the invariant theory of approximations of the base space. Special geometries of the tangent bundle are investigated. These geometries are built with the help of metrics that are some linear combinations of metrics mentioned above.

Keywords: Tangent bundle, Riemannian space, invariant theory of approximations.

УДК 514.753.2

О ДЕЙСТВИЯХ ГРУПП ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО, СОХРАНЯЮЩИХ ПУЧКИ ПРЯМЫХ

Е.Н. Сосов[1]

1 *evgenii.sosov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматривается модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского Λ. Получены явные формулы действий групп вещественных чисел на пространстве Λ, сохраняющих гиперболические и параболические пучки прямых.

Ключевые слова: Пространство Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, пучок прямых.

Пусть $\mathbb{E}$ — полное, сепарабельное евклидово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ размерности $\dim \mathbb{E} > 1$ и $B(O,1) \subset \mathbb{E}$ — открытый шар с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{E}$ радиуса 1. Мы будем задавать точки пространства их радиусами-векторами относительно точки O, точка O при этом задается нулевым радиусом-вектором 0. Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского. В этой модели л-точка есть точка в $\Lambda = B(0,1)$, л-прямая есть хорда в Λ, а расстояние между л-точками x, $y \in \Lambda$ вычисляется по формуле [1, 2, 3]

$$\rho(x,y) = k\operatorname{Arch}\frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}},$$

где k – положительная константа, (x,y) — скалярное произведение радиусов-векторов точек x, $y \in \Lambda$ и x^2 — скалярный квадрат радиус-вектора точки x.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, p, $x \in \Lambda$. В статье [1] была определена точка $\lambda_p(x) \in \Lambda$ с помощью следующих трех условий.

1. $\rho(p,\lambda_p(x)) = |\lambda|\rho(p,x)$.

2. Если $x \neq p$, $\lambda > 0$, то точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p,x)$, проходящей через точки p, x, по одну сторону от точки p.

3. Если $x \neq p$, $\lambda < 0$, то точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p,x)$ по разные стороны от точки p.

Тогда отображение $x \mapsto \lambda_p(x)$, где λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского (точка $p \in \Lambda$ — фиксирована), которое на каждой прямой эллиптического пучка является гомотетией и переводит в себя пучок концентрических сфер с общим центром в точке p. В той же работе (см. также [2]) было найдено следующее представление отображения

$\lambda_p : \Lambda \to \Lambda,$

$$\lambda_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} A \operatorname{sh}((1-\lambda)C) + x \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C)}{\operatorname{ch} A \operatorname{sh}((1-\lambda)C) + \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C)},$$

где $A = \frac{\rho(0,p)}{k}$, $B = \frac{\rho(0,x)}{k}$, $C = \frac{\rho(p,x)}{k}$.

Пусть в пространстве Λ заданы прямая P и гиперплоскость Π с уравнениями

$$r = r_0 + ta, \qquad (n,x) = q, \tag{1}$$

где r_0 — радиус-вектор фиксированной точки, t — параметр, a — направляющий вектор прямой P, n — единичный вектор евклидовой нормали гиперплоскости Π, $0 \le q < 1$ — константа. Тогда можно найти ортогональные проекции x_P, x_Π по Лобачевскому произвольной точки $x \in \Lambda$ на прямую P и гиперплоскость Π соответственно

$$x_P = r_0 + \frac{(a, (1-r_0^2)x - (1-(x,r_0))r_0)}{(a, (a,x)r_0 + (1-(x,r_0))a)} a, \quad x_\Pi = \frac{(1-q^2)x + (q-(n,x))n}{1-q(n,x)}. \tag{2}$$

Используя эти формулы и представление отображения λ_p получим следующую

Теорема 1. *Пусть в пространстве Лобачевского Λ фиксированы прямая P и гиперплоскость Π с уравнениями (1), x_Q, где $Q \in \{P, \Pi\}$, из (2). Тогда отображение*

$$\lambda_Q : \Lambda \to \Lambda, \quad \lambda_Q(x) = \frac{x_Q \operatorname{ch} A_Q \operatorname{sh}((1-\lambda)C_Q) + x \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C_Q)}{\operatorname{ch} A_Q \operatorname{sh}((1-\lambda)C_Q) + \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C_Q)},$$

где $A_Q = \frac{\rho(0,x_Q)}{k}$, $B = \frac{\rho(0,x)}{k}$, $C_Q = \frac{\rho(x_Q,x)}{k}$, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на Λ. Кроме того, λ_P является гомотетией на каждой прямой, ортогональной прямой P, и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей для прямой P (так называемых гиперповерхностей Клиффорда), а λ_Π является гомотетией на каждой прямой гиперболического пучка прямых, ортогональной гиперплоскости Π, и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей с базой Π.

Следствие. *Пусть в пространстве Лобачевского Λ фиксированы прямая P и гиперплоскость Π с уравнениями (1), где $r_0 = 0$, $q = 0$, $|a| = 1$. Тогда*

$$x_P = (a,x)a, \qquad x_\Pi = x - (n,x)n$$

и при $Q \in \{P, \Pi\}$, $x \in \Lambda$

$$\lambda_Q(x) = x_Q + (x - x_Q) \operatorname{th}(\lambda C_Q) \operatorname{cth} C_Q,$$

где $C_Q = \frac{\rho(x_Q,x)}{k}$.

Теорема 2. *Пусть единичный вектор τ евклидова пространства является радиусом-вектором центра параболического пучка в пространстве Лобачевского Λ, $h \in \mathbb{R}$. Тогда отображение*

$$h_\tau : \Lambda \to \Lambda, \quad h_\tau(x) = \tau + \frac{(1-(\tau,x))((1-x^2)e^h \operatorname{ch} h + (x, x-\tau))}{\operatorname{ch}^2 h (1-x^2)(x-\tau)^2 + (x, x-\tau)^2}(x-\tau)$$

определяет действие аддитивной группы вещественных чисел на Λ такое, что $\rho(x, h_\tau(x)) = |h|$ для каждого $x \in \Lambda$. Кроме того, h_τ на каждой прямой параболического пучка прямых с центром в τ является параллельным переносом и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей для такой прямой, а также пучок орисфер с центром в τ.

Литература

1. Сосов Е. Н. *О действии мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского* // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012. – Т. 154. – № 4. – С. 156–160.

2. Сосов Е. Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: учебно-методическое пособие.* – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 84 с.

3. Сабинин Л. В. *Одули как новый подход к геометрии со связностью* // Докл. АН СССР, 1977. – Т. 233. – № 5. – С. 800–803.

ON THE ACTIONS OF REAL NUMBER GROUPS ON THE LOBACHEVSKY SPACE PRESERVING BUNDLES OF STRAIGHT LINES

E.N. Sosov

We consider the Lobachevsky space. In terms of the Beltrami–Klein model we obtain explicit expressions for the actions of real number groups on the Lobachevsky space preserving hyperbolic and parabolic bundles of straight lines.

Keywords: Lobachevsky space, Beltrami–Klein model, bundle of straight lines.

УДК 514.75; 517.95

ПРОЕКТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ 2-ТКАНЕЙ

И.С. Стрельцова[1]

1 *strelzova_is@mail.ru*; Астраханский государственный университет

В данной работе приводится описание поля рациональных проективных дифференциальных инвариантов плоских прямолинейных 2-тканей. Доказывается, что дифференциальные инварианты любого порядка могут быть получены из дифференциальных инвариантов второго и третьего порядка при помощи инвариантных дифференцирований

Ключевые слова: Проективные дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования.

В этой работе мы изучаем проективные инварианты плоских тканей. Напомним, что k-тканью на плоскости $M = \mathbb{R}^2(x, y)$, [1], называется семейство, состоящее из k-слоений, слои которых трансверсальны друг другу. Ткань называется прямолинейной, если слои всех слоений являются прямыми. Такие ткани могут быть заданы k-различными решениями уравнения Эйлера [2],[3]:

$$w_y = w w_x. \tag{1}$$