УДК 514.86

ЗАТОПЛЕННЫЕ СТРУИ КАК СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

М.Д. Рооп[1]

1 *roop.md14@physics.msu.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В статье рассматривается применение методов теории симметрий для построения точных сингулярных решений уравнений Навье-Стокса. Приводится обзор известных моделей затопленных струй — решения Ландау и Бромана-Руденко. Относительно некоторых подалгебр алгебры симметрий уравнений Навье-Стокса построены точные решения, имеющие сингулярность в точке или на оси и описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Рассматривается применение асимптотических методов к системе уравнений Навье-Стокса.

Ключевые слова: Уравнения Навье-Стокса, группы симметрий, затопленные струи.

Затопленной струей называется такое течение жидкости, при котором она бьет из точечного источника и попадает в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью. Математической моделью, описывающей динамику жидкости в струе, является система уравнений Навье-Стокса:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\right)\vec{v}=-\nabla p+\eta\Delta\vec{v}+\vec{f}+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}),\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0, \qquad (1)$$

где ρ — плотность жидкости, $\vec{v}$ — поле скоростей, p — давление, $\vec{f}$ — поле внешних сил, η и ζ — коэффициенты сдвиговой (динамической) и объемной вязкости соответственно. Будем предполагать, что жидкость является несжимаемой, то есть $\rho(\vec{r},t)=\rho_0$. Кроме того, будем исследовать стационарные течения. Это означает, что поле скоростей $\vec{v}$ и давление p являются только функциями координат и не зависят от времени. Коэффициенты вязкости η и ζ предполагаются постоянными. Тогда система уравнений (1) преобразуется к следующему виду:

$$(\vec{v},\nabla)\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho_0}+\nu\Delta\vec{v}+\frac{\vec{f}}{\rho_0},\quad \operatorname{div}\vec{v}=0, \qquad (2)$$

где $\nu=\eta/\rho_0$ — коэффициент кинематической вязкости. Отметим, что система замкнутая: в ней содержится четыре уравнения (одно векторное и одно скалярное) на четыре неизвестные функции — три компоненты поля скоростей и давление.

Одним из первых и наиболее известных решений системы (2) является решение Ландау [1]. В затопленной струе Ландау поле скоростей жидкости имеет в сферической системе координат две компоненты: $\vec{v}=(v_R,v_\theta)$.

В модели Ландау источник находится в начале координат и сообщает среде импульс в некотором направлении. Струя формируется за счет притекания частиц окрестной жидкости к источнику и имеет форму конической поверхности. Полный поток жидкости через сферическую поверхность, окружающую источник, равен нулю. Это означает, что источник не сообщает в струю массу. Модель Ландау обладает

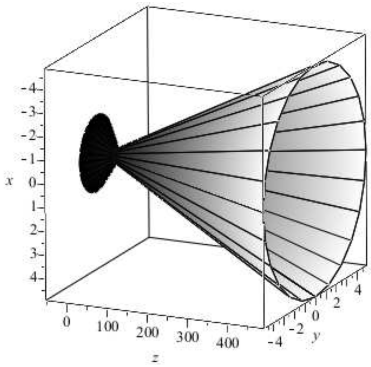

Рис. 1. Струя Ландау.

значительным недостатком: решение тождественно обращается в нуль при исчезающе малой вязкости.

Обобщением струи Ландау является модель Бромана-Руденко [2], которая допускает предельный переход к нулевой вязкости.

Алгебра симметрий системы (2) в цилиндрической системе координат представляется следующими векторными полями:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_3 = r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z} - u\frac{\partial}{\partial u} - w\frac{\partial}{\partial w} - 2p\frac{\partial}{\partial p},$$

где $u = v_r$, $w = v_z$.

Решение, инвариантное относительно преобразования X_3, в случае нулевой вязкости описывает течение, вырывающееся из отверстия радиуса r_0 в плоскости $z = 0$ и имеющее форму параболоида.

Для вязкой жидкости возможны два принципиально разных течения: с разомкнутыми и замкнутыми линиями тока. Течение с разомкнутыми линиями тока формируется за счет действия точечного источника, находящегося в начале координат и сообщающего среде импульс во всех направлениях в плоскости $z = 0$. Аналогично тому как это происходит в модели Ландау, частицы окрестной жидкости подтягиваются к источнику, разворачиваются и снова уходят на бесконечность. Течение с замкнутыми линиями тока формируется за счет наличия в отрицательной полуплоскости распределенного источника на оси Oz и распределенного стока в верхней полуплоскости.

В модели Бромана-Руденко возможен ненулевой выход массы из точечного источника.

В декартовых координатах алгебра симметрий системы (2), в которой в качестве внешней силы выступает сила тяжести, представлена следующими векторными полями:

$$V_1\acute{U} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_4 = \frac{\partial}{\partial p},$$

$$V_5 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v},$$

$$V_6 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} - w\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial w} - \rho_0 x g\frac{\partial}{\partial p},$$

$$V_7 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - w\frac{\partial}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial w} - \rho_0 y g\frac{\partial}{\partial p},$$

$$V_8 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - w\frac{\partial}{\partial w} + (-3\rho_0 g z - 2p)\frac{\partial}{\partial p},$$

где g — ускорение свободного падения.

Для построения решений, имеющих сингулярность в точке или на оси, найдем стационарные подалгебры алгебры Ли симметрий, сохраняющие начало координат. Были выделены две подалгебры: первая включает поля V_4, V_5, V_8, вторая — поля V_5, V_6, V_7, и построены решения, инвариантные относительно данных подалгебр. Течения имеют сингулярность в начале координат и исчезают при удалении от источника. Ниже приведено одно из таких решений:

$$p = -g\rho_0 z - \frac{C_1^2\rho_0}{2(x^2+y^2+z^2)^2} + C_2,$$

$$\vec{v} = \frac{C_1\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = (x, y, z).$$

Для построения сингулярных решений уравнений Навье-Стокса, описывающие движение невязкой и несжимаемой жидкости, также будем использовать асимптотические методы. Для этого в систему вводятся два малых параметра. Прежде всего обезразмерим систему, для чего введем характерные масштабы R и h в плоскости Oxy и по оси Oz соответственно, считая, что $R \ll h$, и характерную скорость C. Также введем характерное время $T \gg R/C$. Тогда $\mu = R/h$ и $\varepsilon = R/CT$ — малые параметры. Система уравнений для безразмерных функций $U = u/C$, $V = v/C$, $W = w/C$, $P = p/\rho_0 C^2$, которые зависят от безразмерных переменных $\tau = t/T$, $\psi = x/R$, $\chi = y/R$, $\xi = z/h$, будет иметь вид:

$$\varepsilon U_\tau + UU_\psi + VU_\chi + \mu W U_\xi + P_\psi = 0,$$

$$\varepsilon V_\tau + UV_\psi + VV_\chi + \mu W V_\xi + P_\chi = 0,$$

$$\varepsilon W_\tau + UW_\psi + VW_\chi + \mu W W_\xi + \mu P_\xi = 0,$$

$$U_\psi + V_\chi + \mu W_\xi = 0.$$

Решение будем искать в виде рядов по степеням малых параметров. В докладе будут представлены решения для нулевого и первого членов асимтотических разложений, описывающие течения на достаточно большом расстоянии от источника и спустя достаточно большое время с момента формирования течения. Ниже приведено одно из таких решений.

$$u_0(x, y) = -\frac{2yRC}{x^2+y^2}, \quad v_0(x, y) = \frac{2xRC}{x^2+y^2},$$

$$w_0(x, y) = A_1 C e^{-\lambda(x^2+y^2)/2R^2}, \quad p_0(x, y) = -\frac{2A_2R^2\rho_0C^2}{x^2+y^2}.$$

Литература

1. Ландау Л. Д. *Об одном новом точном решении уравнений Навье-Стокса* // Докл. АН СССР. – 1944. – Т. 43. – № 2. – С. 299–301.

2. Броман Г. И., Руденко О. В. *Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения* // УФН. – 2010. – Т. 180. – № 1. – С. 97–104.

3. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 339 с.

4. Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. *Contact geometry and nonlinear differential equations.* – Cambridge: Cambridge university press, 2007. – 496 pp.

SUBMERGED JETS AS SINGULAR SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

M.D. Roop

This paper describes a method of symmetries to obtain some exact singular solutions of the Navier-Stokes equations. We review some classical models of submerged jets — Landau and Broman-Rudenko solutions. We obtain exact invariant solutions for some subalgebras of the symmetry algebra of the Navier-Stokes equations. These solutions have singularities at a point or at an axis and describe flow of viscous and incompressible fluid in gravitational field. We apply asymptotic methods to the Navier-Stokes equations.

Keywords: Navier-Stokes equations, symmetry groups, submerged jets.

УДК 517.518.234 + 517.548.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЛАГРАНЖИАНАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ СКАЛЯРНЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ

А.К. Рыбников[1]

1 *arybnikov@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Доклад посвящен исследованию методом Картана-Лаптева дифференциально-геометрической структуры, ассоциированной с лагранжианом L, зависящим от функции z переменных $t, x^1, \ldots, x^n$ и ее частных производных. Такие лагранжианы рассматриваются в теоретической физике (в теории поля). При этом t интерпретируется как время, а $x^1, \ldots, x^n$ как пространственные переменные. Состояние поля характеризуется функцией $z(t, x^1, \ldots, x^n)$ (функция поля), удовлетворяющей уравнению Эйлера, которое соответствует вариационной задаче для интеграла действия. В настоящей работе переменные $t, x^1, \ldots, x^n$ рассматриваются как адаптированные локальные координаты расслоения общего типа M над 1-мерной базой (при этом переменная t одновременно является локальной координатой на базе) и $n-$мерным типовым слоем. Если условиться называть t временем, а типовой слой расслоения M $n-$мерным пространством, то M можно назвать пространственно-временным расслоенным многообразием. Переменные $t, x^1, \ldots, x^n, z$ (т.е. переменные $t, x^1, \ldots, x^n$ с добавленной переменной z) мы рассматриваем как адаптированные локальные координаты в расслоении H над пространственно-временной расслоенной базой M. Лагранжиан L, будучи коэффициентом в подынтегральной дифференциальной