$\mathfrak{h}$. $\mathfrak{r}$ — *радикал алгебры* $\mathfrak{g}$. *Тогда, если для любой полупростой подалгебы* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ *такой, что* $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$

$$(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h},$$

то H замкнута в G.

В заключение следует заметить, что основной результат может быть обобщен на другие объекты редуктивной геометрии, в частности на псевдоримановы пространства и пространства аффинной связности. Кроме того, возможно изучение римановых пространств, не обладающих свойством локальной однородности, но алгебра Ли всех векторных полей которых обладает свойствами, указанными в теоремах 1, 2.

Литература

1. Мальцев А. И. *On the Lie groups in the large* // Матем. сб. – 1945. – Т. 16(38). – С. 168-190.

2. Mostow G. D. *Extensibility of Local Lie Groups of Transformation and Groups on Surfaces* // Ann. Math. – 1950. – V. 52. – P. 606-636.

3. Попов В. А. *Продолжаемость локальных групп изометрий* // Матем. сб. – 1988. – Т. 135(177). – № 1. – С. 45-64.

4. Popov V. A. *On the Extendebility of Locally Defined Isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds* // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 217. – № 5. – P. 621-627.

5. Popov V. A. *On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Group* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. – № 4. – P. 721-729.

STATIONARY SUBALGEBRA OF LIE ALGEBRA OF KILLING VEKTOR FIELDS

V.A. Popov

Let $\mathfrak{g}$ *be algebra Lie of all Killing vektor fields on Riemannian locally homogeneous analitic manifold with center* $\mathfrak{z}$ *and stationary subalgebra* $\mathfrak{h}$. *Let G be simply connected group corresponding to algebra* $\mathfrak{g}$ *and H be it's subgroup corresponding to subalgebra* $\mathfrak{h}$. *If* $\mathfrak{h} \bigcap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \bigcap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *then subgroup H is closed in G. If for any semisimple algebra* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ *such as* $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, *where* $\mathfrak{r}$ *is radical of* $\mathfrak{g}$, *we have* $(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ *then H is closed in G.*

Keywords: Riemannian manifold, Lie algebra, analitic extension, vector field, Lie group, closed subgroup.

УДК 514.822

ОБОБЩЕННОЕ ПОЛЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Е.Д. Родионов[1], В.В. Славский[2]

1 *edr2002@mail.ru*; Алтайский государственный университет
2 *slavsky2004@mail.ru*; Югорский государственный университет

В теории выпуклых подмножеств евклидова пространства важную роль играет двойственность Минковского (полярное преобразование выпуклого множества, или преобразование Лежандра выпуклой функции). В работе рассматриваются конформно-плоские римановы метрики, определенные на n-мерной единичной сфере и их вложения *в изотропный конус пространства Лоренца. Для данного класса метрик определяется и подробно изучается аналог преобразования Лежандра.*

Ключевые слова: Геометрии Лобачевского, выпуклые множества, конформно плоские метрики.

Пусть R – числовая прямая, R^{n+1} – евклидово $(n+1)$-мерное арифметическое пространство, $M^{n+2} = R^{n+1} \times R$ – псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора $\vec{w} = [\vec{x}, \zeta] \in M^{n+2}$ в котором равен $\langle \vec{w} \rangle^2 = |\vec{x}|^2 - \zeta^2$, где $|\vec{x}|^2$ – скалярный квадрат вектора $\vec{x} \in R^{n+1}$. Обозначим через

$$C^+ = \left\{ [\vec{x}, \zeta] \in M^{n+2} : |\vec{x}|^2 - \zeta^2 = 0, \zeta > 0 \right\}$$

верхнюю часть изотропного конуса в M^{n+2}.

Лемма. *Пусть на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана конформно-плоская метрика*

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}, \quad x \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

где $f(x)$ – функция класса C^1. Тогда определено каноническое изометрическое вложение, задаваемое формулой

$$Z : x \in S^n \to \left[\frac{x}{f(x)}, \frac{1}{f(x)} \right] \in C^+. \tag{1}$$

Образ $Z(S^n) = F \subseteq C^+$ – пространственноподобная n-мерная поверхность. В дальнейшем будем отождествлять конформно-плоскую метрику с поверхностью F. Предположим, что функция $f(x)$ достаточно гладкая, тогда поверхность F регулярна, и в каждой точке $Z(x) \in F$ определено касательное n-мерное пространство $T_x(F)$. Существует единственный вектор $Z^*(x) \in C^+$ такой, что

$$\langle Z, Z^* \rangle = -1, \quad Z^* \perp T_x(F), \tag{2}$$

где ортогональность понимается относительно скалярного произведения в M^{n+2}.
Лемма. *Пусть функция $f(\vec{x})$, задающая конформно-плоскую метрику, по однородности распространена на все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда вектор Z^* явно выражается через f и $\vec{\nabla} f$ в R^{n+1}:*

$$Z^*(\vec{x}) = \left[-\vec{\nabla} f + \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{2f} \vec{x}, \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{2f} \right], \tag{3}$$

где $\vec{x} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{\nabla} f$ градиент функции f в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Если точка $Z \in F$ пробегает поверхность F, то точка Z^* пробегает двойственную поверхность F^*. Соответствующую конформно-плоскую метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in S^n$, будем называть **полярной** к исходной метрике. Сравнивая формулы (1) и (3) имеем:

$$\left[-\vec{\nabla} f + \frac{|\nabla f|^2}{2f} \vec{x}, \frac{|\nabla f|^2}{2f} \right] \equiv \left[\frac{y}{f^*(y)}, \frac{1}{f^*(y)} \right].$$

Откуда получаем формулы для перехода к полярной конформно-плоской метрике:

$$f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2}. \tag{4}$$

Лемма. *Пусть $f : R^{n+1} \to R$ произвольная однородная степени один функция на R^{n+1}. Отображение $H_f : S^n \to S^n$, определяемое формулой:*

$$H_f : \vec{x} \in S^n \to \vec{x} - 2f(x)\frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2} \in S^n, \tag{5}$$

сохраняет норму вектора: $|H_f(\vec{x})| = |\vec{x}|$.

Отображение H_f назовем конформным градиентом функции f. Если отображение H_f – имеет обратное H_f^{-1}, то полярная метрика определяется функцией:

$$f^*(y) = \left.\frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}\right|_{x=H_f^{-1}(y)}.$$

Замечание. *Из определения следует двойственность метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, $x \in S^n$ и метрики $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in S^n$. Поэтому при наличии соответствующей регулярности функции $f^*(y)$ будут справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x)\frac{\vec{\nabla} f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \\ f(x) &= \frac{2f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}, \quad \vec{x} = \vec{y} - 2f^*(y)\frac{\vec{\nabla} f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Следствие. *Из (6) следует тождество:*

$$H_f \circ H_{f*} = I_{S^n} = H_{f*} \circ H_f,$$

то есть преобразования сферы H_f, H_{f*} – взаимно обратные и выполняется тождество;

$$\begin{tikzcd} x \in S^n \arrow[r, "H_f"] \arrow[d, "\frac{f(x)}{|\nabla f(x)|}"] & y \in S^n \arrow[d, "\frac{f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|}"] \\ R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd}$$

Теорема. *Пусть $f(x)$ дифференцируемая функция, $f^*(y)$ и y определены равенствами (4), тогда справедливо тождество:*

$$\|x - y\|^2 = 2f(x)f^*(y),$$

где $\|x - y\|$ – хордовое расстояние между точками единичной сферы S^n.

Теорема. *Пусть $f(x)$ – дифференцируемая строго положительная функция на единичной сфере и отображение H_f – взаимнооднозначно, тогда для полярной функции $f^*(y)$ справедливо равенство:*

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x - y\|^2}{2f(x)}, \tag{7}$$

где $\|x - y\|$ – хордовое расстояние между точками единичной сферы S^n.

В условиях теоремы выполняется неравенство:

$$\|x-y\|^2 \le 2f(x)f^*(y), \tag{8}$$

где $x, y \in S^n$ произвольные точки единичной сферы, $\|x-y\|$ – хордовое расстояние. Неравенство (8) можно рассматривать, как аналог неравенства Юнга-Фенхеля в выпуклом анализе.

В условиях теоремы функция $f^*(y)$ также будет дифференцируема и строго положительна, а отображение $H_{f^*} = H_f^{-1}$ – взаимнооднозначно, поэтому:

$$f(x) = \max_{y \in S^n} \frac{\|x-y\|^2}{2f^*(y)}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России: (код проекта 1148), Российского фонда фундаментальных исследований (№№ проектов: 15-41-00092-r-Urals, 15-41-00063-r-Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

Литература

1. *Славский В. В.* Конформно плоские метрики ограниченной кривизны на n-мерной сфере. Исследования по геометрии ”в целом” и математическому анализу. - Новосибирск: Наука, 1987, Т. 9., С. 183-199.

2. *Slavskii V. V.* Conformally flat metrics and the geometry of the pseudo-Euclidean space // Siberian Math. J., 35 (1994), N 3, P. 674–682.

3. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения: монография. – Ханты-Мансийск : Полиграфист, 2008. – 280 с.

4. *Родионов Е. Д., Славский В.В.* Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады академии наук, 387(4), 2002.

5. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneoues Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Scieces. 2007. V. 146. No. 6. P. 6313–6390.

6. *Kurkina M.V., Rodionov E.D., and Slavskii V.V.* Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature // Doklady Mathematics, 2015, Vol. 91, No. 3, P. 1–3.

THE GENERALIZED POLAR TRANSFORMATION OF CONFORMALLY FLAT METRICS OF POSITIVE CURVATURE

E.D. Rodionov, V.V. Slavsky

In the theory of convex subsets of an Euclidean space an important role is played by Minkowski’s duality (polar transformation of a convex set, or transformation of Legendre of a convex function). In this work, the conformally flat Riemannian metrics are defined on n-dimensional unitary sphere, and their embeddings into isotropic cone of Lorentz space are considered. For this class of metrics we define and thoroughly study the analog of Legendre transformation.

Keywords: Lobachevski geometry, convex sets, conformally flat metrics.