## Литература

1. Ландау Л. Д. *Об одном новом точном решении уравнений Навье-Стокса* // Докл. АН СССР. – 1944. – Т. 43. – № 2. – С. 299–301.

2. Броман Г. И., Руденко О. В. *Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения* // УФН. – 2010. – Т. 180. – № 1. – С. 97–104.

3. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 339 с.

4. Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. *Contact geometry and nonlinear differential equations.* – Cambridge: Cambridge university press, 2007. – 496 pp.


SUBMERGED JETS AS SINGULAR SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

M.D. Roop

*This paper describes a method of symmetries to obtain some exact singular solutions of the Navier-Stokes equations. We review some classical models of submerged jets — Landau and Broman-Rudenko solutions. We obtain exact invariant solutions for some subalgebras of the symmetry algebra of the Navier-Stokes equations. These solutions have singularities at a point or at an axis and describe flow of viscous and incompressible fluid in gravitational field. We apply asymptotic methods to the Navier-Stokes equations.*

**Keywords**: Navier-Stokes equations, symmetry groups, submerged jets.

УДК 517.518.234 + 517.548.3

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЛАГРАНЖИАНАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ СКАЛЯРНЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ

А.К. Рыбников[1]

1 *arybnikov@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

*Доклад посвящен исследованию методом Картана-Лаптева дифференциально-геометрической структуры, ассоциированной с лагранжианом L, зависящим от функции z переменных* $t, x^1, \ldots, x^n$ *и ее частных производных. Такие лагранжианы рассматриваются в теоретической физике (в теории поля). При этом t интерпретируется как время, а* $x^1, \ldots, x^n$ *как пространственные переменные. Состояние поля характеризуется функцией* $z(t, x^1, \ldots, x^n)$ *(функция поля), удовлетворяющей уравнению Эйлера, которое соответствует вариационной задаче для интеграла действия. В настоящей работе переменные* $t, x^1, \ldots, x^n$ *рассматриваются как адаптированные локальные координаты расслоения общего типа M над 1-мерной базой (при этом переменная t одновременно является локальной координатой на базе) и* $n-$*мерным типовым слоем. Если условиться называть t временем, а типовой слой расслоения M* $n-$*мерным пространством, то M можно назвать пространственно-временным расслоенным многообразием. Переменные* $t, x^1, \ldots, x^n, z$ *(т.е. переменные* $t, x^1, \ldots, x^n$ *с добавленной переменной z) мы рассматриваем как адаптированные локальные координаты в расслоении H над пространственно-временной расслоенной базой M. Лагранжиан L, будучи коэффициентом в подынтегральной дифференциальной* *форме вариационного интеграла действия, является относительным инвариантом, определенным на многообразии $J^1 H$ (многообразие 1-струй в расслоении $H$). В работе построен фундаментальный объект геометрической структуры, ассоциированной с лагранжианом $L$. Кроме того, построены порожденные лагранжианом $L$ инвариант $I$, вектор $G^i$ и двухвалентные тензоры $G^{jk}$ и $G_{jk}$. Построен также относительный инвариант $E$ (в докладе он назван эйлеровым относительным инвариантом) такой, что равенство $E = 0$ является инвариантной записью уравнения Эйлера для вариационного интеграла действия (следовательно можно не связывать уравнение Эйлера с вариационной задачей). В заключение рассмотрена связность в главном расслоении аффинной структуры над базой $J^2 H$ (многообразие 2-струй в расслоении $H$), порожденная лагранжианом $L$.*

**Ключевые слова**: Дифференциально-геометрические структуры, фундаментальный объект, лагранжианы, расслоения, связность в главном расслоении.

Доклад посвящен исследованию методом Картана-Лаптева дифференциально-геометрической структуры, ассоциированной с лагранжианом $L$, зависящим от функции $z$ переменных $t, x^1, \dots, x^n$ и её частных производных. Такие лагранжианы рассматриваются в теоретической физике (в теории поля). При этом $t$ интерпретируется как время, а $x^1, \dots, x^n$ как пространственные переменные. Состояние поля характеризуется функцией $z(t, x^1, \dots, x^n)$ (функция поля), удовлетворяющей уравнению Эйлера, которое соответствует вариационной задаче для интеграла действия (см.[1,2]). В настоящей работе переменные $t, x^1, \dots, x^n$ рассматриваются как адаптированные локальные координаты расслоения общего типа $M$ с $n$-мерными слоями и 1-мерной базой (при этом переменная $t$ одновременно является локальной координатой на базе). Если условиться называть $t$ *временем* , а типовой слой $n$-мерным *пространством*, то $M$ можно назвать *пространственно-временным расслоенным многообразием*. Переменные $t, x^1, \dots, x^n, z$ (т.е. переменные $t, x^1, \dots, x^n$ с добавленной переменной $z$) мы рассматриваем как адаптированные локальные координаты в расслоении $H$ над пространственно-временной расслоенной базой $M$. Наряду с расслоением $H$ можно рассматривать расслоение 1-струй $J^1 H$ с адаптированными локальными координатами $t, x^i, z, p_0, p_j$ и расслоение 2-струй $J^2 H$ с адаптированными локальными координатами $t, x^i, z, p_0, p_j, p_{00}, p_{0j}, p_{jk}$ (в их число входят $t, x^i, z, p_0, p_j$ вместе с новыми переменными $p_{00}, p_{0j}, p_{jk}$ ). Напомним, что $p_{jk} = p_{kj}$. О понятии $k$-струй в расслоении общего типа см. [3].

Для каждого сечения $\sigma \subset H$, заданного уравнением $z = z(t, x^1, \dots, x^n)$, можно рассматривать *поднятие* $\sigma^1 \subset J^1 H$ ( *поднятое сечение порядка 1* ), уравнения которого имеют вид

$$z = z(t, x^1, \dots, x^n), \qquad p_0 = z_t, \qquad p_j = z_{x^j},$$

а также поднятие $\sigma^2 \subset J^2 H$ ( *поднятое сечение порядка 2* ), заданное уравнениями

$$z = z(t, x^1, \dots, x^n), \quad p_0 = z_t, \quad p_j = z_{x^j}, \quad p_{00} = z_{tt}, \quad p_{0k} = z_{tx^k}, \quad p_{jk} = z_{x^j x^k}.$$

Об инвариантном определении поднятых сечений см. в [3].

Лагранжиан $L$ мы будем рассматривать как заданный на $J^1 H$ относительный инвариант

$$L = L(t, x^i, z, p_0, p_j), \tag{1}$$

а вариационный интеграл действия – как поверхностный интеграл

$$I[\sigma] = \int\limits_{\sigma^1 \subset J^1 H} L dt \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Предметом изучения в настоящей работе является дифференциально-геометрическая структура, ассоциированная с лагранжианом $L$ вида (1). При желании можно рассматривать $L$ как лагранжиан, соответствующий некоторому скалярному физическому полю. Теорию скалярных физических полей можно рассматривать как физическую интерпретацию теории структур, ассоциированных с лагранжианами вида (1).

Главные формы расслоения $H$ (формы $\omega^0, \omega^i, \omega^{n+1}$) удовлетворяют структурным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} d\omega^0 &= \omega^0 \wedge \omega_0^0, \\ d\omega^i &= \omega^0 \wedge \omega_0^i + \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^0 \wedge \omega_0^{n+1} + \omega^j \wedge \omega_j^{n+1} + \omega^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{n+1} \end{aligned}\right\},$$

где $\omega_{jk}^i = \omega_{kj}^i$, $\omega_{jk}^{n+1} = \omega_{kj}^{n+1}$.

Заметим, что формы $\omega^0$, $\omega^i$, $\omega^{n+1}$, $\omega_0^{n+1}$, $\omega_j^{n+1}$ входят в число структурных форм расслоения $RH$ (расслоение касательных к $H$ реперов) и одновременно при специальном выборе главных форм в $H$ являются главными формами в многообразии 1-струй $J^1 H$.

Лагранжиан $L$ вида (1), будучи коэффициентом в подынтегральной дифференциальной форме вариационного интеграла действия, является относительным инвариантом, заданным на многообразии 1-струй $J^1 H$, и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dL - L(\omega_0^0 + \omega_m^m) = L_0 \omega^0 + L_i \omega^i + L_{n+1} \omega^{n+1} + \Lambda_{n+1}^0 \omega_0^{n+1} + \Lambda_{n+1}^j \omega_j^{n+1}. \tag{2}$$

Определённый на $J^2 H$ объект с компонентами $L, L_0, L_i, L_{n+1}, \Lambda_{n+1}^0, \Lambda_{n+1}^j$ является *фундаментальным объектом* структуры, ассоциированной с лагранжианом $L$. В результате продолжения уравнения (2) мы получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты
$L_0, L_i, L_{n+1}, \Lambda_{n+1}^0, \Lambda_{n+1}^j$, и, в частности, уравнения

$$\left.\begin{aligned} & d\Lambda_{n+1}^0 - \Lambda_{n+1}^0(\omega_m^m + \omega_{n+1}^{n+1}) = \\ & = \lambda_0^0 \omega^0 + \lambda_i^0 \omega^i + \lambda_{n+1}^0 \omega^{n+1} + \Lambda^{00} \omega_0^{n+1} + \Lambda^{0j} \omega_j^{n+1}, \\ & d\Lambda_{n+1}^j - \Lambda_{n+1}^j(\omega_0^0 + \omega_m^m + \omega_{n+1}^{n+1}) + \Lambda_{n+1}^0 \omega_0^j + \Lambda_{n+1}^m \omega_m^j = \\ & = \lambda_0^j \omega^0 + \lambda_i^j \omega^i + \lambda_{n+1}^j \omega^{n+1} + \Lambda^{0j} \omega_0^{n+1} + \Lambda^{jk} \omega_k^{n+1} \end{aligned}\right\},$$

где $\Lambda^{jk} = \Lambda^{kj}$.

Коэффициенты $\Lambda^0_{n+1}, \Lambda^j_{n+1}$ являются компонентами самостоятельного объекта, определенного на $J^1 H$, который имеет своим подобъектом относительный инвариант $\Lambda^0_{n+1}$. В дальнейшем будем предполагать, что $\Lambda^0_{n+1} \neq 0$.

В процессе дальнейшего продолжения мы получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты продолженного фундаментального объекта и, в частности, уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты $\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}, \Lambda^{jk}$ . Рассматривая эти уравнения, можно убедиться, что $\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}, \Lambda^{jk}$ представляют собой совокупность компонент самостоятельного линейного однородного объекта (тензора), определенного на многообразии 1-струй $J^1 H$. У него имеется подтензор с компонентами $\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}$. При этом $\Lambda^{00}$ является относительным инвариантом (в последующем будем предполагать, что $\Lambda^{00} \neq 0$). Тензор с компонентами $\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}, \Lambda^{jk}$ подобен тензору энергии-импульса, рассматриваемому в классической теории физических полей. Его можно рассматривать как инвариантный аналог тензора энергии-импульса из классической теории физических полей.

Среди лагранжианов вида (1) инвариантным образом выделяются лагранжианы, у которых тензор $\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}, \Lambda^{jk}$ задан на многообразии $H$ (а не на $J^1 H$, как в общем случае). Такие лагранжианы мы условимся называть *особыми лагранжианами*.

При изучении структуры, ассоциированной с лагранжианом (1), представляет, в частности интерес неоднородный объект $\Lambda^i_0 = \frac{\Lambda^i_{n+1}}{\Lambda^0_{n+1}}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$d\Lambda^i_0 - \Lambda^i_0 \omega^0_0 + \Lambda^m_0 \omega^i_m + \omega^i_0 =$$

$$= \Lambda^i_{00}\omega^0 + \Lambda^i_{0k}\omega^k + \Lambda^i_{0,n+1}\omega^{n+1} + \Lambda^{i0}_0 \omega^{n+1}_0 + \Lambda^{i,j}_0 \omega^{n+1}_j .$$

Среди объектов, охваченных продолженным фундаментальным объектом, содержится относительный инвариант

$$E = L_{n+1} - \lambda^0_0 - \lambda^m_m,$$

определённый на многообразии 2-струй $J^2 H$. Этот относительный инвариант мы условимся называть *эйлеровым относительным инвариантом*, соответствующим лагранжиану $L$. Сечения $\sigma \subset H$ , на поднятиях которых $E$ обращается в нуль, мы называем *особыми сечениями*, соответствующими дифференциально-геометрической структуре, ассоциированной с лагранжианом L. В случае, когда в качестве главных форм на $J^2 H$ выбраны контактные формы, равенство $E = 0$, рассматриваемое на поднятии сечения $\sigma \subset H$, заданного уравнением $z = z(t, x^1, \ldots, x^n)$, имеет в точности такой же вид, что и уравнение Эйлера для вариационного функционала. Равенство $E = 0$ - это инвариантная запись уравнения Эйлера. Экстремали функционала являются особыми сечениями.

Таким образом, становится ясно, что можно не связывать уравнение Эйлера с вариационной задачей, но рассматривать его как уравнение, возникающее при приравнивании к нулю эйлерова относительного инварианта $E$, рассматриваемого на поднятиях $\sigma^2 \subset J^2 H$ сечений $\sigma \subset H$ .

Помимо эйлерова относительного инварианта $E$ лагранжиан $L$ порождает инвариант

$$I = \frac{(\Lambda^0_{n+1})^2}{L \cdot \Lambda^{00}},$$

определенный на $J^1 H$. Его можно рассматривать как инвариантный аналог энергии скалярного поля, которому соответствует рассматриваемый лагранжиан $L$.

Укажем также на вектор

$$G^i = \frac{\Lambda^{0i}}{\Lambda^{00}} - \Lambda^i_0,$$

определенный на $J^1 H$. Его можно рассматривать как инвариантный аналог вектора импульса скалярного поля.

Кроме того, лагранжиан $L$ порождает двухвалентный тензор

$$G^{jk} = \frac{1}{\Lambda^{00}}(\Lambda^{jk} - \Lambda^{0j}\Lambda^k_0 - \Lambda^{0k}\Lambda^j_0) + \Lambda^j_0\Lambda^k_0\,,$$

определенный на $J^1 H$. В случае, когда $det \parallel G^{jk} \parallel \neq 0$, существует обратный по отношению к $G^{jk}$ тензор $G_{jk}$. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $G_{jk}$, имеют вид

$$dG_{jk} - G_{mk}\omega^m_j - G_{jm}\omega^m_k + 2G_{jk}\omega^0_0 = \\ G_{jk,0}\omega^0 + G_{jk,i}\omega^i + G_{jk,n+1}\omega^{n+1} + G^0_{jk}\omega^{n+1}_0 + G^l_{jk}\omega^{n+1}_l.$$

В заключительном разделе работы установлено, что структура, ассоциированная с особым лагранжианом $L$, порождает в расслоении аффинной структуры над базой $J^2 H$ связность специального типа с формами связности $\widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{0j}\omega^0 - \Gamma^i_{jk}\omega^k$, где $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}G^{im}\left(G_{mj,k} + G_{mk,j} - G_{jk,m}\right)$ и $\Gamma^i_{0j} = \Lambda^m_0\Gamma^i_{mj} - \Lambda^i_{0j}$ (обращение в нуль остальных коэффициентов связности имеет инвариантный характер).

## Литература


1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теоретическая физика* : Том II . *Теория поля*. - М.: Наука, 1988. - 512 С.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В., *Вариационное исчисление*. М.: Физматгиз, 1961. - 228 С.
3. Васильев А.М., *Теория дифференциально-геометрических структур*. - М.: Изд-во МГУ, 1987. - 190 С.


DIFFERENTIAL-GEOMETRIC STRUCTURES ASSOCIATED
WITH LAGRANGIANS CORRESPONDING TO SCALAR PHYSICAL FIELDS

A.K. Rybnikov

*The report is devoted to investigation by means of Cartan–Laptev method of differential-geometric structure associated with Lagrangian L depending on the variables $t, x^1, \dots, x^n$, function $z$ of these variables and their partial derivatives. Such Lagrangians are considered in theoretical physics (in Field Theory) where $t$ is interpreted as time and $x^1, \dots, x^n$ are interpreted as space variables. The state of the field is characterized by the function $z(t, x^1, \dots, x^n)$ (field function) satisfying Euler equation corresponding to variational integral of action. In the present work we consider the variables $t, x^1, \dots, x^n$ as* *adapted local coordinates in the fiber bundle $M$ of general type over 1-dimensional base (variable $t$ is simultaneously a local coordinate of the base) with $n$–dimensional typical fiber. If we agree to call the variable $t$ as time and the typical fiber of the bundle $M$ as $n$-dimensional space then one can call M as space-time fiber bundle. The variables $t, x^1, \dots, x^n, z$ (i,e. the variables $t, x^1, \dots, x^n$ with the additional variable $z$) we consider as adapted local coordinates in the fiber bundle $H$ of general type over space-time fibered base $M$. The Lagrangian $L$, which is a coefficient in the integrand of variational integral of action, is a relative invariant defined on the manifold $J^1 H$ (the manifold of 1-jets of fiber bundle $H$ ). In this work, fundamental object of geometric structure associated with Lagrangian $L$ is constructed. Moreover an invariant $I$, vector $G^i$ and bivalent tensors $G^{jk}$ and $G_{jk}$ generated by Lagrangian $L$ are constructed. Also we construct a relative invariant $E$ (in this work it is called Euler relative invariant) so that the equality $E = 0$ is an invariant representation of the Euler equation for the variational functional (hence one may not connect Euler equation with variation problem). In conclusion we consider the connection in the principal bundle of affine structure over base $J^2 H$ (the manifold of 2-jets in fiber bundle $H$) generated by Lagrangian $L$.*

**Keywords**: Differential-geometric structures, fundamental object, Lagrangians, fiber bundles, connection in principal fibre bundle.

УДК 514.822

## ПОВОРОТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Л. Рыпарова[1], Й. Микеш[2]

1 *lenka.ryparova01@upol.cz*; Palacky University in Olomouc
2 *josef.mikes@upol.cz*; Palacky University in Olomouc

*В статье обсуждается существование поворотных отображений поверхностей вращения. Получены более общие результаты в этой задаче.*

**Ключевые слова**: Поворотные отображения, поверхности вращения.

В работе С.Г. Лейко [1] были введены в рассмотрение изопериметрические кривые поворота и поворотные отображения 2-мерных римановых пространств $\mathbb{V}_2$ и поверхностей $\mathcal{S}_2$ с метрикой $g$.

Кривую $\ell\colon x = x(t)$ на поверхности или на 2-мерном (псевдо-) римановом пространстве будем называть *изопериметрической экстремалью поворота*, если $\ell$ является экстремалью функционала $\theta[\ell]$ и $s[\ell] = \text{const}$ с фиксированными концами.

Здесь
$$s[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} |\lambda|\, dt \quad \text{and} \quad \theta[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} k(t)\, dt,$$

где $k(t)$ – кривизна и $|\lambda|$ – длина касательного вектора $\lambda$ кривой $\ell$.

В работах [1, 2] С.Г. Лейко доказал, что $\ell$ является изопериметрической экстремалью поворота тогда и только тогда, когда кривизны Френе $k$ и Гаусса $K$ – пропорциональны, т.е.
$$k = c \cdot K,$$

где $c$ – некторoая постоянная.