6. The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.8*; 2017, (https://www.gap-system.org).

TO THE CONSTRUCTION OF HAMILTONIAN CYCLES IN CAYLEY GRAPH OF A GROUP GENERATED BY THREE INVOLUTIONS

A. I. Makosiy

With the help of the computer algebra system GAP continuied the study of the construction of Hamiltonian cycles in Cayley graph of groups generated by three involutions, two of which commute.
Keywords: Cayley graph, Hamiltonian circle, generating triples of involutions of group.

УДК 514.743.28

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ ЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСА ПЛОСКОСТЕЙ, АССОЦИИРОВАННОГО С ТРИВЕКТОРОМ ТИПА (884;400)

А.Н. Макоха[1]

1 *anmakoha@yandex.ru*; Северо-Кавказский федеральный университет г. Ставрополь

Сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных условиях для определения всех плоскостей линейного комплекса, ассоциированного с тривектором данного типа, с точностью до линейных преобразований его группы автоморфизмов. В процессе доказательства теоремы находятся все виды особых прямых, а для неособых прямых строятся их полярные гиперплоскости.

Ключевые слова: Тривектор, особые точки первого и второго рода, особые и неособые прямые, особые подпространства, полярная гиперплоскость, группа автоморфизмов тривектора.

Геометрической теории кососимметрических тензоров (поливекторов) в многомерных пространствах, на наш взгляд, уделяется недостаточно внимания. В частности, недостаточно изучена геометрическая конструкция линейных комплексов плоскостей, ассоциированных с трёхвалентными кососимметрическими тензорами (тривекторами).

Для построения геометрической конструкции линейных комплексов K_2 плоскостей в проективном пространстве P_n над полем C комплексных чисел (или другим алгебраически замкнутым полем характеристики 0) необходимо найти все плоскости, принадлежащие этим комплексам или, по крайней мере, указать способы их нахождения.

Для этого, исходя из инвариантных геометрических образов данного тривектора, необходимо исследовать расположение всех видов особых прямых рассматриваемого комплекса K_2. Тогда, по определению, любая плоскость, проходящая через особую прямую, принадлежит комплексу K_2.

Для неособых прямых, опираясь на группу линейных преобразований, сохраняющих данный тривектор и его канонический вид (мы ее называем основной группой автоморфизмов), необходимо найти конструкцию их полярных гиперплоскостей. Каждая плоскость, лежащая в полярной гиперплоскости и проходящая через соответствующую неособую прямую, принадлежит комплексу K_2.

Эти соображения носят общий характер. Что же касается построения геометрической конструкции конкретных комплексов плоскостей, то подходы здесь различны. Для каждого типа комплексов плоскостей строится своеобразная локальная теория (см., напр., [1]).

Линейный комплекс K_2 плоскостей типа B_3 по классификации Лонго [2] относится к категории B, для которой множеством центров следа комплекса, ассоциированного с особой точкой второго рода, является двумерная плоскость. Линейный комплекс K_2 плоскостей типа B_3 по классификации Гуревича [3] определяется тривектором (кососимметрическим трёхвалентным тензором) W типа (884;400). Числа в круглых скобках последовательно означают ранг ρ_0 тривектора W и размерности подпространств, соответствующих арифметическим инвариантам ρ_1, ρ_2, σ_1, σ_2 и σ_3. Все линейные комплексы плоскостей, относящиеся к категории B (обозначения: $B_1 - B_5$ [2]), отвечают тривекторам, для которых инвариант $\sigma_3 = 0$.

Погрузим рассматриваемый комплекс плоскостей в проективное семимерное пространство P_7 над полем C комплексных чисел. Выберем в этом пространстве два взаимно дуальных базиса $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_8\}$ и $E = \{e^1, e^2, \ldots, e^8\}$, где $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_8$ – линейно независимая система контравариантных векторов, $e^1, e^2, \ldots, e^8$ – линейно независимая система гиперплоскостей пространства P_7 (то есть система ковариантных векторов) и $\tilde{e}_i e^j = \delta_i^j$ $(i, j = \overline{1,8}$; δ_i^j – символ Кронекера, а суммирование проводится по правилу Эйнштейна). В этой системе координат пространства инвариантов ρ_2 и σ_1 совпадают с линейной оболочкой $\tilde{R}_2 = \tilde{S}_1 = \{\tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_7, \tilde{e}_8\}$ $(R_2 = S1 = \{e^1, e^3, e^5, e^6\})$, а тривектор W в базисе E приводится к следующему каноническому виду [3]:

$$W = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + e^5 \wedge e^6 \wedge e^7 + e^1 \wedge e^4 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \wedge e^8, \tag{1}$$

где $\wedge$ – символ умножения в алгебре Грассмана.

В данной работе, опираясь на инвариантные геометрические образы тривектора (1), полученные в работе [4], определим необходимые и достаточные условия для нахождения всех плоскостей комплекса K_2, ассоциированного с тривектором типа B_3, с точностью до преобразований его группы автоморфизмов в пространстве P_7.

Один из общих подходов к построению основной группы автоморфизмов G тривекторов восьмого ранга был рассмотрен в работе [6]. Эта группа представляет собой подгруппу группы Ли всех линейных преобразований проективного пространства P_7, сохраняющих канонический вид тривектора. Построение группы G для каждого из 13 возможных типов тривекторов восьмого ранга носит частный характер. Так, например, для некоторых типов тривекторов были построены группы автоморфизмов в работах [4] – [8]. В работе [9] была построена группа автоморфизмов для тривектора типа (884;400).

Согласно [4, с. 84] для линейного комплекса K_2 плоскостей, соответствующего тривектору (1), в проективном пространстве P_7 над полем С комплексных чисел в базисе E пространства инвариантов ρ_2 и σ_1 совпадают с подпространством $\tilde{R}_2 = \tilde{S}_1 = P_3^*$, определяемым системой уравнений

$$x^1 = x^3 = x^5 = x^6 = 0. \tag{2}$$

Особые точки 2-го рода образуют невырожденную квадрику Q_2, расположенную в подпространстве (2) и определяемую системой уравнений

$$\begin{cases} x^1 = x^3 = x^5 = x^6 = 0, \\ x^2x^7 - x^4x^8 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Точки, лежащие в одном из 5-мерных подпространств P_5^*

$$x^3 = x^5 = 0 \tag{4}$$

или P_5^{**}

$$x^1 = x^6 = 0, \tag{5}$$

будут особыми точками 1-го рода, если они не принадлежат квадрике Q_2. При этом очевидно, что $P_5^* \cap P_5^{**} = P_3^*$. Точки, не принадлежащие ни P_5^*, ни P_5^{**}, будут точками общего положения пространства P_7.

В работе [10] нами была построена, обучена и протестирована искусственная нейронная сеть, предназначенная для определения принадлежности произвольной точки комплексного пространства P_7 многообразию особых точек 1-го или 2-го рода для всех линейных комплексов плоскостей категории B.

Особые 5-мерные подпространства P_5, ассоциированные с точками одной и той же прямолинейной образующей квадрики Q_2, образуют пучок 5-мерных подпространств, вершиной которого служит некоторое 4-мерное подпространство P_4.

Более того, как показывают аналитические выкладки, прямолинейным образующим одной серии отвечают подпространства P_4, содержащиеся в инвариантном подпространстве P_5^* (4), а прямолинейным образующим второй серии отвечают подпространства P_4, содержащиеся в инвариантном подпространстве P_5^{**} (5). При этом каждое такое подпространство проходит через инвариантное подпространство P_3^*. Тем самым можно установить проективное соответствие ψ, которое каждой прямолинейной образующей квадрики Q_2 будет относить 4-мерное подпространство P_4, проходящее через подпространство P_3^*.

Согласно [3, §31] с тривектором (1) инвариантно связан смешанный симметричный по нижним индексам тензор

$$\frac{1}{3}h^i_{jk} = -e^i_2 e^5_{(j} e^6_{k)} + e^i_4 e^3_{(j} e^6_{k)} - e^i_7 e^1_{(j} e^3_{k)} + e^i_8 e^1_{(j} e^5_{k)}. \tag{6}$$

Пусть $\tilde{x} = \sum_{i=1}^8 \eta_i \tilde{e}_i$ – произвольная точка общего положения пространства P_7, то есть $x \notin P_5^*$, $x \notin P_5^{**}$, где η_i — произвольные комплексные числа. Свёртывая тензор (6) по одному из нижних индексов с точкой $\tilde{x}$, поставим в соответствие этой точке линейный оператор φ_x:

$$\varphi_x = \frac{2}{3}h^i_{j\alpha}x^\alpha = -\eta_6 e^i_2 e^5_j - \eta_5 e^i_2 e^6_j + \eta_6 e^i_4 e^3_j + \eta_3 e^i_4 e^6_j - \eta_3 e^i_7 e^1_j - \eta_1 e^i_7 e^3_j + \eta_5 e^i_8 e^1_j + \eta_1 e^i_8 e^5_j$$

или в бескоординатной форме:

$$\varphi_x = -\tilde{e}_2(\eta_6 e^5 + \eta_5 e^6) + \tilde{e}_4(\eta_6 e^3 + \eta_3 e^6) - \tilde{e}_7(\eta_3 e^1 + \eta_1 e^3) + \tilde{e}_8(\eta_5 e^1 + \eta_1 e^5) \tag{7}$$

Приведем два свойства оператора (7), которые используются при доказательстве сформулированной ниже теоремы.

a) Областью значений оператора φ_x является инвариантное подпространство P_3^*, принадлежащее ядру этого оператора.

b) $\varphi_x(\tilde{x}) \in Q_2$ и прямая $l = \tilde{x} \wedge \varphi_x(\tilde{x})$ – особая.

Теорема. *Для того чтобы линейный комплекс K_2 плоскостей типа B_3 определялся с точностью до линейных преобразований группы G автоморфизмов тривектора данного типа, в пространстве P_7 необходимо и достаточно задать:*

1) *3-мерное подпространство P_3^*;*

2) *в подпространстве P_3^* — невырожденную квадрику Q_2;*

3) *два 5-мерных подпространства P_5^* и P_5^{**}, пересекающиеся по подпространству P_3^*;*

4) *установить проективное соответствие ψ, которое каждой прямолинейной образующей квадрики Q_2 относит 4-мерное подпространство P_4, проходящее через подпространство P_3^*. При этом потребуем, чтобы прямолинейным образующим одной серии отвечали подпространства P_4, лежащие в подпространстве P_5^*, а прямолинейным образующим второй серии отвечали подпространства P_4, лежащие в подпространстве P_5^{**};*

5) *каждой точке $\tilde{x}$ общего положения поставить в соответствие линейный оператор φ_x.*

Необходимость условий теоремы непосредственно следует из соотношений (2)–(7) и проективного соответствия ψ. Доказательство достаточности условий теоремы ввиду громоздких выкладок мы не приводим. Укажем лишь, что в процессе доказательства было установлено, что линейный комплекс плоскостей, ассоциированный с тривектором типа B_3, имеет пять видов особых прямых, включая прямые особых 3-мерных и 5-мерных подпространств, ассоциированных с особыми точками 1-го и 2-го рода соответственно. Неособых прямых оказалось семь видов. Для каждого вида этих прямых конструктивным путём были построены соответствующие им полярные гиперплоскости.

Литература

1. Макоха А.Н. *Линейный комплекс плоскостей, ассоциированный с тривектором типа (886; 410).* // Сб.: Современная геометрия. – Л.: Мир, 1980. – С. 44–63.

2. Longo C. *Sui complessi lineari di piani* // Ann. mat. pura ed appl. – 1954. – (4) – 37. – С. 61–138.

3. Гуревич Г.Б. *Алгебра тривектора. Ч.П.* // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. Вып. 6. МГУб – М.: 1948. – С. 28–124.

4. Макоха А.Н. *Особые точки тривекторов восьмого ранга в P_7.* // Сб.: Геометрия погруженных многообразий. – М.: 1972. – С. 69–97.

5. Макоха А.Н. *Группы автоморфизмов тривекторов восьмого ранга.* // Междуна-родная геометрическая школа-семинар памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов. – Абрау-Дюрсо: Изд-во РГУ, 1996. – С. 50–51.

6. Макоха А.Н. *Линейные операторы, связанные с тривектором типа (887; 520), и основная группа автоморфизмов этого тривектора.* // Изв. вузов. Матем. 1981. – №7 – С. 46–53.

7. Макоха А.Н. *Группа автоморфизмов линейного комплекса плоскостей типа* À$_3$ *и особые прямые этого комплекса.* // Изв. вузов. Матем. 1986. – №8 – С. 40–46.

8. Макоха А.Н. *Группа линейных преобразований, сохраняющих тривектор типа (888; 852).* // Изв. вузов. Матем. 1986. – №2 – С. 45–49.

9. Макоха А.Н. *Об одном способе построения группы автоморфизмов тривектора типа (884; 400).* // Проблемы естественных наук: Материалы научной конференции "Университетская наука - региону". – Ставрополь: Изд-во СГУ, 1996.

10. Makoha A. N., Tyshlyar T.E. *Construction of neural networks for determination of singular points of linear complexes of planes of category B* // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. Mathematiques, Informatique. 2012 – T. 65. – No 6. – P. 751–758.

GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF A LINEAR COMPLEX OF PLANES ASSOCIATED WITH A TRIVECTOR OF TYPE (884, 400)

A.N. Makokha

A theorem on necessary and sufficient conditions for determining all planes of a linear complex associated with a trivector of a given type is formulated and proved accurate to linear transformations of its automorphism group. All kinds of singular lines are found during the process of proving the theorem. For their nonsingular lines their polar hyperplanes are constructed.

Keywords: Trivector, singulars points of the first and second kinds, singulars and non-singulars directs, singulars subspaces, polar hyperplane, automorphism group of a trivector.

УДК 514.76

ПСЕВДОГРУППА ГОЛОНОМИИ $\mathbb{D}$-ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ И СТРУКТУРЫ $\mathbb{D}$-ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ НА ТОРЕ

А.А. Малюгина[1], В.В. Шурыгин[2]

1 *alexandra.malyugina@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *vadim.shurygin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Псевдогруппы голономии гладких многообразий над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ применяются для решения вопроса о $\mathbb{D}$-диффеоморфности двумерных торов, снабженных некоторыми структурами $\mathbb{D}$-гладких многообразий.

Ключевые слова: Гладкое многообразие над алгеброй дуальных чисел, интегрируемая почти касательная структура, касательное многообразие, псевдогруппа голономии.

Алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ называется двумерная алгебра над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, \varepsilon\}$ и умножением, определяемым формулой $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + cb)\varepsilon$.

Отображение $F : U \subset \mathbb{D}^n \ni \{X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon\} \mapsto \{Y^k = y^k + \dot{y}^k\varepsilon\} \in \mathbb{D}^m$ из открытого подмножества $U \subset \mathbb{D}^n$ модуля $\mathbb{D}^n$ в модуль $\mathbb{D}^m$ называется $\mathbb{D}$-*гладким*, если его дифференциал dF является $\mathbb{D}$-линейным отображением в каждой точке из U. В некоторой окрестности каждой точки из U $\mathbb{D}$-гладкое отображение имеет следующий вид