

NUMERICALLY-ANALYTICAL METHODS FOR MATHEMATICAL MODELING  
OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS IN CAS MAPLE

A.R. Samigullina

*The tools of the automated solution and visualization of numerical solutions of systems of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order solved with respect to the highest derivatives are described.*

Keywords: nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations.

УДК 5530.12+531.51

**КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С  
МИНИМАЛЬНЫМ КЛАССИЧЕСКИМ И ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**Ю.Г. Игнатьев<sup>1</sup>, А.А. Агафонов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [ignatev-yurii@mail.ru](mailto:ignatev-yurii@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> [a.a.agathonov@gmail.com](mailto:a.a.agathonov@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*На основе качественного анализа космологических моделей с классическими и фантомными скалярными полями с самодействием произведена классификация особых точек динамических систем.*

**Ключевые слова:** космологические модели, классическое и фантомное скалярное поле, качественный анализ.

**1. Введение**

Стандартные космологические модели (СКМ), основанные на классическом скалярном поле, были исследованы методами качественного анализа динамических систем в работах [1], [2], [3], [4], [5], [6]. В работах одного из Авторов неминимальная теория скалярного взаимодействия на основе понятия фундаментального скалярного заряда последовательно развивалась, как для классических, так и фантомных скалярных полей [7], [8], [9], [10]. Указанные исследования показывают необходимость исследования фантомных скалярных полей в качестве возможной основы космологической модели ранней Вселенной.

В настоящей работе в соответствии с общепринятой терминологией мы будем называть фантомными скалярные поля с отрицательным кинетическим членом в тензоре энергии-импульса независимо от знака потенциального члена. При этом фантомным скалярным полям с притяжением одноименно заряженных частиц соответствует отрицательный потенциальный член в тензоре энергии - импульса, а фантомным полям с отталкиванием - положительный потенциальный член. В первом случае знаки кинетического и потенциального члена совпадают, во втором - противоположны, что эквивалентно изменению знака массивного члена в уравнении Клейна - Гордона. Соответствующие решения для уединенного скалярного за-

ряда принимают не форму потенциала Юкавы, а форму решений уравнений скалярных возмущений Лифшица для сферической симметрии ( $\sin kr/r$ ).

В настоящей работе мы ограничимся классификацией особых точек динамических систем космологических моделей с минимальным классическим и фантомным скалярным взаимодействием.

## 2. Основные соотношения космологической модели, основанной на скалярном поле

### 2.1. Уравнения поля

Функция Лагранжа скалярного поля  $\Phi$  с самодействием имеет вид:

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - 2V(\Phi) \right), \quad (1)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left( \Phi^2 - \epsilon_2 \frac{m^2}{\alpha} \right)^2, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – константа самодействия,  $m$  – масса квантов скалярного поля; для классического скалярного поля  $\epsilon_1 = 1$ , для фантомного скалярного поля  $\epsilon_1 = -1$ . Далее потенциальная энергия,  $U$ , определяется выражением:

$$\begin{aligned} 4\pi U = \epsilon_1 V(\Phi) &\equiv -\alpha\epsilon_1 \frac{\Phi^4}{4} + \epsilon_1\epsilon_2 \frac{m^2\Phi^2}{2} - \epsilon_1 \frac{m^4}{4\alpha} \\ \Rightarrow 4\pi U &= -\alpha\epsilon_1 \frac{\Phi^4}{4} + \epsilon_1\epsilon_2 \frac{m^2\Phi^2}{2} + \text{Const}, \end{aligned} \quad (3)$$

так что

$$U(-\alpha, -\epsilon_1, -\epsilon_2, \pm\Phi) \equiv U(\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2, \pm\Phi); \quad (4)$$

$$U(\alpha, -\epsilon_1, \epsilon_2, \Phi) \equiv -U(\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2, \pm\Phi); \quad (5)$$

$$U(-\alpha, \epsilon_1, -\epsilon_2, \Phi) \equiv -U(\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2, \pm\Phi). \quad (6)$$

Аддитивную константу в потенциальной функции можно отбросить, поэтому в пределе малой константы самодействия имеем «массивный член» в Лагранжиане (1)

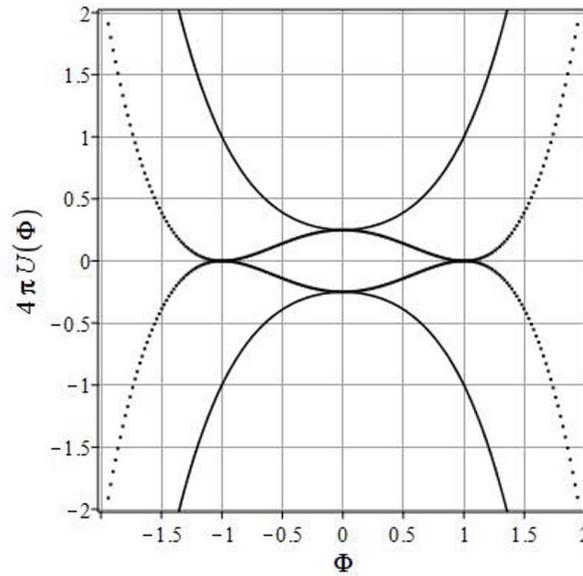
$$U = \epsilon_1\epsilon_2 \frac{m^2\Phi^2}{16\pi}, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Таким образом, в этом смысле, условно можно выделить следующие случаи:

1.  $\epsilon_1\epsilon_2 = 1$  – скалярное поле с отталкиванием;
2.  $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$  – скалярное поле с притяжением.

Тензор энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (1) принимает стандартный вид:

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( 2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + 2V(\Phi) g_{ik} \right). \quad (7)$$



**Рис. 1.** Графики потенциальной энергии  $4\pi U(\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2, \Phi)$ . Две сливающиеся пары парабол (точечные линии): верхние –  $4\pi U(1, -1, -1, \Phi)$ ;  $4\pi U(-1, 1, 1, \Phi)$  – случай отталкивания и нижние –  $4\pi U(1, 1, -1, \Phi)$ ;  $4\pi U(-1, -1, 1, \Phi)$ , и две сливающиеся пары парабол с тремя экстремумами (сплошные линии): верхние –  $4\pi U(-1, -1, -1, x)$ ;  $4\pi U(1, 1, 1, x)$  и нижние –  $4\pi U(1, -1, 1, x)$ ;  $4\pi U(-1, 1, -1, x)$ . Верхние параболы соответствуют отталкиванию, нижние – притяжению.

Равенство нулю ковариантной дивергенции этого тензора приводит к уравнению свободного скалярного поля:

$$\square\Phi + V'(\Phi) = 0. \quad (8)$$

Поскольку к функции Лагранжа можно добавить произвольную постоянную<sup>1</sup>, в дальнейшем мы будем опускать соответствующую постоянную в потенциальной функции там, где это приводит к упрощениям. Такая перенормировка возвращает нас к исходной функции Лагранжа скалярного поля с самодействием, которой мы и будем пользоваться:

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \epsilon_2 m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right), \quad (9)$$

Тензор энергии – импульса относительно функции Лагранжа (7) равен

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( 2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + g_{ik} \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - g_{ik} \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right). \quad (10)$$

При использовании функции Лагранжа в форме (7) получим из (8):

$$\square\Phi + m_*^2 \Phi = 0, \quad (11)$$

где  $m_*$  – эффективная масса скалярного бозона

$$m_*^2 \equiv \epsilon_2 m^2 - \alpha \Phi^2, \quad (12)$$

<sup>1</sup> что приведет к перенормировке космологической постоянной

которая, в принципе, может быть и мнимой величиной.

Выпишем также уравнения Эйнштейна с космологическим членом<sup>2</sup>

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}, \quad (13)$$

где  $\lambda \geq 0$  – космологическая постоянная.

## 2.2. Уравнения космологической модели

Выпишем самосогласованную систему уравнений космологической модели, основанной на свободном скалярном поле и пространственно - плоской метрике Фрийдмана (10) – (11), полагая  $\Phi = \Phi(t)$ :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (14)$$

Указанная система состоит из одного уравнения Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \epsilon_1 \left( \dot{\Phi}^2 + \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \lambda \quad (15)$$

и уравнения скалярного поля:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_*^2 \Phi = 0, \quad (16)$$

где  $(\dot{f}) \equiv f d/dt$ . При этом тензор энергии – импульса (8) имеет структуру тензора энергии – импульса изотропной жидкости с плотностью энергии и давлением:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( \dot{\Phi}^2 + \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right); \\ p &= \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( \dot{\Phi}^2 - \epsilon_2 m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

так что:

$$\epsilon + p = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \dot{\Phi}^2.$$

В дальнейшем нам также понадобятся значения двух кинематических функций Вселенной Фрийдмана:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \geq 0; \quad \Omega(t) = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (18)$$

– постоянная Хаббла  $H(t)$  и инвариантное космологическое ускорение  $\Omega(t)$ , которое является инвариантом и выражается следующим образом с помощью коэффициента баротропы  $\kappa = p/\epsilon$ :

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa). \quad (19)$$

Дифференцируя (13) с учетом определения (18) и уравнения поля (16), найдем:

$$\dot{H} = -\epsilon_1 \dot{\Phi}^2. \quad (20)$$

Таким образом, для классических скалярных полей  $\dot{H} \leq 0$ , для фантомных скалярных полей  $\dot{H} \geq 0$ , поэтому для классических полей  $\Omega \leq 1$ , а для фантомных  $\Omega \geq 1$ .

<sup>2</sup> Мы используем планковскую систему единиц:  $G = c = \hbar = 1$ ; тензор Риччи получается сверткой первого и четвертого индексов  $R_{ik} = R^j_{ikj}$ ; метрика имеет сигнатуру  $(-1, -1, -1, +1)$ .

### 3. Качественный анализ

#### 3.1. Приведение системы уравнений к нормальному виду

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна (13) через функции  $\Phi, \dot{\Phi}$ , переходя к безразмерному комптоновскому времени:

$$mt = \tau; \quad (m \neq 0) \quad (21)$$

и проводя стандартную замену переменных  $\Phi' = Z(\tau)$  ( $f' \equiv df/d\tau$ ), приведем уравнение Эйнштейна (13) к безразмерному виду:

$$H_m'^2 = \frac{1}{3} \left[ \epsilon_1 \left( Z^2 + \epsilon_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 \right) + \lambda_m \right], \quad (22)$$

а уравнение поля (16) к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости  $\{\Phi, Z\}$ :

$$\begin{aligned} \Phi' &= Z; \\ Z' &= -\sqrt{3}Z \sqrt{\epsilon_1 \left( Z^2 + \epsilon_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 \right) + \lambda_m - \epsilon_2 \Phi + \alpha_m \Phi^3}, \end{aligned} \quad (23)$$

где введены обозначения:

$$\lambda_m \equiv \frac{\lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}.$$

При этом:

$$\frac{a'}{a} \equiv \Lambda' = H_m \equiv \frac{H}{m}; \quad \Omega = \frac{aa''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}, \quad (24)$$

где

$$\Lambda = \ln a(\tau). \quad (25)$$

Заметим, что в этих обозначениях все величины  $\Phi, Z, H_m, \alpha_m, \Omega, \tau$  являются безразмерными; время  $\tau$  при этом измеряется в комптоновских масштабах.

Таким образом, имеем автономную двумерную динамическую систему на фазовой плоскости  $\{\Phi, Z\}$ . Для приведения её к стандартным обозначениям качественной теории дифференциальных уравнений положим:

$$\begin{aligned} \Phi &= x; \quad Z = y; \\ P(x, y) &= y; \\ Q(x, y) &= -\sqrt{3}y \sqrt{\epsilon_1 \left( y^2 + \epsilon_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 \right) + \lambda_m - \epsilon_2 x + \alpha_m x^3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Соответствующая нормальная система уравнений в стандартных обозначениях имеет вид:

$$x' = P(x, y); \quad y' = Q(x, y). \quad (27)$$

Для того, чтобы система дифференциальных уравнений (22) (или (27)) имела вещественное решение, необходимо выполнение неравенства:

$$\epsilon_1 \left( y^2 + \epsilon_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 \right) + \lambda_m \geq 0. \quad (28)$$

### 3.2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются уравнениями (см., например, [3], [4]):

$$M: P(x, y) = 0; Q(x, y) = 0. \quad (29)$$

Поскольку согласно (26) и (27) в особых точках динамической системы всегда  $Z \equiv y = 0$ , получим для нахождения решений уравнение:

$$x(\epsilon_2 - \alpha_m x^2) = 0. \quad (30)$$

Заметим, что в особых точках исследуемой динамической системы согласно (20)

$$\dot{H} = 0, \quad (31)$$

поэтому все особые точки динамической системы лежат на инфляционной траектории  $\Omega = 1$ .

Далее, при любых значениях  $\alpha_m$  и  $\lambda_m \geq 0$  система алгебраических уравнений (25) всегда имеет тривиальное решение

$$x = 0; y = 0 \Rightarrow M_0(0, 0), \quad (32)$$

а при  $\epsilon_2 \alpha > 0$  – еще два симметричных:

$$x = x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \alpha_m}}; y = 0 \Rightarrow M_{\pm}(x_{\pm}, 0). \quad (33)$$

Подставляя решения (32) в условие (33), получим необходимое условие вещественности решений в особых точках (32) и (33):

$$(32) \rightarrow \lambda_m \geq 0; (33) \rightarrow \lambda_m + \frac{\epsilon_1}{2\alpha_m} \geq 0. \quad (34)$$

### 3.3. Характеристическое уравнение и качественный анализ в случае вблизи нулевой особой точки

Вычислим производные функций (26) в нулевой особой точке  $M_0$  (25) при  $\lambda_m \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{M_0} &= 0; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_0} &= 1; \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{M_0} &= -\epsilon_2; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_0} &= -\sqrt{3\lambda_m}. \end{aligned}$$

Матрица динамической системы в нулевой точке есть:

$$A_{M_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon_2 & 0 - \sqrt{3\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен:

$$\Delta_0 = \det(A)_{M_0} = \epsilon_2. \quad (35)$$

Таким образом, получаем характеристическое уравнение и его корни  $k_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -k & 1 \\ -\epsilon_2 & -k - \sqrt{3\lambda_m} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ & k_{\pm} = -\frac{\sqrt{3\lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\lambda_m - 4\epsilon_2}}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Как известно, произведение собственных чисел матрицы равно ее определителю:

$$k_1 k_2 = \det(A). \quad (37)$$

Поэтому знаки собственных чисел в нулевой точке вследствие (35) полностью определяются индексом  $\epsilon_2$ . Также легко увидеть, что собственные числа в нулевой особой точке вообще не зависят от константы самодействия, а также от характера поля (классическое/фантомное), т.е., от значения параметра  $\epsilon_1$ . Рассмотрим подробно все возможные случаи.

**Классическое поле с отталкиванием:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$  и фантомное поле с притяжением:  $\epsilon_1 = -1; \epsilon_2 = 1$**

Эти два случая идентичны в нулевой особой точке  $M_0$ . Здесь возможны 4 различные ситуации:

1а. *Случай нулевого значения космологической постоянной*

$$\lambda = 0 \rightarrow k = \pm i. \quad (38)$$

– Поскольку собственные числа оказались чисто мнимыми, то *единственная особая точка* (32) динамической системы (22) является центром (см. [3]). В этом случае при  $\tau \rightarrow +\infty$  фазовая траектория динамической системы наматывается на этот центр, совершая бесконечное множество витков.

1б. *Случай малого значения космологического члена:*

$$0 < \lambda_m < \frac{4}{3} \quad (39)$$

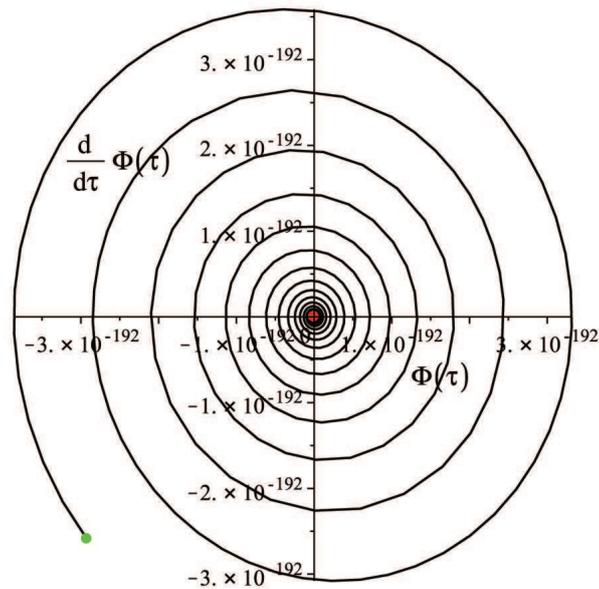
– тогда мы имеем два комплексно сопряженные собственные числа, причем

$$\Re(k) = -\frac{\sqrt{3\lambda_m}}{2} < 0. \quad (40)$$

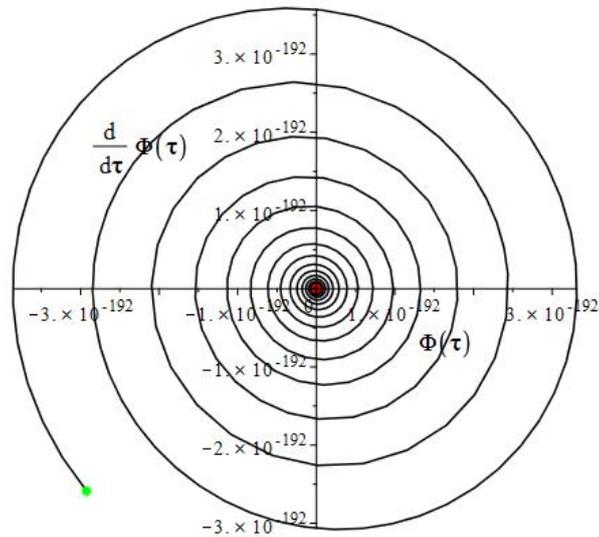
В этом случае согласно качественной теории дифференциальных уравнений точка  $M_0$  (32) является *притягивающим фокусом*, – все фазовые траектории динамической системы при  $\tau \rightarrow +\infty$  являются скручивающимися спиралями, наматывающимися на особую точку и совершающими при этом бесконечное количество витков. Этот случай, фактически, качественно совпадает с предыдущим (Рис. 2).

1с. *Случай большого значения космологического члена:*

$$\lambda_m > \frac{4}{3} \quad (41)$$



**Рис. 2.** Качественный вид фазовой траектории динамической системы (22) для классического скалярного поля при  $\lambda_m < 1$ . На этом рисунке  $\Delta\tau$  – характерное время падения скорости изменения потенциала до дна графика,  $Z_0 \approx -0.115$ ,  $\Delta t$  – характерное время падения величины потенциала с постоянной скоростью  $\Phi' \approx Z_0$ . После этого момента начинается накручивание фазовой траектории на нулевой притягивающий фокус/центр. При этом число витков спирали бесконечно.



**Рис. 3.** Фазовый портрет системы (22) на заключительном этапе в мелком масштабе для классического скалярного поля случае  $\alpha_m = 0$ ;  $\lambda_m = 0.001$ ;  $\tau = 9000 \div 10000$ ;  $\Phi(0) = 1$ ;  $Z(0) = 0$ . График получен с помощью метода интегрирования высокой точности Рунге - Кутты 7-8 порядков.

– тогда мы имеем два различных вещественных и согласно (36) отрицательных собственных числа  $k_1 \neq k_2$ ,  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ . В этом случае особая точка является *устойчивым притягивающим узлом*. При  $\tau \rightarrow +\infty$  все фазовые траектории динамической системы входят в особую точку, причем все траектории, кроме исключительных двух, при входе в особую точку касательны к собственному вектору  $\mathbf{u}_1$ , отвечающему ми-

нимальному по модулю собственному числу, т.е.,  $k_1$ . Две исключительные траектории касательны ко второму собственному вектору  $\mathbf{u}_2$ . Указанные собственные векторы равны:

$$\mathbf{u}_1 = (1, k_1); \quad \mathbf{u}_2 = (1, k_2). \quad (42)$$

Угол  $\phi$  между собственными векторами определяется соотношением:

$$\cos \phi \equiv \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{\sqrt{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2}} = \sqrt{\frac{4}{3\lambda_m}} < 1 \Rightarrow \phi > 0. \quad (43)$$

При очень больших значениях  $\lambda_m$  угол между собственными векторами стремится к  $\pi/2$ , при  $\lambda_m \rightarrow 4/3$  угол стремится к нулю.

1d. *Вырожденный случай:*

$$\lambda_m = \frac{4}{3} \quad (44)$$

– этот случай практически совпадает с предыдущим с учетом лишь того обстоятельства, что все траектории входят в особую точку касательно к единственному собственному вектору – это как раз и соответствует указанному выше предельному случаю  $\phi \rightarrow 0$ .

**Классическое поле с притяжением:  $\epsilon_1 = 1; \epsilon_2 = -1$  или фантомное поле с отталкиванием:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$**

В этом случае независимо от характера поля (классическое/фантомное) согласно (36) имеем 2 вещественные собственные значения с противоположными знаками. Таким образом, нулевая особая точка (32) в этом случае является *седлом*.

### 3.4. Характеристическое уравнение и качественный анализ вблизи ненулевой особой точки

Вычислим производные функций (26) в ненулевых особых точках  $M_{\pm}(x_{\pm}, 0)$  (33) при  $\lambda_m \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{M_{\pm}} &= 0; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_{\pm}} &= 1; \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{M_{\pm}} &= 2\epsilon_2; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_{\pm}} &= -\sqrt{3} \sqrt{\lambda_m + \frac{\epsilon_1}{2\alpha_m}}. \end{aligned}$$

Заметим, что вследствие условия (34) значения производных вещественны. Определитель матрицы динамической системы равен:

$$\Delta_{\pm} = \det(A)_{M_{\pm}} = -2\epsilon_2. \quad (45)$$

Таким образом, получаем корни характеристического уравнения  $k_{\pm}$ , которые совпадают для симметричных точек  $M_{\pm}$ :

$$k_{\pm} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ -\sqrt{\lambda_m + \frac{\epsilon_1}{2\alpha_m}} \pm \sqrt{\lambda_m + \frac{\epsilon_1}{2\alpha_m} + \frac{8\epsilon_2}{3}} \right], \quad (46)$$

так что:

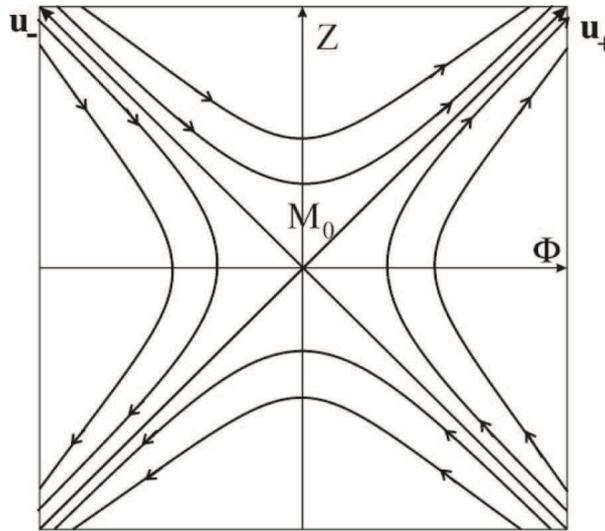
$$k_1 k_2 = -2\epsilon_2. \quad (47)$$

**Классическое поле с отталкиванием:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$  или фантомное поле с притяжением:  $\epsilon_1 = -1; \epsilon_2 = 1$**

Как следует из (33), симметричные особые точки в этом случае могут существовать только при  $\alpha > 0$ :

$$x_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Вследствие (34) подкоренное выражение в первом члене (46) строго больше нуля, кроме того, вследствие  $\epsilon_2 = +1$  подкоренное выражение во втором члене (46) больше подкоренного выражения в первом члене (46), поэтому оба собственных значения вещественны и противоположны по знаку. Таким образом, точки  $M_{\pm}$  в этом случае являются *неустойчивыми седловыми точками* при любом направлении времени (см. Рис. 4).



**Рис. 4.** Качественный вид фазовых траекторий динамической системы (22) в случае  $\epsilon_2 = +1$  в окрестности седловых особых точек  $M_{\pm}(x_{\pm}, 0)$ .

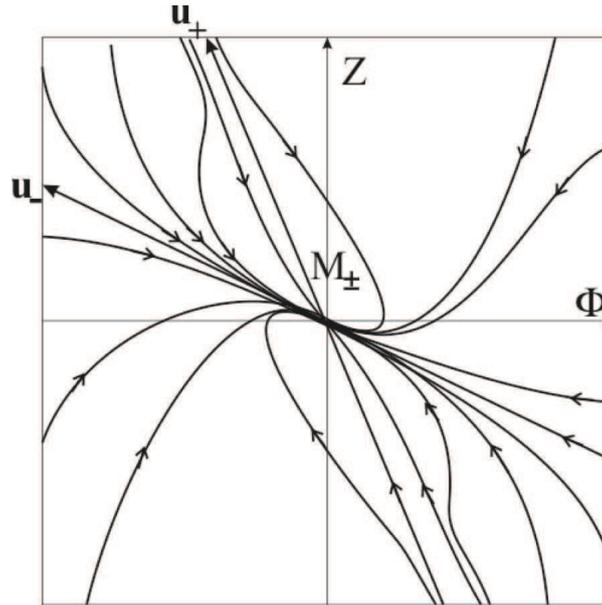
**Классическое поле с притяжением:  $\epsilon_1 = 1; \epsilon_2 = -1$  или фантомное поле с отталкиванием:  $\epsilon_1 = -1; \epsilon_2 = -1$**

Вследствие (34) подкоренное выражение в первом члене (46) строго больше нуля, кроме того, вследствие  $\epsilon_2 = -1$  подкоренное выражение во втором члене (46) меньше подкоренного выражения в первом члене (46) и, вообще говоря, может быть и отрицательным.

Поэтому возможны три случая:

1)  $\lambda_m + \epsilon_1/2\alpha_m - 8/3 > 0$  – тогда оба собственных значения вещественны и отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих (устойчивых) невырожденных узла*. Все фазовые траектории в окрестности таких особых точек при  $t \rightarrow \infty$  входят в эти точки и кроме двух исключительных касаются собственного вектора минимальной длины (Рис. 5).

2)  $\lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 = 0$  – тогда оба собственных значения отрицательны и равны. В этом случае решение содержит *два симметричных вырожденных узла*.



**Рис. 5.** Качественный вид фазовых траекторий динамической системы (22) в случае  $\epsilon_2 = +1$  в окрестности устойчивого притягивающего узла.

3)  $\lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 < 0$  – тогда оба собственных значения комплексно сопряженные, причем их действительные части отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих фокуса*.

В случае двух симметричных фокусов легко найти предельное значение  $h_\infty$ , к которому стремится постоянная Хаббла при  $t \rightarrow \infty$ . Подставив координаты фокусов  $M_\pm(\pm 1/\sqrt{\alpha}, 0)$  в уравнение (21), получим:

$$H_m(\infty) = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m} \right)}. \quad (48)$$

## Литература

1. Белинский В.А. Инфляционные стадии в космологических моделях со скалярным полем / В.А. Белинский, Л.П. Гришук, Я.Б. Зельдович, И.М. Халатников // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89. – С. 346–354.
2. Долгов А.Д. Космология ранней Вселенной / А.Д. Долгов, Я.Б. Зельдович, М.В. Сажин. – Москва: МГУ, 1988. – 189 с.
3. Журавлев В.М. Двухкомпонентные космологические модели с переменным уравнением состояния вещества и тепловым равновесием компонент / В.М. Журавлев // ЖЭТФ. – 2001. – Т. 120, Вып. 5. – С. 1042–1061.
4. Urena-Lopez L.A. On the dynamics of a quadratic scalar field potential / L.A. Urena-Lopez, M.J. Reyes-Ibarra // arXiv:0709.3996v2 [astro-ph]. – 2009. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/0709.3996.pdf>
5. Zhuravlev V.M. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane / V.M. Zhuravlev, T.V. Podymova, E.A. Pereskokov // Grav. and Cosmol. – 2011. – Vol. 17, № 2. – P. 101–109.
6. Urena-Lopez L.A. Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields / L.A. Urena-Lopez // arXiv:1108.4712v2 [astro-ph.CO]. – 2012. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1108.4712.pdf>
7. Игнатьев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. III. Модель с притяжением одноименно заряженных скалярных частиц / Ю.Г. Игнатьев // Известия Вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 11. – С. 94–97.

8. Игнатъев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. I. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия / Ю.Г. Игнатъев // Известия Вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 2. – С. 36–40.
9. Игнатъев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. II. Формулировка математической модели / Ю.Г. Игнатъев // Известия Вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 5. – С. 71–78.
10. Игнатъев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казанский университет, 2013. – 316 с. – Режим доступа: [http://www.stfi.ru/archive\\_rus/2013\\_2\\_Ignatiev.pdf](http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf)
11. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
12. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия “Справочная математическая библиотека” / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1989. – Вып. 11. – 489 с.

#### QUALITATIVE ANALYSIS OF COSMOLOGICAL MODELS WITH A MINIMAL CLASSICAL AND PHANTOM SCALAR INTERACTION

Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov

*Based on the qualitative analysis of cosmological models with classical and phantom scalar fields with self-interaction the classification of singular points of dynamical systems.*

Keywords: cosmological models, classical and phantom scalar field, qualitative analysis.

УДК 5530.12+531.51

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СО СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А.А. Агафонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [a.a.agathonov@gmail.com](mailto:a.a.agathonov@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе рассмотрены результаты численного моделирования фазовых траекторий космологических моделей с минимальным классическим и фантомным скалярным взаимодействием.*

**Ключевые слова:** численное моделирование, качественный анализ, космологические модели.

В работах [1, 2, 3] был проведен предварительный качественный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. В настоящей работе мы разовьем и детализируем результаты численных исследований космологических моделей, основанных на классическом и фантомном скалярных полях.