УДК 514.1:514.75:512.548:512.552.7:512.547

ДЕРИВАЦИИ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

А.С. Мищенко[1]

1 *asmish-prof@yandex.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В докладе изучается классический вопрос о сравнении алгебры Ли дериваций ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ с ее подалгеброй внутренних дериваций, так называемая проблема дериваций Джонсона. Проблема дериваций формулируется следующим образом: все ли деривации являются внутренними? Эта задача рассматривалась не для всяких алгебр, а для групповых алгебр $\bar{\mathscr{A}} = L^1(G)$ некоторой группы G. Нас же интересует не вся банахова алгебра $\bar{\mathscr{A}} = L^1(G)$, а только ее плотная подалгебра $\mathscr{A} = C[G] \subset \bar{\mathscr{A}}$, состоящая, так сказать, из гладких элементов в алгебре $\bar{\mathscr{A}} = L^1(G)$, следуя терминологии А. Кона. Для групповой алгебры $\mathscr{A} = C[G]$ также можно сформулировать аналогичную задачу: описать алгебру всех внешних дериваций групповой алгебры $\mathscr{A} = C[G]$. С каждой группой G мы связываем группоид $\mathscr{G}$, ассоциированный с присоединенным действием группы G, который позволяет выразить деривации групповой алгебры $C[G]$ в виде характеров на группоиде $\mathscr{G}$. С каждым группоидом, задаваемым конечно представимой группой, можно, в свою очередь, связать граф Кэли и, более общим образом, двумерный комплекс Кэли. Мы доказываем, что алгебра $\mathbf{Out}(C[G]) = \mathbf{Der}(C[G])/\mathbf{Int}(C[G])$, так называемая алгебра внешних дериваций, изоморфна одномерной группе когомологий комплекса Кэли группоида $\mathscr{G}$ с конечными носителями: $\mathbf{Out}(C[G]) \approx H^1_f(\mathscr{K}(\mathscr{G});\mathbf{R})$.

Ключевые слова: Конечно представимые группы, групповые алгебры, группоиды присоединенного действия группы, деривации, внутренние деривации, алгебра внешних дериваций, проблема Джонсона, граф Кэли и пространство Кэли группоида.

1. Введение

Результаты, изложенные докладе, выполнены совместно с А.А. Арутюновым и А.И. Штерном. В докладе изучается классический вопрос о сравнении алгебры Ли дериваций ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ с ее подалгеброй внутренних дериваций, так называемая проблема дериваций Джонсона. Пространство дериваций $\mathbf{Der}(\mathscr{A},E)$ из алгебры $\mathscr{A}$ в бимодуль E есть множество отображений $D:\mathscr{A}\longrightarrow E$, которые удовлетворяют условию:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \quad a,b \in \mathscr{A},$$

(см. Losert(2008) [5], Ghahramani(2000) [6]). Среди дериваций $\mathbf{Der}(\mathscr{A},E)$ выделяются так называемые внутренние деривации $\mathbf{Int}(\mathscr{A},E) \subset \mathbf{Der}(\mathscr{A},E)$, которые задаются присоединенным представлением

$$\mathbf{ad}_x(a) \overset{def}{=} xa - ax, \quad x \in E, a \in \mathscr{A}.$$

Проблема дериваций формулируется следующим образом: все ли деривации являются внутренними? Эта задача рассматривалась не для всяких алгебр, а для групповых алгебр $\mathscr{A} = C[G]$ некоторой группы G. Более точно, рассматривается групповая алгебра $\overline{\mathscr{A}} = L^1(G)$ и бимодуль $E = M(G)$, где $M(G)$ есть алгебра всех ограниченных мер на группе G с операцией умножения, задаваемой сверткой мер.

Вопрос из книги Dales(2000) [3], (Question 5.6.B, стр.746) формулируется следующим образом: Пусть G есть локально компактная группа. Всякая ли деривация из алгебры $\mathscr{A} = L^1(G)$ в бимодуль $E = M(G)$ является внутренней деривацией? Утвердительный ответ оправдывается следующим соображением.

В случае, когда группа G является дискретной свободной абелевой группой с конечным числом образующих, т.е. $G \approx \mathbb{Z}^n$, то алгебру $\overline{\mathscr{A}} = L^1(G)$ можно можно отождествить с алгеброй Фурье $A(\mathbb{T}^n)$ непрерывных функций на n −мерном торе $\mathbb{T}^n$, коэффициенты Фурье которых образуют абсолютно сходящийся кратный ряд, $\mathscr{A} = A(\mathbb{T}^n) \subset C(\mathbb{T}^n)$ (эта алгебра Фурье меньше алгебры всех непрерывных функций). Дериваций на алгебре $A(\mathbb{T}^n)$ нет, поскольку в ней достаточно много негладких функций, впрочем и внутренних дериваций тоже нет, поскольку алгебра $\overline{\mathscr{A}} = L^1(G)$ коммутативна.

Нас же интересует не вся банахова алгебра $\overline{\mathscr{A}} = L^1(G)$, а только ее плотная подалгебра $\mathscr{A} = C[G] \subset \overline{\mathscr{A}}$, состоящая, так сказать, из гладких элементов в алгебре $\overline{\mathscr{A}} = L^1(G)$, следуя терминологии А. Кона (1980) ([1], стр. 2). Для групповой алгебры $\mathscr{A} = C[G]$ тоже можно сформулировать аналогичную задачу: описать алгебру всех внешних дериваций групповой алгебры $\mathscr{A} = C[G]$.

С каждой группой G мы связываем группоид $\mathscr{G}$, ассоциированный с присоединенным действием группы G, который позволяет выразить деривации групповой алгебры $C[G]$ в виде характеров на группоиде $\mathscr{G}$.

Следуя, например, книге Р. Линдона и П. Шуппа (1980, [9]) каждой дискретной конечно представимой группе G можно сопоставить так называемый граф Кэли и его двумерное обобщение комплекс Кэли, который состоит из элементов группы в качестве вершин, системы образующих в качестве ребер и системы определяющих соотношений в качестве двумерных клеток. Топологические свойства комплекса Кэли отвечают за определенные алгебраические свойства самой группы G.

Геометрическая конструкция комплекса Кэли для конечно представимой группы G может быть обобщена на случай группоидов, в частности на случай группоида $\mathscr{G}$ присоединенного действия группы G . Поскольку деривации групповой алгебры $\mathbf{Der}(C[G])$ можно описать как характеры на группоиде $\mathscr{G}$, то топологические свойства комплекса Кэли $\mathscr{K}(\mathscr{G})$ группоида $\mathscr{G}$ позволяют описать некоторые свойства дериваций.

Мы доказываем, что алгебра внешних дериваций

$$\mathbf{Out}\,(C[G]) = \mathbf{Der}(C[G])/\mathbf{Int}\,(C[G])$$

изоморфна одномерной группе когомологий комплекса Кэли группоида $\mathscr{G}$ с конечными носителями:

$$\mathbf{Out}\,(C[G]) \approx H^1_f(\mathscr{K}(\mathscr{G}); \mathbf{R}).$$

2. Описание дериваций как характеров на группоиде $\mathscr{G}$ присоединенного действия группы G

Обозначим через $\mathscr{G}$ группоид, ассоциированный с присоединенным действием группы G (или группоид действия, см. например, Ершов(2012) [4], стр. 18, пример j).

Группоид $\mathscr{G}$ состоит из объектов $\mathrm{Obj}(\mathscr{G}) = G$ и морфизмов

$$\mathrm{Mor}(a,b) = \{g \in G : ga = bg \text{ или } b = \mathrm{Ad}(g)(a)\}, \quad a,b \in \mathrm{Obj}(\mathscr{G}).$$

Элементы множества всех морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathscr{G}) = \coprod\limits_{a,b\in \mathrm{Obj}(\mathscr{G})} \mathrm{Mor}(a,b)$ удобно обозначать в виде столбца

$$\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{g}\right) \in \mathrm{Mor}(a,b), \quad b = gag^{-1} = \mathrm{Ad}(g)(a).$$

Композиция $*$ двух морфизмов задается формулой

$$\left(\frac{a \longrightarrow c}{g_2 g_1}\right) = \left(\frac{b \longrightarrow c}{g_2}\right) * \left(\frac{a \longrightarrow b}{g_1}\right),$$

$$b = \mathrm{Ad}(g_1)(a),$$

$$c = \mathrm{Ad}(g_2)(b) = \mathrm{Ad}(g_2)(\mathrm{Ad}(g_1)(a)) = \mathrm{Ad}(g_2 \mathrm{Ad}(g_1)(a)).$$

Линейный оператор $X : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ описывается матрицей $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$, которая удовлетворяет условию:

(f1) Для любого индекса $g \in G$ множество тех индексов $h \in G$, для которых x_g^h отлично от нуля, конечно.

Матрица $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$ задает функцию на группоиде $\mathscr{G}$ $T^X : \mathrm{Mor}(\mathscr{G}) \longrightarrow R$, ассоциированную с оператором X, которая определяется формулой: если $\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{g}\right) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{G})$, то полагаем

$$T^X(\xi) = T^X\left(\frac{a \longrightarrow b}{g}\right) = x_g^{ga=bg}.$$

Условие (f1), налагаемое на коэффициенты матрицы X , можно переформулировать в терминах функции T :

(T1) Для любого индекса $g \in G$ множество морфизмов вида $\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{g}\right)$, для которых $T^X(\xi) \neq 0$, конечно.

Теорема 1. *Оператор $X : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ является дифференцированием (т.е. деривацией) тогда и только тогда, когда для ассоциированной с оператором X функции T^X на группоиде $\mathscr{G}$ выполняется условие* **(T1)** *и условие*

(T2) $T^X(\eta * \xi) = T^X(\eta) + T^X(\xi)$

для любой пары морфизмов ξ и η, допускающих композицию $\eta * \xi$.

3. Комплекс Кэли группоида $\mathscr{G}$ присоединенного действия

Рассмотрим конечно представимую группу G, $G = F < X, R >$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – конечное множество образующих, а $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ – конечное множество определяющих соотношений.

Образующие и соотношения группоида $\mathscr{G}$

Конечное множество образующих $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и конечное множество определяющих соотношений $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ переносятся на образующие и соотношения в группоиде $\mathscr{G}$, которые мы обозначим через $\mathscr{X}$ и $\mathscr{R}$. Таким образом множество морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathscr{G})$ можно обозначать как $\mathscr{F} < \mathscr{X}, \mathscr{R} >$, $\mathrm{Mor}(\mathscr{G}) = \mathscr{F} < \mathscr{X}, \mathscr{R} >$.

Определим $\mathscr{X}$ как множество всех морфизмов вида $\mathscr{X} = \left\{\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{x}\right) : x \in X, a \in \mathrm{Obj}(\mathscr{G})\right\}$. Рассмотрим алфавит $\mathscr{Y} = \mathscr{X} \sqcup \mathscr{X}^{-1}$. Множество $S(\mathscr{Y})$ – это множество всех допустимых слов s из алфавита $\mathscr{Y}$, т.е. таких слов, составленных из букв алфавита $\mathscr{Y}$, $s = \xi_1\xi_2\xi_3 \cdots \xi_l$, что $\xi_i = \left(\frac{a_i \longrightarrow a_{i+1}}{y_i}\right)$, $\quad \xi_i \in \mathscr{Y}, \quad 1 \leq i \leq l$. Каждое допустимое слово $s \in S(\mathscr{Y})$ задает морфизм $\xi(s) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{G})$ по формуле $\xi(s) = \xi_1 * \xi_2 * \xi_3 * \cdots * \xi_l$.

Это представление морфизма ξ в виде допустимого слова s не однозначно, и позволяет производить сокращение слова s по следующему правилу. Сначала определим систему соотношений $\mathscr{R}$, порожденную множеством R определяющих соотношений в группе G. Каждое соотношение $r_i \in R$ записывается в виде слова

$$r_i = y_{i1}y_{i2}y_{i3} \cdots y_{il_i}, \quad y_{ij} \in Y.$$

Соотношения r_i порождает систему допустимых слов $\rho_{i,a}, \quad a \in \mathrm{Obj}(\mathscr{G})$ вида

$$\rho_{i,a} = \left(\frac{a_1 \longrightarrow a_2}{y_{i1}}\right)\left(\frac{a_2 \longrightarrow a_3}{y_{i2}}\right)\left(\frac{a_3 \longrightarrow a_4}{y_{i3}}\right)\cdots\left(\frac{a_{l_i} \longrightarrow a_1}{y_{il_i}}\right),$$

$$a = a_1, \quad a_{j+1} = a_j^{y_{ij}}, \quad 1 \leq j \leq l_i, \quad a_{l_i+1} = a_1,$$

которые служат определяющими соотношениями группоида $\mathscr{G}$. Множество всех допустимых слов вида $\rho_{i,a}$ обозначим через $\mathscr{R}$,

$$\mathscr{R} = \{\rho_{i,a} : 1 \leq i \leq l_i, \quad a \in \mathrm{Obj}(\mathscr{G})\}.$$

Таким образом, операция сокращения допустимого слова s производится следующим образом. Пусть допустимое слово s представимо в виде конкатенации трех слов

$$s = s_1\eta s_2,$$

причем среднее слово равно одному из следующих вариантов:

$$\begin{array}{ll} \eta = \sigma\sigma_{-1}, & \sigma \in S(\mathscr{Y}), \\ \eta = \rho, & \rho \in \mathscr{R} \sqcup \mathscr{R}^{-1}. \end{array}$$

В это случае результат сокращения есть слово $s' = s_1s_2$, которое, разумеется, является допустимым. Обратная операция $s' = s_1s_2 \Rightarrow s_1\eta s_2$ называется операцией допустимой ставки.

Таким образом два допустимых слова s_1 и s_2задают один и тот же морфизм, т.е.

$$\xi(s_1) = \xi(s_2) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{G}),$$

тогда и только тогда, когда слова эквивалентны $s_1 \sim s_2$, т.е. когда существует конечная последовательность операций двух типов:

1) операции сокращения,

2) операции допустимой вставки,

переводящая слово s_1 в слово s_2.

Комплекс Кэли

Комплекс Кэли $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ состоит из клеток размерности 0, 1 и 2. Вершины т.е. нульмерные клетки комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ – это объекты $a \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$.

Одномерные ребра, т.е. ориентированные клетки размерности 1, соединяющие вершины a и b – это морфизмы $\xi \in \mathrm{Mor}(a,b)$ вида

$$\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{y}\right), \quad y \in Y = X \sqcup X^{-1}, \quad a \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G}), \quad b = a^y = yay^{-1} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G}).$$

Отсюда следует, что вершины соединяются ребрами только тогда, когда вершины принадлежат одному классу сопряженности, т.е. когда $a, b \in [c]$. Следовательно, достаточно рассмотреть не весь группоид, а только его часть $\mathcal{G}_{[c]}$. Соответствующий комплекс Кэли будем обозначать через $\mathcal{K}(\mathcal{G}_{[c]})$. Два ребра $\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{y}\right)$ и $\xi = \left(\frac{b \longrightarrow a}{y^{-1}}\right)$ будем считать одинаковыми, но с противоположными ориентациями на ребрах.

Наконец, двумерные клетки – это плоские ориентируемые многоугольники $\sigma(\rho)$, задаваемые словами $\rho \in \mathcal{R} \sqcup \mathcal{R}^{-1}$, которые определяют границы многоугольников $\sigma(\rho)$ как замкнутый цикл, составленный из ребер слова ρ. Клетки $\sigma(\rho)$ и $\sigma(\rho^{-1})$ считаются одинаковыми с противоположной ориентацией. Двумерные клетки $\sigma(\rho)$ приклеиваются к одномерному остову комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G}_{[c]}$ естественным отождествлением ребер границы клетки $\sigma(\rho)$ к соответствующему ребру комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G}_{[c]})$ с сохранением ориентации.

Заметим, что некоторые ребра комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G}_{[c]}$ имеют общие начало и конец ребра, когда у ребра $\xi = \left(\frac{a \longrightarrow b}{y}\right)$ выполнено равенство $a = b$, т.е. $a^y = a$. Так бывает, если элемент a принадлежит централизатору $Z(y)$ элемента y в группе G. Следовательно, если

$$a \notin G \setminus \bigcup_{y \in X} Z(y),$$

то в вершине a ребер с одинаковым началом и концом, т.е. петель.

Группы коцепей комплекса Кэли

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C^0(\mathcal{K}(\mathcal{G})) \arrow[r, "d_0"] & C^1(\mathcal{K}(\mathcal{G})) \arrow[r, "d_1"] & C^2(\mathcal{K}(\mathcal{G})) \\
C^0_f(\mathcal{K}(\mathcal{G})) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "\cup"] & C^1_f(\mathcal{K}(\mathcal{G})) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\cup"] & C^2_f(\mathcal{K}(\mathcal{G})) \arrow[u, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

которую можно дополнить до отображения дериваций

$$\begin{tikzcd}
C^0(\mathscr{K}(\mathscr{G})) \arrow[r, "d_1"] & C^1(\mathscr{K}(\mathscr{G})) \arrow[r, "d_1"] & C^2(\mathscr{K}(\mathscr{G})) \\
C^0_f(\mathscr{K}(\mathscr{G})) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\cup"] & C^1_f(\mathscr{K}(\mathscr{G})) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\cup"] & C^2_f(\mathscr{K}(\mathscr{G})) \arrow[u, "\cup"] \\
\mathbf{Int}\,(C[G]) \arrow[r] \arrow[u, "T_0", "\approx"'] & \mathbf{Der}(C[G]) \arrow[r] \arrow[u, "T_1", "\cup"'] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Отсюда получаем теорему:

Теорема 2. *Гомоморфизм T, порожденный характером дериваций, индуцирует изоморфизм между внешними деривациями* $\mathbf{Out}\,(\mathscr{G}) = \mathbf{Der}(\mathscr{G})/\mathbf{Int}\,(\mathscr{G})$ *и одномерными когомологиями комплекса Кэли:*

$$\mathbf{Out}\,(\mathscr{G}) \xrightarrow[\cong]{T^*} H^1_f(\mathscr{K}(\mathscr{G})).$$

Литература

1. Connes, A., *C*–algebras and Differential Geometry*// arXiv:hep-th/0101093v1 15 Jan —2001, or CR Acad. Sci. Paris Ser. AB, — 1980.

2. Dales H.G. *Automatic Continuity: a Survey*// Bull. London Math. Soc. — 1978. Vol. 10. — C. 129-183.

3. Dales H.G. *Banach Algebras and Automatic Continuity* LARENDON PRESS, OXFORD. 2000 — ISBN 0 19 850013 0.

4. Ершов А.В. *Категории и функторы, Учебное пособие* // Саратов. Наука. — 2012. — 88с.

5. Losert V. *The derivation problem for group algebras*// Annals of Mathematics. — 2008. — Vol. 168. — C. 221–246.

6. Ghahramani F. , Runde V. , and Willis G. *Derivations on group algebras*// Proc. London Math. Soc. — 2000. Vol. 80. — C. 360–390.

7. Johnson B.E. *The Derivation Problem for Group Algebras of Connected Locally Compact Groups*// J. London Math. Soc., V. 63, Issue 2. — 2001. — P. 441-452.

8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. / *Основы теории групп.* 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. — 1982.— 288 с.

9. Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп.* М.: «Мир», — 1980.— 447 с.

DERIVAION OF THE GROUP ALGEBRAS

A.S. Mishchenko

In this paper we study the classical question of comparing the Lie algebra of the derivations of the associative algebra $\mathscr{A}$ with its subalgebra of internal derivations, the so-called Johnson derivation problem. The derivation problem is formulated as follows: are all derivations internal? This problem was considered not for any algebras, but for group algebras $\bar{\mathscr{A}} = L^1(G)$ of some group G . We are not interested in the entire Banach algebra $\bar{\mathscr{A}} = L^1(G)$, but only its dense subalgebra $\mathscr{A} = C[G] \subset \bar{\mathscr{A}}$ consisting, say, from smooth elements in the algebra $\bar{\mathscr{A}} = L^1(G)$, following A. Kon's terminology. For the group algebra $\mathscr{A} = C[G]$ one can also formulate an analogous problem: describe the algebra of all exterior derivations *of the group algebra $\mathscr{A} = C[G]$. With each group G we associate the groupoid $\mathscr{G}$, associated with the adjoint action of the group G, which allows us to express the derivations of the group algebra $C[G]$ in the form of characters on Groupoid $\mathscr{G}$. With each groupoid, given by a finitely presented group, one can, in turn, relate the Caylay graph and, more generally, the two-dimensional Caylay complex. We prove that the algebra $\mathbf{Out}\,(C[G]) = \mathbf{Der}(C[G])/\mathbf{Int}\,(C[G])$, the so-called algebra of exterior derivations, is isomorphic to the one-dimensional cohomology group of the Caylay complex of the groupoid $\mathscr{G}$ with finite supports: $\mathbf{Out}\,(C[G]) \approx H^1_f(\mathscr{K}(\mathscr{G});\mathbf{R})$.*

Keywords: finitely representable groups, group algebras, groupoid of the adjoint group action, derivations, internal derivations, the algebra of exterior derivations, the Johnson problem, the Caylay graph, and the Caylay space of the groupoid.

УДК 517.9

О ТЕОРИИ СИМВОЛА ОПЕРАТОРА ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

А.Э. Пасенчук[1]

1 *pasenchuk@mail.ru*; Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону)

Строится алгебра символов для одномерных операторов Теплица, действующих в счетно-нормированном пространстве гладких на единичной окружности функций. В терминах символа дается критерий нетеровости оператора Теплица.

Ключевые слова: Символ, оператор, счетно-нормированное, пространство, алгебра, нетеровость, критерий.

Впервые термин «символ» появился в работах С.Г. Михлина в связи с исследованиями некоторых классов сингулярных интегральных операторов (см. [1]). В последовавших многочисленных исследованиях сингулярных интегральных операторов, операторов типа свертки и их обобщений псевдодифференциальных операторов (ПДО), интегральных операторов Фурье (ИОФ) понятие символа было центральным при построении теорий этих классов операторов. Литературные указания по этому поводу можно найти в [2] и последующих работах цитируемых там авторов и их учеников. В связи с вышесказанным были предприняты попытки определить понятие символа аксиоматически. В монографии [3] З. Пресдорф вводит понятие символа следующим образом. Пусть X - банахово пространство, $L(X)$ - банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в X, K — некоторый компакт, $C(K)$ — стандартное пространство непрерывных функций на компакте K. Через $T(X)$ обозначим идеал вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве X.

Если подалгебра $\mathfrak{A} : T(X) \subset \mathfrak{A} \subseteq L(X)$ такова, что каждому ее элементу A поставлена в соответствие функцию $\Sigma_A(x) \in C(K)$ так, что выполнены аксиомы:

$$\sigma 1.\ \Sigma_{\alpha A+\alpha B}(x) = \alpha\Sigma_A(x) + \beta\Sigma_B(x),\ \ \forall A,B \in \mathfrak{A},\ \ \forall \alpha,\beta \in C;$$

$$\sigma 2.\ \Sigma_{AB}(x) = \Sigma_A(x)\,\Sigma_B(x),\ \ \forall A,B \in \mathfrak{A};$$