теорема 2. *Поле рациональных проективных дифференциальных инвариантов порождено базисными инвариантами I_2, I_3 и инвариантными дифференцированиями ∇_1, ∇_2. Это поле разделяет регулярные орбиты.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект мол_а 16-31-00044).

Литература

1. Бляшке В. *Введение в геометрию тканей.* – М.: Физматгиз, 1959. – 144 с.

2. Goldberg V.V., Lychagin V.V. *Geodesic webs on a two-dimensional manifold and Euler equations.* // Acta Applicandae Mathematicae. – 04/2012; 109(1):5-17. – DOI 10.1007/s10440-009-9437-1.

3. Kruglikov B.S., Lychagin V.V. *Global Lie–Tresse theorem.* // Selecta Mathematica. – 02/2016. – DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.

4. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. *Contact geometry and nonlinear differential equations.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.

5. Rosenlicht M. *Some basic theorems on algebraic groups.* // Am. J. Math. – 78. –401-403(1956).

6. Rosenlicht M. *A remark on quodient spaces.* // An. Acad. Brasil. Ci. – 35. –487-489(1963).

PROGECTIVE INVARIANTS FOR LINEAR 2-WEBS

I.S. Streltsova

In this paper we describe the structure of the field of projective differential rational invariants for linear planar 2-webs. We show that this field is generated by basic differential invariants of the second and the third order and invariant derivatives.

Keywords: Projective differential invariants, invariant derivatives.

УДК 514.113.5

О МНОГОГРАННИКАХ С РОМБИЧЕСКИМИ ГРАНЯМИ И ПАРАЛЛЕЛОЭДРАХ

В.И. Субботин[1]

1 *geometry@mail.ru*; Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

В статье устанавливается связь трёхмерных параллелоэдров с некоторыми выпуклыми многогранниками с ромбическими гранями. Доказано, что каждый так называемый правильный параллелоэдр может быть получен преобразованием удлинения или отсечением вершин из некоторого выпуклого многогранника с ромбическими гранями.

Ключевые слова: Многогранник с ромбическими гранями, преобразование удлинения, правильный параллелоэдр.

Выпуклый многогранник P называется трёхмерным *параллелоэдром*, если все пространство E^3 можно разбить на параллельные копии P. Всего существует пять аффинных типов параллелоэдров: параллелепипед, 6-угольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный ромбододекаэдр и усеченный октаэдр (см., например, [1]).

Из указанных аффинных типов выделим по одному параллелоэдру, которые удобно назвать *правильными*.

Определение. *Правильным будем называть параллелоэдр, гранями которого могут быть равные между собой ромбы и (или) правильные многоугольники и который является единственным с точностью до подобия в своем аффинном классе.*