

of the group algebra $\mathcal{A} = C[G]$. With each group G we associate the groupoid $\mathcal{G}$, associated with the adjoint action of the group G , which allows us to express the derivations of the group algebra $C[G]$ in the form of characters on Groupoid $\mathcal{G}$. With each groupoid, given by a finitely presented group, one can, in turn, relate the Caylay graph and, more generally, the two-dimensional Caylay complex. We prove that the algebra $\mathbf{Out}(C[G]) = \mathbf{Der}(C[G])/\mathbf{Int}(C[G])$, the so-called algebra of exterior derivations, is isomorphic to the one-dimensional cohomology group of the Caylay complex of the groupoid $\mathcal{G}$ with finite supports: $\mathbf{Out}(C[G]) \approx H_f^1(\mathcal{K}(\mathcal{G}); \mathbf{R})$.

Keywords: finitely representable groups, group algebras, groupoid of the adjoint group action, derivations, internal derivations, the algebra of exterior derivations, the Johnson problem, the Caylay graph, and the Caylay space of the groupoid.

УДК 517.9

О ТЕОРИИ СИМВОЛА ОПЕРАТОРА ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

А.Э. Пасенчук¹

¹ *pasenchuk@mail.ru*; Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону)

Строится алгебра символов для одномерных операторов Теплица, действующих в счетно-нормированном пространстве гладких на единичной окружности функций. В терминах символа дается критерий нетеровости оператора Теплица.

Ключевые слова: Символ, оператор, счетно-нормированное, пространство, алгебра, нетеровость, критерий.

Впервые термин «символ» появился в работах С.Г. Михлина в связи с исследованиями некоторых классов сингулярных интегральных операторов (см. [1]). В последовавших многочисленных исследованиях сингулярных интегральных операторов, операторов типа свертки и их обобщений псевдодифференциальных операторов (ПДО), интегральных операторов Фурье (ИОФ) понятие символа было центральным при построении теорий этих классов операторов. Литературные указания по этому поводу можно найти в [2] и последующих работах цитируемых там авторов и их учеников. В связи с вышесказанным были предприняты попытки определить понятие символа аксиоматически. В монографии [3] З. Пресдорф вводит понятие символа следующим образом. Пусть X - банахово пространство, $L(X)$ - банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в X , K — некоторый компакт, $C(K)$ — стандартное пространство непрерывных функций на компакте K . Через $T(X)$ обозначим идеал вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве X .

Если подалгебра $\mathfrak{A} : T(X) \subset \mathfrak{A} \subseteq L(X)$ такова, что каждому ее элементу A поставлена в соответствие функцию $\Sigma_A(x) \in C(K)$ так, что выполнены аксиомы:

$$\sigma 1. \Sigma_{\alpha A + \beta B}(x) = \alpha \Sigma_A(x) + \beta \Sigma_B(x), \quad \forall A, B \in \mathfrak{A}, \quad \forall \alpha, \beta \in C;$$

$$\sigma 2. \Sigma_{AB}(x) = \Sigma_A(x) \Sigma_B(x), \quad \forall A, B \in \mathfrak{A};$$

$$\sigma 3. \|A\|_{L(X)} = \|\Sigma_A(x)\|_{C(K)}, \quad \forall A \in \mathfrak{A};$$

$$\sigma 4. \Sigma_T(x) \equiv 0, \quad \forall T \in T(X),$$

то говорят, что на подалгебре $\mathfrak{A}$ определен символ $\Sigma_A(x)$, $x \in K$, который и называют символом оператора $A \in \mathfrak{A}$.

Аксиомы символа $\sigma 1 - \sigma 4$, предложенные З. Пресдорфом, являются свойствами символа С.Г. Михлина (см. [1]). По существу, эти условия означают, что отображение $\Sigma : \mathfrak{A}/T(X) \rightarrow C(K)$ является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр. Разумеется, отсюда следует, что обратимость символа Михлина–Пресдорфа некоторого оператора равносильна обратимости класса, содержащего этот оператор в алгебре Калкина $\mathfrak{A}/T(X)$ и, следовательно, фредгольмовости рассматриваемого оператора. Н.Я. Крупником [4] описаны все алгебры символов операторов в случае банаховых пространств. Однако, даже в модельных ситуациях, где было введено понятие символа до его формализации все аксиомы Михлина–Пресдорфа, как правило, не выполнялись. В связи с этим под символом или его аналогом (предсимволом, локальным символом и т.д.) стали понимать некоторое инъективное линейное отображение из алгебры операторов в алгебру функций, обладающее тем свойством, что обратимость символа была равносильной некоторому свойству соответствующего оператора (обратимости, фредгольмовости, нетеровости и т.д.). Отметим, что в случае одномерного теплицева оператора в пространстве гладких функций также имеется понятие символа, которое, однако, не отвечает даже этому ослабленному условию на символ.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $C^\infty(\Gamma)$ линейное пространство гладких на Γ функций. Введем в пространстве $C^\infty(\Gamma)$ счетно-нормированную топологию, с набором норм $\|\phi(\xi)\|_m = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|j| + 1)^m |\phi_j|$, $\phi_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi^{-j-1} \phi(\xi) d\xi$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Положим $P^+(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j \xi^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \xi^j$, $C_+^\infty(\Gamma) = P^+(C^\infty(\Gamma))$. Оператором Теплица, называют оператор $T_a : C_+^\infty(\Gamma) \rightarrow C_+^\infty(\Gamma)$, $(T_a \phi)(\xi) = P^+ a(\xi) \phi(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, где $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$. При этом функцию $a(\xi)$ называют символом оператора T_a . Согласно критерию Зильберманна–Пресдорфа оператор $T_a : C_+^\infty(\Gamma) \rightarrow C_+^\infty(\Gamma)$ нетеров тогда и только тогда, когда функция $a(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков (см. [3]). Это означает, что $a(\xi)$, вообще говоря, необратима в алгебре $C^\infty(\Gamma)$, а оператор T_a может быть обратимым (фредгольмовым, нетеровым). Таким, например, является оператор $T_{1-\xi^{-1}} : C_+^\infty(\Gamma) \rightarrow C_+^\infty(\Gamma)$.

Обозначим через $C_*^\infty(\Gamma)$ пространство, сопряженное к $C^\infty(\Gamma)$. Это пространство можно реализовать как топологическое пространство пар функций $(\sum_{j=-\infty}^{-1} a_j z^j, \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j)$, $|z| > 1$, $|t| < 1$, для которых коэффициенты a_j растут не быстрее некоторой степени j . Ясно, что топологическую алгебру $C^\infty(\Gamma)$ можно вложить в топологическое пространство $C_*^\infty(\Gamma)$. Положим $\Pi(\Gamma) = \left\{ \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} a_j z^j, \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \right) : \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} a_j z^j, 0 \right) \in C_*^\infty(\Gamma), \left(0, \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \right) \in C^\infty(\Gamma) \right\}$. В $\Pi(\Gamma)$ можно ввести топологию и операцию умножения $\circ$, превращающие это линейное пространство в топологическую алгебру с единицей. Отметим, что для

функций из $C^\infty(\Gamma)$ эта операция совпадает с обычным поточечным умножением (см. [5]). Алгебру $\Pi(\Gamma)$ назовем алгеброй символов оператора Теплица, понимаемого следующим образом $(T_a\phi)(\xi) = P^+a(\xi) \circ \phi(\xi)$, $\xi \in \Gamma$. Очевидно, что, если $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$, то это определение оператора Теплица совпадает с классическим.

Литература

1. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. – М.: Физматгиз, 1962. – 254с.
2. Michlin S. G., Prossdorf S. *Singularer Integralgleichungen* – Berlin: Academic-Velgrad, 1980. – 390p.
3. Пресдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений* – М.: Мир, 1979. – 493с.
4. Крупник Н. Я. *Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы* – Кишинев: Штиинца, 1984. – 138с.
5. Пасенчук А. Э. *Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности* – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. – 279с.

ON THE THEORY OF THE SYMBOL OF THE TOEPLITZ OPERATOR IN THE SPACE OF SMOOTH FUNCTIONS.

A.E. Pasenchuk

A symbol algebra is constructed for one-dimensional Toeplitz operators acting in a countably normed space of functions that are smooth on the unit circle. In terms of the symbol, the Noetherian criterion of the Toeplitz operator is given.

Keywords: Symbol, operator, countably-normed, space, algebra, Noetherian, criterion.

УДК 530.145

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СТАТИСТИКА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

Н.С. Перминов¹, Ш.Р. Шакиров²

¹ *nperminov@kazanqc.org*; Казанский Квантовый Центр, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ; Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского

² *shakirov@g.harvard.edu*; Центр фундаментальных законов природы, Гарвардский университет

В работе рассмотрен синтез математических технологий, необходимых для статистического и параметрического контроля линейных компонент квантового компьютера. При помощи методов передаточной функции и комплексной статистики изучена топология спектра сосредоточенной двухчастичной квантовой системы, находящейся в резонаторе и обладающей управляемой памятью.

Ключевые слова: функциональная статистика, топологическая спектроскопия, квантовая информатика.

Инвариантная относительно перестановки подсистем передаточная функция линейной сосредоточенной двухчастичной квантовой системы, находящейся в резонаторе, в отсутствии потерь может быть представлена в форме $S(\nu) = (1 -$