где $\bar{\omega} = \omega|_{\omega^i=0}$. Для произвольного вертикального вектора $v = v^i_j e^j_i$ координаты v^i и их пфаффовы производные v^{ik}_j равны нулю, тогда $dR_g(v) = \bar{d}(v)|_{\omega^i=0} = (v^{ki}_{lj} - \delta^i_l v^k_j + \delta^k_j v^i_l)\pi^j_i e^l_k$, т.е. произвольный вертикальный вектор переводится в вертикальный. Отображение $\bar{d}|_{\omega^i=0}$ осуществляет действие структурной группы в расслоении $TL(X_m)$, $dR_g = \bar{d}|_{\omega^i=0}$, переводя вертикальные базисные векторы e^j_i в вертикальные.

Литература

1. Лаптев Г. Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. – Т. 1. – С. 139 – 189.

TANGENT BUNDLE TO LINEAR FRAME BUNDLE

K.V. Polyakova

The tangent bundle to linear frame bundle is considered in coframe and dual frame. Basic vectors of tangent and osculating spaces in a holonomic frame field are constructed. Lie brackets of basic vectors fields of osculating space are found.

Keywords: Vector valued form, osculating space, Pfaffian derivatives.

УДК 514.764

АЛГЕБРА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА И ЕЁ СТАЦИОНАРНАЯ ПОДАЛГЕБРА

В.А. Попов[1]

1 *vlapopov@gvail.com*; Финансовый университет при Правительстве Российской Федераии,Москва, Россия

Рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом аналитическом многообразии M, её стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$ и центр $\mathfrak{z}$. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа,порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{h}\bigcap(\mathfrak{z}+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \mathfrak{h}\bigcap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G. Если для любой полупростой подалгебы $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p}+\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{r}$ – радикал $\mathfrak{g}$, имеет место $(\mathfrak{p}+\mathfrak{z})\cap\mathfrak{h} = \mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$, то H замкнута в G.

Ключевые слова: Риманово многобразие, алгебра Ли, аналитическое продолжение, векторное поле, группа Ли, замкнутая подгруппа.

Однородное пространство определяется группой Ли G и её замкнутой подгруппой Ли H. Локально однородное риманово аналитическое пространство определяется алгеброй $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга и её стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$, и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Локально однородную риманову аналитическую метрику можно аналитически продолжить до метрики однородного пространства тогда и только тогда, когда H замкнута в G.

В основе дальнейших рассуждений лежат понятия векторныго поля Киллинга и связанной с ним локальной однопараметрической группы изометрий, а также локальной группы (chunk of a group) локальных изометрий.

Определение. *Локальной изометрией из риманова аналитического многообразия M в риманово аналитическое многобразие N называется изометрия $f : U \to V$ между открытыми подмножествами многообразий M и N.*

Приведём, доказанное в [5], простое утверждение, состоящее в том, что локальные однопараметричекие группы локальных изометрий, заданные в некоторой окрестности точки $p \in M$ аналитически продолжаются в окрестность любой точки $q \in M$. Причём, это утверждение обобщается на пространства аффинной связности.

Лемма. *Пусть M – аналитическое пространство аффинной связности, X – инфинитеземельное аффинное преобразование, заданное на открытом подмножестве $U \subset M$, и пусть $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, — непрерывная кривая на M, $\gamma(0) \in U$. Тогда инфинитеземальное преобразование X аналитически продолжается до инфинитеземального преобразования в окрестности точки $\gamma(1)$.*

Вопрос о замкнутости стационарной подгруппы $H \subset G$ тесно связан с вопросом об аналитической продолжаемости локально заданного риманова аналитического многообразия (причём не обязательно локально однородного) до односвязного многообразия M, обладающего свойством продолжаемости любой локальной изометрии из M в себя до изометрии $f : M \to M$. В данной статье рассматривается случай локально однородной римановой метрики, $\dim M = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$.

Строение незамкнутых подгрупп хорошо известно [1]. Однако, соответствующие исследования носят число алгебраический характер и никак не учитывают локальные свойства римановой метрики. Можно ли найти свойства алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом аналитическом многообразии и её стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$, при выполнении которых подгруппа H, определяемая стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, будет замкнутой в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. Мостов доказал, что H замкнута в G, если $\mathfrak{h}$ полупроста, и H замкнута в G, если $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} < 5$, [2]. В работах [3], [4], [5] доказано, причём не только для римановых многообразий, но также для псевдоримановых пространств и пространств аффинной связности, что если алгебра $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр, то H замкнута в G. Исследуем случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ имеем ненулевой центр $\mathfrak{z}$. Укажем свойства алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{h}$, обеспечивающие замкнутость подгруппы H в G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом вещественно аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ – её стационарная подалгебра в некоторой точке $p \in M$, $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если*

$$\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}; \mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}; \mathfrak{g}],$$

то подгруппа H замкнута в G.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом вещественно аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ – её стационарная подалгебра в некоторой точке $p \in M$, $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — её подгруппа, порождённая подалгеброй*

$\mathfrak{h}$. $\mathfrak{r}$ — *радикал алгебры* $\mathfrak{g}$. *Тогда, если для любой полупростой подалгебы* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ *такой, что* $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$

$$(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h},$$

то H *замкнута в* G.

В заключение следует заметить, что основной результат может быть обобщен на другие объекты редуктивной геометрии, в частности на псевдоримановы пространства и пространства аффинной связности. Кроме того, возможно изучение римановых пространств, не обладающих свойством локальной однородности, но алгебра Ли всех векторных полей которых обладает свойствами, указанными в теоремах 1, 2.

Литература

1. Мальцев А. И. *On the Lie groups in the large* // Матем. сб. – 1945. – Т. 16(38). – С. 168-190.

2. Mostow G. D. *Extensibility of Local Lie Groups of Transformation and Groups on Surfaces* // Ann. Math. – 1950. – V. 52. – P. 606-636.

3. Попов В. А. *Продолжаемость локальных групп изометрий* // Матем. сб. – 1988. – Т. 135(177). – № 1. – С. 45-64.

4. Popov V. A. *On the Extendebility of Locally Defined Isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds* // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 217. – № 5. – P. 621-627.

5. Popov V. A. *On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Group* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. – № 4. – P. 721-729.

STATIONARY SUBALGEBRA OF LIE ALGEBRA OF KILLING VEKTOR FIELDS

V.A. Popov

Let $\mathfrak{g}$ *be algebra Lie of all Killing vektor fields on Riemannian locally homogeneous analitic manifold with center* $\mathfrak{z}$ *and stationary subalgebra* $\mathfrak{h}$. *Let* G *be simply connected group corresponding to algebra* $\mathfrak{g}$ *and* H *be it's subgroup corresponding to subalgebra* $\mathfrak{h}$. *If* $\mathfrak{h} \bigcap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \bigcap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *then subgroup* H *is closed in* G. *If for any semisimple algebra* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ *such as* $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, *where* $\mathfrak{r}$ *is radical of* $\mathfrak{g}$, *we have* $(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ *then* H *is closed in* G.

Keywords: Riemannian manifold, Lie algebra, analitic extension, vector field, Lie group, closed subgroup.

УДК 514.822

ОБОБЩЕННОЕ ПОЛЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Е.Д. Родионов[1], В.В. Славский[2]

1 *edr2002@mail.ru*; Алтайский государственный университет
2 *slavsky2004@mail.ru*; Югорский государственный университет

В теории выпуклых подмножеств евклидова пространства важную роль играет двойственность Минковского (полярное преобразование выпуклого множества, или преобразование Лежандра выпуклой функции). В работе рассматриваются конформно-плоские римановы метрики, определенные на n*-мерной единичной сфере и их вложения*