ON SEMISYMMETRIC PROJECTIVE EUCLIDEAN SPACES

A.A. Sabykanov, J. Mikeš, P. Peška

This work is devoted to the existence of n-dimensional semisymmetric projective Euclidean spaces. The conditions for the existence of these spaces are found.

Keywords: Semisymmetric spaces, projective euclidean spaces.

УДК 514.764

ГЕОМЕТРИЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА, ИНДУЦИРОВАНННАЯ ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЙ БАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Н. Синюкова[1]

1 *olachepok@ukr.net*; Южноукраинский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

На касательном расслоении риманова пространства рассмотрены специальные метрики, порожденные инвариантной теорией приближений базового пространства. Проведены исследования некоторых геометрий касательного расслоения, построенных на основе метрик, которые представляют собой определенные линейные комбинации вышеуказанных.

Ключевые слова: Касательное расслоение, риманово пространство, инвариантная теория приближений.

Исследования в рамках инвариантной теории приближений в римановой геометрии и различных её обобщениях позволили построить на касательном расслоении $T(V^n)$ риманова пространства V^n, $n \in N$, определенное количество различных метрик и объектов аффинной связности [1]. Здесь, в первую очередь, следует отметить метрики

$$d\underset{1}{s}^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \widetilde{D}y^\beta, \qquad d\underset{2}{s}^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)dx^\alpha Dy^\beta,$$

$$d\underset{3}{s}^2 = g_{\alpha\beta}(x)\widetilde{D}y^\alpha \widetilde{D}y^\beta, \qquad d\underset{4}{s}^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)\widetilde{D}y^\alpha \widetilde{D}y^\beta,$$

где $g_{\alpha\beta}(x)$ — компоненты метрического тензора базового риманова пространства V^n,

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y) = g_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(x)y^i y^j,$$

$$Dy^\alpha = dy^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)y^\beta dx^\gamma,$$

$$\widetilde{D}y^\alpha = dy^\alpha + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x;y)y^\beta dx^\gamma,$$

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ — компоненты аффинной связности базового риманова пространства V^n,

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x;y) = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) - \frac{1}{3}R^\alpha_{(\beta\gamma)\sigma}(x)y^\sigma,$$

$R^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma}(x)$ и $R_{i\alpha\beta j}(x)$, соответственно, компоненты тензора Римана и тензора кривизны базового риманова пространства V^n.

Каждая из таких метрик порождает на $T(V^n)$ специальную геометрию типа финслеровой, но отличную от неё, различным, но естественным, образом связанную с инвариантной теорией приближений базового риманова пространства V^n.

Очередным естественным этапом подобных исследований является построение на касательном расслоении $T(V^n)$ геометрий, порождённых метриками, которые представляют собой линейные комбинации вышеуказанных метрик и метрики базового пространства V^n.

Исследованы некоторые геометрические свойства касательного расслоения $T(V^n)$ с метрикой

$$ds^2 = 3g_{\alpha\beta}(x)dx^{\alpha}dx^{\beta} - \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)dx^{\alpha}\widetilde{D}y^{\beta}. \quad (1)$$

В соответствии с формулами, приведёнными выше, в явном виде подсчитаны компоненты $g_{ij}(x;y)$ метрического тензора метрики (1). На их основе, по таким же формулам, как и в римановой геометрии, (рассматриваются частные производные только по компонентам переменной x), введены символы Кристоффеля $\Gamma_{ihk}(x;y)$ первого рода, что позволило по формулам $\Gamma^i_{hk}(x;y) = g^{i\alpha}(x;y)\Gamma_{h\alpha k}(x;y)$, где $g^{i\alpha}(x;y)$- элементы матрицы, обратной к матрице метрического тензора $g_{ij}(x;y)$, перейти к символам Кристоффеля второго рода и к уравнениям, определяющим кривые, называемые геодезическими линиями рассматриваемого пространства $T(V^n)$. Данные уравнения аналогичны классическим уравнениям, определяющим геодезические линии финслерова пространства.

Далее, естественным образом определяются понятия геодезического отображения рассматриваемого пространства на пространство того же типа и геодезического отображения рассматриваемого пространства на базовое пространство V^n, анализируется проблема изучения вопроса существования подобных отображений. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если базовое пространство V^n, $n > 2$, класса $C^r, r > 2$, является пространством постоянной кривизны K, то пространство $T(V^n)$ с метрикой (1) локально допускает нетривиальные геодезические отображения на базовое пространство V^n.*

Если базовое пространство V^n, $n > 2$, класса $C^r, r > 2$, является пространством постоянной отрицательной кривизны, то пространство $T(V^n)$ с метрикой (1) не допускает нетривиальных геодезических отображений на пространства того же типа.

Литература

1. Синюков Н. С., Синюкова Е. Н., Мовчан Ю. А. *Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обобщений* // Изв. вузов, Математика. – 1994. – № 3(382). – С. 76–80.

GEOMETRY OF TANGENT BUNDLE OF RIEMANNIAN SPACE, INDUCED BY INVARIANT THEORY OF APPROXIMATIONS OF THE BASE SPACE

H.N. Sinyukova

Some special metrics of a tangent bundle of Riemannian space are considered.They are generated by

the invariant theory of approximations of the base space. Special geometries of the tangent bundle are investigated. These geometries are built with the help of metrics that are some linear combinations of metrics mentioned above.
Keywords: Tangent bundle, Riemannian space, invariant theory of approximations.

УДК 514.753.2

О ДЕЙСТВИЯХ ГРУПП ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО, СОХРАНЯЮЩИХ ПУЧКИ ПРЯМЫХ

Е.Н. Сосов[1]

1 *evgenii.sosov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматривается модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского Λ. Получены явные формулы действий групп вещественных чисел на пространстве Λ, сохраняющих гиперболические и параболические пучки прямых.

Ключевые слова: Пространство Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, пучок прямых.

Пусть $\mathbb{E}$ — полное, сепарабельное евклидово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ размерности $\dim \mathbb{E} > 1$ и $B(O,1) \subset \mathbb{E}$ — открытый шар с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{E}$ радиуса 1. Мы будем задавать точки пространства их радиусами-векторами относительно точки O, точка O при этом задается нулевым радиусом-вектором 0. Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского. В этой модели л-точка есть точка в $\Lambda = B(0,1)$, л-прямая есть хорда в Λ, а расстояние между л-точками x, $y \in \Lambda$ вычисляется по формуле [1, 2, 3]

$$\rho(x,y) = k\mathrm{Arch}\,\frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}},$$

где k – положительная константа, (x,y) — скалярное произведение радиусов-векторов точек x, $y \in \Lambda$ и x^2 — скалярный квадрат радиус-вектора точки x.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, p, $x \in \Lambda$. В статье [1] была определена точка $\lambda_p(x) \in \Lambda$ с помощью следующих трех условий.

1. $\rho(p,\lambda_p(x)) = |\lambda|\rho(p,x)$.

2. Если $x \neq p$, $\lambda > 0$, то точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p,x)$, проходящей через точки p, x, по одну сторону от точки p.

3. Если $x \neq p$, $\lambda < 0$, то точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p,x)$ по разные стороны от точки p.

Тогда отображение $x \mapsto \lambda_p(x)$, где λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского (точка $p \in \Lambda$ — фиксирована), которое на каждой прямой эллиптического пучка является гомотетией и переводит в себя пучок концентрических сфер с общим центром в точке p. В той же работе (см. также [2]) было найдено следующее представление отображения