Л.Л. Глазырина, М.Ф. Павлова

Задачи совместного движения поверхностных и подземных вод.

Монография

Издательство
Казанского федерального университета

2018

УДК 517.958:621.372.8
ББК 22.172
Д21

Печатается по рекомендации
ученого совета Института вычислительной
математики и информационных технологий
(протокол № 6 от 8 февраля 2018 г.)

Научный редактор —
доктор физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры вычислительной математики КФУ **Е.М. Федотов**
Рецензенты:
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры ПНТВМ ФГБОУ ВО КНИТУ
В.С. Желтухин;
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики КФУ **Е.В. Рунг**

Глазырина Л.Л.
Д21 **Задачи совместного движения поверхностных и подземных вод** /Л.Л. Глазырина, М.Ф. Павлова. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. — 168 с.

С помощью современных методов математической физики исследованы вопросы существования, единственности обобщенного решения, сходимости приближенных методов. Для научных работников в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

УДК 517.958:621.372.8
ББК 22.172

Оглавление

Предисловие

В монографии рассматривается система вырождающихся параболических уравнений с разной размерностью по пространственным переменным. Подобная задача возникает, например, при математическом описании совместного движения поверхностных и подземных вод (см., напр., [2], [3]). Согласно предлагаемой в этих работах модели, процесс неустановившегося совместного движения описывается нелинейным параболическим уравнением в пористой среде (уравнением Буссинеска) и уравнением диффузионных волн в канале (реке). Последнее получается из уравнений Сен–Венана, если пренебречь в них инерционными членами. Оно представляет собой нелинейное параболическое уравнение с двойным вырождением относительно уровня воды в реке. Термин "двойное вырождение"означает, что нелинейность и вырождение присутствуют и в пространственном операторе, и в параболической части.

Вопросы существования и единственности решения для аналогичных систем без вырождения в параболической части рассмотрены в работах [1]–[3]. При этих же предположениях в [5]–[7] исследованы разностные методы решения задачи совместного движения поверхностных и подземных вод.

В данной работе рассмотрен более общий случай, а именно, здесь предполагается, что уравнения и в пористой среде, и вдоль русла реки являются уравнениями с двойным вырождением. Основное внимание уделено исследованию корректности рассматриваемых задач, то есть доказательству теорем существования и единственности решения. Кроме того, на примере двух задач демонстрируются способы построения приближенных методов решения и возможность исследования их сходимости при минимальных предположениях о гладкости исходных данных.

Рассматривается также соответствующее вариационное неравенство. Возникающая при этом модель учитывает тот факт, что уровень жидкости (искомая функция) по физическому смыслу задачи не может опускаться ниже водонепроницаемого основания. Доказываются теоремы существования и единственности решения этого вариационного неравенства.

В первом параграфе первой главы приводится постановка задачи, описываются условия, необходимые для дальнейших исследований.

Следует отметить, что решение задачи ищется из класса обобщенных функций, который в литературе, как правило, называют усиленным пространством Соболева. Второй параграф этой главы содержит формулировку и доказательство вспомогательных результатов.

Вторая глава посвящена исследованию разрешимости рассматриваемых задач. В первом параграфе для задачи, описанной в первой главе, с помощью метода полудискретизации и метода Галеркина доказана теорема существования обобщенного решения. Второй параграф содержит две теоремы существования обобщенного решения вариационного неравенства. В первой теореме рассматривается случай, когда решение ищется из класса неотрицательных функций, во второй – в качестве ограничения выступает заданная функция, зависящая от x и от t. При доказательстве этих теорем используются методы полудискретизации и штрафа.

Третья глава содержит теоремы о единственности обобщенного решения. При получении этих результатов использована методика, разработанная немецким математиком Ф. Отто для доказательства единственности решения задач с двойным вырождением. В первом параграфе доказаны две теоремы единственности решения задачи, описанной в главе 1. В первой теореме рассматривается случай, когда граничное условие не зависит от переменной t. Это предположение существенно упрощает доказательство. Вторая теорема доказана в общем случае. Во втором параграфе доказана теорема единственности для вариационного неравенства. При этом предполагается, что функция ограничения не зависит от переменной t.

В четвертой главе рассматриваются приближенные методы решения задачи, описанной в главе 1. В первом параграфе в прямоугольной области строится и исследуется явная разностная схема. Во втором параграфе для произвольной ограниченной выпуклой области пространства R^2 с помощью метода полудискретизации по переменной t и метода конечных элементов по пространственным переменным строится конечно-разностная схема, доказывается ее сходимость к обобщенному решению.

Представленный здесь материал был опубликован ранее авторами в работах [19], [8]–[12] и неоднократно докладывался на семинарах кафедры вычислительной математики КФУ. Авторы выражают искреннюю благодарность участникам этих семинаров за полезные замечания и внимание к работе.

Глава 1
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. Постановка задачи, обозначения

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^2, внутри которой проведен разрез Π, делящий ее на две связные области, Γ — граница Ω, $\Omega_\Pi = \Omega \setminus \Pi$. В $Q_T = \Omega \times (0,T]$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу: в области $\Omega_\Pi \times (0,T]$ задано уравнение

$$\frac{\partial \varphi_1(u)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(a_i(x,u)\, k_i(x, \nabla u) \Big) = f_1, \tag{1.1}$$

в точках $(x,t) \in \Pi_T = \Pi \times (0,T]$ предполагаются выполненными следующие равенства

$$\frac{\partial \varphi_2(u)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\Big(a_\Pi(x,u) k_\Pi\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\Big)\Big) + \tag{1.2}$$

$$+ \Big[\sum_{i=1}^{2} a_i(x,u)\, k_i(x,\nabla u) \cos(n, x_i) \Big]_\Pi = f_2, \quad [u]_\Pi = 0,$$

начальные и краевые условия задаются в следующем виде

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega; \quad u\,|_{\Gamma\times(0,T]} = g(x,t). \tag{1.3}$$

Здесь $[\cdot]_\Pi$ — скачок функции при переходе через разрез Π, n — нормаль к Π, $\dfrac{\partial}{\partial s}$ — производная по направлению Π.

К виду (1.1)–(1.2) может быть приведена система уравнений, возникающая (см. [3]) при математическом описании процесса совместного движения поверхностных (русловых) и подземных (грунтовых) вод. Она содержит уравнение Буссинеска:

$$m\, \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div} \Big\{ k\, a(U-h)\, \nabla U \Big\} = f\,,\ x \in \Omega\,,$$

и диффузионный аналог уравнений Сен-Венана:

$$\frac{\partial\, \omega(s,U)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\Big\{ \psi(s,U)\, \varphi\Big(\frac{\partial U}{\partial s}\Big) \Big\} +$$

$$+\left[a(U-h)\,\frac{\partial U}{\partial n}\right]_{\Pi} = f\,,\; s\in\Pi, \quad [U]_{\Pi}=0.$$

В этом случае Ω соответствует области, в которой рассматривается процесс фильтрации грунтовых вод, разрез Π соответствует руслу реки или канала, вектор n — нормаль к Π; искомая функция U определяет высоту свободной поверхности воды над непроницаемым основанием h, $a(U-h)$ — заданная функция (в работе [3] — $a(U-h)=|U-h|^{p-2}$, $p>2$); m — пористость грунта, $\omega(s,U)$ — площадь поперечного сечения русла, занятого водой; функция ψ зависит от коэффициента шероховатости и гидравлического радиуса (отношения площади сечения к смоченному периметру русла), в [3] предполагается, что

$$0\;<\;\psi_0\;\leq\;\psi(s,\xi)\;\leq\;\psi_1 \qquad \forall\, s,\xi\in R^1, \quad \psi_0,\psi_1-\mathrm{const};$$

$$\varphi(\xi)=|\xi|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,\xi.$$

Сформулируем условия на коэффициенты уравнений (1.1)–(1.2). Будем предполагать, что функции $\varphi_i(\xi)$, $i=1,2,$ — абсолютно непрерывные, строго возрастающие, $\varphi_i(0)=0$, удовлетворяющие при любом $\xi\in R^1$, следующим неравенствам

$$b_{0i}\mid\xi\mid^{\alpha_i}-b_{1i}\leqslant\int\limits_0^{\xi}\varphi_i'(t)t\,dt\leqslant b_{2i}\mid\xi\mid^{\alpha_i}+b_{3i}, \tag{1.4}$$

$$\mid\varphi_i(\xi)\mid\leqslant b_{4i}\mid\xi\mid^{\alpha_i-1}+b_{5i}, \tag{1.5}$$

$$(\varphi_i'(\xi)\xi)'\geqslant 0, \tag{1.6}$$

при этом константы $\alpha_i>1$, b_{0i}, b_{2i}, b_{4i} — строго положительны, b_{1i}, b_{3i}, b_{5i} — неотрицательны, $i=1,2$. В дальнейшем будет использовано следующее обозначение

$$\Phi_i(\xi)\equiv\int\limits_0^{\xi}\varphi_i'(t)t\,dt\,. \tag{1.7}$$

Относительно функции $a_i(x,\xi_0)$, $k_i(x,\xi)$, $a_{\Pi}(x,\xi_0)$, $k_{\Pi}(x,\xi)$ предполагается, что они непрерывны по ξ_0 и ξ, измеримы по x и удовлетворяют при любых $x\in\Omega$, $\xi_0\in R^1$, ξ^1, ξ^2, $\xi\in R^2$ условиям

$$\beta_{01} \leqslant a_i(x,\xi_0) \leqslant \beta_{11}, \quad \beta_{02} \leqslant a_\Pi(x,\xi_0) \leqslant \beta_{12}, \tag{1.8}$$

$$\mid k_i(x,\xi) \mid \leqslant M_{01} \sum_{j=1}^{2} \mid \xi_j \mid^{p_1-1} + M_{11}, \tag{1.9}$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_j(x,\xi_0) k_j(x,\xi) \xi_j \geqslant M_{21} \sum_{j=1}^{2} \mid \xi_j \mid^{p_1} - M_{31}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_j(x,\xi_0)(k_j(x,\xi^1) - k_j(x,\xi^2))(\xi_j^1 - \xi_j^2) \geqslant 0, \tag{1.11}$$

$$\mid k_\Pi(\xi_0) \mid \leqslant M_{02} \mid \xi_0 \mid^{p_2-1} + M_{12}, \tag{1.12}$$

$$a_\Pi(x,\xi_0) k_\Pi(\xi_0)\xi_0 \geqslant M_{22} \mid \xi_0 \mid^{p_2} - M_{32}, \tag{1.13}$$

$$(k_\Pi(\xi^1) - k_\Pi(\xi^2))(\xi^1 - \xi^2) \geqslant 0 \quad \forall \xi^1, \xi^2 \in R^1. \tag{1.14}$$

При этом константы $p_i > 1$, β_{0i}, M_{0i}, M_{2i} — строго положительны, M_{1i}, M_{3i} — неотрицательны, $i = 1, 2$. Заметим, что из условий (1.8)–(1.14) следует, что пространственные операторы

$$Lu = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(a_i(x,u)\, k_i(x, \nabla u) \Big),$$

$$L_\Pi u = -\frac{\partial}{\partial s}\Big(a_\Pi(s,u) k_\Pi\big(s, \frac{\partial u}{\partial s}\big)\Big),$$

действующие из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$ в $W^{-1}_{p_1'}(\Omega)$ и из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)$ в $W^{-1}_{p_2'}(\Pi)$, являются непрерывными, коэрцитивными, ограниченными, монотонными по градиенту. Допускается вырождение операторов L и L_Π по ∇u и $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ соответственно.

Далее обозначим V, $V(0,T)$, $W(0,T)$ — банаховы пространства функций, полученные замыканием $C^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(0,T; C^\infty(\Omega))$ в следующих нормах

$$\|u\|_V = \|u\|_{W^1_{p_1}(\Omega)} + \|u\|_{W^1_{p_2}(\Pi)},$$

$$\|u\|_{V(0,T)} = \|u\|_{L_{p_1}(0,T;W^1_{p_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_{p_2}(0,T;W^1_{p_2}(\Pi))},$$

$$\|u\|_{W(0,T)} = \|u\|_{V(0,T)} +$$
$$+\|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))}.$$

Соответственно, $\overset{\circ}{V}$ ($\overset{\circ}{V}(0,T)$, $\overset{\circ}{W}(0,T)$) — замыкание гладких функций, финитных в Ω (Q_T) в соответствующей норме.

В [20]–[21] доказано, что пространство V совпадает с множеством функций, принадлежащих $W^1_{p_1}(\Omega)$ и имеющих след на Π из $W^1_{p_2}(\Pi)$. Аналогичный результат получен в [20]–[21] и для пространства $V(0,T)$. Отметим также, что в работе [15] изучались свойства пространства V при $p_1 = p_2 = 2$.

Пусть, далее, z — некоторый элемент из $V(0,T)$. Обозначим через $J(z(t))$ функционал, значение которого при $t \in [0,T]$ на элементах $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется по правилу

$$\langle J(z(t)), v\rangle_* =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_\Omega \varphi_1(z(t))v(x)dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(z(t))v(s)ds\Big),$$

здесь и в дальнейшем $\langle F, v\rangle_*$ — значение функционала $F \in (\overset{\circ}{V})^*$ на элементе $v \in \overset{\circ}{V}$.

Определение 1.1. *Функцию $u(x,t) \in W(0,T)$ такую, что*

$$u(x,t) - u^D(x,t) \in \overset{\circ}{W}(0,T),$$
$$u(x,0) = u_0(x) \text{ п. в. в } \Omega \text{ и на } \Pi,$$
$$\int\limits_0^T \langle J(u), \cdot \rangle_* dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{1.15}$$

назовем обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), *если для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ справедливо следующее интегральное тождество*

$$\int\limits_0^T \langle J(u), v\rangle_* dt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi a_\Pi(s,u)k_\Pi\big(s,\frac{\partial u}{\partial s}\big)\frac{\partial v}{\partial s}dsdt = \tag{1.16}$$

$$= \int\limits_0^T \langle f_1, v\rangle \, dt + \int\limits_0^T \langle f_2, v\rangle_\Pi \, dt,$$

здесь u^D *— продолжение функции* g *на* Q_T, $\langle f, w\rangle$ $\big(\langle f, w\rangle_\Pi\big)$ *— значение функционала* $f \in W^{-1}_{p_1'}(\Omega)$ $\big(f \in W^{-1}_{p_2'}(\Pi)\big)$ *на элементе* w *из пространства* $\overset{\circ}{V}$.

§ 2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем при исследовании задачи (1.1)–(1.3) нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. *Если* $\varphi(\xi)$ *— абсолютно непрерывная возрастающая функция, то для любых* ξ *и* η *из* R^1 *справедливо неравенство*

$$(\varphi(\xi) - \varphi(\eta))\xi \geqslant \Phi(\xi) - \Phi(\eta), \tag{2.1}$$

здесь

$$\Phi(\xi) \; = \int\limits_0^\xi \varphi'(z) \, dz.$$

Доказательство. Имеем

$$(\varphi(\xi) - \varphi(\eta))\xi = \xi \int\limits_\eta^\xi \varphi'(z) \, dz,$$

$$\Phi(\xi) - \Phi(\eta) = \int\limits_\eta^\xi \varphi'(z) z \, dz.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(\varphi(\xi) - \varphi(\eta))\xi - (\Phi(\xi) - \Phi(\eta)) = \int\limits_\eta^\xi \varphi'(z)(\xi - z) \, dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \varphi'(\eta + t(\xi - \eta))(1 - t)(\xi - \eta)^2 dz \; \geq \; 0\,,$$

так как φ возрастающая функция. Лемма доказана.

Лемма 2.1 *Пусть $\alpha \geqslant 2$, функция φ удовлетворяет условию*

$$b_0 \mid \xi \mid^{\alpha} - b_1 \leqslant \Phi(\xi) \leqslant b_2 \mid \xi \mid^{\alpha} + b_3, \tag{2.2}$$

и кроме того

$$\varphi'(\xi) \geqslant b_6 \mid \xi \mid^{\alpha-2}, \qquad b_6 > 0. \tag{2.3}$$

Тогда для любой постоянной $\theta > 1$ найдется константа $\bar{c} > 0$, такая, что для любых $\xi, \eta \in R^1$ справедливо неравенство

$$(\varphi(\xi) - \varphi(\eta))(\theta\xi - (\theta - 1)\eta) \geqslant \Phi(\xi) - \Phi(\eta) + \bar{c} \mid \xi - \eta \mid^{\alpha}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Покажем сначала, что можно выбрать постоянную $c > 0$, зависящую от θ, для которой будет справедливо следующее неравенство

$$(\varphi(\xi) - \varphi(\eta))(\theta\xi - (\theta - 1)\eta) \geqslant \tag{2.5}$$

$$\geqslant \Phi(\xi) - \Phi(\eta) + c\left(\mid \xi \mid^{(\alpha-2)/2} \xi - \mid \eta \mid^{(\alpha-2)/2} \eta\right)^2.$$

Пусть

$$I = (\varphi(\xi) - \varphi(\eta))(\theta\xi - (\theta - 1)\eta) - \Phi(\xi) + \Phi(\eta) -$$

$$-c\left(\mid \xi \mid^{(\alpha-2)/2} \xi - \mid \eta \mid^{(\alpha-2)/2} \eta\right)^2.$$

Для преобразования этого выражения воспользуемся следующими очевидными соотношениями

$$\varphi(\xi) - \varphi(\eta) = \int\limits_{\eta}^{\xi} \varphi'(z)dz = \int\limits_{0}^{1} \varphi'(\eta + t(\xi - \eta))(\xi - \eta)dt,$$

$$\Phi(\xi) - \Phi(\eta) = \int\limits_{\eta}^{\xi} \varphi'(z)zdz =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \varphi'(\eta + t(\xi - \eta))(\eta + t(\xi - \eta))(\xi - \eta)dt,$$

$$\mid \xi \mid^{(\alpha-2)/2} \xi - \mid \eta \mid^{(\alpha-2)/2} \eta = \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\eta}^{\xi} \mid z \mid^{(\alpha-2)/2} dz =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int\limits_0^1 \mid \eta + t(\xi - \eta) \mid^{\alpha - 2)/2} (\xi - \eta) dt.$$

В результате будем иметь

$$I = \int\limits_0^1 \varphi'(\eta + t(\xi - \eta))(\xi - \eta)^2(\theta - t)dt -$$

$$-c\frac{\alpha^2}{4} \int\limits_0^1 \Big(\mid \eta + t(\xi - \eta) \mid^{(\alpha-2)/2} (\xi - \eta) dt \Big)^2. \tag{2.6}$$

Воспользовавшись условием (2.3) и неравенством Гельдера, из (2.6) нетрудно получить

$$I \geqslant \int\limits_0^1 \mid \eta + t(\xi - \eta) \mid^{\alpha - 2} (b_6(\theta - t) - c\frac{\alpha^2}{4})(\xi - \eta)^2 dt.$$

Откуда следует, что $I \geqslant 0$, если

$$0 < c < \frac{4(\theta - 1)b_6}{\alpha^2}.$$

Таким образом, утверждение (2.5) доказано. Оценивая далее левую часть (2.5) с помощью неравенства

$$\mid \mid \xi \mid^q \xi - \mid \eta \ \mid^q \eta \mid \geqslant \frac{1}{2^q} \mid \xi - \eta \mid^{q+1}$$

при $q = (\alpha - 2)/2$, нетрудно показать, что (2.4) справедливо, если $\bar{c}$ удовлетворяет условию

$$0 < \bar{c} < \frac{4(\theta - 1)b_6}{\alpha^2 2^{(\alpha-2)/2}}\ .$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. [1)]*Пусть* $\{v_\delta^1\}$ *и* $\{v_\delta^2\}$ *— последовательности функций из* V, *для которых справедливы оценки*

$$\|v_\delta^i\|_V \leq \text{const}, \quad i = 1, 2, \tag{2.7}$$

[1)]Следующие две леммы являются аналогами лемм (1.8), (1.9) из [22].

$$\|v_\delta^i\|_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + \|v_\delta^i\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \le \mathrm{const}, \quad i = 1, 2, \tag{2.8}$$

и неравенство вида

$$\int\limits_\Omega (\varphi_1(v_\delta^2) - \varphi_1(v_\delta^1))(v_\delta^2 - v_\delta^1)dx +$$
$$+ \int\limits_\Pi (\varphi_1(v_\delta^2) - \varphi_1(v_\delta^1))(v_\delta^2 - v_\delta^1)dx \le \delta. \tag{2.9}$$

Тогда найдется функция $\nu(\delta)$ *такая, что* $\nu(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *и*

$$\int\limits_\Omega |\varphi_1(v_\delta^2) - \varphi_1(v_\delta^1)|dx \le \nu(\delta), \tag{2.10}$$

$$\int\limits_\Pi |\varphi_2(v_\delta^2) - \varphi_2(v_\delta^1)|dx \le \nu(\delta). \tag{2.11}$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда, очевидно, найдется подпоследовательность $\{\delta'\} \subset \{\delta\}$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} |\ \varphi_i(v_{\delta'}^2) - \varphi_i(v_{\delta'}^1)\ |\ dx\ \geqslant\ K\ > 0. \tag{2.12}$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей введено обозначение

$$\Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_2 = \Pi.$$

Поскольку для $\{v_{\delta'}^i\}$ имеют место оценки (2.7) и (2.8), то можно выбрать подпоследовательность слабо сходящуюся к некоторому элементу v^i в V, $L_{\alpha_1}(\Omega)$ и $L_{\alpha_2}(\Pi)$. Обозначим ее $\{v_{\delta_k}^i\}_{k=1}^\infty$. Из теоремы Реллиха следует, что

$$v_{\delta_k}^i \longrightarrow v^i \quad \text{в} \quad L_{p_1}(\Omega), \tag{2.13}$$
$$v_{\delta_k}^i \longrightarrow v^i \quad \text{в} \quad L_{p_2}(\Pi). \tag{2.14}$$

Поэтому найдется подпоследовательность (сохраним за ней то же обозначение) такая, что

$$v_{\delta_k}^i \longrightarrow v^i \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$v_{\delta_k}^i \longrightarrow v^i \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Pi.$$

В силу непрерывности функций $\varphi_i(\xi)$ из последних предельных соотношений получим

$$\varphi_1(v^i_{\delta_k}) \longrightarrow \varphi_1(v^i) \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.15}$$

$$\varphi_2(v^i_{\delta_k}) \longrightarrow \varphi_2(v^i) \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Pi. \tag{2.16}$$

Кроме того, из оценок (2.7), (2.8) и условий на рост функций φ_l следует равномерная ограниченность $\{\varphi_1(v^i_{\delta_k})\}$ в $L_{\alpha'_1}(\Omega)$ и $\{\varphi_2(v^i_{\delta_k})\}$ в $L_{\alpha'_2}(\Pi)$. Следовательно, существуют подпоследовательности, для которых выполнены соотношения

$$\varphi_1(v^i_{\delta_k}) \rightharpoonup \xi^i_1 \quad \text{в} \quad L_{\alpha'_1}(\Omega), \tag{2.17}$$

$$\varphi_2(v^i_{\delta_k}) \rightharpoonup \xi^i_2 \quad \text{в} \quad L_{\alpha'_2}(\Pi). \tag{2.18}$$

Ясно (см. [4]), что $\xi^i_1 = \varphi_1(v^i)$, $\xi^i_2 = \varphi_2(v^i)$.

Далее, из сотношений (2.15)–(2.18) вытекает сильная сходимость подпоследовательностей $\varphi_1(v^i_{\delta_k})$ и $\varphi_2(v^i_{\delta_k})$ в $L_1(\Omega)$ и $L_1(\Pi)$ соответственно. Воспользовавшись этим фактом, перейдем к пределу в неравенстве (2.12) при $\delta' = \delta_k \to 0$. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} |\ \varphi_i(v^2) - \varphi_i(v^1)\ |\, dx \geqslant K > 0. \tag{2.19}$$

Положим

$$P_R(z) = \min\left(1, \frac{R}{|\ z\ |}\right) z.$$

Используя (2.13)–(2.16), нетрудно убедиться в том, что последовательность $P_R(v^2_{\delta_k} - v^1_{\delta_k})$ сходится сильно в $L_{\alpha'_1}(\Omega)$ и $L_{\alpha'_2}(\Pi)$, поэтому

$$I \equiv \int\limits_{\Omega_l} (\varphi_l(v^2_{\delta_k}) - \varphi_l(v^1_{\delta_k})) P_R(v^2_{\delta_k} - v^1_{\delta_k})\, dx \longrightarrow \tag{2.20}$$

$$\longrightarrow \int\limits_{\Omega_l} (\varphi_l(v^2) - \varphi_l(v^1)) P_R(v^2 - v^1)\, dx, \quad l = 1, 2.$$

С другой стороны, по условию (2.9)

$$I \leqslant \int\limits_{\Omega_l} (\varphi_l(v^2_{\delta_k}) - \varphi_l(v^1_{\delta_k}))(v^2_{\delta_k} - v^1_{\delta_k})\, dx \leqslant \delta_k\,. \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) при $\delta_k \to 0$ получим

$$\int\limits_{\Omega_l} (\varphi_l(v^2) - \varphi_l(v^1)) P_R(v^2 - v^1)\, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство в силу строгой монотонности функций φ_l, возможно лишь при $v^1 = v^2$ почти всюду в Ω и Π, что противоречит неравенству (2.19). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность из $W(0,T)$, для которой имеют место предельные соотношения*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad V(0,T), \tag{2.22}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_\infty(0,T; L_{\alpha_1}(\Omega)), \tag{2.23}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_\infty(0,T; L_{\alpha_2}(\Pi)) \tag{2.24}$$

и, кроме того, при любом $\delta > 0$ справедливы оценки

$$\frac{1}{\delta} \int\limits_0^{T-\delta} \int\limits_{\Omega_i} \triangle\varphi_i(u_n(t))\, \triangle u_n(t)\, dxdt \leqslant c, \quad i = 1, 2, \tag{2.25}$$

здесь

$$\triangle u_n(t) = u_n(t+\delta) - u_n(t),$$
$$\triangle\varphi_i(u_n(t)) = \varphi_i(u_n(t+\delta)) - \varphi_i(u_n(t).$$

Тогда существует подпоследовательность $\{u_{n'}\}$ такая, что

$$\varphi_1(u_{n'}) \longrightarrow \varphi_1(u) \quad \text{в} \quad L_1(Q_T), \tag{2.26}$$

$$\varphi_2(u_{n'}) \longrightarrow \varphi_2(u) \quad \text{в} \quad L_1(\Pi_T). \tag{2.27}$$

Доказательство. Сначала докажем, что из (2.22)–(2.24) и оценки (2.25) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ_0 такое, что

$$I \equiv \int\limits_0^{T-\delta} \int\limits_{\Omega_i} \mid \triangle\varphi_i(u_n(t)) \mid dxdt < \varepsilon \quad \forall\delta \leqslant \delta_0. \tag{2.28}$$

Пусть $M > 0$,

$$E = \Bigg\{ t \in [0,T] \ : \quad \|u_n(t)\|_V +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\Omega_i}\triangle\varphi_i(u_n(t))\,\triangle u_n(t)\,dx\leqslant M\quad\forall n\Big\}.$$

Имеем

$$I_i\equiv\int\limits_{[0,T]\setminus E}\int\limits_{\Omega_i}|\,\triangle\varphi_i(u_n(t))\,|\;dxdt+$$

$$\int\limits_{E}\int\limits_{\Omega_i}|\,\triangle\varphi_i(u_n(t))\,|\;dxdt\equiv I_{i,1}+I_{i,2}\,,\quad i=1,2.$$

Заметим, что при $t\in[0,T]\setminus E$ последовательность $\{u_n(t)\}$ удовлетворяет условиям леммы 2.2, поэтому

$$I_{i,1}\leqslant\nu(M\delta)T.$$

С другой стороны, из (2.22) и (2.25) вытекает, что

$$\operatorname{mes}E\leqslant c/M. \tag{2.29}$$

Используя условия на рост функций φ_i, неравенства Гельдера и (2.29), нетрудно получить следующую цепочку неравенств:

$$I_{i,2}\leqslant\int\limits_{E}\int\limits_{\Omega_i}(|\,\varphi_i(u_n(t+\delta))\,|+|\,\varphi_i(u_n(t))\,|)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\mu_i\Big(\int\limits_{E}\int\limits_{\Omega_i}|\,\varphi_i(u_n(t+\delta))\,|^{\alpha_i'}\;dxdt\Big)^{1/\alpha_i'}+$$

$$+\mu_i\Big(\int\limits_{E}\int\limits_{\Omega_i}|\,\varphi_i(u_n(t))\,|^{\alpha_i'}\;dxdt\Big)^{1/\alpha_i'}\leqslant c_1(1/M)^{1/\alpha_i}\,,$$

здесь $\mu_i=(\operatorname{mes}E\operatorname{mes}\Omega_i)^{1/\alpha_i}$. В результате будем иметь

$$I\leqslant\nu(M\delta)T+c_1(1/M)^{1/\alpha_1}+c_1(1/M)^{1/\alpha_2}.$$

Очевидно, за счет выбора M и δ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, (2.28) имеет место.

Далее, определим функции $v_n(t)$ по правилу

$$v_n(t)=\begin{cases}u_n(t), & t\notin E,\\ 0, & t\in E.\end{cases}$$

Обозначим $t_i = i\delta$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_0^{T}\int\limits_{\Omega_l}\Big|\varphi_l(u_n(t)) - \sum_{i=1}^{N_\delta+1}\varphi_l(v_n(t_{i-1}+s))\chi^i(t)\Big|\,dxdtds =$$

$$= \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{N_\delta+1}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{\Omega_l}\Big|\varphi_l(u_n(t)) - \varphi_l(v_n(t+s))\Big|\,dxdtds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{\max(0,-s)}^{\min(T,T-s)}\int\limits_{\Omega_l}\Big|\varphi_l(u_n(t)) - \varphi_l(v_n(t+s))\Big|\,dtds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|s|\leqslant\delta}\int\limits_{\max(0,-s)}^{\min(T,T-s)}\int\limits_{\Omega_l}\Big|\varphi_l(u_n(t)) - \varphi_l(v_n(t+s))\Big|\,dxdt +$$

$$+\int\limits_{E}\int\limits_{\Omega_l}\Big|\varphi_l(u_n(t))\Big|\,dxdt \leqslant \varepsilon(\delta), \tag{2.30}$$

где N_δ — целая часть числа T/δ, χ^i - индикаторная функция отрезка $[t_{i-1}, t_i] \cap [0, T]$, $u_n(t) = v_n(t) = 0$ для $t > T$. Из (2.28), равномерной ограниченности $\varphi_l(u_n(t))$ в $L_\infty(0, T; L_{\alpha_l'}(\Omega_l))$ и оценки (2.29) следует, что правая часть неравенства (2.30) может быть сколь угодно малой. Поэтому найдется s_n, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_l} \mid \varphi_l(u_n(t)) - \sum_{i=1}^{N_\delta+1}\varphi_l(\zeta_n^i) \mid dxdt \leqslant \varepsilon(\delta). \tag{2.31}$$

Здесь $\zeta_n^i = z_n^i\chi^i(t),\ z_n^i = v_n(t_{i-1}+s_n)$. Рассмотрим множество функций вида

$$W_\delta = \left\{\sum_{i=1}^{N_\delta+1}\varphi_l(z_n^i)\chi_i(t)\right\}.$$

Согласно нееравеству (2.31) W_δ является ε — сетью для $\{\varphi_l(u_n)\}$ в пространстве $L_1(Q_{lT})$, где

$$Q_{lT} = \Omega_l \times (0, T), \quad l = 1, 2.$$

Докажем, что W_δ компактно в $L_1(Q_{lT})$. Для этого, очевидно, достаточно доказать компактность $\{\varphi_l(z_n^i)\}$ в $L_1(\Omega_l)$. По построению функции $v_n(t)$ при любом $t \in [0, T]$ удовлетворяют условиям леммы 2.2, поэтому z_n^i будут ограничены в $W^1_{p_l}(\Omega_l)$, следовательно, можно выбрать подпоследовательность такую, что

$$z_n^i \longrightarrow z^i \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega_l,$$

соответственно

$$\varphi_l(z_n^i) \longrightarrow \varphi_l(z^i) \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega_l, \quad l = 1, 2.$$

Кроме того, нетрудно показать, что $\{\varphi_l(z_n^i)\}$ равномерно ограничена в $L_{\alpha'_l}(\Omega_l)$, поэтому можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в этом пространстве. Ясно, что ее предел совпадает с $\varphi_l(z^i)$, поэтому

$$\varphi_l(z_n^i) \longrightarrow \varphi_l(z^i) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega_l).$$

Таким образом, компактность W_δ, а, следовательно, и $\{\varphi_l(u_n)\}$ в $L_1(Q_{lT})$, доказаны. Пусть $\{u_{n'}\}$ — подпоследовательность такая, что

$$\varphi_l(u_{n'}) \longrightarrow \xi_l \quad \text{в} \quad L_1(Q_{lT}),$$

$$\varphi_l(u_{n'}) \longrightarrow \xi_l \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad Q_{lT}.$$

В силу строгой монотонности функций φ_l имеем

$$u_{n'} \longrightarrow \varphi_l^{-1}(\xi_l) \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega_{lT}, \quad l = 1, 2.$$

Сравнивая последнее соотношение и (2.22), заключаем, что $\xi_l = \varphi_l(u)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.4. *В случае кусочно-постоянной по переменной t функции $u \in W(0, T)$, такой, что*

$$u(x, t) = u(x, \bar{t}) \quad \forall t, \bar{t} \in [k\tau, (k+1)\tau), \tag{2.32}$$

где $\tau = T/M$, оценка (2.25) для функции u может заменена эквивалентным неравенством вида

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{M-k} \int\limits_{\Omega_i} \Delta\varphi_i(u(t_j))\, \Delta u(t_j)\, dx \leqslant \widetilde{c}, \tag{2.33}$$

справедливыми также при любых $i = 1, 2$ и целых $k \in [1, M-1]$. Здесь

$$\Delta\varphi_i(u(t_j)) \;=\; \varphi_i(u(t_{k+j})) - \varphi_i(u(t_j)),$$
$$\Delta u(t_j) \;=\; u(t_{k+j})) - u(t_j), \quad t_j = j\tau.$$

Доказательство. Установим, что из (2.33) следует неравенство (2.25). Заметим, что условия (2.32) позволяют переписать неравенства (2.33) в следующем виде

$$\frac{1}{k\tau}\int\limits_0^{T-k\tau}\int\limits_{\Omega_i}\Delta\varphi_i(u(t))\;\Delta u(t)\,dx\,dt\;\leqslant\;\widetilde{c}, \tag{2.34}$$

где

$$\Delta\varphi_i(u(t))\;=\;\varphi_i(u(t+k\tau))-\varphi_i(u(t)),$$
$$\Delta u(t)\;=\;u(t+k\tau)-u(t).$$

Докажем, что из (2.34) следует (2.25). Выберем произвольное число $\delta>0$. Найдем целое $\bar{k}$, принадлежащее множеству $[1,M-1]$, такое, что $\bar{k}<\delta<\bar{k}+1$. Рассмотрим случай, когда $\delta>\tau$. Заметим, что подынтегральная функция

$$I_i(t)=\int\limits_{\Omega_i}\bigl(\varphi_i(u(t+\delta))-\varphi_i(u(t))\bigr)\bigl(u(t+\delta)-u(t)\bigr)\,dx$$

является кусочно-постоянной функцией, причем для любого t из множества $[k\tau,k\tau+(\bar{k}+1)\tau-\delta)$

$$I_i(t)=\int\limits_{\Omega_i}\bigl(\varphi_i(u(\tilde{k}\tau))-\varphi_i(u(k\tau))\bigr)\bigl(u(\tilde{k}\tau)-u(k\tau)\bigr)\,dx\,,$$

и

$$I_i(t)=\int\limits_{\Omega_i}\bigl(\varphi_i(u(\tilde{\tilde{k}}\tau))-\varphi_i(u(k\tau))\bigr)\bigl(u(\tilde{\tilde{k}}\tau)-u(k\tau)\bigr)\,dx\,,$$

если $t\in[k\tau+(\bar{k}+1)\tau-\delta,(k+1)\tau)$, здесь $\tilde{k}=k+\bar{k}$, $\tilde{\tilde{k}}=k+\bar{k}+1$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{T-\delta}I_i(t)\,dt\;=\;\beta_1\sum_{k=0}^{N-\bar{k}-1}\int\limits_{\Omega_i}\bigl(\varphi_i(u(\tilde{k}\tau))-\\ -\varphi_i(u(k\tau))\bigr)\bigl(u(\tilde{k}\tau)-u(k\tau)\bigr)\,dx\,+ \qquad (2.35)\\ +\beta_2\sum_{k=0}^{N-\bar{k}-2}\int\limits_{\Omega_i}\bigl(\varphi_i(u(\tilde{\tilde{k}}\tau))-\varphi_i(u(k\tau))\bigr)\bigl(u(\tilde{\tilde{k}}\tau)-u(k\tau)\bigr)\,dx\,,\end{gathered}$$

где $\beta_1 = \dfrac{((\bar{k}+1)\tau - \delta)}{\delta}$, $\beta_2 = \dfrac{(\delta - \bar{k}\tau)}{\delta}$. Из (2.35), оценки (2.33) и монотонности функции φ получим

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{T-\delta} I_i(t)\,dt \leqslant \frac{((\bar{k}+1)\tau-\delta)}{\delta}\bar{k}\widetilde{c} + \frac{(\delta-\bar{k}\tau)}{\delta}(\bar{k}+1)\,\widetilde{c} = \widetilde{c}\,.$$

Пусть теперь $0 < \delta < \tau$. Тогда подинтегральная функция $I_i(t)$ на отрезках $[k\tau, (k+1)\tau - \delta]$, $k = 0, \dots, N-2$, обращается в нуль, а на отрезках $[(k+1)\tau - \delta, (k+1)\tau]$, $k = 0, \dots, N-1$, постоянна и равна

$$\int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u(k\tau+\tau)) - \varphi_i(u(k\tau))\big)\big(u(k\tau+\tau) - u(k\tau)\big)\,dx\,.$$

Используя оценку (2.34) и монотонность функции φ, получим

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{T-\delta} I_i(t)\,dt \leqslant \widetilde{c}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $\varphi_i(\xi)$ $(i = 1, 2)$ — абсолютно непрерывные, монотонно возрастающие функции, удовлетворяющие условиям* (1.4)–(1.6)*, функция v из пространства $W(0,T)$ такова, что*

$$v(x,0) \in L_{\alpha_1}(\Omega)\,, \quad v(x,0) \in L_{\alpha_2}(\Pi)\,,$$

$$\int\limits_0^T \langle J(v(t), \cdot\rangle_*\,dt \in \Big(\overset{\circ}{V}(0,T)\Big)^* \tag{2.36}$$

и существует функция $v^D \in W(0,T)$, для которой выполнены следующие соотношения

$$v - v^D \in \overset{\circ}{W}(0,T)\,,$$

$$\frac{\partial v^D}{\partial t} \in L_1(0,T; L_{\alpha_1}(\Omega))\,, \quad \frac{\partial v^D}{\partial t} \in L_1(0,T; L_{\alpha_2}(\Pi))\,,$$

$$v(x,0) - v^D(x,0) \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)\,.$$

Тогда справедливо следующее равенство

$$\int\limits_0^T \langle J(v(t)), v(t) - v^D(t)\rangle_* \, dt + \tag{2.37}$$

$$+ \int\limits_0^T \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big) \frac{\partial v^D(t)}{\partial t} \, dxdt +$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^T \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big) v^D(t) \, dxdt =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^T \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(t)) \, dxdt \, - \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(0)) \, dx \, .$$

Доказательство. Используя лемму 2.1, запишем неравенства

$$\Big(\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(t-\lambda))\Big)\Big(v(t) - v^D(t)\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \Phi_i(v(t)) - \Phi_i(v(t-\lambda)) - \tag{2.38}$$
$$-\Big(\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(t-\lambda))\Big) v^D(t),$$

$$\Big(\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(t-\lambda))\Big)\Big(v(t-\lambda) - v^D(t-\lambda)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_i(v(t)) - \Phi_i(v(t-\lambda)) - \tag{2.39}$$
$$-\Big(\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(t-\lambda))\Big) v^D(t-\lambda),$$

здесь $\Phi_i(v(t)) = \int\limits_0^{v(t)} \varphi_i'(\xi)\xi \, d\xi$, $i = 1, 2$. Продолжим функцию $v(t)$ и $v^D(t)$ на $[-\lambda, T]$, полагая $v(t) = v(0)$, $v^D(t) = v^D(0)$ при $t \in [-\lambda, 0]$. Неравенства (2.38), (2.39) поделим на λ, проинтегрируем по Ω_{iT} и, используя очевидные преобразования, запишем в виде

$$\frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^T \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(t)) \, dxdt \, - \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(0)) \, dx \, \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{i\bar{t}}(v(t))\Big\{v(t) - v^D(t)\Big\}\, dxdt +$$

$$+\frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big\} v^D(t)\, dxdt -$$

$$- \int\limits_0^{T-\lambda} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big\} (v^D(t))_{\bar{t}}\, dxdt\,, \tag{2.40}$$

$$\frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(t))\, dxdt - \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(0))\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{i\bar{t}}(v(t))\Big\{v(t-\lambda) - v^D(t-\lambda)\Big\}\, dxdt +$$

$$+\frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big\} v^D(t)\, dxdt -$$

$$- \int\limits_0^{T-\lambda} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big\} (v^D(t))_{\bar{t}}\, dxdt\,, \quad i = 1, 2. \tag{2.41}$$

Далее, просуммировав (2.40) и (2.41) по i , получим

$$\frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(t))\, dxdt - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(v(0))\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \langle G_\lambda(v), v(t) - v^D(t)\rangle_* + \tag{2.42}$$

$$+\frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big\} v^D(t)\, dxdt -$$

$$- \int\limits_0^{T-\lambda} \int\limits_{\Omega_i} \sum_{i=1}^{2} \Big\{\varphi_i(v(t)) - \varphi_i(v(0))\Big\} (v^D(t))_{\bar{t}}\, dxdt,$$

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(v(t))\,dxdt-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(v(0))\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\langle G_\lambda(v),v(t-\lambda)-v^D(t-\lambda)\rangle_*+\tag{2.43}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega_i}\Big\{\varphi_i(v(t))-\varphi_i(v(0))\Big\}v^D(t)\,dxdt-$$

$$-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\sum_{i=1}^{2}\Big\{\varphi_i(v(t))-\varphi_i(v(0))\Big\}(v^D(t))_{\bar t}\,dxdt.$$

Здесь $\{G_\lambda\}$ - последовательность функционалов, значения которых на элементе $z\in\overset{\circ}{V}(0,T)$ определено соотношением

$$\langle G_\lambda(v),z\rangle_*=\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\frac{\varphi_1(v(t))-\varphi_1(v(t-\lambda))}{\lambda}z(t)\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Pi}\frac{\varphi_2(v(t))-\varphi_2(v(t-\lambda))}{\lambda}z(t)\,dxdt.$$

Докажем, что

$$\|G_\lambda\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*}\leqslant\mathrm{const}.\tag{2.44}$$

Поскольку $v(t)=v(0)\ \ \forall t\in[-\lambda,0]$, то

$$\Big|\langle G_\lambda(v),z\rangle_*\Big|=\Big|\int\limits_{\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega}\frac{\varphi_1(v(t))-\varphi_1(v(t-\lambda))}{\lambda}z(t)\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\lambda}^{T}\int\limits_{\Pi}\frac{\varphi_2(v(t))-\varphi_2(v(t-\lambda))}{\lambda}z(t)\,dxdt\Big|.$$

Или

$$\Big|\langle G_\lambda(v),z\rangle_*\Big|=\Big|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda}^{T}\int\limits_{t-\lambda}^{t}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(\xi))z(t)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v(\xi))z(t)\,dx\Big\}\,d\xi dt\Big| = \Big|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda}^{T}\int\limits_{t-\lambda}^{t}\langle J(v(\xi))\,,\,z(t)\rangle_* d\xi dt\Big|.$$

Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Big|\langle G_\lambda(v),z\rangle_*\Big| = \Big|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda}^{T}\int\limits_{\max(\xi,\lambda)}^{\min(T,\xi+\lambda)}\langle J(v(\xi)),z(t)\rangle_*\,dtd\xi\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{0}^{T}\langle J(v(\xi)),\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\max(\xi,\lambda)}^{\min(T,\xi+\lambda)}z(t)\,dt\rangle_*\,d\xi\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|J(v)\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*}\Big\|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\max(\xi,\lambda)}^{\min(T,\xi+\lambda)}z(t)\,dt\Big\|_{V(0,T)}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\max(\xi,\lambda)}^{\min(T,\xi+\lambda)}z(t)\,dt\right\|_{V(0,T)} \leqslant c\,\|z(t)\|_{V(0,T)}.$$

Таким образом, оценка (2.44) доказана. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\lambda'\}\subset\{\lambda\}$ такая, что

$$G_{\lambda'} \rightharpoonup G \quad \text{в} \quad (\overset{\circ}{V}(0,T))^*. \tag{2.45}$$

Докажем, что

$$G = \int\limits_{0}^{T}\langle J(v(t))\,,\cdot\,\rangle_* dt. \tag{2.46}$$

Для этого запишем следующее легко проверяемое равенство

$$\langle G_\lambda(v),z\rangle_* = -\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(t))z_t\,dxdt -$$

$$-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v(t))z_t\,dxdt + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(t))z(t+\lambda)\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v(t))z(t+\lambda)\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(t))z(t+\lambda)\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v(t))z(t+\lambda)\,dxdt, \tag{2.47}$$

здесь $z\in C_0^\infty(Q_T)$. Ясно, что

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\varphi_i(v(t))z(t+\lambda)\,dxdt\;=0,\quad i=1,2. \tag{2.48}$$

Докажем, что

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{0}\Bigg(\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(t))z(t+\lambda)\,dx+$$

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{0}\Bigg(\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(t))z(t+\lambda)\,dx\;+\;\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v(t))z(t+\lambda)\,dx\Bigg)dt\;\to\;0 \tag{2.49}$$

при $\lambda\;\to\;0$. Поскольку, $v(t)\;=\;v(0)\;\forall t\;\in[-\lambda,0]$, а $z\in C_0^\infty(Q_T)$, то функция

$$\Psi(t)=\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v(0))z(t+\lambda)\,dx\;+\;\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v(0))z(t+\lambda)\,dx$$

непрерывна по t, следовательно, (2.49) имеет место. Далее, в равенстве (2.47), учитывая (2.45), (2.48), (2.49), перейдем к пределу при $\lambda\to 0$. В результате получим

$$\langle G,z\rangle_*\;=\;-\int\limits_{0}^{T}\Bigg(\int\limits_{\Omega}\varphi_1(v)\frac{\partial z}{\partial t}\,dx\;+\;\int\limits_{\Pi}\varphi_2(v)\frac{\partial z}{\partial t}\,dx\Bigg)\,dt.$$

Из последнего равенства следует (2.46). Используя это, перейдем к пределу при $\lambda\to 0$ в неравенствах (2.42), (2.43). Сравнивая полученные неравенства, нетрудно убедиться в справедливости (2.37). Лемма доказана.

Глава 2
ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

§ 1. Задача без ограничений

Теорема 1.1. *Пусть функции φ_i, a_i, k_i, a_Π, k_Π удовлетворяют условиям* (1.4)–(1.14) *главы* 1. *Тогда задача* (1.1)–(1.3) *главы* 1 *имеет хотя бы одно обобщенное решение из пространства* $W(0,T)$, *если*

$$f_i \in L_{p_i'}(0,T; W^{-1}_{p_i'}(\Omega_i)), \tag{1.1}$$

$$u_0 \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)\,, \quad u^D \in W(0,T), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u^D}{\partial t} \in L_{\alpha_1}(Q_T),\ \frac{\partial u^D}{\partial t} \in L_{\alpha_2}(\Pi_T)\,, \tag{1.3}$$

$$u_0 - u^D(0) \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)\,. \tag{1.4}$$

Доказательство. Обоснование теоремы проведем с помощью метода полудискретизации в сочетании с методом Фаэдо — Галеркина. Пусть $\overline{\omega}_\tau = \{0, \tau, 2\tau, ..., N\tau = T\}$, $\omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{0\}$, $\{z_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — линейно независимая система функций из $\overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, полная в этом пространстве. Приближенное решение задачи (1.16) главы 1 будем искать в виде

$$y_m(x,t) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\; c_i^{m\tau}(t)\; z_i(x) \;+\; u_\tau^D(x,t) \qquad \forall t \in \omega_\tau,$$

где $u_\tau^D(x,t) = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} u^D(x,\xi)\; d\xi$. Коэффициенты $c_i^{m\tau}(t)$ определяются из следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\int\limits_\Omega \varphi_{1\bar t}(y_m(t))\; z_k(x)\; dx \;+\; \langle L y_m(t)\,,\, z_k\rangle \;+$$

$$+\int\limits_{\Pi} \varphi_{2\bar{t}}(y_m(t))\, z_k(s)\, ds + \langle L_\Pi y_m(t)\,,\, z_k\rangle_\Pi =$$

$$= \langle f_{1\tau}\,,\, z_k\rangle + \langle f_{2\tau}\,,\, z_k\rangle_\Pi, \tag{1.5}$$

$$y_m(0) = u_{0m}(x), \quad k = \overline{1,m,} \quad t \in \omega_\tau.$$

Здесь

$$\langle f_{1\tau}\,,\, v\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle f_1(\xi)\,,\, v\rangle\, d\xi,$$

$$\langle f_{2\tau}\,,\, v\rangle_\Pi = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle f_2(\xi)\,,\, v\rangle_\Pi\, d\xi,$$

$u_{0m}(x)$ — проекция элемента $u_0(x)$ на множество функций вида

$$\Big\{\sum c_i^{m\tau}\, z_i(x) + u_\tau^D(x,0)\Big\}.$$

Разрешимость системы (1.5) нетрудно доказать с помощью топологической леммы Вишика (см., напр, [18], с. 66).

Лемма 1.1. *Если выполнены условия* (1.1)–(1.3), *то для любого* $t' \in \omega_\tau$ *имеют место следующие априорные оценки*

$$\|y_m(t')\|_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + \|y_m(t')\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \le c\,, \tag{1.6}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \Big\{\|y_m(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|y_m(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\Big\} \le c\,, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \Delta\varphi_i(y_m(t))\, \Delta y_m(t)\, dx \le c\,, \quad i = 1,2, \ \ 1 \le k \le N, \tag{1.8}$$

здесь

$$\Delta\varphi_i(y_m(t)) = \Big\{\varphi_i(y_m(t+k\tau)) - \varphi_i(y_m(t))\Big\},$$

$$\Delta y_m(t) = \Big\{y_m(t+k\tau) - y_m(t)\Big\}.$$

Доказательство. Равенства (1.5) умножим на $\tau c_k^{m\tau}$ и просуммируем по k от 1 до m, по t от τ до t'. В результате получим

$$\sum_{t=\tau}^{t'} \tau \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi_1(y_m(t)) - \varphi_1(y_m(t-\tau))}{\tau}\, y_m(t)\, dx +$$

$$+\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\int\limits_{\Pi}\frac{\varphi_2(y_m(t))-\varphi_2(y_m(t-\tau))}{\tau}\,y_m(t)\,ds\,+$$

$$+\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\langle Ly_m(t)\,,\,y_m(t)-u_\tau^D(t)\rangle\,+$$

$$+\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\langle L_\Pi y_m(t)\,,\,y_m(t)-u_\tau^D(t)\rangle_\Pi\;= \tag{1.9}$$

$$=\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\left\{\int\limits_{\Omega}\varphi_{1\bar t}(y_m)\,u_\tau^D(t)\,dx\;+\;\varphi_{2\bar t}(y_m)\,u_\tau^D(t)\,ds\right\}+$$

$$+\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\left\{\;\langle f_{1\tau}\,,\,y_m(t)-u_\tau^D(t)\rangle\;+\;\langle f_{2\tau}\,,\,y_m(t)-u_\tau^D(t)\rangle_\Pi\right\}.$$

Оценивая два первых слагаемых левой части равенства (1.9) с помощью (2.2) главы 1 и неравенства (см. лемму 2.1 главы 1)

$$(\varphi_i(\xi)-\varphi_i(\eta))\xi\;\geq\;\Phi_i(\xi)-\Phi_i(\eta)\quad\forall\xi,\eta\in R_1, \tag{1.10}$$

будем иметь

$$\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\int\limits_{\Omega_i}\frac{\varphi_i(y_m(t))-\varphi_i(y_m(t-\tau))}{\tau}y_m(t)\,dx\;\geq$$

$$\geq\sum_{t=\tau}^{t'}\int\limits_{\Omega_i}\Big\{\Phi_i(y_m(t))\;-\;\Phi_i(y_m(t-\tau))\Big\}\,dx\;=$$

$$=\int\limits_{\Omega_i}\Big\{\Phi_i(y_m(t'))\;-\;\Phi_i(y_m(0))\Big\}\,dx\;\geq \tag{1.11}$$

$$\geq\;b_{0i}\,\|y_m(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)}\;-\;b_{2i}\,\|u_{0m}\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)}\;-\;\mu,\quad i=1,2.$$

Здесь $\mu>0$ — постоянная, не зависящая от τ и m. Остальные слагаемые левой части (1.11) оценим, используя коэрцитивность операторов L и L_Π, условия (1.8), (1.9), неравенство Гельдера и ε-неравенство. В результате получим

$$\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\langle Ly_m(t)\,,\,y_m(t)-u_\tau^D(t)\rangle\;\geq \tag{1.12}$$

$$\geq \vartheta_1 \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|y_m(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} - \vartheta_2 \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|u^D_\tau(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} - \mu,$$

$$\sum_{t=\tau}^{t'} \tau \langle L_\Pi y_m(t)\,,\, y_m(t) - u^D_\tau(t)\rangle_\Pi \geq \tag{1.13}$$

$$\geq \vartheta_3 \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|y_m(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} - \vartheta_4 \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|u^D_\tau(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} - \mu,$$

где

$$\vartheta_1 = (M_{21} - \beta_{11} M_{01} \varepsilon^{p_1'}/p_1'),$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{p_1}\Big(M_{21} + \beta_{11} M_{01}\varepsilon^{-p_1} + \beta_{11} M_{11}\varepsilon^{p_1}\Big),$$

$$\vartheta_3 = (M_{22} - \beta_{12} M_{02} \varepsilon^{p_2'}/p_2'),$$

$$\vartheta_4 = \Big(M_{22} + \beta_{12} M_{02}\frac{1}{\varepsilon^{p_2} p_2} + \beta_{12} M_{12}\frac{\varepsilon^{p_2}}{p_2}\Big).$$

Используя (1.5), неравенство Гельдера и ε-неравенство, нетрудно проверить, что

$$\sum_{t=\tau}^{t'} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i(y_m(t)) - \varphi_i(y_m(t-\tau))}{\tau}\, u^D_\tau(t)\, dx \leq \tag{1.14}$$

$$\leq \frac{\varepsilon^{\alpha_i'} b_{4i}}{\alpha_i'} \|y_m(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} + \frac{\varepsilon^{\alpha_i'} b_{4i}}{\alpha_i'} \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|y_m(t)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} +$$

$$+ \frac{b_{4i}}{\varepsilon^{\alpha_i}\alpha_i} \|u^D_\tau(t)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} + \frac{b_{4i}}{\varepsilon^{\alpha_i'}\alpha_i'} \sum_{t=\tau}^{t'} \|u^D_{\tau t}(t)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{\alpha_i'} b_{4i}}{\alpha_i'} \|u_{0m}(x)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)}, \quad i = 1, 2;$$

$$\sum_{t=\tau}^{t'} \tau\, \langle f_{1\tau}\,,\, y_m(t) - u^D_\tau(t)\rangle \leq \tag{1.15}$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon^{p_1'} p_1'} \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|f_{1\tau}\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)} + \frac{\varepsilon^{p_1}}{p_1} \sum_{t=\tau}^{t'} \tau \|y_m(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} +$$

$$+\frac{\varepsilon^{p_1}}{p_1}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|y_m(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}+\frac{\varepsilon^{p_1}}{p_1}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|u^D_\tau(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)};$$

$$\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\,\langle f_{2\tau}\,,\,y_m(t)-u^D_\tau(t)\rangle_\Pi\ \le \tag{1.16}$$

$$\le\frac{2}{\varepsilon^{p_2'}p_2'}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|f_{2\tau}\|^{p_2'}_{W^{-1}_{p_2'}(\Pi)}+\frac{\varepsilon^{p_2}}{p_2}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|y_m(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{p_2}}{p_2}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|u^D_\tau(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}.$$

Подставляя оценки (1.10)–(1.16) в (1.9), получим

$$(b_{01}-\varepsilon^{\alpha_1'}b_{41}/\alpha_1')\,\|y_m(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+$$

$$+\,(b_{02}-\varepsilon^{\alpha_2'}b_{42}/\alpha_2')\,\|y_m(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+$$

$$+\vartheta_1\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|y_m(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}+\vartheta_3\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|y_m(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon^{\alpha_1'}b_{41}}{\alpha_1'}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|y_m(t-\tau)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{\alpha_2'}b_{42}}{\alpha_2'}\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\|y_m(t-\tau)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+$$

$$+\,c\,\Big\{\|u^D_\tau(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+\|u^D_\tau(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\|u_{0m}\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+$$

$$+\,\|u_{0m}\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\Big(\|u^D_\tau(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}+\|u^D_\tau(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+$$

$$+\,\|u^D_{\tau t}(t)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+\|u^D_{\tau t}(t)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+$$

$$+\,\|f_{1\tau}(t)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}+\|f_{2\tau}(t)\|^{p_2'}_{W^{-1}_{p_2'}(\Pi)}\Big)\Big\}.$$

Используя разностный аналог леммы Гроноулла (см. [18], с. 331) и очевидные неравенства

$$\sum_{t=\tau}^{t'}\tau\,\|u^D_\tau\|^{p_i}_{W^1_{p_i}(\Omega_i)}\ \le\ \|u^D\|^{p_i}_{L_{p_i}(0,T;W^1_{p_i}(\Omega_i))},$$

$$\|u^D_\tau\|_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} \;\le\; \|u^D\|_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)},$$

$$\sum_{t=\tau}^{t'} \tau\,\|u^D_{\tau t}\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega)} \;\le\; \left\|\frac{\partial u^D}{\partial t}\right\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega))},$$

$$\sum_{t=\tau}^{t'} \tau\,\|f_{i\tau}\|^{p'_i}_{W^{-1}_{p'_i}(\Omega_i)} \;\le\; \|f_i\|^{p'_i}_{L_{p'_i}(0,T;W^{-1}_{p'_i}(\Omega_i))}, \qquad i=1,2,$$

нетрудно получить оценки (1.6), (1.7). Докажем справедливость (1.8). С этой целью равенства (1.5) просуммируем по t' от $t+\tau$ до $t+k\tau$, где $k\in[1,N]$ — целое число. В результате для $l=1,2,\dots,m$ будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\int\limits_{\Omega} (\varphi_1(y_m(t+k\tau))-\varphi_1(y_m(t)))\,z_l\,dx \,+ \\
&+\frac{1}{\tau}\int\limits_{\Pi} (\varphi_2(y_m(t+k\tau))-\varphi_2(y_m(t)))\,z_l\,ds \,+ \\
&+\sum_{j=1}^{k}\Big\{\langle Ly_m(t+j\tau)\,,\,z_l\rangle \;+\; \langle L_\Pi y_m(t+j\tau)\,,\,z_l\rangle_\Pi\Big\} \;= \\
&=\;\sum_{j=1}^{k}\Big\{\langle f_{1\tau}(t+j\tau)\,,\,z_l\rangle \;+\; \langle f_{2\tau} y_m(t+j\tau)\,,\,z_l\rangle_\Pi\Big\}.
\end{aligned}\tag{1.17}$$

Умножив (1.17) на $\tau(c^{m\tau}_l(t+k\tau)-c^{m\tau}_l(t))$ и просуммировав по l от 1 до m, по $t\in\overline{\omega}_\tau$ от 0 до $T-k\tau$, получим равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega}\Delta\varphi_1(y_m(t))\,\Delta y_m(t)\,dx \,+ \\
&+\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Pi}\Delta\varphi_2(y_m(t))\,\Delta y_m(t)\,ds \;= \\
&=\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\left\{\sum_{j=1}^{k}\Big(-\langle Ly_m(t+j\tau)\,,\,v_{m\tau}\rangle \;-\; \langle L_\Pi y_m(t+j\tau)\,,\,v_{m\tau}\rangle_\Pi \,+\right. \\
&+\big\langle f_{1\tau}(t+j\tau)\,,\,v_{m\tau}\big\rangle + \big\langle f_{2\tau}(t+j\tau)\,,\,v_{m\tau}\big\rangle_\Pi\Big) \,+ \\
&+\frac{1}{\tau}\int\limits_{\Omega}\Delta\varphi_1(y_m(t))\,\Delta u^D_\tau(t)\,dx \,+
\end{aligned}\tag{1.18}$$

$$+\,\frac{1}{\tau}\int\limits_{\Omega}\;\Delta\varphi_1(y_m(t))\;\Delta u^D_\tau(t)\;dx\;+\;\frac{1}{\tau}\int\limits_{\Pi}\;\Delta\varphi_2(y_m(t))\;\Delta u^D_\tau(t)\;ds\;\Big\},$$

где

$$v_{m\tau}=\sum_{l=1}^{m}\big(c_l^{m\tau}(t+k\tau)-c_l^{m\tau}(t)\big)z_l\,,$$

$$\Delta\varphi_i(w(t))=\varphi_i(w(t+k\tau))-\varphi_i(w(t))\,,\quad i=1,2,$$

$$\Delta w(t)=w(t+k\tau)-w(t)\,.$$

Для оценки первого слагаемого правой части равенства (1.18) воспользуемся неравенствами (1.4), (1.5) главы 1 и неравенством Гельдера. В результате будем иметь

$$I\;\equiv\;\Big|\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\sum_{j=1}^{k}\;\tau\;\big\langle Ly_m(t+j\tau)\,,\,v_{m\tau}\big\rangle\Big|\;\le\;c\,I_1\,I_2\,,$$

где

$$I_1\;=\;1\;+\;\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\tau\|y_m(t+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\Big)^{1/p_1}\,,$$

$$I_2\;=\;\Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\tau\|y_m(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\Big)^{1/p_1}\;+$$

$$+\,\Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\tau\|u^D_\tau(t+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\Big)^{1/p_1}+\;\Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\tau\|u^D_\tau\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\Big)^{1/p_1}\,.$$

Из последнего неравенства и оценки (1.7) следует, что

$$I\;\le\;k\,c. \tag{1.19}$$

Аналогично доказывается справедливость оценок вида (1.19) для остальных слагаемых правой части (1.18). Таким образом, имеет место неравенство

$$\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\tau\int\limits_{\Omega}\;\Delta\varphi_1(y_m(t))\;\Delta y_m(t)\;dx\;+$$

$$+\,\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\;\tau\int\limits_{\Pi}\;\Delta\varphi_2(y_m(t))\;\Delta y_m(t)\;\;dx\;\le\;k\,c.$$

Из последнего неравенства и монотонности функций φ_i, $i = 1, 2$, вытекают оценки (1.8). Лемма доказана.

Обозначим далее $\Pi_\tau^- y$, $\Pi_\tau^+ y$ — кусочно-постоянные восполнения функции y по переменной t, определяемые следующим образом

$$\Pi_\tau^- w(t') = w(k\tau), \quad \text{если} \quad (k-1)\tau < t' \leqslant k\tau,$$

$$\Pi_\tau^+ w(t') = w(k\tau), \quad \text{если} \quad k\tau \leqslant t' < (k+1)\tau,$$

$\Lambda_\tau y$ — кусочно-линейное восполнение функции y по переменной t.

Из оценок (1.6), (1.7) следует равномерная по τ и m ограниченность последовательностей $\{\Pi^\pm y_m(t)\}$ и $\{\Lambda_\tau y_m(t)\}$ в пространствах $V(0,T)$, $L_\infty(0,T; L_{\alpha_1}(\Omega))$ и $L_\infty(0,T; L_{\alpha_2}(\Pi))$, поэтому найдутся функция u из $W(0,T)$ и последовательности $\{\tau'\}$, $\{m'\}$ такие, что

$$\Pi^\pm y_{m'}(t),\ \Lambda_{\tau'} y_{m'}(t) \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad V(0,T), \tag{1.20}$$

$$\Pi^\pm y_{m'}(t),\ \Lambda_{\tau'} y_{m'}(t) \rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T; L_{\alpha_1}(\Omega)), \tag{1.21}$$

$$\Pi^\pm y_{m'}(t),\ \Lambda_{\tau'} y_{m'}(t) \rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T; L_{\alpha_2}(\Pi)) \tag{1.22}$$

при $\tau' \to 0$, $m' \to \infty$. Кроме того, из лемм 2.3, 2.4 главы 1 следует существование подпоследовательностей $\{\tau''\}$, $\{m''\}$, для которых при $\tau'' \to 0$, $m'' \to \infty$ выполняются предельные соотношения

$$\Pi^+ \varphi_1(y_{m''}(t)) \to \varphi_1(u) \quad \text{п.в. в} \quad Q_T, \tag{1.23}$$

$$\Pi^+ \varphi_2(y_{m''}(t)) \to \varphi_2(u) \quad \text{п.в. в} \quad \Pi_T, \tag{1.24}$$

В силу непрерывности и взаимооднозначности функций φ_i, $i = 1, 2$, из (1.14), (1.24) следует

$$\Pi^+ y_{m''}(t) \to u \quad \text{п.в. в} \quad Q_T, \tag{1.25}$$

$$\Pi^+ y_{m''}(t) \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Pi_T. \tag{1.26}$$

И, наконец, условия (1.8)–(1.10), (1.12)–(1.13) главы 1 и оценка (1.7) обеспечивают существование подпоследовательностей $\{\tau'''\}$, $\{m'''\}$ и функций $\overline{K}_i$, $\overline{K}_\Pi$ таких, что

$$\Pi^\pm k_i(x, \nabla y_{m'''}) \rightharpoonup \overline{K}_i \quad \text{в} \quad L_{p_1'}(Q_T), \tag{1.27}$$

$$\Pi^\pm k_\Pi\left(s, \frac{\partial y_{m'''}}{\partial s}\right) \rightharpoonup \overline{K}_\Pi \quad \text{в} \quad L_{p_2'}(\Pi_T). \tag{1.28}$$

В дальнейшем подпоследовательности $\{\tau'''\}$, $\{m'''\}$, для которых справедливы (1.20)–(1.28), будем обозначать через $\{\tau\}$, $\{m\}$. Докажем, что функция u, определенная соотношениями (1.20), (1.21) является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3). Пусть функция $\eta(t) \in C^\infty(0,T)$ такова, что $\eta(T) = 0$. Обозначим $\eta_\tau(t)$ — сеточную функцию, полученную сносом в точки сетки $t \in \overline{\omega}_\tau$ функции $\eta(t)$. Каждое уравнение системы (1.5) умножим на $\tau\eta_\tau(t)$ и просуммируем по t от τ до T. Первое и третье слагаемое полученного равенства преобразуем с помощью формулы суммирования по частям. Используя кусочно-постоянные восполнения, запишем полученное равенство в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Pi^+ \varphi_1(\hat{y}_m(t))\, z_k\, \Pi^+ \eta_{\tau\bar{t}}\, dxdt \;-\; \int\limits_\Omega \varphi_1(u_{0m})\, z_k\, \eta(0)\, dx \;+ \\
+\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi^+ a_i(x,y_m)\, \Pi^+ k_i(x,\nabla y_m) \frac{\partial z_k}{\partial x_i}\, \Pi^+ \eta_\tau\, dxdt \;- \\
-\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Pi^+ \varphi_2(y_m(t))\, z_k\, \Pi^+ \eta_{\tau t}\, dsdt \;-\; \int\limits_\Pi \varphi_2(u_{0m})\, z_k\, \eta(0)\, ds \;+ \\
+\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Pi^+ a_\Pi(s,y_m)\, \Pi^+ k_\Pi\big(s, \frac{\partial y_m}{\partial s}\big)\, \frac{\partial z_k}{\partial s}\, \Pi^+ \eta_\tau\, dsdt \;= \\
= \int\limits_0^T \Pi^+ \big\langle f_{1\tau}\,,\, z_k \eta_\tau \big\rangle\, dt \;+\; \int\limits_0^T \Pi^+ \big\langle f_{2\tau}\,,\, z_k \eta_\tau \big\rangle_\Pi\, dt\,.
\end{gathered}
$$

Используя соотношения (1.20)–(1.28), в последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau \to 0$, $m \to \infty$. В результате будем иметь

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \varphi_1(u)\, z\, \frac{d\eta}{dt}\, dxdt \;-\; \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0)\, z\, \eta(0)\, dx \;+ \qquad (1.29) \\
+\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\, \overline{K}_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i}\, \eta\, dxdt \;-
\end{gathered}
$$

$$- \int_0^T \int_\Pi \varphi_2(u)\, z\, \frac{d\eta}{dt}\, ds dt \; - \int_\Pi \varphi_2(u_0)\, z\, \eta(0)\, ds \; +$$

$$+ \int_0^T \int_\Pi a_\Pi(s,u)\, \overline{K}_\Pi \frac{\partial z}{\partial s}\, \eta\, ds dt \; = \int_0^T \big\langle f_1\,,\, z\eta \big\rangle\, dt \; + \int_0^T \big\langle f_2\,,\, z\eta \big\rangle_\Pi\, dt,$$

где $z(x)$ — любая функция из $\{z_k(x)\}_{k=1}^\infty$. Из полноты этой системы в $\overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ следует справедливость (1.29) для произвольной функции $z(x) \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$. Полагая далее, что $\eta(t) \in C_0^\infty(0,T)$, запишем (1.29) в виде

$$- \int_0^T \Big\{ \int_\Omega \varphi_1(u)\, z\, dx \; + \int_\Pi \varphi_2(u)\, z\, ds \Big\} \frac{\partial \eta}{\partial t}\, dt \; = \tag{1.30}$$

$$= \int_0^T \Big\{ \big\langle f_1\,,\, z \big\rangle \; - \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\, \overline{K}_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx \Big\}\, \eta\, dt \; +$$

$$+ \int_0^T \Big\{ \big\langle f_2\,,\, z \big\rangle_\Pi \; - \int_\Pi a_\Pi(s,u)\, \overline{K}_\Pi \frac{\partial z}{\partial s}\, ds \Big\}\, \eta\, dt \; \equiv \int_0^T \big\langle G(t)\,,\, z \big\rangle_*\, \eta\, dt.$$

Из равенства (1.30) следует, во-первых, что

$$\langle G(t)\,,\, z \rangle_* \; = \; \frac{d}{dt} \Big\{ \int_\Omega \varphi_1(u) z\, dx \; + \int_\Pi \varphi_2(u) z\, dx \Big\} \; = \; \langle J(u(t))\,,\, z \rangle_*,$$

а, во-вторых, справедливость следующего включения

$$\int_0^T \langle J(u(t))\,, \cdot \rangle_*\, dt \; \in \; (\overset{\circ}{V}\, (0,T))^*.$$

Используя последнее соотношение, нетрудно доказать, что равенство

$$\int_0^T \langle J(u(t))\,,\, v \rangle_*\, dt \; = \int_0^T \Big\{ \big\langle f_1\,,\, v \big\rangle \; - \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\, \overline{K}_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \Big\}\, dt \; +$$

$$
+\int\limits_0^T \left[\langle f_2\,,\,v\rangle_{\Pi} \;-\; \int\limits_{\Pi} \; a_{\Pi}(s,u)\,\overline{K}_{\Pi}\,\frac{\partial v}{\partial s}\,ds \right] dt \tag{1.31}
$$

имеет место для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}(0,T)$. Докажем далее, что $u(x,0) = u_0(x)$. Для этого в (1.31) выберем $v(x,t) = z(x)\,\eta(t)$, $z(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta(t) \in C^\infty(0,T)$, $\eta(T) = 0$. Первые два слагаемые в (1.31) преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям. Сравнивая полученное равенство с (1.29), будем иметь

$$
\int\limits_{\Omega} \Big(\varphi_1(u(x,0)) - \varphi_1(u_0(x)) \Big) z(x)\eta(0)dx +
$$

$$
+\int\limits_{\Pi} \Big(\varphi_2(u(s,0)) - \varphi_2(u_0(s)) \Big) z(s)\eta(0)ds = 0.
$$

Из последнего равенства в силу произвольности $z(x)$ и взаимооднозначности функций φ_i, $i = 1,2$, следует, что $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что

$$
\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u)\,\overline{K}_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt \;+\; \int\limits_0^T \int\limits_{\Pi} a_{\Pi}(s,u)\,\overline{K}_{\Pi}\,\frac{\partial v}{\partial s}\,dsdt \;=
$$

$$
= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u)\,k_i(x,\nabla u)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt \,+
$$

$$
+\int\limits_0^T \int\limits_{\Pi} a_{\Pi}(s,u)\,k_{\Pi}\big(s,\frac{\partial u}{\partial s}\big)\,\frac{\partial v}{\partial s}\,dsdt. \tag{1.32}
$$

С этой целью рассмотрим следующее неравенство

$$
\int\limits_{\Omega} \frac{\varphi_1(y_m(t)) - \varphi_1(y_m(t-\tau))}{\tau}\,y_m(t)\,dx \,+
$$

$$
+\int\limits_{\Pi} \frac{\varphi_2(y_m(t)) - \varphi_2(y_m(t-\tau))}{\tau}\,y_m(t)\,ds \,+
$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, y_m) \Big\{ k_i(x, \nabla y_m) - k_i(x, \nabla v_{m\tau}) \Big\} \Big\{ \frac{\partial y_m}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{m\tau}}{\partial x_i} \Big\} \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} a_\Pi(s, y_m) \Big\{ k_\Pi\big(s, \frac{\partial y_m}{\partial s}\big) - k_\Pi\big(s, \frac{\partial v_{m\tau}}{\partial s}\big) \Big\} \Big\{ \frac{\partial y_m}{\partial s} - \frac{\partial v_{m\tau}}{\partial s} \Big\} \, ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau} \int\limits_{\Omega} \Big\{ \Phi_1(y_m(t)) - \Phi_1(y_m(t-\tau)) \Big\} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{\tau} \int\limits_{\Pi} \Big\{ \Phi_2(y_m(t)) - \Phi_2(y_m(t-\tau)) \Big\} \, ds. \tag{1.33}$$

Здесь $v_{m\tau}(t)$ — проекция при каждом $t \in \omega_\tau$ функции v из пространства $C^\infty(0, T; V \cap L_{\alpha_1}(\Omega))$ на множество

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{m} d_i z_i(x) + u_\tau^D(x, t) \Big\}.$$

Очевидно, что

$$\| v_{m\tau} - v \|_{W(0,T)} \to 0 \quad \text{при } \tau \to 0, \ m \to \infty.$$

Справедливость (1.33) следует из неравенств (1.8), (1.11) и (2.1) главы 1. Используя (1.5) и очевидные преобразования, запишем неравенство (1.33) в виде

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_{1\bar{t}}(y_m(t)) \, u_\tau^D(t) dx + \int\limits_{\Pi} \varphi_{2\bar{t}}(y_m(t)) \, u_\tau^D(t) ds +$$

$$+ \big\langle f_{1\tau} \, , \, y_m - u_\tau^D \big\rangle + \big\langle f_{2\tau} \, , \, y_m - u_\tau^D \big\rangle_\Pi +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, y_m) \, k_i(x, \nabla y_m) \Big(\frac{\partial u_\tau^D}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{m\tau}}{\partial x_i} \Big) \, dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, y_m) \, k_i(x, \nabla v_{m\tau}) \Big(\frac{\partial y_m}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{m\tau}}{\partial x_i} \Big) \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} a_\Pi(s, y_m) \, k_\Pi\big(s, \frac{\partial y_m}{\partial s}\big) \Big(\frac{\partial u_\tau^D}{\partial s} - \frac{\partial v_{m\tau}}{\partial s} \Big) \, ds -$$

$$-\int\limits_{\Pi} a_{\Pi}(s,y_m)\,k_{\Pi}\big(s,\frac{\partial v_{m\tau}}{\partial s}\big)\,\Big(\frac{\partial y_m}{\partial s}-\frac{\partial v_{m\tau}}{\partial s}\Big)\,ds\ \geq$$

$$\geq\ \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Omega}\big[\Phi_1(y_m(t))-\Phi_1(y_m(t-\tau))\big]\,dx+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_{\Pi}\big[\Phi_2(y_m(t))-\Phi_2(y_m(t-\tau))\big]\,ds. \qquad (1.34)$$

Два первых слагаемых в (1.34) преобразуем с помощью элементарного тождества

$$z_{\bar t}(t)v(t)=-z(t-\tau)v_{\bar t}(t-\tau)+\frac{1}{\tau}z(t)v(t)-\frac{1}{\tau}z(t-\tau)v(t-\tau).$$

Полученное неравенство с помощью кусочно-постоянных восполнений запишем для всех $t\in[0,T]$, предполагая при этом, что на интервале $(-\tau,0)$ функции $\Pi^+y_m(t)$, $\Pi^+u^D_\tau(t)$ равны $y_m(0)$ и $u^D_\tau(0)$ соответственно. Интегрируя результат по отрезку $[0,t_1]$, $t_1\in[0,T]$, получим

$$I_1\equiv-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega}\Pi^+\,\varphi_1(\hat y_m(t))\,\Pi^+u^D_{\tau t}dxdt+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\int\limits_{\Omega}\Pi^+\,\varphi_1(y_m(t))\,\Pi^+u^D_\tau dxdt-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\varphi_1(y_m(0))u^D_\tau(0)dx-\int\limits_{\Pi}\varphi_2(y_m(0))u^D_\tau(0)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Pi}\Pi^+\,\varphi_2(y_m(t))\,\Pi^+u^D_{\tau\bar t}dsdt+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\int\limits_{\Pi}\Pi^+\,\varphi_2(y_m(t))\,\Pi^+u^D_\tau dsdt+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\Pi^+\big\langle f_{1\tau}\,,\,y_m(t)-u^D_\tau\big\rangle dt\,+\int\limits_0^{t_1}\Pi^+\big\langle f_{2\tau}\,,\,y_m(t)-u^D_\tau\big\rangle dt+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Pi^+\Big\{a_i(x,y_m)\,k_i(x,\nabla y_m)\,\frac{\partial(u_\tau^D - v_{m\tau})}{\partial x_i}\Big\}\,dxdt -$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Pi^+\Big\{a_i(x,y_m)\,k_i(x,\nabla v_{m\tau})\frac{\partial(y_m - v_{m\tau})}{\partial x_i}\Big\}\,dxdt +$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi \Pi^+\Big\{a_\Pi(s,y_m)\,k_\Pi\big(\frac{\partial y_m}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(u_\tau^D - v_{m\tau})}{\partial s}\Big\}\,dsdt -$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi \Pi^+\Big\{a_\Pi(s,y_m)\,k_\Pi\big(\frac{\partial v_{m\tau}}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(y_m - v_{m\tau}}{\partial s}\Big\}\,dsdt\;\geq$$

$$\geq\;\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\;\int\limits_\Omega\;\Phi_1(\Pi^+ y_m(t))dxdt\;-\int\limits_\Omega\;\Phi_1(u_{0m})dx\;+$$

$$+\,\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\;\int\limits_\Omega\;\Phi_2(\Pi^+ y_m(t))dsdt\;-\int\limits_\Pi\;\Phi_2(u_{0m})ds.$$

Для оценки правой части полученного неравенства воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\int\limits_{\Omega_i}\;\Phi_i(\Pi^+ y_m(t))dxdt\;\geq\;\int\limits_{\Omega_i}\;\Phi_i(\Lambda_\tau y_m(t_1))\;dx\,,\quad i=1,2\,,\tag{1.35}$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, используя определения восполнений Π^+, Λ_τ и выпуклость функционалов Φ_i. В результате будем иметь

$$I_1\;\geq\;\int\limits_\Omega\;\Phi_1(\Lambda_\tau y_m(t_1))\;dx\;-\;\int\limits_\Omega\;\Phi_1(u_{0m}(x))\;dx,\;+$$

$$+\;\int\limits_\Pi\;\Phi_2(\Lambda_\tau y_m(t_1))\;ds\;-\;\int\limits_\Pi\;\Phi_2(u_{0m}(s))\;ds.\tag{1.36}$$

Учитывая соотношения (1.20)–(1.28) и неравенство (1.36), запишем следующее неравенство

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \varphi_1(u)\,\frac{\partial u^D}{\partial t}\,dxdt\;+\int\limits_\Omega \varphi_1(u(t_1))u^D(t_1)dx\,-\\
-\int\limits_\Omega \varphi_1(u(0))u^D(0)dx\;-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi \varphi_2(u)\,\frac{\partial u^D}{\partial t}\,dsdt\,+\\
+\int\limits_\Pi \varphi_2(u(t_1))u^D(t_1)ds\;-\int\limits_\Pi \varphi_2(u(0))u^D(0)ds\,+\\
+\int\limits_0^{t_1}\left\langle f_1\,,\,u-u^D\right\rangle dt\;+\int\limits_0^{t_1}\left\langle f_2\,,\,u-u^D\right\rangle_\Pi dt\,+\\
+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\,\overline{K}_i\left(\frac{\partial u^D_\tau}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dxdt\,-\\
-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\,k_i(x,\nabla u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dxdt\,+\\
+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi a_\Pi(s,u)\,\overline{K}_\Pi\left(\frac{\partial u^D}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\right)dsdt\,-\\
-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi a_\Pi(s,u)\,k_\Pi(\frac{\partial v}{\partial s})\left(\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\right)dsdt\;\geq\\
\geq\;\varliminf_{\tau\to 0}\int\limits_\Omega \Phi_1(\Lambda_\tau y_m(t_1))\,dx\;-\int\limits_\Omega \Phi_1(u_0(x))\,dx,\;+\\
+\;\varliminf_{\tau\to 0}\int\limits_\Pi \Phi_2(\Lambda_\tau y_m(t_1))\,ds\;-\int\limits_\Pi \Phi_2(u_0(s))\,ds.
\end{gathered}
$$

Из (1.31) и последнего неравенства для $v=u-u^D$ будем иметь

$$
I_2(t_1)\;\equiv\int\limits_0^{t_1}\langle J(u),u-u^D\rangle_*\,dt\,-
$$

$$
- \int_0^{t_1} \int_\Omega \varphi_1(u) \, \frac{\partial u^D}{\partial t} \, dxdt \; + \; \int_\Omega \varphi_1(u(t_1)) u^D(t_1) \, dx \; -
$$

$$
- \int_\Omega \varphi_1(u(0)) u^D(0) \, dx \; - \; \int_0^{t_1} \int_\Pi \varphi_2(u) \, \frac{\partial u^D}{\partial t} \, dsdt \; +
$$

$$
+ \int_\Pi \varphi_2(u(t_1)) u^D(t_1) \, ds \; - \; \int_\Pi \varphi_2(u(0)) u^D(0) \, ds \; +
$$

$$
+ \int_0^{t_1} \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u) \Big(\overline{K}_i - k_i(x, \nabla v) \Big) \, \frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} \, dxdt \; +
$$

$$
+ \int_0^{t_1} \int_\Pi a_\Pi(s,u) \Big(\overline{K}_\Pi - k_\Pi \big(\frac{\partial v}{\partial s} \big) \Big) \, \frac{\partial (u-v)}{\partial s} \, dsdt \; \geq
$$

$$
\geq \; \underline{\lim}_{\tau \to 0} \int_\Omega \Phi_1(\Lambda_\tau y_m(t_1)) \, dx \; - \; \int_\Omega \Phi_1(u_0(x)) \, dx \; +
$$

$$
+ \; \underline{\lim}_{\tau \to 0} \int_\Pi \Phi_2(\Lambda_\tau y_m(t_1)) \, ds \; - \; \int_\Pi \Phi_2(u_0(s)) \, ds. \tag{1.37}
$$

Интегрируя неравенство (1.37) по t_1 от $T-\lambda$ до T, где $\lambda > 0$, получим

$$
\int_{T-\lambda}^{T} I_2(t_1) \, dt_1 \; \geq \; \int_{T-\lambda}^{T} \; \underline{\lim}_{\tau \to 0} \int_\Omega \; \Phi_1(\Lambda_\tau y_m(t_1)) \, dxdt_1 \; + \tag{1.38}
$$

$$
+ \int_{T-\lambda}^{T} \underline{\lim}_{\tau \to 0} \int_\Pi \Phi_2(\Lambda_\tau y_m(t_1)) \, dsdt_1 - \lambda \int_\Omega \Phi_1(u_0(x)) \, dx - \; \lambda \int_\Pi \Phi_2(u_0) \, ds.
$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционалов

$$
\int_{T-\lambda}^{T} \; \int_{\Omega_i} \; \Phi_i(\xi) \, dxdt, \qquad i = 1, 2,
$$

на пространстве $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$ следует, что

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T} \varliminf_{\tau\to 0} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(\Lambda_\tau y_m(t_1))\,dxdt_1 \ \geq$$

$$\geq \int\limits_{T-\lambda}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(u(t_1))\,dxdt_1, \ \ i=1,2.$$

Используя эту оценку и неравенство (1.38) нетрудно получить

$$\int\limits_0^T \left\langle J(u), u-u^D \right\rangle_* dt \ - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \varphi_1(u)\,\frac{\partial u^D}{\partial t}\,dxdt \, -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \varphi_2(u)\frac{\partial u^D}{\partial t}\,dsdt \, - \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0)u^D(0)\,dx \, -$$

$$- \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0)u^D(0)\,ds \, + \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_\Omega \varphi_1(u)u^D(t)\,dxdt \, +$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_\Pi \varphi_2(u)u^D(t)\,dsdt \, +$$

$$+ \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u)\left(\overline{K}_i - k_i(x,\nabla v)\right)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dxdt \, +$$

$$+ \int\limits_0^T\int\limits_\Pi a_\Pi(s,u)\left(\overline{K}_\Pi - k_\Pi\big(s,\frac{\partial v}{\partial s}\big)\right)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,dsdt \ \geq$$

$$\geq \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\left(\int\limits_\Omega \Phi_1(u)dx \, - \int\limits_\Pi \Phi_2(u)ds\right)dt \, -$$

$$- \int\limits_\Omega \Phi_1(u_0)\,dx \, - \int\limits_\Pi \Phi_2(u_0)\,ds. \qquad (1.39)$$

Учитывая равенство (2.37) главы 1, из (1.39) будем иметь

$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u)\left(\overline{K}_i - k_i(x,\nabla u)\right)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Pi a_\Pi(s,u)\left(\overline{K}_\Pi - k_\Pi\big(s,\frac{\partial v}{\partial s}\big)\right)\ \frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,dsdt\ \geq$$

$$\geq\ \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^t\ \int_\Omega \varphi_1(u_0)\,\frac{\partial u^D}{\partial t}(t')\,dxdt'\,dt +$$

$$+\int_\Omega \varphi_1(u_0)u^D(0)\,dx\ -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_\Omega \varphi_1(u_0)u^D(t)\ dxdt +$$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^t\ \int_\Pi \varphi_2(u_0)\frac{\partial u^D}{\partial t}(t')dsdt'\,dt - \tag{1.40}$$

$$-\lim_{\lambda\to 0}\ \frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_\Omega \varphi_2(u_0)u^D(t)\,dsdt\ +\int_\Pi\ \varphi_2(u_0)u^D(0)\,ds\ =\ 0.$$

Далее стандартным образом (см., напр., [14]) доказывается, что из (1.40) следует равенство (1.32). Теорема доказана.

§ 2. Задача с ограничением

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию

$$u \in K = \left\{ v \in \overset{\circ}{W} (0,T) : v(x,t) \geqslant 0 \ \text{ п.в. в } \ Q \ \text{ и на } \ \Pi_T \right\}. \tag{2.1}$$

такую, что

$$\int\limits_0^T \langle J(u), \cdot \rangle_* \, dt \ \in \ (\overset{\circ}{V} (0,T))^*, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п.в. в } \Omega \quad \text{и на } \Pi\,, \tag{2.3}$$

и для любой $v \in K$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^T \Big\{ \langle J(u), u - v \rangle_* + \langle Lu, u - v \rangle + \tag{2.4}$$

$$+ \langle L_\Pi u, u - v \rangle_\Pi \Big\} dt \leqslant \int\limits_0^T \Big\{ \langle f_1, u - v \rangle + \langle f_2, u - v \rangle_\Pi \Big\} \, dt.$$

В этом параграфе предполагается, что коэффициенты a_i, k_i, a_Π, k_Π, и функции φ_i кроме перечисленных в параграфе 1 главы 1 условий удовлетворяют также следующим соотношениям

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x,\xi_0) k_i(x,\xi) \xi_i \ \geqslant \ 0, \quad \forall\, \xi_0 \in R_1, \ \xi \in R_2\,, \tag{2.5}$$

$$k_\Pi(x,\xi)\xi \ \geqslant \ 0, \quad \forall\, \xi \in R_1, \tag{2.6}$$

$$\varphi_i(0) \ = \ 0, \quad i = 1, 2\,. \tag{2.7}$$

Разрешимость задачи (2.2)–(2.4) исследуем с помощью методов штрафа и дискретизации по переменной t . Обозначим через β_i операторы штрафа, действующие из $L_q(\Omega_i)$ в $L_{q'}(\Omega_i)$ и определенные равенством

$$\beta_i v \ = \ -\,|\, v^- \,|^{q-2} v^-, \quad v^- = (|v| - v)/2\,, \ \ i = 1, 2.$$

Определение 2.1. *Решением полудискретной задачи назовем функцию* $y_\varepsilon(t) \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ *при любом* $t \in \bar{\omega}_\tau$, *такую, что*

$$y_\varepsilon(0) = u_0(x) \quad \text{п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi\,, \tag{2.8}$$

и для произвольной функции $v \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(\hat{y}_\varepsilon) - \varphi_1(y_\varepsilon)}{\tau} v\,dx + \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(\hat{y}_\varepsilon) - \varphi_2(y_\varepsilon)}{\tau} v\,ds +$$

$$+\langle L\hat{y}_\varepsilon, v\rangle + \langle L_\Pi \hat{y}_\varepsilon, v\rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta_1 \hat{y}_\varepsilon, v\rangle +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\langle \beta_2 \hat{y}_\varepsilon, v\rangle_\Pi = \langle f_{1\tau}, v\rangle + \langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi \quad \forall t \in \omega_\tau. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\langle f_{1\tau}, v\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle f_1(\xi), v\rangle\,d\xi,$$

$$\langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle f_2(\xi), v\rangle_\Pi\,d\xi,$$

$\varepsilon > 0$ — параметр штрафа. Разрешимость задачи (2.8)–(2.9) нетрудно доказать, используя, например, метод Галеркина.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega), \quad u_0(x) \geqslant 0 \text{ п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi,$$

$$f_1 \in L_{p_1'}(0,T; W^{-1}_{p_1'}(\Omega)), \quad f_2 \in L_{p_2'}(0,T; W^{-1}_{p_2'}(\Pi)).$$

Тогда для решения задачи (2.8)–(2.9) для любого $t' \in \omega_\tau$ *справедливы следующие априорные оценки*

$$\|y_\varepsilon(t')\|_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + \|y_\varepsilon(t')\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \leqslant \text{const}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau\Big\{\|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_1}(\Omega)} + \|y_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_2}(\Pi)}\Big\} \leqslant \text{const}, \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'} \tau\Big\{\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)}\Big\} \leqslant \text{const}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Запишем равенство (2.9) при $v = \hat{y}_\varepsilon(t)$, результат умножим на τ и просуммируем по t от 0 до $t' - \tau$. В итоге будем иметь

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi_1(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \varphi_1(y_\varepsilon(t))}{\tau} \hat{y}_\varepsilon(t)\, dx +
$$

$$
+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Pi} \frac{\varphi_2(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \varphi_2(y_\varepsilon(t))}{\tau} \hat{y}_\varepsilon(t)\, ds +
$$

$$
+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle L\hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle L_\Pi \hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle_\Pi +
$$

$$
+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle \beta_1 \hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle \beta_2 \hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle_\Pi =
$$

$$
= \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle f_{1\tau}, \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle f_{2\tau}, \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle_\Pi. \tag{2.13}
$$

Оценивая два первых слагаемых левой части равенства (2.13) с помощью неравенств (1.10) и (2.2) главы 1, получим

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \varphi_i(y_\varepsilon(t))}{\tau} \, \hat{y}_\varepsilon(t)\, dx \;\geqslant \tag{2.14}
$$

$$
\geqslant \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \left(\Phi_i(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \Phi_i(y_\varepsilon(t)) \right) dx \;\geqslant
$$

$$
\geqslant b_{0i} \| y_\varepsilon(t') \|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - b_{2i} \| u_0(x) \|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - (b_{1i} + b_{3i}) \operatorname{mes} \Omega_i.
$$

Далее, используя (1.9) и (1.12), запишем следующие неравенства

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle L\hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle \;\geqslant\; M_{21} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \| y_\varepsilon(t) \|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_1}(\Omega)} - M_{31}\, c, \tag{2.15}
$$

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\langle L_\Pi \hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t) \right\rangle_\Pi \;\geqslant\; M_{22} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \| y_\varepsilon(t) \|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_2}(\Pi)} - M_{32}\, c. \tag{2.16}
$$

Заметим также, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle\beta_i\hat{y}_\varepsilon(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_i=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega_i)},\qquad i=1,2. \tag{2.17}$$

Здесь и в дальнейшем $\langle\,,\,\rangle_1=\langle\,,\,\rangle$, $\langle\,,\,\rangle_2=\langle\,,\,\rangle_\Pi$. Правую часть (2.13) оценим с помощью неравенства Гельдера и ε- неравенства. В результате получим

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\langle f_{1\tau}(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}p_1'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}(t)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}+$$

$$+\frac{\varepsilon_1^{p_1}}{p_1}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_1}(\Omega)}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{2\tau}(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle\leqslant\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}p_2'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{p_2'}_{W^{-1}_{p_2'}(\Pi)}+$$

$$+\frac{\varepsilon_2^{p_2}}{p_2}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_2}(\Pi)}. \tag{2.19}$$

Используя (2.14)–(2.19) в (2.13), будем иметь

$$b_{01}\,\|y_\varepsilon(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+b_{02}\,\|y_\varepsilon(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\Big(M_{21}-\frac{\varepsilon_1^{p_1}}{p_1}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\,\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_1}(\Omega)}+$$

$$+\Big(M_{22}-\frac{\varepsilon_2^{p_2}}{p_2}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\,\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_2}(\Pi)}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau[\,\|\hat{y}_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)}+\|\hat{y}_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)}\,]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}p_1'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\,f_{1\tau}(t)\,\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}+\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}p_2'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\,f_{2\tau}(t)\,\|^{p_2'}_{W^{-1}_{p_2'}(\Pi)}+c\,t'.$$

Из последнего неравенства следуют оценки (2.10)–(2.12). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1, параметр* $q \leqslant p$, $p = \min\{ p_1, p_2 \}$ *и, кроме того,*

$$f_1 \in L_{q'}(Q_T)\,, \quad f_2 \in L_{q'}(\Pi_T)\,.$$

Тогда для решения задачи (2.8)–(2.9) для любого t' *из* ω_τ *имеет место оценка*

$$\frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \left(||y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)} \right) \leqslant c. \tag{2.20}$$

Доказательство. Равенство (2.9) при $v = -\hat{y}_\varepsilon^-(t)$ умножим на τ и просуммируем по t от 0 до $t' - \tau$. В результате будем иметь

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \varphi_1(y_\varepsilon(t))}{\tau} (-\hat{y}_\varepsilon^-(t))\, dx +$$

$$+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \varphi_2(y_\varepsilon(t))}{\tau} (-\hat{y}_\varepsilon^-(t))\, ds +$$

$$+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle L\hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle \,+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle L_\Pi \hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle \beta_1 \hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle \beta_2 \hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi \, =$$

$$= \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle f_{1\tau}, -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle \,+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle f_{2\tau}, -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi.$$

Убедимся далее в справедливости следующих неравенств

$$I_i \,\equiv \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(y_\varepsilon)\big)_t(t)\, (-\hat{y}_\varepsilon^-(t))\, dx \,\geqslant\, 0\,, \quad i = 1, 2. \tag{2.21}$$

Действительно, нетрудно проверить, что при $\varphi_i(0) = 0$ имеют место неравенства

$$(\varphi_i(\hat{y}_\varepsilon) - \varphi_i(y_\varepsilon))(-\hat{y}_\varepsilon^-) \,\geqslant\, \Phi_i(-\hat{y}_\varepsilon^-) - \Phi_i(-y_\varepsilon^-), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому
$$I_i \;\geqslant\; \Phi_i(-\hat{y}_\varepsilon^-(t')) - \Phi_i(-u_0^-(x)), \quad i = 1, 2\,.$$
Из этих неравенств, равенств $\Phi_i(-u_0^-) = 0,\ i = 1, 2,$ и неотрицательности Φ_i следует (2.21). Докажем далее, что
$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle L\hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle \;\geqslant\; 0. \tag{2.22}$$

Напомним (см., напр., [16] стр. 47), что $\hat{y}_\varepsilon^- \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega),$ если функция $\hat{y}_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega),$ причем
$$\frac{\partial \hat{y}_\varepsilon^-}{\partial x_i} = -\frac{\partial \hat{y}_\varepsilon}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega^-(t) = \Big\{x \in \Omega:\ \hat{y}_\varepsilon(x,t) < 0\Big\},$$
$$\frac{\partial \hat{y}_\varepsilon^-}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в } \Omega^+(t) = \Big\{x \in \Omega:\ \hat{y}_\varepsilon(x,t) \geq 0\Big\}.$$
Поэтому
$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle L\hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle =$$
$$= \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega^-} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, -\hat{y}_\varepsilon^-) k_i(x, -\nabla \hat{y}_\varepsilon^-)\, \frac{\partial(-\hat{y}_\varepsilon^-)}{\partial x_i}\, dx.$$
Из последнего равенства и условия (1.11) следует (2.22). Аналогично доказывается, что
$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle L_\Pi \hat{y}_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^-\rangle_\Pi \;\geqslant\; 0\,. \tag{2.23}$$

Отметим также, что
$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle \beta_1 \hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'} \tau \|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)}\,,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle \beta_2 \hat{y}_\varepsilon(t), -\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'} \tau \|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)}\,.$$

Из этих равенств и неравеств (2.21)–(2.23) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)} \leqslant \tag{2.24}$$

$$\leqslant \sum_{t=0}^{t'}\tau\,\|f_{1\tau}\|_{L_{q'}(\Omega)}\,\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Omega)} + \sum_{t=0}^{t'}\tau\,\|f_{2\tau}\|_{L_{q'}(\Pi)}\,\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Pi)}.$$

Умножая далее неравенство (2.24) на $1/\varepsilon^{q'-1}$ и преобразовывая результат с помощью неравенства Юнга, получим

$$\Big(1-\frac{\delta_1^q}{q}\Big)\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'}\tau\,\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Omega)} + \Big(1-\frac{\delta_2^q}{q}\Big)\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'}\tau\,\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Pi)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta_1^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'}\tau\,\|f_{1\tau}\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)} + \frac{1}{\delta_2^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'}\tau\,\|f_{2\tau}\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}.$$

Из последней оценки при $\delta_i^q < q$ следует (2.20). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда решение задачи (2.8)–(2.9) для любых* $k = 1,2,\cdots,N$, $i = 1,2$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega_i}\Delta\varphi_i(y_\varepsilon(t))\,\Delta y_\varepsilon(t)\;dx \leqslant c\,, \tag{2.25}$$

Здесь

$$\Delta\varphi_i(y_\varepsilon(t)) = \varphi_i(y_\varepsilon(t+k\tau)) - \varphi_i(y_\varepsilon(t))\,,$$
$$\Delta y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t)\,.$$

Доказательство. Равенство (2.9) просуммируем по t' от t до $t+(k-1)\tau$. В результате будем иметь

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_\Omega\Delta\varphi_1(y_\varepsilon(t))\;v(x)\,dx + \frac{1}{\tau}\int\limits_\Pi\Delta\varphi_2(y_\varepsilon(t))\;v(s)\,ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\Big\{\,\langle Ly_\varepsilon(t+j\tau),v(x)\rangle + \langle L_\Pi y_\varepsilon(t+j\tau),v(x)\rangle_\Pi +$$

$$
+\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_1 y_\varepsilon(t+j\tau), v(x)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_2 y_\varepsilon(t+j\tau), v(x)\rangle_\Pi\Big\} =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{k}\Big\{\langle f_{1\tau}(t+j\tau), v(x)\rangle + \langle f_{2\tau}(t+j\tau), v(x)\rangle_\Pi\Big\}.
$$

В этом равенстве положим $v = \Delta y_\varepsilon(t)$. Умножив его на τ и просуммировав по t от 0 до $T-k\tau$, получим равенство

$$
\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_\Omega \Delta\varphi_1(y_\varepsilon(t))\,\Delta y_\varepsilon(t)\;dx+
$$

$$
+\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_\Pi \Delta\varphi_2(y_\varepsilon(t))\,\Delta y_\varepsilon(t)\;ds \;= \tag{2.26}
$$

$$
= \sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\sum_{j=1}^{k}\Big\{-\langle Ly_\varepsilon(t+j\tau), \Delta y_\varepsilon(t)\,\rangle -
$$

$$
-\langle L_\Pi y_\varepsilon(t+j\tau), \Delta y_\varepsilon(t)\,\rangle_\Pi - \frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_1 y_\varepsilon(t+j\tau), \Delta y_\varepsilon(t)\,\rangle -
$$

$$
-\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_2 y_\varepsilon(t+j\tau), \Delta y_\varepsilon(t)\,\rangle_\Pi + \langle f_{1\tau}, \Delta y_\varepsilon(t)\,\rangle + \langle f_{2\tau}, \Delta y_\varepsilon(t)\,\rangle_\Pi\Big\}.
$$

Докажем, что правая часть в (2.26) ограничена величиной kc. Оценим для примера слагаемое

$$
I \equiv \frac{1}{\varepsilon}\Big|\sum_{t=0}^{T-k\tau}\sum_{j=1}^{k}\tau\langle\beta_1 y_\varepsilon(t+j\tau), y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t)\rangle\Big|.
$$

Очевидно, что

$$
\Big|\langle\beta_1 y_\varepsilon(t+j\tau), y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t)\rangle\Big| \leqslant
$$

$$
\leqslant \|\beta_1 y_\varepsilon(t+j\tau)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}\,\|y_\varepsilon(t+k\tau)\|^{p_1} +
$$

$$
+\|\beta_1 y_\varepsilon(t+j\tau)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}\,\|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}.
$$

Поэтому $I \leqslant I_1\,I_2$, где где

$$
I_1 \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\beta_1 y_\varepsilon(t+k\tau)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}\Big)^{1/p_1'},
$$

$$I_2 = \left(\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \, \|y_\varepsilon(t+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\right)^{1/p_1} + \left(\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \, \|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\right)^{1/p_1}.$$

Заметим, что из оценки (2.20) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \, \|\beta_1 y_\varepsilon(t+k\tau)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)}\right)^{1/p_1'} \le kc.$$

Из последнего неравенства и оценки (2.11) имеем: $I \leqslant k\,c$. Остальные слагаемые правой части (2.26) оцениваются аналогично. Строгое возрастание функций φ_i, $i=1,2$, и (2.26) обеспечивают справедливость (2.25). Лемма доказана.

Из (2.10), (2.11) вытекает, что последовательности $\{\Pi^{\pm} y_\varepsilon(t)\}$ и $\{\Lambda_\tau y_\varepsilon(t)\}$ равномерно ограничены по параметрам τ и ε в $\overset{\circ}{V}(0,T)$ и в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))$, а последовательности следов этих функций на Π равномерно ограничены в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$. Поэтому найдутся функция $u \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ и подпоследовательности $\{\tau'\}$, $\{\varepsilon'\}$ такие, что

$$\Pi^{\pm} y_{\varepsilon'}(t),\ \Lambda_{\tau'} y_{\varepsilon'}(t) \rightharpoonup u \quad \overset{\circ}{V}(0,T)\,, \tag{2.27}$$

$$\Pi^{\pm} y_{\varepsilon'}(t),\ \Lambda_{\tau'} y_{\varepsilon'}(t) \rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))\,, \tag{2.28}$$

$$\Pi^{\pm} y_{\varepsilon'}(t),\ \Lambda_{\tau'} y_{\varepsilon'}(t) \rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))\,. \tag{2.29}$$

Далее, по лемме 2.4 найдутся подпоследовательности $\{\tau''\}$, $\{\varepsilon''\}$, для которых при $\tau'', \varepsilon'' \to 0$ справедливы предельные соотношения

$$\Pi^{\pm}\varphi_1(y_{\varepsilon''}(t)) \ \to\ \varphi_1(u) \text{ в } L_1(Q_T)\,, \tag{2.30}$$

$$\Pi^{\pm}\varphi_2(y_{\varepsilon''}(t)) \ \to\ \varphi_2(u) \text{ в } L_1(\Pi_T)\,, \tag{2.31}$$

$$\Pi^{+} y_{\varepsilon''}(t) \ \to\ u \text{ п.в. в } Q_T \text{ и в } \Pi_T. \tag{2.32}$$

И, наконец, условия (1.9), (1.12) главы 1 и оценка (2.11) обеспечивают существование таких подпоследовательностей $\{\tau'''\}$, $\{\varepsilon'''\}$, что

$$\Pi^{\pm} k_i(x,\nabla y_{\varepsilon'''}) \ \rightharpoonup\ \overline{K}_i \text{ в } L_{p_1'}(Q_T)\,, \tag{2.33}$$

$$\Pi^{\pm} k_\Pi\big(s, \frac{\partial y_{\varepsilon'''}(t)}{\partial s}\big) \ \rightharpoonup\ \overline{K}_\Pi \text{ в } L_{p_2'}(\Pi_T)\,. \tag{2.34}$$

Последовательности $\{\tau'''\}$, $\{\varepsilon'''\}$ будем обозначать $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$. Докажем далее, что предельная функция u является решением задачи (2.2)–(2.4). Пусть $G_\tau(y_\varepsilon(t))$ — линейный функционал, значение которого на элементе $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется формулой

$$\langle G_\tau(y_\varepsilon), v\rangle_* = \int\limits_\Omega \varphi_{1t}(y_\varepsilon(x))v\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_{2t}(y_\varepsilon(s))v\,ds.$$

Убедимся, что последовательность $\{\Pi^+ G_\tau(y_\varepsilon(t))\}$ ограничена в пространстве $(\overset{\circ}{V}(0,T))^*$ равномерно по τ и ε. Имеем

$$\|\,\Pi^+ G_\tau(y_\varepsilon)\,\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*} = \sup_{v\in \overset{\circ}{V}(0,T)} \frac{J_1(y_\varepsilon\,,\,v)}{J_2(v)}\,,$$

где

$$J_1(y_\varepsilon, v) = \Big|\int\limits_0^T \langle \Pi^+(\varphi_1(y_\varepsilon))_t, v\rangle dt \int\limits_0^T \langle \Pi^+(\varphi_2(y_\varepsilon))_t, v\rangle_\Pi dt\Big|,$$

$$J_2(v) = \|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))}\,.$$

Учитывая, что $y_\varepsilon(t)$ является решением задачи (2.8)–(2.9), и полагая $\varphi_i(y_\varepsilon(t)) = \varphi_i(y_\varepsilon(T))\ \ \forall\, t \geq T,$ запишем равенство

$$\Big|\int\limits_0^T \langle\, \Pi^+(\varphi_1(y_\varepsilon))_t\,,\, v\rangle\,dt + \int\limits_0^T \langle\, \Pi^+(\varphi_2(y_\varepsilon))_t\,,\, v\rangle_\Pi\,dt\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\Big\{\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,\hat y_\varepsilon)k_i(x,\nabla\hat y_\varepsilon)\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \int\limits_\Pi a_\Pi(s,\hat y_\varepsilon)k_\Pi\big(s,\frac{\partial \hat y_\varepsilon}{\partial s}\big)\frac{\partial v_\tau}{\partial s}\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega \beta_1\hat y_\varepsilon\, v_\tau\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Pi \beta_2\hat y_\varepsilon\, v_\tau\,ds - \langle\, f_{1\tau},\, v_\tau\,\rangle - \langle\, f_{2\tau},\, v_\tau\,\rangle_\Pi\,\Big\}\Big|,$$

где $v_\tau = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int\limits_t^{t+\tau} v(x,t)\,dt.$ Каждое слагаемое правой части оценим сверху, используя неравенства Гельдера и условия (1.8), (1.9), (1.12) главы 1:

$$\Big|\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,\hat y_\varepsilon)k_i(x,\nabla\hat y_\varepsilon)\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant$$

$$+\ \beta_{11}\Big\{\, M_{11}\, T^{1/p_1'}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/p_1'} +$$

$$+\, M_{01}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\ \|y_\varepsilon(t)\ \|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\right)^{1/p_1'}\Bigg\}\,\|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))}\,,$$

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_{\Pi} a_\Pi(s,\hat y_\varepsilon)k_\Pi(\frac{\partial \hat y_\varepsilon}{\partial s})\,\frac{\partial v_\tau}{\partial s}\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant\ \beta_{12}\Big\{\, M_{12}\, T^{1/p_2'}\,(\mathrm{mes}\,\Pi)^{1/p_2'} +$$

$$+\, M_{02}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\ \|y_\varepsilon(t)\ \|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\right)^{1/p_2'}\Bigg\}\|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))}\,,$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_{\Omega_i}\beta_i\hat y_\varepsilon\, v_{i\tau}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\ \left(\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\ \|y^-_\varepsilon(t)\ \|^q_{L_q(\Omega_i)}\right)^{1/q'}\ \|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_i}(\Omega_i))}\,,$$

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle\, f_{i\tau},\, v_\tau\,\rangle_i\right| \leqslant \|\, f_i\,\|_{L_q(Q_{iT})}\|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_i}(\Omega_i))}\,,\quad i=1,2.$$

Напомним, что $Q_{1T} = Q_T$, $Q_{2T} = \Pi_T$. Полученные неравенства и оценки (2.11), (2.20) позволяют утверждать, что

$$\|\,\Pi^+G_\tau(y_\varepsilon)\,\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*}\ \leqslant\ c\,. \tag{2.35}$$

Из оценки (2.35) следует существование элемента G и последовательностей $\{\tau\}$ и $\{\varepsilon\}$, для которых выполнено соотношение

$$\Pi^+G_\tau(y_\varepsilon)\ \rightharpoonup\ G \quad (\overset{\circ}{V}\,(0,T))^* \quad \text{при } \tau,\varepsilon\to 0. \tag{2.36}$$

Выясним структуру предельного элемента G. Для этого, используя формулу суммирования по частям, запишем очевидное равенство

$$\int\limits_0^T\langle\Pi^+G_\tau(y_\varepsilon),\eta\rangle_*\,\Pi^+z_\tau\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \Pi^+(\varphi_1(y_\varepsilon))_t \eta dx + \int\limits_\Pi \Pi^+(\varphi_2(y_\varepsilon))_t \eta ds \Big\} \Pi^+ z_\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ - \int\limits_\Omega \Pi^+ \varphi_1(y_\varepsilon)\, \eta\, dx \, - \int\limits_\Pi \Pi^+ \varphi_2(y_\varepsilon)\, \eta\, ds \Big\} \Pi^+ z_{\tau \bar t}\, dt -$$

$$- \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x))\, \eta\, z_\tau(0)\, dx \, - \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(x))\, \eta\, z_\tau(0)\, ds,$$

где $\eta \in \overset{\circ}{V}$, z_τ — сеточная функция, полученная сносом в точки сетки $\overline{\omega}_\tau$ значений функции $z \in C^\infty(0,T)$ такой, что $z(T) = 0$. Учитывая (2.30), (2.31) и (2.36), в последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau, \varepsilon \to 0$. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^T \langle G, \eta \rangle_* z(t)\, dt = \tag{2.37}$$

$$= - \int\limits_0^T \Big[\int\limits_\Omega \varphi_1(u) \eta(x)\, dx \, + \int\limits_\Pi \varphi_2(u) \eta(s) ds \Big] \frac{dz}{dt}\, dt -$$

$$- \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x)) \eta(x) z(0)\, dx \, - \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(x)) \eta(s) z(0)\, ds.$$

Выбирая в (2.37) $z(t) \in C_0^\infty(0,T)$, получим равенство

$$\int\limits_0^T \langle G, \eta \rangle_* z(t)\, dt = \tag{2.38}$$

$$= - \int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \varphi_1(u) \eta(x)\, dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(u) \eta(s) ds \Big\} \frac{dz}{dt}\, dt.$$

Из (2.38) следует, что функция $\langle G, \eta \rangle_*$, принадлежащая $L_p(0,T)$, где $p = \min\{p_1, p_2\}$, является обобщенной производной функции

$$\Psi(t) \, = \int\limits_\Omega \varphi_1(u(x)) \eta(x)\, dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(u(s)) \eta(s) ds\, .$$

По определению функционала $J(u)$ (см. § 1 главы 1)

$$\langle J(u),\eta\rangle_* = \frac{d\Psi(t)}{dt},$$

поэтому для любой функции $z \in L_{p'}(0,T)$ имеет место равенство

$$\int_0^T \langle G,\eta\rangle_* z(t)\,dt = \int_0^T \frac{d\Psi(t)}{dt} z(t)\,dt = \int_0^T \langle J(u),\eta\rangle_*\, z(t)\,dt. \tag{2.39}$$

Докажем, что $u(x,0) = u_0(x)$. Для этого в (2.39) выберем функцию $z(t) \in C^\infty(0,T)$, $z(T) = 0$. Сравнивая полученное равенство с (2.37), будем иметь

$$\int_\Omega \Big(\varphi_1(u(x,0)) - \varphi_1(u_0(x))\Big)\eta(x)\,dx +$$

$$+ \int_\Pi \Big(\varphi_2(u(s,0)) - \varphi_2(u_0(s))\Big)\eta(s)\,ds \,=\, 0.$$

Из последнего равенства в силу произвольности η и взаимной однозначности функций $\varphi_i(u)$ следует $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π. Далее докажем, что функция $u(x,t) \in K$. Заметим, что из соотношения (2.32) и оценки (2.12) имеем

$$\Pi^+ y_\varepsilon^- \;\to\; u^- \quad \text{п.в.} \quad \text{в } Q_T \quad \text{и} \quad \text{в } \Pi_T, \tag{2.40}$$

$$\Pi^\pm y_\varepsilon^- \;\rightharpoonup\; 0 \quad \text{в} \quad L_q(Q_T), \tag{2.41}$$

$$\Pi^\pm y_\varepsilon^- \;\rightharpoonup\; 0 \quad \text{в} \quad L_q(\Pi_T). \tag{2.42}$$

Из (2.40)–(2.42) получаем (см. лемму 1.19 в [4]), что $u^- = 0$, то есть $u \in K$.

Теперь докажем, что функция u удовлетворяет неравенству (2.4). С этой целью в (2.9) выберем $v(x) = \hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau$, где z_τ — снос в точки сетки $\bar\omega_\tau$ функции $z \in C_0^\infty(Q_T)$, такой, что $z(x,t) \geqslant 0$ всюду в Q_T. Полученное равенство, используя кусочно-постоянные восполнения, запишем для произвольного $t \in [0,T]$. Интегрируя результат по отрезку $[0,t_1]$, получим

$$\int_0^{t_1} \Big\{ \int_\Omega \Pi^+\varphi_{1t}(y_\varepsilon)\,\Pi^+(\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)\,dx \,+\, \int_\Pi \Pi^+\varphi_{2t}(y_\varepsilon)\,\Pi^+(\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)\,ds +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Pi^{+}a_i(x,y_\varepsilon)\,\Pi^{+}k_i(x,\nabla y_\varepsilon)\,\Pi^{+}\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Pi}\Pi^{+}a_{\Pi}(s,\hat{y}_\varepsilon)\,\Pi^{+}k_{\Pi}\big(s,\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon}{\partial s}\big)\,\Pi^{+}\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial s}\,ds+ \tag{2.43}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi^{+}\beta_1\hat{y}_\varepsilon\,,\,\Pi^{+}(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle+\frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi^{+}\beta_2\hat{y}_\varepsilon\,,\,\Pi^{+}(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle_{\Pi}\Big\}\,dt\;=$$

$$=\int\limits_{0}^{t_1}\Big\{\langle\Pi^{+}f_{1\tau},\Pi^{+}(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle+\langle\Pi^{+}f_{2\tau},\Pi^{+}(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle_{\Pi}\Big\}\,dt.$$

Первые два слагаемые оценим, используя (1.10):

$$\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{\Omega_i}\Pi^{+}\varphi_{it}(y_\varepsilon)\,\Pi^{+}\hat{y}_\varepsilon\,dx\,dt\;\geqslant \tag{2.44}$$

$$\geqslant\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\Pi^{+}y_\varepsilon)\,dx\,dt-\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u_0)\,dx\;\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))\,dx-\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u_0(x))\,dx,\quad i=1,2.$$

Далее, воспользовавшись условиями (1.11), (1.14) главы 1, будем иметь

$$\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Pi^{+}\Big\{a_i(x,y_\varepsilon)\,k_i(x,\nabla y_\varepsilon)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big\}\,dx\,dt\;\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Pi^{+}\Big\{a_i(x,y_\varepsilon)k_i(x,\nabla z_\tau)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big\}dxdt, \tag{2.45}$$

$$\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{\Pi}\Pi^{+}\Big\{a_{\Pi}(s,\hat{y}_\varepsilon)\,k_{\Pi}\big(s,\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon}{\partial s}\big)\,\frac{\partial w}{\partial s}\Big\}\,ds\,dt\;\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{\Pi}\Pi^{+}\Big\{a_{\Pi}(s,\hat{y}_\varepsilon)\,k_{\Pi}\big(s,\frac{\partial\hat{z}_\tau}{\partial s}\big)\,\frac{\partial w}{\partial s}\Big\}\,ds\,dt\,, \tag{2.46}$$

здесь $w = \hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau$. Из монотонности операторов β_i и неотрицательности z_τ вытекают неравенства

$$\int\limits_0^{t_1} \frac{1}{\varepsilon}\langle \Pi^+\beta_i\hat{y}_\varepsilon, \Pi^+(\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)\rangle_i \, dt \;\geqslant\; 0. \tag{2.47}$$

Подставляя (2.44)–(2.47) в (2.43), получим

$$\int\limits_\Omega (\Phi_1(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1)) - \Phi_1(u_0(x)))\,dx + \int\limits_\Pi (\Phi_2(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1)) - \Phi_2(u_0(x)))\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi^+\Big\{a_i(x,y_\varepsilon)\,k_i(x,\nabla z_\tau)\,\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)}{\partial x_i}\Big\}\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi \Pi^+\Big\{a_\Pi(s,\hat{y}_\varepsilon)\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial \hat{z}_\tau}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)}{\partial s}\Big\}\,ds\,dt -$$

$$- \int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \Pi^+\Big\{(\varphi_1(y_\varepsilon))_t\,\hat{z}_\tau\Big\}\,dx\,dt \,-\, \int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi \Pi^+\Big\{(\varphi_2(y_\varepsilon))_t\,\hat{z}_\tau\Big\}\,ds\,dt \;\leqslant$$

$$\leq \int\limits_0^{t_1} \Pi^+\langle f_{1\tau}, (\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)\rangle\,dt \,+\, \int\limits_0^{t_1} \Pi^+\langle f_{2\tau}, (\hat{y}_\varepsilon - \hat{z}_\tau)\rangle_\Pi\,dt\,.$$

Из последнего неравенства нетрудно получить, что

$$I(t_1) \;\equiv\; \int\limits_0^{t_1}\Big\{\langle f_1, u-z\rangle + \langle f_2, u-z\rangle_\Pi + \,\langle J(u), z\rangle_* -$$

$$- \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla z)\,\frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}\,dx -$$

$$- \int\limits_\Pi a_\Pi(s,u)\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial z}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(u-z)}{\partial s}\,ds\Big\}\,dt \;\geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_\Omega \Phi_1(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))\,dx \,+\, \varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_\Pi \Phi_2(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))\,ds -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \Phi_1(u_0(x))\,dx - \int\limits_{\Pi} \Phi_2(u_0(s))\,ds. \qquad (2.48)$$

Очевидно, неравенство (2.48) будет справедливым и для любой функции $z \in \overset{\circ}{V}(0,T)$. Умножим (2.48) на $1/\lambda$ ($\lambda = \text{const} > 0$), проинтегрируем от $T-\lambda$ до T. В результате будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} I(t_1)\,dt_1 \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{T-\lambda}^{T} \Big\{ \underline{\lim}_{\varepsilon,\tau\to 0} \int\limits_{\Omega} \Phi_1(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))\,dx +$$

$$+ \underline{\lim}_{\varepsilon,\tau\to 0} \int\limits_{\Pi} \Phi_2(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))\,ds \Big\} dt_1 -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \Phi_1(u_0(x))\,dx - \int\limits_{\Pi} \Phi_2(u_0(s))\,ds. \qquad (2.49)$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционалов $\int\limits_{T-\lambda}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(\xi)\,dx\,dt$ имеем

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T} \underline{\lim}_{\varepsilon,\tau\to 0} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))\,dx\,dt_1 \geqslant \int\limits_{T-\lambda}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(u(t))\,dx\,dt.$$

Поэтому из (2.49), используя лемму 2.5, нетрудно получить

$$\int\limits_0^T \Big\{ \langle J(u), u-z\rangle_* + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u) k_i(x,\nabla z) \frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} a_\Pi(s,u) k_\Pi\big(s, \frac{\partial z}{\partial s}\big) \frac{\partial(u-z)}{\partial s}\,ds \Big\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \Big\{ \langle f_1, u-z\rangle + \langle f_2, u-z\rangle_\Pi \Big\} dt. \qquad (2.50)$$

Эквивалентность (2.50) и (2.4) устанавливается стандартным образом. Из вышесказанного вытекает

Теорема 2.1. *Пусть функции* φ_i, a_i, k_i, $i = 1, 2$, a_Π, k_Π, *удовлетворяют условиям* (1.8)–(1.14) *главы* 1 *и* (2.5)–(2.7). *Тогда при любых функциях*

$$f_1 \in L_{p'}(Q_T), \quad f_2 \in L_{p'}(\Pi_T), \quad p = \min(p_1, p_2),$$

$$u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega), \quad u_0(x) \geqslant 0 \text{ п. в. в } \Omega \text{ и на } \Pi$$

существует хотя бы одно решение задачи (2.1)–(2.4).

Далее рассматривается задача с неоднородным ограничением. В этом случае искомая функция u должна удовлетворять (2.2)–(2.4) и принадлежать множеству K, где

$$K = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}(0,T) : v(x,t) \geqslant g(x,t) \text{ п.в. в } Q \text{ и на } \Pi_T \right\}, \tag{2.51}$$

g — заданная функция. В этом случае справедлива

Теорема 2.2. *Пусть функции* φ_i, a_i, k_i, $i = 1, 2$, a_Π, k_Π *удовлетворяют* (2.5)–(2.7) *и условиям* (1.8)–(1.14) *главы* 1. *Кроме того,*

$$g \in W(0,T), \quad g|_{\Gamma\times[0,T]} \leq 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(g)}{\partial t} \in L_{p_1'}(Q_T), \quad \frac{\partial \varphi_2(g)}{\partial t} \in L_{p_2'}(\Pi_T), \tag{2.53}$$

$$Lg \in L_{q'}(Q_T), \quad L_\Pi g \in L_{q'}(\Pi_T), \tag{2.54}$$

$$u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega) : \; u_0(x) \geq g(x,0) \text{ п.в. в } \Omega \text{ и } \Pi, \tag{2.55}$$

здесь $q \leq p = \min\{p_1, p_2\}$. *Тогда при любых функциях*

$$f_1 \in L_{p'}(Q_T), \quad f_2 \in L_{p'}(\Pi_T), \tag{2.56}$$

решение задачи (2.51), (2.2)–(2.4) *существует.*

Доказательство теоремы проводится с помощью методов штрафа и дискретизации по переменной t.

Определение 2.2. *Функцию* $y(t)$, *принадлежащую* $\overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ *для любого* $t \in \overline{\omega}_\tau$, *назовем решением полудискретной задачи, если*

$$y(x,0) = u_0(x) \text{ п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi\,, \tag{2.57}$$

и для произвольной функции $v \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_\Omega \varphi_{1t}\Big(\big(y(t) - g_\tau(t)\big)^+ + g_\tau(t)\Big)\, v\, dx +$$

$$+\int\limits_{\Pi} \varphi_{2t}\Big(\big(y(t)-g_\tau(t)\big)^+ + g_\tau(t)\Big)\, v\, ds +$$

$$+\langle L^g \hat{y}(t), v\rangle \;+\; \langle L^g_\Pi \hat{y}, v\rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(\hat{y}(t)-\hat{g}_\tau(t)), v\rangle +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(\hat{y}(t)-\hat{g}_\tau(t)), v\rangle_\Pi = \langle f_{1\tau}, v\rangle + \langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi \qquad (2.58)$$

для $\forall t \in \omega_\tau$. *Здесь операторы* L^g *и* L^g_Π *определены следующими равенствами*

$$L^g y = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\,\Big(a_i(x, (y-g_\tau)^+ + g_\tau)\, k_i(x, \nabla y)\Big),$$

$$L^g_\Pi y = -\frac{\partial}{\partial s}\Big(a_\Pi(x, (y-g_\tau)^+ + g_\tau) k_\Pi\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)\Big).$$

Разрешимость задачи (2.57)–(2.58) нетрудно установить с помощью метода Галеркина.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* (2.52)–(2.55), *тогда для решения задачи* (2.57)–(2.58) *при любом* $t' \in \omega_\tau$ *справедливы следующие априорные оценки*

$$\|\xi(t')\|_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + \|\xi(t')\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \leqslant c, \qquad (2.59)$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \Big\{ \|\hat{y}(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|\hat{y}(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} \Big\} \leqslant c, \qquad (2.60)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \Big\{ \|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)} \Big\} \leqslant c\,. \qquad (2.61)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей используется следующее обозначение $\xi(t) = ((y-g_\tau)^+ + g_\tau)(t)$.

Доказательство. Из включения $\hat{y} - \hat{g}_\tau \in V$ и условий

$$\hat{y} \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega), \qquad g|_{\Gamma\times[0,T]} \leq 0$$

следует, что функция $(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-$ принадлежит $\overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$. Это позволяет выбрать в равенстве (2.58) $v = \tau\hat{y} - \dfrac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-$, где

$q \le p = \min\{p_1, p_2\}$. Полученное после этой подстановки равенство просуммируем по t от 0 до $t' - \tau$. В результате будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\{ \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}(\hat{\xi})\, \hat{y}\, dx \,-\, \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}(\hat{\xi})(\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \, dx \right\} +$$

$$+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle L^g \hat{y}, \hat{y} \rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle L^g_\Pi \hat{y}, \hat{y} \rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\hat{y} - \hat{g}_\tau)\hat{y}\, dx -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\hat{y} - \hat{g}_\tau)(\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \, dx \,=\, \tag{2.62}$$

$$= \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle f_{1\tau}, \hat{y} \rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle f_{2\tau}, \hat{y} \rangle_\Pi +$$

$$+ \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}} \langle L^g \hat{y}, (\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}} \langle L^g_\Pi \hat{y}, (\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \rangle_\Pi -$$

$$- \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}} \langle f_{1\tau}, (\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \rangle - \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}} \langle f_{2\tau}, (\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \rangle_\Pi ,$$

где для краткости обозначено $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \Pi$.

Воспользовавшись очевидным равенством

$$\zeta = (\zeta - \hat{g}_\tau)^+ + \hat{g}_\tau - (\zeta - \hat{g}_\tau)^- \quad \forall \zeta \in R^1,$$

представим первое слагаемое в левой части равенства (2.62) в виде

$$I = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left\{ \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}(\,\hat{\xi}\,)\hat{y}\, dx \,-\, \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}(\,\hat{\xi})\, (\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- \, dx \right\} = I_1 - I_2,$$

где

$$I_1 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i(\hat{\xi}) \,-\, \varphi_i(\xi)}{\tau} \, \hat{\xi} \, dx,$$

$$I_2 = (1 + \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}}) \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i(\hat{\xi}) \,-\, \varphi_i(\xi)}{\tau} (\hat{y} - \hat{g}_\tau)^- dx.$$

Используя (1.4) и неравенство (2.1) из первой главы, для I_1 нетрудно получить оценку вида:

$$I_1 \geq \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \Big(\Phi_i(\hat{\xi}) - \Phi_i(\xi)\Big)\,dx \geqslant \tag{2.63}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{2}\Big\{b_{0i}\|\,\hat{\xi}(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega i)} - b_{2i}\|u_0(x)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega i)} - (b_{1i}+b_{3i})\,\mathrm{mes}\,\Omega_i\Big\}.$$

Для оценки I_2 используем неравенство вида

$$\Big\{\varphi_i((\zeta-g_1)^+ + g_1) - \varphi_i((\eta-g_2)^+ + g_2)\Big\}\Big\{-(\zeta-g_1)^-\Big\} \geq$$

$$\geq \Big\{\varphi_i(g_1) - \varphi_i(g_2)\Big\}\Big\{-(\zeta-g_1)^-\Big\} \tag{2.64}$$

справедливость которого для $\forall\,\zeta,\,\eta,\,g_1,\,g_2 \in R^1$ вытекает из следующих легко проверяемых соотношений:

$$\varphi_i\big((\zeta-g_1)^+ + g_1\big)\Big\{-(\zeta-g_1)^-\Big\} = \varphi_i(g_1)\Big\{-(\zeta-g_1)^-\Big\},$$

$$\varphi_i\big((\zeta-g_2)^+ + g_2\big) \geq \varphi_i(g_2).$$

Используя неравенство Гельдера и ε-неравенство [1)], нетрудно доказать, что

$$I_2 \leq \Big(1+\frac{1}{\varepsilon^{q'-1}}\Big)\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}(g_\tau)(\hat{y}-\hat{g})^-\,dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sigma^{q'}}\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\|\varphi_{it}(g_\tau)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_i)} +$$

$$+\frac{\sigma^q}{q}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\Big)\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^{q}_{L_q(\Omega_i)} + c. \tag{2.65}$$

Из (2.64), (2.65) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i(\,\hat{\xi}\,) - \varphi_i(\xi)}{\tau}\,\hat{y}\,dx \geq$$

[1)] Малый параметр в ε-неравенстве здесь и в дальнейшем будем обозначать через σ.

$$\geq \sum_{i=1}^{2}\Big\{ b_{0i}\|\,\hat{\xi}\,(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - b_{2i}\|u_0(x)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - \tag{2.66}$$

$$-\frac{2}{\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\varphi_{it}(g_\tau)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_i)} - \frac{\sigma^q}{q}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)}\Big\} - c.$$

Из (1.10), (1.13) имеем

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\langle L^g\hat{y},\hat{y}\rangle \geqslant M_{21}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|y\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} - c, \tag{2.67}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\langle L^g_\Pi\hat{y},\hat{y}\rangle_\Pi \;\geqslant\; M_{22}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|y\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} - c. \tag{2.68}$$

Слагаемые, содержащие оператор штрафа β, оценим, воспользовавшись определением этого оператора, следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{2}\Big\{\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Omega_i}\beta(\hat{y}-\hat{g}_\tau)\hat{y}\,dx - \frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Omega_i}\beta(\hat{y}-\hat{g}_\tau)(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\,dx\Big\} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{2}\Big\{\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} - \frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} -$$

$$-\frac{1}{\sigma^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_i)} - \frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)}\Big\}. \tag{2.69}$$

Третье слагаемое в правой части равенства (2.62) представим в виде

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L^g\hat{y},(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\rangle = \sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}(Y_1+Y_2),$$

где

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} a_i(x,\hat{\xi})\Big(k_i(x,\nabla\hat{y}) - k_i(x,\nabla\hat{g}_\tau))\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\Big)dx,$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} a_i(x,\hat{\xi})k_i(x,\nabla\hat{g}_\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\Big)\,dx.$$

Известно, что (см., например, [16], с. 47)

$$\frac{\partial(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-}{\partial x_i} = -\frac{\partial(\hat{y}-\hat{g}_\tau)}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad \Omega^-(t) = \{x \in \Omega : \hat{y}(x,t) \le \hat{g}_\tau(x,t)\},$$

$$\frac{\partial(\hat{y}^- - \hat{g}_\tau)^-}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^+(t) = \{x \in \Omega :\ \hat{y}(x,t) \ge \hat{g}_\tau(x,t)\}.$$

Учитывая также, что

$$a_i(x, (\hat{y}(x) - \hat{g}_\tau(x))^+ + \hat{g}_\tau(x)) = a_i(x, \hat{g}_\tau(x)) \ \ \forall\, x\ \in \Omega_-(t),$$

нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_-} a_i(x,\hat{g}_\tau)\Big(k_i(x,\nabla\hat{y}) -$$

$$-k_i(x,\nabla\hat{g}_\tau))\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\Big)\,dx\ \ge 0,$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_-} a_i(x,\hat{g}_\tau)k_i(x,\nabla\hat{g}_\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\Big)\,dx\ =$$

$$= \langle L^g \hat{g}_\tau, (\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\rangle. \tag{2.70}$$

Используя неравенства Гельдера, Фридрихса и ε-неравенство, оценим (2.70) и оставшиеся слагаемые в правой части (2.62):

$$\left|\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\langle f_{1\tau}(t), \hat{y}\rangle\right| \le$$

$$\le \frac{1}{p_1'\sigma^{p_1'}} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|f_{1\tau}(t)\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega)} + \frac{c\sigma^{p_1}}{p_1}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}, \tag{2.71}$$

$$\left|\sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle f_{1\tau}(t), -(\hat{y}-\hat{g})^-\rangle\right| \le$$

$$\le \frac{1}{q'\sigma^{q'}} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\|f_{1\tau}(t)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)} + \frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega)}, \tag{2.72}$$

$$\left|\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\langle f_{2\tau}(t), \hat{y}\rangle_\Pi\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{p_2'\sigma^{p_2'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)} + \frac{c\sigma^{p_2}}{p_2}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}, \tag{2.73}$$

$$\left|\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle f_{2\tau}(t), -(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\rangle_\Pi\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)} + \frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Pi)}, \tag{2.74}$$

$$\left|\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L^g\hat{y}, (\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\rangle\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|L^g\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)} + \frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega)}, \tag{2.75}$$

$$\left|\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L^g_\Pi\hat{y}, (\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\rangle_\Pi\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|L^g_\Pi\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)} + \frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Pi)}. \tag{2.76}$$

Подставляя (2.66)–(2.69), (2.71)–(2.76) в (2.62), будем иметь

$$b_{01}\,\|((\hat{y}-\hat{g}_\tau)^+ + \hat{g}_\tau)(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + b_{02}\,\|(\hat{y}+\hat{g}_\tau)^+ + \hat{g})(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} +$$

$$+\Big(M_{21} - \frac{c\sigma^{p_1}}{p_1}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}(t)\;\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \Big(M_{22} - \frac{c\sigma^{p_2}}{p_2}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}(t)\;\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} +$$

$$+\Big\{\frac{1}{\varepsilon}(1-\frac{\varepsilon\,\sigma^q}{q}) + \frac{1}{q\varepsilon^{q'}}(q-5\sigma^q)\Big\}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega)} +$$

$$+\Big\{\frac{1}{\varepsilon}(1-\frac{\varepsilon\,\sigma^q}{q}) + \frac{1}{q\varepsilon^{q'}}(q-5\sigma^q)\Big\}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Pi)} \leq$$

$$\leq b_{21}\|u_0(x)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + b_{22}\|u_0(x)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|L^g\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)} +$$

$$+\frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|L_{\Pi}^{g}\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}+\Big(\frac{1}{\sigma^{q'}}+\frac{c}{\sigma^{q'}}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+$$

$$+\Big(\frac{1}{\sigma^{q'}}+\frac{c}{\sigma^{q'}}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}+\frac{1}{\sigma^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+$$

$$+\frac{1}{\sigma^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}+\frac{2}{\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\varphi_{1t}(g_\tau)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+$$

$$+\frac{2}{\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\varphi_{2t}(g_\tau)\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}. \qquad (2.77)$$

Параметр σ выберем так, чтобы выражения, стоящие в круглых скобках в соотношении (2.77) были положительны. В силу условий (2.52)–(2.55) правая часть (2.77) ограничена. Следовательно, оценки (2.59)–(2.61) имеют место. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия леммы* 2.4. *Тогда для решения задачи* (2.57)–(2.58) *справедливы априорные оценки*

$$\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega_i}\triangle\varphi_i(\xi(t))\,\triangle\xi(t)\leqslant ck\tau,\quad k=1,2,\ldots,N,\ \ i=1,2. \qquad (2.78)$$

Доказательство. Напомним, что

$$\xi(t)=((y-g_\tau)^+ + g_\tau)(t),\ \triangle\,\xi(t)=\xi(t+k\tau)-\xi(t),$$

$$\triangle\,\varphi_i(\xi(t))=\varphi_i(\xi(t+k\tau))-\varphi_i(\xi(t)).$$

Поэтому

$$I\ \equiv\ \frac{1}{\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega}\triangle\,\varphi_1(\xi(t'))\triangle\,\xi(t')\,dx+$$

$$+\frac{1}{\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Pi}\triangle\,\varphi_2(\xi(t'))\triangle\,\xi(t')\,ds=$$

$$=\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{k}\big(\varphi_1(\xi(t'+j\tau))\big)_{\bar{t}}\triangle\,\xi(t')\,dx+$$

$$+\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int_{\Pi}\sum_{j=1}^{k}\big(\varphi_2(\xi(t'+j\tau))\big)_{\bar t}\triangle\,\xi(t')\,ds.$$

Воспользовавшись равенством (2.58), получим

$$I=\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\sum_{j=1}^{k}\Big\{-\langle L^g y(t'+j\tau),\triangle\,\xi(t')\rangle- \tag{2.79}$$

$$-\langle L^g_{\Pi} y(t'+j\tau),\triangle\,\xi(t')\rangle_{\Pi}-\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(y-g_\tau)(t'+j\tau),\triangle\,\xi(t')\rangle-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(y-g_\tau)(t'+j\tau),\triangle\,\xi(t')\rangle_{\Pi}+\langle f_{1\tau},\triangle\,\xi(t')\rangle+\langle f_{2\tau},\triangle\,\xi(t')\rangle_{\Pi}\Big\}.$$

Докажем, что правая часть в (2.79) ограничена величиной kc. Обозначая $t'_j=t'+j\tau$, $t'_k=t'+k\tau$, оценим, например, следующее слагаемое

$$I_1\equiv\frac{1}{\varepsilon}\Big|\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{j=1}^{k}\tau\langle\beta((y-g_\tau)(t'_j)),\,\xi(t'_k)-\xi(t')\rangle\Big|\leqslant$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{j=1}^{k}\tau\|\beta((y-g_\tau)(t'_j))\|^{p'_1}_{W^{-1}_{p'_1}(\Omega)}\times$$

$$\times\Big\{\|\xi(t'_k)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}+\|\xi(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\Big\}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\beta((y-g_\tau)(t'_j))\|^{p'_1}_{W^{-1}_{p'_1}(\Omega)}\bigg)^{1/p'_1}\times$$

$$\times\bigg\{\bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\xi(t'_k)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\bigg)^{1/p_1}+\bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\xi(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\bigg)^{1/p_1}\bigg\}.$$

Заметим, что из оценки (2.61) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\beta((y-g_\tau)(t'_j))\|^{p'_1}_{W^{-1}_{p'_1}(\Omega)}\bigg)^{1/p'_1}\le kc.$$

Из последнего неравенства и (2.60) имеем $I\leqslant k\,c$. Остальные слагаемые в правой части (2.79) оцениваются аналогично. Возрастание функций φ_i, $i=1,2$, и (2.79) обеспечивают справедливость (2.78). Лемма доказана.

Из оценок (2.59), (2.60) вытекает равномерная по τ и ε ограниченность последовательностей $\{\Pi^{\pm}y(t)\}$ и $\{\Lambda y(t)\}$ в $\overset{\circ}{V}(0,T)$, последовательности $\{\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t)\}$ – в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))$, а последовательности следов этих функций на Π — в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$. Поэтому найдутся функции u и ζ из $\overset{\circ}{V}(0,T)$ и подпоследовательности последовательностей $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$ (в дальнейшем за выбранными последовательностями сохраним обозначения самих последовательностей) такие, что

$$\Pi^{\pm}y(t),\ \Lambda y(t) \rightharpoonup\ u \ \text{в}\ \overset{\circ}{V}(0,T)\,, \tag{2.80}$$

$$\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t) \rightharpoonup\ \zeta \quad *\text{-слабо в}\ L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))\,, \tag{2.81}$$

$$\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t),\ \rightharpoonup\ \zeta \quad *\text{-слабо в}\ L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi)). \tag{2.82}$$

Из оценки (2.61) и леммы 2.5 следует существование подпоследовательностей $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$, для которых при τ, $\varepsilon\to 0$ справедливы предельные соотношения

$$\Pi^{\pm}(y-g_\tau)^{-}(t) \ \rightharpoonup\ 0 \ \text{в}\ L_q(Q_T)\,, \tag{2.83}$$

$$\Pi^{\pm}(y-g_\tau)^{-}(t) \ \rightharpoonup\ 0 \ \text{в}\ L_q(\Pi_T)\,, \tag{2.84}$$

$$\Pi^{\pm}\varphi_1((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t)) \ \rightharpoonup\ \zeta_1 \ \text{в}\ L_1(Q_T)\,, \tag{2.85}$$

$$\Pi^{\pm}\varphi_2((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t)) \ \rightharpoonup\ \zeta_2 \ \text{в}\ L_1(\Pi_T)\,, \tag{2.86}$$

$$\Pi^{+}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t) \ \to \zeta \quad \text{п.в. в}\ Q_T \ \text{и} \ \text{на}\,\Pi_T. \tag{2.87}$$

Из очевидного равенства

$$\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)-\Pi^{\pm}(y-g_\tau)^{-}=\Pi^{\pm}y, \tag{2.88}$$

предельных соотношений (2.80)–(2.84), (2.87) и единственности слабого предела следует, что $\zeta=u$ почти всюду в Q_T и на Π_T. Используя равенство (2.88), соотношения (2.85)–(2.87), непрерывность функций φ_1, φ_2, нетрудно показать, что $\zeta_1=\varphi_1(u)$, $\zeta_2=\varphi_2(u)$. Кроме того, из (2.83), (2.84) вытекает, что $u\geq g$ почти всюду в Q_T и на Π, следовательно, $u\in K$. И, наконец, условия (1.9), (1.12) и оценка (2.60) обеспечивают существование подпоследовательностей $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$ таких, что

$$\Pi^{\pm}k_i(x,\nabla y) \ \rightharpoonup\ \overline{K}_i \ \text{ в }\ L_{p_1'}(Q_T)\,, \tag{2.89}$$

$$\Pi^{\pm}k_{\Pi}\big(s,\frac{\partial y}{\partial s}\big) \ \rightharpoonup\ \overline{K}_{\Pi} \ \text{ в }\ L_{p_2'}(\Pi_T) \tag{2.90}$$

при τ, $\varepsilon\to 0$. Докажем далее, что предельная функция u является решением задачи (2.51), (2.2)–(2.4).

Пусть $G_\tau(((y-g_\tau)^+ + g_\tau)(t))$ — линейный функционал, значение которого на элементе $v\in\overset{\circ}{V}$ определяется формулой

$$\langle G_\tau(\xi(t), v\rangle_* = \int\limits_\Omega \varphi_{1t}(\xi(x,t))v(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_{2t}(\xi(s,t))v(s)\,ds.$$

Напомним, что для сокращения записи используется обозначение $\xi = (y-g_\tau)^+ + g_\tau$. Покажем, что последовательность функционалов $\Pi^+ G_\tau((y-g_\tau)^+ + g_\tau)$ ограничена равномерно по τ и ε в пространстве $(\overset{\circ}{V}\ (0,T))^*$. Имеем

$$\|\,\Pi^+ G_\tau(\xi)\,\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*} = \sup_{v\in\overset{\circ}{V}(0,T)} \frac{J_1(\xi,v)}{J_2(v)},$$

где

$$J_1(\xi,v) = \Bigg|\int\limits_0^T \langle\,\Pi^+\varphi_{1t}(\xi)\,,\,v\rangle\,dt + \int\limits_0^T \langle\,\Pi^+\varphi_{2t}(\xi)\,,\,v\rangle_\Pi\,dt\Bigg|,$$

$$J_2(v) = \|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))}.$$

Учитывая, что $y(t)$ является решением задачи (2.57)–(2.58), и, полагая $y(t)=y(T)$ для любого $t\ge T$, запишем равенство

$$\Bigg|\int\limits_0^T \langle\,\Pi^+\varphi_{1t}(\xi)\,,\,v_\tau\rangle\,dt + \int\limits_0^T \langle\,\Pi^+\varphi_{2t}(\xi)\,,\,v_\tau\rangle_\Pi\,dt\Bigg| =$$

$$= \Bigg|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\Big\{\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2 a_i(x,\xi)k_i(x,\nabla\hat y)\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\int\limits_\Pi a_\Pi(s,\xi)k_\Pi\big(s,\frac{\partial\hat y}{\partial s}\big)\frac{\partial v_\tau}{\partial s}\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega \beta(\hat y-\hat g_\tau)\,v_\tau\,dx +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Pi \beta(\hat y-\hat g_\tau)\,v_\tau\,ds - \langle\,f_{1\tau},\,v_\tau\,\rangle - \langle\,f_{2\tau},\,v_\tau\,\rangle_\Pi\Big\}\Bigg|,$$

где $v_\tau = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int\limits_t^{t+\tau} v(x,t)\,dt$. Каждое слагаемое правой части оценим сверху, используя неравенства Гельдера и условия (1.8), (1.9), (1.12), в результате получим

$$\Big|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}a_i(x,\xi)k_i(x,\nabla\hat{y})\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\,dx\Big|+$$

$$+\Big|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_{\Pi}a_\Pi(s,\xi)k_\Pi\big(s,\frac{\partial\hat{y}}{\partial s}\big)\,\frac{\partial v_\tau}{\partial s}\,ds\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{2}\beta_{1i}\Big\{c\,+\,M_{0i}\,\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\,\|\,\hat{y}(t)\,\|^{p_i}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_i}(\Omega_i)}\Big)^{1/p_i'}\Big\}\,\|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_i}(\Omega_i))},$$

$$\Big|\,\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_{\Omega_i}\beta(\hat{y}-\hat{g}_\tau)\,v_\tau\,dx\,\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\,\|(\hat{y}-\hat{g}_\tau)^-\,\|^q_{L_q(\Omega_i)}\Big)^{1/q'}\|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_i}(\Omega_i))}\,,$$

$$\Big|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle\,f_{1\tau},\,v_\tau\,\rangle_i\Big|\leqslant\|\,f_1\,\|_{L_{p'}(Q_T)}\|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))},$$

$$\Big|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle\,f_{2\tau},\,v_\tau\,\rangle_\Pi\Big|\leqslant\|\,f_2\,\|_{L_{p'}(\Pi_T)}\|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Omega))}.$$

Из полученных неравенств и оценок (2.60), (2.61) следует, что

$$\|\,\Pi^+G_\tau(\xi)\,\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*}\leqslant c\,. \tag{2.91}$$

Поэтому найдутся элемент G и последовательности $\{\tau\}$ и $\{\varepsilon\}$ такие, что

$$\Pi^+G_\tau(\xi)\rightharpoonup G\quad(\overset{\circ}{V}(0,T))^*\quad\text{при }\tau,\varepsilon\to 0. \tag{2.92}$$

Выясним структуру предельного элемента G. Воспользовавшись очевидным равенством $(u_0(x)-g(0))^++g(0)=u_0(x)$ и формулой суммирования по частям, нетрудно нетрудно показать, что

$$\int\limits_0^T\langle\Pi^+G_\tau(\xi),\eta\rangle_*\,\Pi^+z_\tau\,dt=$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \Pi^+ \varphi_{1t}(\xi)\,\eta\,dx \,+\, \int\limits_\Pi \Pi^+ \varphi_{2t}(\xi)\,\eta\,ds \Big\} \Pi^+ z_\tau\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ -\int\limits_\Omega \Pi^+ \varphi_1(\xi)\,\eta\,dx \,-\, \int\limits_\Pi \Pi^+ \varphi_2(\xi)\,\eta\,ds \Big\} \Pi^+ z_{\tau\bar t}\,dt -$$

$$- \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x))\,\eta\,z_\tau(0)\,dx \,-\, \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(s))\,\eta\,z_\tau(0)\,ds,$$

где $\eta \in \overset{\circ}{V}$, $z_\tau(t)$ — сеточная функция, полученная сносом в точки сетки $\overline{\omega}_\tau$ значений функции $z \in C^\infty(0,T)$, $z(T) = 0$. Учитывая (2.85)–(2.87) и (2.92), в последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau, \varepsilon \to 0$. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^T \langle G, \eta\rangle_* z(t)\,dt = -\int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \varphi_1(u)\eta(x)\,dx \,+\, \int\limits_\Pi \varphi_2(u)\eta(s) ds \Big\} \frac{dz}{dt}\,dt -$$

$$- \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x))\eta(x)z(0)\,dx \,-\, \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(s))\eta(s)z(0)\,ds\,. \qquad (2.93)$$

Выбирая в (2.93) $z \in C_0^\infty(0,T)$, получим равенство

$$\int\limits_0^T \langle G, \eta\rangle_* z(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \varphi_1(u)\eta(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(u)\eta(s) ds \Big\} \frac{dz}{dt}\,dt. \qquad (2.94)$$

Из (2.94) следует, что функция $\langle G, \eta\rangle_*$ является обобщенной производной функции Ψ,

$$\Psi(t) = \int\limits_\Omega \varphi_1(u(x,t))\eta(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(u(s,t))\eta(s)\,ds.$$

По определению функционала $J(u)$ (см. параграф 1 главы 1)

$$\langle J(u), \eta\rangle_* = \frac{d\Psi(t)}{dt}\,,$$

поэтому для любой функции $z \in L_{p'}(0,T)$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^T \langle G, \eta\rangle_* z(t)\,dt = \int\limits_0^T \frac{d\Psi(t)}{dt} z(t)\,dt = \int\limits_0^T \langle J(u), \eta\rangle_*\, z(t)\,dt. \tag{2.95}$$

Докажем, что $u(x,0) = u_0(x)$. Для этого в (2.95) выберем функцию $z \in C^\infty(0,T) : z(T) = 0$. Сравнивая полученное равенство с (2.93), будем иметь

$$\int\limits_\Omega \Big(\varphi_1(u(x,0)) - \varphi_1(u_0(x))\Big)\eta(x)\,dx +$$
$$+ \int\limits_\Pi \Big(\varphi_2(u(s,0)) - \varphi_2(u_0(s))\Big)\eta(s)\,ds \;=\; 0.$$

Из последнего равенства в силу произвольности $\eta(x)$ и взаимно однозначности функций $\varphi_i(u)$ следует $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π.

Теперь докажем, что функция u удовлетворяет неравенству (2.4). Пусть z — произвольная функция из $C_0^\infty(Q_T)$, для которой выполнено следующее условие $z(x,t) \geqslant g(x,t)$ почти всюду в Q_T. Выберем в (2.58) $v = \hat{y} - \hat{z_\tau}$, где z_τ — функция, определенная на $\overline{\Omega} \times \overline{\omega}_\tau$, совпадающая на этом множестве с $z(x,t)$. Полученное равенство, используя кусочно-постоянные восполнения, запишем для произвольного $t \in [0,T]$. Интегрируя результат по отрезку $[0,t_1]$, будем иметь

$$\int\limits_0^{t_1} \Bigg\{ \int\limits_\Omega \Pi^+\Big(\varphi_{1t}(\xi)\,(\hat{y} - \hat{z}_\tau)\Big)\,dx \;+\; \int\limits_\Pi \Pi^+\Big(\varphi_{2t}(\xi)\,(\hat{y} - \hat{z}_\tau)\Big)\,ds \,+$$
$$+ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Pi^+\Big(a_i(x,\hat{\xi})\,k_i(x,\nabla\hat{y})\,\frac{\partial(\hat{y} - \hat{z}_\tau)}{\partial x_i}\Big)\,dx +$$
$$+ \int\limits_\Pi \Pi^+\Big(a_\Pi(s,\hat{\xi})\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial\hat{y}}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(\hat{y} - \hat{z}_\tau)}{\partial s}\Big)\,ds + \tag{2.96}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\Pi^+\langle\beta(\hat{y} - \hat{g}_\tau)\,,\,(\hat{y} - \hat{z}_\tau)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\Pi^+\langle\beta(\hat{y} - \hat{g}_\tau)\,,\,(\hat{y} - \hat{z}_\tau)\rangle_\Pi \Bigg\}\,dt \;=$$
$$= \int\limits_0^{t_1} \Big\{ \Pi^+\langle f_{1\tau}, (\hat{y} - \hat{z}_\tau)\rangle + \Pi^+\langle f_{2\tau}, (\hat{y} - \hat{z}_\tau)\rangle_\Pi \Big\}\,dt.$$

Первые два слагаемые в левой части оценим, используя неравенство (2.1) леммы 2.1 главы 1 и оценку (2.61):

$$\int_0^{t_1}\int_{\Omega_i}\Pi^+\Big(\varphi_{it}(\xi)\,\hat y\Big)dx\,dt \geqslant \frac{1}{\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_1}\int_{\Omega_i}\Phi_i(\Pi^+\hat\xi)dx\,dt-$$

$$-\int_{\Omega_i}\Phi_i(\xi(0))\,dx-\int_0^{t_1}\int_{\Omega_i}\Pi^+\varphi_{it}(g_\tau)\Pi^+(\hat y-\hat g_\tau)^-\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\Omega_i}\Phi_i(\Lambda\,\xi(t_1))\,dx-\int_{\Omega_i}\Phi_i(u_0(x))\,dx-c\varepsilon^{q'},\quad i=1,2. \tag{2.97}$$

Далее, воспользовавшись условиями (1.11), (1.14), будем иметь

$$\int_0^{t_1}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Pi^+\Big(a_i(x,\hat\xi)\,k_i(x,\nabla\hat y)\,\frac{\partial(\hat y-\hat z_\tau)}{\partial x_i}\Big)\,dx\,dt\geqslant \tag{2.98}$$

$$\geqslant\int_0^{t_1}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Pi^+\Big(a_i(x,\hat\xi)\,k_i(x,\nabla\hat z_\tau)\,\frac{\partial(\hat y-\hat z_\tau)}{\partial x_i}\Big)\,dx\,dt\,,$$

$$\int_0^{t_1}\int_{\Pi}\Pi^+\Big(a_\Pi(s,\hat\xi)\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial\hat y}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(\hat y-\hat z_\tau)}{\partial s}\Big)\,ds\,dt\geqslant \tag{2.99}$$

$$\geqslant\int_0^{t_1}\int_{\Pi}\Pi^+\Big(a_\Pi(s,\hat\xi)\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial\hat z_\tau}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(\hat y-\hat z_\tau)}{\partial s}\Big)\,ds\,dt\,.$$

Используя монотонность функции β, равенство

$$\beta(\hat z_\tau-\hat g_\tau)=0,$$

вытекающее из условия $z\geq g$, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\Big\{\Pi^+\langle\beta(\hat y-\hat g_\tau),(\hat y-\hat z_\tau)\rangle+$$

$$+\,\Pi^{+}\langle\beta(\hat y-\hat{g_\tau}),(\hat y-\hat z_\tau)\rangle_\Pi\Big\}\,dt\;\geqslant\;0. \tag{2.100}$$

Подставляя (2.97)–(2.100) в (2.96), получим

$$\int\limits_\Omega(\Phi_1(\Lambda\xi(t_1))-\Phi_1(u_0(x)))dx+\int\limits_\Pi(\Phi_2(\Lambda y(t_1))-\Phi_2(u_0(x)))ds+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{2}\Pi^{+}\Big(a_i(x,\hat\xi)\,k_i(x,\nabla\hat z_\tau)\,\frac{\partial(\hat y-\hat z_\tau)}{\partial x_i}\Big)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi\Pi^{+}\Big(a_\Pi(s,\hat\xi)\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial\hat z_\tau}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(\hat y-\hat z_\tau)}{\partial s}\Big)\,ds\,dt-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\Pi^{+}\Big(\varphi_{1t}(\hat\xi)\,\hat z_\tau\Big)\,dx\,dt\;-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Pi\Pi^{+}\Big(\varphi_{2t}(\hat\xi)\,\hat z_\tau\Big)\,ds\,dt\leqslant$$

$$\leq\int\limits_0^{t_1}\Pi^{+}\langle f_{1\tau},(\hat y-\hat z_\tau)\rangle\,dt\;+\;\int\limits_0^{t_1}\Pi^{+}\langle f_{2\tau},(\hat y-\hat z_\tau)\rangle_\Pi\,dt+c\varepsilon^{q'}\,.$$

В результате предельного перехода в последнем неравенстве при $\tau,\varepsilon\to 0$ будем иметь

$$I(t_1)\;\equiv\;\int\limits_0^{t_1}\Big\{\langle f_1,u-z\rangle+\langle f_2,u-z\rangle_\Pi+\;\langle J(u),z\rangle_*-$$

$$-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{2}a_i(x,u)k_i(x,\nabla z)\,\frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-\int\limits_\Pi a_\Pi(s,u)\,k_\Pi\big(s,\frac{\partial z}{\partial s}\big)\,\frac{\partial(u-z)}{\partial s}\,ds\Big\}\,dt\;\geqslant$$

$$\geqslant\;\varliminf_{\varepsilon,\tau\to0}\;\int\limits_\Omega\;\Phi_1(\Lambda\xi(t_1))\,dx\;-\;\int\limits_\Omega\;\Phi_1(u_0(x))\,dx$$

$$+\;\varliminf_{\varepsilon,\tau\to0}\int\limits_\Pi\;\Phi_2(\Lambda\xi(t_1))\,ds\;-\;\int\limits_\Pi\;\Phi_2(u_0(s))\,ds. \tag{2.101}$$

Очевидно (2.101) будет справедливым и для любой функции z из $\overset{\circ}{V}(0,T)$. Неравенство (2.101) умножим на $1/\lambda$ $(\lambda>0)$, проинтегрируем по t_1 от $T-\lambda$ до T. В результате получим

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T} I(t_1)\,dt_1 \geqslant \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\Big\{\varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_{\Omega}\Phi_1(\Lambda\xi(t_1))\,dx+$$

$$+\varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_{\Pi}\Phi_2(\Lambda\xi(t_1))\,ds\Big\}\,dt_1-\int\limits_{\Omega}\Phi_1(u_0(x))\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Pi}\Phi_2(u_0(s))\,ds. \qquad (2.102)$$

Из свойства слабой полунепрерывности снизу функционалов вида $\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\xi)\,dx\,dt$ следует, что

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T}\varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\Lambda\,\xi(t_1))\,dx\,dt_1 \geqslant \int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u(t))\,dx\,dt. \qquad (2.103)$$

Применяя (2.103) и равенство

$$\int\limits_{0}^{T}\langle J(v(t)),v(t)\rangle_*\,dt =$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{2}\Big\{\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(v(t))\,dxdt-\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(v(0))\,dx\Big\},$$

справедливость которого следует из (2.37) (см. лемму 2.5, глава 1), преобразуем (2.102) следующим образом:

$$\int\limits_{0}^{T}\Big\{\langle J(u),u-z\rangle_*+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}a_i(x,u)k_i(x,\nabla z)\frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Pi}a_\Pi(s,u)k_\Pi\big(s,\frac{\partial z}{\partial s}\big)\frac{\partial(u-z)}{\partial s}\,ds\Big\}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \left\{ \langle f_1, u - z \rangle + \langle f_2, u - z \rangle_{\Pi} \right\} dt. \qquad (2.104)$$

Эквивалентность (2.104) и (2.4) устанавливается стандартным образом. Теорема доказана.

Глава 3
ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

§ 1. Задача без ограничений

В этом параграфе для задачи (1.1)–(1.3) главы 1 доказываются две теоремы единственности обобщенного решения. При этом существенно используются идеи статей Otto [23], [24], в которых была предложена новая методика доказательства единственности для задач с двойным вырождением. В первой теореме рассматривается случай, когда краевые условия задачи (1.1)–(1.3) главы 1 не зависят от переменной t. Это предположение существенно упрощает доказательство. Во второй теореме единственность обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) главы 1 доказана при более общих предположениях.

Сначала сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1. *Пусть функции φ_i строго возрастающие, удовлетворяющие неравенствам* (1.4), (1.5) *главы 1,* $\varphi_i(0) = 0$; η — *дифференцируемая функция с неубывающей производной. Тогда для функционалов Φ^i_η, определенных для любых $u, v \in R^1$ по правилу*

$$\Phi^i_\eta(u,v) \;=\; \int\limits_v^u \eta'(\xi - v)\,{\varphi_i}'(\xi)\,d\xi, \qquad i = 1,2,$$

имеют место следующие неравенства:

$$\Phi^i_\eta(u,v) - \Phi^i_\eta(\tilde u,v) \;\geq\; \eta'(\tilde u - v)(\varphi_i(u) \,-\, \varphi_i(\tilde u))\,, \tag{1.1}$$

$$\Phi^i_\eta(u,v) - \Phi^i_\eta(\tilde u,v) \;\leq\; \eta'(u - v)(\varphi_i(u) \,-\, \varphi_i(\tilde u))\,. \tag{1.2}$$

Доказательство. Запишем два очевидных равенства

$$\Phi^i_\eta(u,v) - \Phi^i_\eta(\tilde u,v) = \int\limits_{\tilde u}^u \eta'(\xi - v)\,{\varphi_i}'(\xi)\,d\xi,$$

$$\eta'(\tilde u - v)(\varphi_i(u) \,-\, \varphi_i(\tilde u)) \;=\; \int\limits_{\tilde u}^u \eta'(\tilde u - v)\,{\varphi_i}'(\xi)\,d\xi\,.$$

Вычтем из первого равенства второе. В результате получим

$$\Phi^i_\eta(u,v) - \Phi^i_\eta(\tilde u,v) - \eta'(\tilde u - v)(\varphi_i(u) - \varphi_i(\tilde u)) =$$

$$= \int\limits_{\tilde u}^{u} \varphi_i{}'(\xi)(\eta'(\xi - v) - \eta'(\tilde u - v))\,d\xi, \quad i = 1,2.$$

Неотрицательность последнего интеграла следует из монотонности φ_i и условий на функцию η. Аналогично проверяется неравенство (1.2). Лемма доказана.

Замечание 1.1. В случае, когда η' — невозрастающая функция, для функционалов Φ^i_η имеют место неравенства противоположные (1.1), (1.2).

Лемма 1.2. *Пусть функции φ_i удовлетворяют условиям леммы* 1.1, *η определена формулой*

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \le 0, \\ \xi^2/2, & 0 \le \xi \le 1, \\ \xi - 1/2, & \xi \ge 1, \end{cases}$$

$\eta_\delta(\xi) = \delta\eta(\delta^{-1}\xi)$, $\bar\eta_\delta(\xi) = \delta\eta(-\delta^{-1}\xi)$. *Тогда при $\delta \to 0$ имеют место следующие предельные соотношения*

$$\Phi^i_{\eta_\delta}(u,v) \to \big(\varphi_i(u) - \varphi_i(v)\big)^+, \tag{1.3}$$

$$\Phi^i_{\bar\eta_\delta}(u,v) \to \big(\varphi_i(v) - \varphi_i(u)\big)^+. \tag{1.4}$$

Здесь w^+ — положительная часть функции w.

Доказательство. Отметим сначала некоторые свойства функции η_δ:

i) η'_δ — непрерывно дифференцируемая, неубывающая на $\mathbb{R}$ функция, $\eta'_\delta(\xi) = 0$, если $\xi \le 0$, $\eta'_\delta(\xi) = \xi/\delta$, если $0 \le \xi \le \delta$, $0 \le \eta'_\delta(\xi) \le 1\ \forall\xi \in \mathbb{R}$;

ii) почти всюду в $\mathbb{R}$ существует η''_δ, при этом $\eta''_\delta(\xi) = 0$ для $(\xi < 0) \cup (\xi > \delta)$, $\eta''_\delta(\xi) = 1/\delta$ для $0 \le \xi \le \delta$.

Из *i*), в частности, следует, что

$$\lim_{\delta\to 0} \eta'_\delta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ 1, & \xi \ge 0. \end{cases}$$

Кроме того, из определения функции η_δ вытекает, что

$$\lim_{\delta\to 0} \eta_\delta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \ge 0. \end{cases}$$

Заметим также, что свойства i), ii) обеспечивают принадлежность $\eta_\delta'(w)$ пространству $\overset{\circ}{V}\ (0,T)\ \big(V(0,T)\big)$, если $w \in \overset{\circ}{V}\ (0,T)\ \big(V(0,T)\big)$.

Докажем теперь справедливость предельных соотношений (1.3), (1.4). Пусть $u \le v$. Тогда по определению функционала $\Phi^i_{\eta_\delta}$ имеем $\Phi^i_{\eta_\delta}(u,v) = 0\ \forall \delta > 0$. С другой стороны из монотонности функции φ_i следует, что

$$\big(\varphi_i(u) - \varphi_i(v)\big)^+ = 0.$$

Поэтому (1.3) справедливо.

Рассмотрим случай, когда $u > v$. Пусть δ таково, что $v + \delta \le u$. (Это условие, очевидно, не является ограничением, поскольку справедливость (1.3) устанавливается при $\delta \to 0$.) Имеем

$$\Phi^i_{\eta_\delta}(u,v) \ = \ \int\limits_v^{v+\delta} {\eta_\delta}'(\xi - v)\, {\varphi_i}'(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{v+\delta}^{u} {\eta_\delta}'(\xi - v)\, {\varphi_i}'(\xi)\, d\xi \ = \ \int\limits_v^{v+\delta} {\eta_\delta}'(\xi - v)\, {\varphi_i}'(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \varphi_i(u) \ - \ \varphi_i(v+\delta) \ \to \ \varphi_i(u) \ - \ \varphi_i(v)$$

при $\delta \to 0$. Последнее утверждение следует из абсолютной непрерывности интеграла и непрерывности функции φ_i. Заметим также, что при $u > v$

$$\varphi_i(u) - \varphi_i(v) = \big(\varphi_i(u) - \varphi_i(v)\big)^+.$$

Утверждение (1.3) доказано. Аналогично устанавливается справедливость (1.4). Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть u — обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3) *главы* 1, *функция η принадлежит пространству $C^1(R^1)$ и удовлетворяет следующим условиям: η' монотонна и $|\eta''(\xi)| \le k$; знакопостоянная функция γ из пространства $C_0^\infty((-\infty,T], C^\infty(\Omega))$ и произвольная функция $v \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ таковы, что*

$$\eta'(u - v)\,\gamma \ \in \overset{\circ}{V}\ (0,T). \tag{1.5}$$

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_0^T \langle\, J(u)\,,\ \eta'(u-v)\,\gamma\,\rangle_*\, dt \ = \tag{1.6}$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(\Phi^1_\eta(u_0,\, v) \;-\Phi^1_\eta(u, v)\right) \frac{\partial \gamma}{\partial t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \left(\Phi^2_\eta(u_0, v) - \Phi^2_\eta(u, v)\right) \frac{\partial \gamma}{\partial t}\, ds\, dt\,.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда η' монотонно возрастающая. Обозначим

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(u(t)) \;-\; \varphi_1(u(t-\tau)}{\tau} \eta'(u(t) - v)\, \gamma\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(u(t)) - \varphi_2(u(t-\tau)}{\tau} \eta'(u(t) - v)\, \gamma\, ds\, dt\,.$$

Используя неравенство (1.2) в случае, когда функция $u = u$, $\tilde{u} = u(t-\tau)$, нетрудно получить для I оценку вида

$$I \geq \frac{1}{\tau} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(\Phi^1_\eta(u(t), v) - \Phi^1_\eta(u(t-\tau), v)\right) \gamma\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\tau} \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \left(\Phi^2_\eta(u(t), v) - \Phi^2_\eta(u(t-\tau), v)\right) \gamma\, ds\, dt\,.$$

Полагая $u(t) = u_0$ при $t \leqslant 0$, полученное неравенство преобразуем следующим образом

$$I \geq -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Phi^1_\eta(u, v) \frac{\gamma(t+\tau) - \gamma(t)}{\tau}\, dx\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Phi^2_\eta(u, v) \frac{\gamma(t+\tau) - \gamma(t)}{\tau}\, ds\, dt + \tag{1.7}$$

$$+ \int\limits_\Omega \Phi^1_\eta(u, v) \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \gamma\ dt\right) dx + \int\limits_\Pi \Phi^2_\eta(u_0, v) \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \gamma\ dt\right) ds\,.$$

Далее докажем справедливость следующего предельного соотношения

$$\int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(u(t)) - \varphi_1(u(t-\tau))}{\tau}\, z\, dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(u(t)) - \varphi_2(u(t-\tau))}{\tau}\, z\, ds \Big\}\, dt \to$$

$$\to \int\limits_0^T \langle J(u), z\rangle_*\, dt \quad \text{при } \tau \to 0 \quad \forall z \in \overset{\circ}{V}(0,T)\,. \tag{1.8}$$

Для его доказательства рассмотрим последовательность функционалов $\{G_\tau\}$, значение которых на элементе $z \in \overset{\circ}{V}(0,T)$ определено формулой

$$\langle G_\tau(u), z\rangle_* = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(u(t)) - \varphi_1(u(t-\tau))}{\tau}\, z(t)\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(u(t)) - \varphi_2(u(t-\tau))}{\tau}\, z(t)\, dx\, dt\,.$$

Докажем, что

$$\|G_\tau\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*} \leqslant \text{const.} \tag{1.9}$$

Поскольку $u(t) = u(0)\ \ \forall t \in [-\tau, 0]$, то

$$\Big|\langle G_\tau(u), z\rangle_*\Big| = \Big|\int\limits_\tau^T \int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(u(t)) - \varphi_1(u(t-\tau))}{\tau}\, z(t)\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_\tau^T \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(u(t)) - \varphi_2(u(t-\tau))}{\tau}\, z(t)\, dx\, dt\Big|.$$

Или

$$\Big|\langle G_\tau(u), z\rangle_*\Big| = \Big|\frac{1}{\tau}\int\limits_\tau^T \int\limits_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial \xi}\Big\{ \int\limits_\Omega \varphi_1(u(\xi)) z(t)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u(\xi))z(t)\,dx\Big\}\,d\xi dt\Big| = \Big|\frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle J(u(\xi))\,,\,z(t)\rangle_* d\xi dt\Big|.$$

Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Big|\langle G_\tau(u), z\rangle_*\Big| = \Big|\frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)}\langle J(u(\xi)), z(t)\rangle_*\,dtd\xi\Big| =$$

$$= \Big|\frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{T}\langle J(u(\xi)),\int\limits_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} z(t)\,dt\rangle_*\,d\xi\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\tau}\|J(u)\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*}\,\|\int\limits_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} z(t)\,dt\|_{V(0,T)}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\,\frac{1}{\tau}\int\limits_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} z(t)\,dt\,\|_{V(0,T)} \leqslant c\,\|z(t)\|_{V(0,T)}.$$

Таким образом оценка (1.9) доказана. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\tau'\}\subset\{\tau\}$ такая, что

$$G_{\tau'} \rightharpoonup G \quad \text{в} \quad (\overset{\circ}{V}(0,T))^*. \tag{1.10}$$

Докажем, что

$$G = \int\limits_{0}^{T}\langle J(u(t))\,,\,\cdot\rangle_*\,dt\,. \tag{1.11}$$

Для этого запишем следующее легко проверяемое равенство

$$\langle G_\tau(u), z\rangle_* = -\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\varphi_1(u(t))z_t\,dx\,dt -$$

$$-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u(t))z_t\,dx\,dt + \frac{1}{\tau}\int\limits_{T-\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}\varphi_1(u(t))z(t+\tau)\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_{T-\tau}^{T}\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u(t))z(t+\tau)\,dx\,dt\,-\,\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\Omega}\varphi_1(u(t))z(t+\tau)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u(t))z(t+\tau)\,dx\,dt, \qquad (1.12)$$

здесь z — произвольная функция из $C_0^\infty(Q_T)$. Заметим, что по определению функции z

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{T-\tau}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\varphi_i(u(t))z(t+\tau)\,dx\,dt\,=0,\quad i=1,2. \qquad (1.13)$$

Докажем, что при $\tau\,\to\,0$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\Bigg\{\int\limits_{\Omega}\varphi_1(u(t))z(t+\tau)\,dx\,+\,\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u(t))z(t+\tau)\,dx\Bigg\}dt\,\to\,0. \quad (1.14)$$

Поскольку $u(t)\,=\,u(0)$ для любого $t\,\in\,[-\tau,0]$, а z — гладкая функция, то

$$\Psi(t)=\int\limits_{\Omega}\varphi_1(u(0))z(t+\tau)dx+\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u(0))z(t+\tau)dx$$

непрерывна по t, следовательно, (1.14) имеет место.

Далее, в равенстве (1.12), учитывая соотношения (1.10), (1.13), (1.14), перейдем к пределу при $\tau\to0$. В результате получим

$$\langle G,z\rangle_*\,=\,-\int\limits_{0}^{T}\Bigg\{\int\limits_{\Omega}\varphi_1(u)\frac{\partial z}{\partial t}\,dx\,+\,\int\limits_{\Pi}\varphi_2(u)\frac{\partial z}{\partial t}\,dx\Bigg\}\,dt.$$

Из последнего равенства следует (1.11), а, следовательно, и (1.8).

Далее, учитывая (1.8), в неравенстве (1.7) перейдем к пределу при $\tau\to0$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{0}^{T}\langle J(u),\eta'(u-v)\gamma\rangle_*dt\geq \qquad (1.15)$$

$$\geq -\int\limits_0^T \left\{ \int\limits_\Omega \Phi^1_\eta(u,v)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\,dx + \int\limits_\Pi \Phi^2_\eta(u,v)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\,ds \right\} dt +$$

$$+\int\limits_\Omega \Phi^1_\eta(u_0,v)\,\gamma(x,0)\,dx \;+\; \int\limits_\Pi \Phi^2_\eta(u_0,v)\,\gamma(s,0)\,ds\,.$$

Для получения обратного (1.15) неравенства рассмотрим выражение

$$I_1 = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{\varphi_1(u(t+\tau)) - \varphi_1(u(t))}{\tau} \eta'(u(t)-v)\gamma\; dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \frac{\varphi_2(u(t+\tau)) - \varphi_2(u(t))}{\tau}\; \eta'(u(t)-v)\gamma\; dsdt.$$

I_1 оценим с помощью неравенства (1.1), полагая, что $\tilde{u} = u(t)$, $u = u(t+\tau)$. Остальная часть доказательства повторяет предыдущий случай. В случае, когда η' монотонно убывающая, рассуждения аналогичные. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть u — обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3) *главы* 1, *тогда при любых функциях $z \in V \cap L_{\alpha_1}$, η, γ, удовлетворяющих условиям леммы* 1.3, *имеет место равенство*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \bigl(\Phi^1_\eta(u_0,z) - \Phi^1_\eta(u,z)\bigr)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\,dx\,dt + \tag{1.16}$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \bigl(\Phi^2_\eta(u_0,z) - \Phi^2_\eta(u,z)\bigr)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\,ds\,dt +$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \mathbf{ak_i}(u)\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta'(u-z)\gamma)\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \mathbf{ak}_\Pi(u)\,\frac{\partial}{\partial s}(\eta'(u-z)\gamma)\,ds\,dt \;=$$

$$= \int\limits_0^T \langle f_1, \eta'(u-z)\gamma\rangle\, dt + \int\limits_0^T \langle f_2, \eta'(u-z)\gamma\rangle_\Pi\, dt\,,$$

здесь и далее для сокращения записей используются следующие обозначения $\mathbf{ak_i}(w) = a_i(x,w)\, k_i(x,\nabla w)$, $\mathbf{ak}_\Pi(w) = a_\Pi(s,w) k_\Pi\big(s, \dfrac{\partial w}{\partial s}\big)$.

Доказательство. Заметим, из условий леммы следует, что функция $\eta'(u-z)\,\gamma \in \overset{\circ}{V}(0,T)$. Поэтому в равенстве (1.16) главы 1 выберем $v = \eta'(u-z)\gamma$ и воспользуемся утверждением леммы 1.3. В результате получим (1.16). Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть u — обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3) *главы 1, v — гладкая неотрицательная функция. Тогда для любого $t' \in [0,T]$ при $\varepsilon \to 0$ справедливы следующие предельные соотношения*

$$\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^{t'} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u(\varepsilon t)) - \varphi_i(u_0)\big)^+ v\, dx\, dt \to 0, \tag{1.17}$$

$$\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^{t'} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u(\varepsilon t))\big)^+ v\, dx\, dt \to 0\,. \tag{1.18}$$

Здесь $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \Pi$.

Доказательство. Рассмотрим сумму интегралов

$$I = \sum_{i=1}^2 \int\limits_0^{t'} \int\limits_{\Omega_i} \Phi^i_{\eta_\delta}(u(\varepsilon t), u_0)\, v\, dx\, dt,$$

здесь η_δ имеет тот же вид, что и в лемме 1.2. Используя вид функционалов $\Phi^i_{\eta_\delta}$, запишем I в виде

$$I = \sum_{i=1}^2 \Big\{ \int\limits_0^{t'} \int\limits_{\Omega_i^+} \int\limits_{u_0}^{u(\varepsilon t)} {\eta_\delta}'(\xi - u_0)\, {\varphi_i}'(\xi)\, v\, d\xi\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t'} \int\limits_{\Omega_i^-} \int\limits_{u_0}^{u(\varepsilon t)} {\eta_\delta}'(\xi - u_0)\, {\varphi_i}'(\xi)\, v\, d\xi\, dx\, dt + \tag{1.19}$$

$$+\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i^\delta}\int\limits_{\bar u_0}^{u(\varepsilon t)}\eta_\delta{}'(\xi-u_0)\,\varphi_i{}'(\xi)\,v\,d\xi\,dx\,dt\Big\}\equiv\sum_{i=1}^{2}\big(I_{1,i}+I_{2,i}+I_{3,i}\big),$$

где

$$\Omega_i^+=\{x\in\Omega_i\mid u(x,\varepsilon t)-u_0(x)\ge\delta>0\}\,,$$
$$\Omega_i^-=\{x\in\Omega_i\mid u(x,\varepsilon t)-u_0(x)\le 0\}\,,$$
$$\Omega_i^\delta=\{x\in\Omega_i\mid 0<u(x,\varepsilon t)-u_0(x)\le\delta\}\,.$$

Ясно, что $\Omega_i=\Omega_i^+\cup\Omega_i^-\cup\Omega_i^\delta$. Из определения функции η_δ и областей Ω_i^-, Ω_i^+ следует

$$I_{1,i}=\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i^+}\Big(\varphi_i(u(\varepsilon t))-\varphi_i(u_0)\Big)^+v\,dxdt,$$

$$I_{2,i}=\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i^-}\Big(\varphi_i(u(\varepsilon t))-\varphi_i(u_0)\Big)^+v\,dxdt$$

Поэтому (1.19) можно записать в виде

$$I=\sum_{i=1}^{2}\Big\{\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u(\varepsilon t))-\varphi_i(u_0))^+\,v\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i^\delta}\int\limits_{\bar u_0}^{\bar u(\varepsilon t)}\Big(\eta_\delta{}'(\xi-u_0)-1\Big)\varphi_i{}'(\xi)\,v\,d\xi\,dx\,dt\Big\},$$

или

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u(\varepsilon t))-\varphi_i(u_0))^+\,v\,dx\,dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i}\Phi^i_{\eta_\delta}(u(\varepsilon t),u_0)v\,dx\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i^\delta}\int\limits_{u_0}^{u(\varepsilon t)}\Big(1-\eta_\delta{}'(\xi-u_0)\Big)\varphi_i{}'(\xi)\,v\,d\xi\,dx\,dt\,.$$

Покажем, что каждое из J_i может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора параметров ε и δ. Заметим, что из определения области Ω_i^δ, монотонности функций φ_i и неравенства $0 \le \eta_\delta{}' \le 1$, следует

$$0 \le J_2 \le \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} \int_{u_0}^{u_0+\delta} \varphi_i{}'(\xi)\, d\xi\, v\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_0))^+\, v\, dx\, dt.$$

Поскольку функции φ_i непрерывны, то J_2 может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора δ.

Для оценки J_1 запишем равенство (1.6) полагая, что $v = u_0$, $\eta = \eta_\delta$, $\gamma(x,t) = v(x)w(t)$, где v — неотрицательная функция из пространства $C_0^\infty(\Omega)$, $w \in C_0^\infty(-\infty, t')$. В результате будем иметь

$$\int_0^{t'} \langle J(u)\,,\, \eta_\delta{}'(u - u_0)\, v\rangle_*\, w\, dt = -\sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} \Phi_{\eta_\delta}^i(u, u_0) v \frac{dw}{dt}\, dx\, dt. \quad (1.20)$$

Очевидно, что это равенство будет иметь место и для любой функции $w \in W_\infty^1(0, t')$ такой, что $w(t') = 0$. Положим в (1.20)

$$w(t) = \begin{cases} t' - t, & 0 < t < t', \\ 0 & t \ge t', \end{cases}$$

а $t' = \varepsilon t^*$. В результате, учитывая, что $w' = -1$ для любого $t \in (0, \varepsilon t^*)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^{\varepsilon t^*} \int_{\Omega_i} \Phi_{\eta_\delta}^i(u, u_0) v\, dx\, dt \;=\; \int_0^{\varepsilon t^*} \langle\, J(u)\,,\, \eta_\delta{}'(u - u_0) v\rangle_*\, w\, dt \equiv \tilde{I}. \quad (1.21)$$

Поскольку $|w(t)| \le \varepsilon\ \forall t \in (0, \varepsilon t^*)$, оценим правую часть неравенства (1.21) следующим образом

$$|\tilde{I}| \le \varepsilon \int_0^{\varepsilon t^*} \int_{\Omega_i} |\langle\, J(u)\,,\, \eta_\delta{}'(u - u_0)\, v\rangle_*|\, dt.$$

Заметим, что

$$|\langle\, J(u)\,,\, \eta_\delta{}'(u-u_0)\, v\rangle_*| \le \|J(u(t)\|_{V^*}\|\eta_\delta{}'(u-u_0)\, v\|_V,$$

$$\|\eta_\delta{}'(u-u_0)\, v\|_V \le \frac{c}{\delta}\, M(v)\, (\|u\|_V + \|u_0\|_V)\,,$$

где

$$M(v) \;=\; \max\Big\{\max_{x\in\Omega}|v(x)|,\; \max_{x\in\Omega}|\frac{\partial v}{\partial x_1}|,\; \max_{x\in\Omega}|\frac{\partial v}{\partial x_2}|,\; \max_{x\in\Pi}|\frac{\partial v}{\partial s}|\Big\}.$$

Поэтому

$$|\tilde I| \;\le\; \frac{\varepsilon}{\delta}\int\limits_0^{\varepsilon t^*} M(v)\, \big(\|u\|_V + \|u_0\|_V\big)\, dt\,.$$

Поскольку в последнем неравенстве выражение, стоящее в фигурных скобках является функцией из $L_1(0,T)$, то для $\tilde I$ справедлива оценка

$$|\tilde I| \le \frac{\varepsilon}{\delta}\nu(\varepsilon),$$

причем $\nu(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Таким образом из (1.21) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{\varepsilon t^*}\int\limits_{\Omega_i} \Phi^i_{\eta_\delta}(u,u_0)v\, dx\, dt \;\le\; \frac{\nu(\varepsilon)}{\delta}.$$

Левая часть полученного неравенства, очевидно, совпадает с J_1, а правая часть стремиться к нулю, если выбрать, например, $\delta=\sqrt{\nu(\varepsilon)}$. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть функции φ_i, a_i, k_i, a_Π, k_Π удовлетворяют условиям* (1.4)–(1.14) *главы* 1, *кроме того, для любых ξ_1, $\xi_2\in R^2$ имеют место неравенства*

$$|a_i(x,\xi_1)-a_i(x,\xi_2)| \le \mu_1|\xi_1-\xi_2|, \tag{1.22}$$

$$|a_\Pi(x,\xi_1)-a_\Pi(x,\xi_2)| \le \mu_2|\xi_1-\xi_2|. \tag{1.23}$$

Тогда при любых $f_1\in L_1(Q_T)$, $f_2\in L_1(\Pi_T)$, $u_0\in V\cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, $u^D\in V\cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) *главы* 1 *из пространства $W(0,T)$ определяется единственным образом.*

Доказательство. Предположим, что существует два обобщенных решения u_1, u_2. Очевидно, что для каждого из них справедливо равенство (1.16). Пусть $\widetilde\gamma$ — произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty((-\infty,T]^2)$. По условию теоремы функция u_1-u_2 принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}(0,T)$. Следовательно, функции $\widetilde{\gamma}\,\eta'_\delta(u_1-u_2)$ и $\widetilde{\gamma}\,\bar{\eta}'_\delta(u_1-u_2)$ удовлетворяют условию (1.5). Воспользовавшись этим, запишем (1.16) для $u_1(x,t_1)$, полагая $\eta(\xi)=\eta_\delta(\xi)$, $z=u_2(x,t_2)$, $\gamma(x,t_1)=\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)$. Полученное равенство проинтегрируем по параметру t_2. Затем запишем (1.16) для $u_2(x,t_2)$, выбирая при этом $\gamma(x,t_2)=\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)$, $\eta(\xi)=\bar{\eta}_\delta(\xi)$, $z=u_1(x,t_1)$, и проинтегрируем по переменной t_1. Складывая полученные равенства и учитывая, что $\bar{\eta}'_\delta(\xi)=-\eta_\delta{}'(\xi)$, будем иметь

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big\{\Phi^1_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))- \tag{1.24}$$

$$-\Phi^1_{\eta_\delta}(u_1(t_1),u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)}{\partial t_1}dxdt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big\{\Phi^1_{\bar{\eta}_\delta}(u_0,u_1(t_1))-$$

$$-\Phi^1_{\bar{\eta}_\delta}(u_2(t_2),u_1(t_1))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)}{\partial t_2}dxdt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\Phi^2_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))-$$

$$-\Phi^2_{\eta_\delta}(u_1(t_1),u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)}{\partial t_1}dsdt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\Phi^2_{\bar{\eta}_\delta}(u_0,u_1(t_1))-$$

$$-\Phi^2_{\bar{\eta}_\delta}(u_2(t_2),u_1(t_1))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)}{\partial t_2}dsdt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t_1))-$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(t_1,t_2))dxdt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t_1)) -$$

$$-\,\mathbf{ak}_\Pi(u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial}{\partial s}(\eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(t_1,t_2))\,ds\,dt_1\,dt_2 \;=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^T\langle f_1(t_1)-f_1(t_2),\eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(t_1,t_2))\rangle dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\langle f_2(t_1)-f_2(t_2),\eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)\rangle_\Pi dt_1dt_2,$$

здесь $\Delta z = u_1(t_1) - u_2(t_2)$.

Дальнейшее доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе в равенстве (1.24) совершаем предельный переход при $\delta \to 0$. При обосновании предельного перехода в слагаемых, содержащих функционалы $\Phi^i_{\eta_\delta}$ или $\Phi^i_{\bar\eta_\delta}$ воспользуемся леммой 1.2 и теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В результате, например, получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\Phi^i_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_1}dxdt_1dt_2 \to$$

$$\to\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(t_2))\big)^+\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_1}dxdt_1dt_2,$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\Phi^i_{\bar\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_1}dxdt_1dt_2 \;\to$$

$$\to\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_2(t_2))-\varphi_i(u_0)\big)^+\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_1}dxdt_1dt_2.$$

При обосновании предельного перехода в правой части равенства (1.24) следует учесть, что при $\delta \to 0$

$$\eta'_\delta(\xi) \to H(\xi) \;=\; \begin{cases} 1, & \xi \;>\; 0, \\ 0, & \xi \;\le\; 0, \end{cases} \qquad \forall \xi \in R^1.$$

Рассмотрим, далее, слагаемые, содержащие пространственные операторы. Имеем

$$I = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{ a_i(x, u_1(t_1)) k_i(x, \nabla u_1(t_1)) -$$

$$- a_i(x, u_2(t_2)) k_i(x, \nabla u_2(t_2)) \Big\} \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\delta{}'(\Delta z) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_1(t_1)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t_1)) -$$

$$- k_i(x, \nabla u_2(t_2)) \Big\} \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \eta_\delta{}''(\Delta z)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Delta a_i \; k_i(x, \nabla u_2(t_2)) \; \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \eta_\delta{}''(z) dx = I_1 + I_2.$$

здесь $\Delta a_i = a_i(x, u_1(t_1)) - a_i(x, u_2(t_2))$. Из (1.11), (1.14) главы 1 и неотрицательности $\eta_\delta{}''$ следует, что $I_1 \geq 0$. Тогда для I имеет место неравенство

$$I \;\geq\; I_2\,.$$

Докажем, что $I_2 \to 0$ при $\delta \to 0$. Используя (1.22) и условия на рост функций k_i, получим

$$|I_2| \leq c\mu \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} |\Delta z| \eta_\delta{}''(\Delta z) \Big\{ 1 + \sum_{i=1}^{2} \Big| \frac{\partial u_2(t_2)}{\partial x_i} \Big|^{p_1 - 1} \Big\} \Big| \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \Big| dx. \quad (1.25)$$

Нетрудно видеть, что

$$|\xi|\, \eta_\delta{}''(\xi) \;=\; \frac{|\xi|}{\delta}\, \eta''\Big(\frac{\xi}{\delta}\Big), \quad |\xi|\, \eta_\delta{}''(\xi) \;\leq 1 \quad \forall \xi \in R^1.$$

Поэтому подинтегральная функция в правой части неравенства (1.25) имеет мажоранту из $L_1(\Omega)$. Кроме того, при $\delta \to 0$

$$\frac{|\xi|}{\delta}\, \eta''\Big(\frac{\xi}{\delta}\Big) \to 0 \;\text{ п. в. в }\; R^1.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе будем иметь

$$\lim_{\delta \to 0} I_2 = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0} I \geq 0.$$

В результате предельного перехода по δ в (1.24) получаем неравенство вида

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(t_2))\big)^+\tilde\gamma(0,t_2)\,dx\,dt_2-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_1(t_1))\big)^+\tilde\gamma(t_1,0)\,dx\,dt_1- \tag{1.26}$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1(t_1))\;-\;\varphi_i(u_2(t_2))\big)^+\big(\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_1}+\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_2}\big)\,dx\,dt_1\,dt_2\;\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(f_i(t_1)-f_i(t_2))H(u_1-u_2)\tilde\gamma\,dx\,dt_1\,dt_2\,.$$

Далее, пусть $\gamma\in C_0^\infty(-\infty,T/2)$ и $q\in C_0^\infty(R^1)$ — неотрицательные функции, при этом $q(-\xi)=q(\xi)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\xi)d\xi=1$. В неравенстве (1.26) выберем

$$\tilde\gamma(t_1,t_2)\;=\;\frac{1}{\varepsilon}\,q\big(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\big)\,\gamma\big(\frac{t_1+t_2}{2}\big),$$

введем новые переменные

$$t=t_1,\;\;\tau=\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}.$$

В результате, учитывая, что

$$\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_1}+\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t_2}\;=\;\frac{1}{\varepsilon}\,q\Big(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\Big)\,\frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}\bigg|_{\xi=\frac{t_1+t_2}{2}},$$

будем иметь

$$-\sum_{i=1}^{3}I_i\equiv-\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T/\varepsilon}\int_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_0)\,-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\Big)^+\,q(\tau)\gamma\big(\frac{\varepsilon\tau}{2}\big)dxd\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_0)\;-\;\varphi_i(u_1(\varepsilon\tau))\Big)^{+}q(\tau)\gamma(\frac{\varepsilon\tau}{2})dxd\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))-$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^{+}q(\tau)\gamma'(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})dxdtd\tau\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}H(u_1(t)-u_2(t-\varepsilon\tau))(f_i(t)-$$

$$-f_i(t-\varepsilon\tau))q(\tau)\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})dxdtd\tau. \tag{1.27}$$

Следующий этап доказательства — предельный переход по параметру ε в неравенстве (1.27). Докажем, что

$$I_1\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0$$

Для этого представим I_1 в виде следующей суммы

$$I_1=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{M}q(\tau)\int\limits_{\Omega_i}\left(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\right)^{+}\gamma(\frac{\varepsilon\tau}{2})dxd\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{M}^{T/\varepsilon}q(\tau)\int\limits_{\Omega_i}\left(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\right)^{+}\gamma(\frac{\varepsilon\tau}{2})dxd\tau\equiv$$

$$\equiv I_{1,1}+I_{1,2}.$$

Покажем, что каждое $I_{1,i}$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора M и ε. Учитывая, что $(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^{+}$ принадлежит $L_\infty(0,T/\varepsilon;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$, для $I_{1,2}$ получим оценку

$$I_{1,2}\le c\int\limits_{M}^{T/\varepsilon}q(\tau)d\tau. \tag{1.28}$$

Выберем M так, что правая часть (1.28) была не больше наперед заданной малой величины ρ. Рассмотрим $I_{1,1}$, имеем

$$I_{1,1} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^M q(\tau) \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_0) -$$

$$-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\Big)^+ (\gamma(\frac{\varepsilon\tau}{2}) - \gamma(0))\, dx\, d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^M q(\tau) \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\Big)^+ \gamma(0)\, dx\, d\tau\,.$$

Используя непрерывность функций γ, q и лемму 1.5, нетрудно доказать, что существует малое ε_0, такое, что

$$I_{1,1} \le \rho \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Из выше сказанного следует, что и $I_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогичный результат имеет место для I_2.

Докажем, далее, что

$$I_3 \to \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dx\, dt\, d\tau \ \equiv \ I_4\,.$$

Заметим, что

$$I_4 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\tau) \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \ \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dx\, dt\, d\tau.$$

Рассмотрим разность $I_3 - I_4$. Имеем

$$I_3 - I_4 = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{M} q(\tau) \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\Big)^+ \frac{d\gamma}{dt}\, dx\, dt\, d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{M}^{\infty} q(\tau) \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_1(t)) \ - \ \varphi_i(u_2(t))\Big)^+ \frac{d\gamma}{dt}\, dx\, dt\, d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-T/\varepsilon}^{-M} q(\tau)\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))- \tag{1.29}$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+\frac{d}{dt}\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{M}^{T/\varepsilon} q(\tau)\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))-$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+\frac{d}{dt}\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-M}^{M} q(\tau)\int\limits_{0}^{\max(0,\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))-$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+\frac{d}{dt}\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-M}^{M} q(\tau)\int\limits_{\min(T,T+\varepsilon\tau)}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))-$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+\frac{d}{dt}\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-M}^{M} q(\tau)\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Big\{\Big(\varphi_i(u_1(t))\ -\ \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+\frac{d}{dt}\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2})-$$

$$-\Big(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t))\Big)^+\frac{d\gamma}{dt}\Big\}\,dx\,dt\,d\tau\,.$$

Нетрудно показать по аналогии с предыдущим случаем, что первые четыре интеграла в правой части (1.29) могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора M. Что касается следующих двух слагаемых, то их значения малы при малом ε. Последнее слагаемое (обозначим его $\tilde{J}$) в правой части (1.29) представим в виде

$$\tilde{J}=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-M} q(\tau)\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))-$$

$$- \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+ \left(\frac{d}{dt}\gamma(t-\frac{\varepsilon\tau}{2}) - \frac{d\gamma(t)}{dt}\right) dx\,dt\,d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-M} q(\tau) \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big\{ (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+ -$$

$$- \Big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\Big)^+ \Big\} \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dx\,dt\,d\tau.$$

Первый интеграл правой части последнего равенства стремится к нулю, поскольку функция γ — гладкая, а функции $\varphi_i(u_1)$ и $\varphi_i(u_2)$ принадлежат пространствам $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$. Второй интеграл также стремится к нулю по свойству непрерывности в целом интегрируемых по Лебегу функций. Таким образом

$$I_3 - I_4 \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Аналогично доказывается, что слагаемые, содержащие функции f_i, стремятся к нулю.

Таким образом в результате предельного перехода в (1.27) по параметру ε получим неравенство

$$-\sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2)\Big)^+ \frac{d\gamma(t)}{dt} dxdt \le 0. \qquad (1.30)$$

Ясно, что (1.30) будет иметь место и для функции $\gamma(t) \in W^1_\infty(0,T/2)$ такой, что $\gamma(T/2) = 0$. Выберем в (1.30)

$$\gamma(t) \ = \ \begin{cases} t^* - t, & 0 \ \le \ t \ \le \ t^*, \\ 0, & t \ \ge \ t^*, \end{cases}$$

где $t^* \in [0, T/2]$. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^{t^*} \int\limits_{\Omega} \Big(\varphi_1(u_1) - \varphi_1(u_2)\Big)^+ dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t^*} \int\limits_{\Pi} \Big(\varphi_2(u_1) - \varphi_2(u_2)\Big)^+ ds\,dt \ \le \ 0.$$

Из последнего неравенства в силу монотонности φ_i и произвольности t^* следует, что $u_1 \le u_2$ почти всюду в $Q_{T/2}$. Поскольку функции

u_1, u_2 во всех рассуждениях можно поменять местами, то из последнего неравенства следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) главы 1 на $[0, T/2]$. Чтобы получить единственность на $[0, T]$, нужно уравнения (1.1)–(1.3) главы 1 рассмотреть на $[0, 2T]$, полагая $f_i(t) = 0$ при $t > T$. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть функции* φ_i, a_i, k_i, a_Π, k_Π *удовлетворяют перечисленным в теореме 1.1 условиям. Кроме того,* $f_1 \in L_1(Q_T)$, $f_2 \in L_1(\Pi_T)$, $u^D \in W(0, T)$, $u_0 \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$. *Тогда обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3) *главы* 1 *из пространства* $W(0, T)$ *определяется единственным образом.*

Доказательство. Следует отметить, что доказательство этой теоремы структурно совпадает с доказательством теоремы 1.1. Также предполагается, что существует два обобщенных решения u_1, u_2, и для каждого из них справедливо равенство (1.16). Но здесь полагается, что $\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)$ — произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty((-\infty, T]^2, C_0^\infty(\Omega))$. При таком выборе $\widetilde{\gamma}$ функции $\widetilde{\gamma}\,\eta_\delta'(u_1 - u_2)$ и $\widetilde{\gamma}\,\bar{\eta}_\delta'(u_1 - u_2)$ также удовлетворяют условию (1.5). Используя это, запишем (1.16) для $u_1(x, t_1)$, полагая, что $\eta(\xi) = \eta_\delta(\xi)$, $z = u_2(x, t_2)$, $\gamma(x, t_1) = \widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)$. Полученное равенство проинтегрируем по параметру t_2. Затем запишем (1.16) для функции $u_2(x, t_2)$, выбирая $\gamma(x, t_2) = \widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)$, $\eta(\xi) = \bar{\eta}_\delta(\xi)$, $z = u_1(x, t_1)$, и проинтегрируем по переменной t_1. Складывая полученные равенства и учитывая, что $\bar{\eta}_\delta'(\xi) = -{\eta_\delta}'(\xi)$, будем иметь

$$\int_0^T\int_0^T\int_\Omega\Big\{\Phi^1_{\eta_\delta}(u_0, u_2(t_2)) - \tag{1.31}$$

$$-\Phi^1_{\eta_\delta}(u_1(t_1), u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)}{\partial t_1}dx dt_1 dt_2 +$$

$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Omega\Big\{\Phi^1_{\bar{\eta}_\delta}(u_0, u_1(t_1)) -$$

$$-\Phi^1_{\bar{\eta}_\delta}(u_2(t_2), u_1(t_1))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)}{\partial t_2}dx dt_1 dt_2 +$$

$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Pi\Big\{\Phi^2_{\eta_\delta}(u_0, u_2(t_2)) -$$

$$-\Phi^2_{\eta_\delta}(u_1(t_1), u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)}{\partial t_1}ds dt_1 dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\Phi^2_{\bar{\eta}_\delta}(u_0, u_1(t_1))-$$

$$-\Phi^2_{\bar{\eta}_\delta}(u_2(t_2), u_1(t_1))\Big\}\frac{\partial\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)}{\partial t_2}ds dt_1 dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) -$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2))dx dt_1 dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t_1)) -$$

$$-\mathbf{ak}_\Pi(u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial}{\partial s}(\eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2))\, ds\, dt_1\, dt_2 =$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^T\langle f_1(t_1) - f_1(t_2), \eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2))\rangle dt_1 dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\langle f_2(t_1) - f_2(t_2), \eta_\delta{}'(\Delta z)\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2)\rangle_\Pi dt_1 dt_2.$$

Дальнейшее доказательство теоремы состоит также из двух этапов: предельных переходов по δ и ε. Обоснование предельного перехода при $\delta \to 0$ в слагаемых равенства (1.31), не содержащих пространственные операторы, такое же, как и в теореме 1.1.

Рассмотрим слагаемое, содержащее пространственный оператор. Имеем

$$I = \int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) -$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\eta_\delta{}'(\Delta z)}{\partial x_i}\widetilde{\gamma}\, dx\, dt_1 dt_2 =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x, u_1(t_1)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t_1)) -$$

$$-k_i(x, \nabla u_2(t_2)) \Big\} \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \eta_\delta''(\Delta z) \widetilde{\gamma}\, dx\, dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big\{ a_i(x, u_1(t_1)) -$$

$$- a_i(x, u_2(t_2)) \Big\} k_i(x, \nabla u_2(t_2)) \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \eta_\delta''(\Delta z) \widetilde{\gamma}\, dx\, dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) -$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2)) \Big\} \eta_\delta'(\Delta z) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\, dx\, dt_1 dt_2 = I_1 + I_2 + I_3\,,$$

здесь $\Delta z = u_1(t_1) - u_2(t_2)$.

Из условия (1.11) главы 1 на функции k_i, неотрицательности η_δ'' и $\widetilde{\gamma}$ следует, что $I_1 \geq 0$. Тогда для I имеет место неравенство

$$I \geq I_2 + I_3.$$

Далее, используя условия теоремы на функции a_i и неравенство (1.9) главы 1, получим

$$| I_2 | \leq c_1 \beta \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 | \Delta z | \, \eta_\delta''(\Delta z) \Big\{ 1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \Big| \frac{\partial u_2(t_2)}{\partial x_i} \Big|^{p_1 - 1} \Big\} \, \Big| \frac{\partial \Delta z}{\partial x_i} \widetilde{\gamma} \Big| \, dx\, dt_1 dt_2, \tag{1.32}$$

здесь $\beta = \max\{\beta_{21}, \beta_{31}\}$. Нетрудно видеть, что

$$|z|\, \eta_\delta''(z) \leq 1 \ \ \forall z \in R^1.$$

Поэтому подынтегральная функция в правой части неравенства (1.32) ограничена интегрируемой функцией. Кроме того, при $\delta \to 0$

$$\frac{z}{\delta} \eta''(\frac{z}{\delta}) \ \to \ 0 \ \text{ п. в. в } \ R^1.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{\delta\to 0} I_2 = 0.$$

Для I_3, учитывая, что при $\delta \to 0$

$$\eta'_\delta(\xi) \to H(\xi) \ = \ \begin{cases} 1, & \xi \ > \ 0, \\ 0, & \xi \ \le \ 0, \end{cases}$$

будем иметь

$$\lim_{\delta\to 0} I_3 = \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) - \\ - \mathbf{ak_i}(u_2(t_2)) \Big\} H(\Delta z) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_i} \, dx \, dt_1 dt_2.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\delta\to 0} I_4 = \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Big\{ \mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1)) - \\ - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2)) \Big\} H(\Delta z) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial s} \, ds \, dt_1 dt_2.$$

В результате предельного перехода при $\delta \to 0$ в (1.31) получим равенство вида

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=1}^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(t_2)) \Big)^+ \widetilde{\gamma}(x, 0, t_2) \, dx \, dt_2 - \\ &- \sum_{i=1}^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_1(t_1)) \Big)^+ \widetilde{\gamma}(x, t_1, 0) \, dx \, dt_1 - \qquad (1.33) \\ &- \sum_{i=1}^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \Big(\varphi_i(u_1(t_1)) \ - \ \varphi_i(u_2(t_2)) \Big)^+ \Big\{ \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial t_1} + \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial t_2} \Big\} \, dx \, dt_1 \, dt_2 + \\ &+ \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) \ - \ \mathbf{ak_i}(u_2(t_2)) \Big\} H(\Delta z) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_i} \, dx \, dt_1 \, dt_2 + \end{aligned}$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t_1)) - \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t_2))\Big\}H(\Delta z)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}ds dt_1 dt_2 \le$$

$$\le\sum_{i=1}^2\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}(f_i(t_1)-f_i(t_2))H(\Delta z)\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1\,dt_2\,.$$

Далее, пусть $\gamma\in C_0^\infty((-\infty,T/2];C_0^\infty(\Omega))$ и q из $C_0^\infty(R^1)$ — неотрицательные функции, при этом $q(-\xi)=q(\xi)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\xi)d\xi=1$. В неравенстве (1.33) выберем

$$\widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)\;=\;\frac{1}{\varepsilon}\,q\,\Big(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\Big)\;\gamma\Big(x\,,\frac{t_1+t_2}{2}\Big),$$

и введем новые переменные

$$t=t_1,\;\;\tau=\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}.$$

Учитывая,

$$\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}=\frac{1}{\varepsilon}\,q\bigg(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\bigg)\,\frac{\partial\gamma(x,\xi)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\frac{t_1+t_2}{2}},$$

неравенство (1.33) запишем в виде

$$-\sum_{i=1}^2\int\limits_0^{T/\varepsilon}\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+\,q(\tau)\gamma\Big(x,\frac{\varepsilon\tau}{2}\Big)\,dx\,d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^2\int\limits_0^{T/\varepsilon}\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_1(\varepsilon\tau)))^+\,q(\tau)\gamma\Big(x,\frac{\varepsilon\tau}{2}\Big)\,dx\,d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^2\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\;\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\;\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_1(t))- \qquad (1.34)$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big)^+q(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\gamma\Big(x,t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\Big)\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\;\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\;\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t))-$$

$$- \mathbf{ak_i}(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big\} H(\Delta z_\varepsilon)\, q(\tau)\, \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2})\, dx\, dtd\,\tau +$$

$$+ \int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Pi} \Big\{ \mathbf{ak}_\Pi(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big\} H(\Delta z_\varepsilon) q(\tau) \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2}) dsdtd\tau \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega_i} H(\Delta z_\varepsilon) \Big\{ f_i(t) -$$

$$- f_i(t-\varepsilon\tau)\Big\}\; q(\tau)\; \gamma\big(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2}\big)\, dx\, dt\, d\tau\,,$$

здесь $\Delta z_\varepsilon = u_1(t) - u_2(t-\varepsilon\tau)$. В равенстве (1.34) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Обоснование предельного перехода во слагаемых неравенства (1.34) кроме следующих

$$\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t)) - \tag{1.35}$$

$$- \mathbf{ak_i}(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big\} H(\Delta z_\varepsilon) q(\tau) \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2}) dxdtd\tau,$$

$$\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Pi} \Big\{ \mathbf{ak}_\Pi(u_1(t)) - \tag{1.36}$$

$$- \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big\} H(\Delta z_\varepsilon) q(\tau) \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2}) dsdtd\tau,$$

содержится в доказательстве теоремы 1.1. Обоснование предельного перехода для (1.35), (1.36) аналогично предельному переходу в правой части неравенства (1.34). В результате при $\varepsilon \to 0$ из (1.34) получим

$$- \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\big)^{+} \frac{\partial\gamma(x,t)}{\partial t}(t)\, dxdt + \tag{1.37}$$

$$+ \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t)) \;-\; \mathbf{ak_i}(u_2(t))\Big\} H(\Delta z) \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t)\, dx\, dt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t))\ -\ \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t))\Big\}H(\Delta z)\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t)\,ds\,dt\ \le 0\,,$$

здесь $\Delta z\ =\ u_1(t)-u_2(t)$.

Докажем далее, что любой функции $\gamma\ \in C_0^\infty\big(C^\infty(\Omega);(-\infty,T/2]\big)$ справедливо следующее неравенство

$$-\sum_{i=1}^2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t))\big)^+\frac{\partial\gamma(x,t)}{\partial t}(t)\,dxdt+ \tag{1.38}$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t))\ -\ \mathbf{ak_i}(u_2(t))\Big\}H(\Delta z)\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t)\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t))\ -\ \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t))\Big\}H(\Delta z)\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t)\,ds\,dt\ \le 0\,.$$

С этой целью введем гладкую функцию $\chi(\xi)$ такую, что $\chi(0)=0$ и $\chi(\xi)=1$ при $\xi\ge 1$. Обозначим Ω_ρ приграничную полосу области Ω ширины ρ. В каждой точке $x\in\Omega_\rho$ определим вектор $r(x)$, направление которого таково, что $x-r(x)\in\Gamma$, а $|r(x)|=dist(x,\Gamma)$. Определим функцию

$$\chi_\rho(x_1,x_2)=\chi(\frac{|r|}{\rho}).$$

Имеем

$$\gamma(x,t)=\chi_\rho\gamma(x,t)+(1-\chi_\rho)\gamma(x,t).$$

Для краткости изложения в дальнейшем левую часть неравенства (1.37) обозначим $<T,\gamma>$. Тогда согласно (1.37) для функции $\chi_\rho\gamma$ из пространства $C_0^\infty\big((-\infty,T/2];C^\infty(\Omega)\big)$ справедливо равенство

$$<T,\chi_\rho\gamma\ >=\ 0. \tag{1.39}$$

Докажем далее, что

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}<T,(1-\chi_\rho)\gamma>\le 0. \tag{1.40}$$

Представим

$$<T,(1-\chi_\rho)\gamma>=\ J_1\ +\ J_2+J_3\ +\ J_4\ +\ J_5\,, \tag{1.41}$$

где

$$J_1 = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\big)^+ \frac{\partial\gamma}{\partial t}(1-\chi_\rho)\, dxdt,$$

$$J_2 = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t)) \, - \mathbf{ak_i}(u_2(t))\Big\}\, H(\Delta z)\, \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\,(1-\chi_\rho)\, dxdt,$$

$$J_3 = \int\limits_0^T \int\limits_{\Pi} \Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t)) \, - \, \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t))\Big\}\, H(\Delta z)\, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\,(1-\chi_\rho)\, ds\, dt,$$

$$J_4 = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t)) \, - \, \mathbf{ak_i}(u_2(t))\Big\}\, H(\Delta z)\, \gamma\, \frac{\partial}{\partial x_i}\,(1-\chi_\rho)\, dx\, dt\,,$$

$$J_5 = \int\limits_0^T \int\limits_{\Pi} \Big\{\mathbf{ak}_\Pi(u_1(t)) \, - \, \mathbf{ak}_\Pi(u_2(t))\Big\}\, H(\Delta z)\, \gamma\, \frac{\partial}{\partial s}\,(1-\chi_\rho)\, ds\, dt\,.$$

В (1.41) перейдем к пределу при $\rho \to 0$. Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и определение функции χ_ρ, нетрудно показать что

$$\lim_{\rho\to 0} J_i = 0,\ i = \overline{1,3}. \tag{1.42}$$

Докажем далее, что

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} J_4 \,\le\, 0.$$

Имеем

$$J_4 = -\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^{2} \Big\{a_i(x, u_1(t)) -$$

$$-a_i(x, u_2(t))\Big\}\, k_i(x, \nabla u_1(t))\, H(\Delta z)\, \gamma\, \chi'(\frac{|r|}{\rho})\, \frac{\partial r}{\partial x_i}\, dxdt -$$

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t))\, \Big\{k_i(x, \nabla u_1(t)) -$$

$$- k_i(x, \nabla u_2(t))\Big\}\ H(\Delta z)\ \gamma\ \chi'(\frac{|r|}{\rho})\ \frac{\partial r}{\partial x_i}\, dxdt = J_{4,1} + J_{4,2}.$$

Учитывая условия (1.9) главы 1 и (1.22), нетрудно показать, что

$$J_{4,1} \le \frac{c}{\rho}\Big(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} |u_1 - u_2|^{p_1}\, dxdt\Big)^{1/p_1}.$$

Представим Ω_ρ в виде объединения конечного числа подмножеств Ω_ρ^k, в каждом из которых можно построить локальную систему координат (σ^k, ξ^k) такую, что для любой точки $x = \alpha\,\sigma^k + \beta\,\xi^k$ из Ω_ρ^k будут справедливы следующие соотношения

$$(\sigma^k, r(x))\ >\ 1 - \varepsilon, \qquad 0\ \le \alpha \le \rho.$$

Покажем, что $J_{4,1}$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора ρ. Используя неравенства Гельдера, для $J_{4,1}$ нетрудно получить цепочку неравенств

$$J_{4,1}\ \le\ \frac{c}{\rho}\Big(\int\limits_0^T \sum_k \int\limits_{\Omega_\rho^k} \Big|\int\limits_0^\alpha \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial \nu}\, d\nu\Big|^{p_1} dxdt\Big)^{1/p_1}\ \le$$

$$\le\ \frac{c\rho^{1+1/p_1'}}{\rho}\Big(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \Big|\frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x}\Big|^{p_1} dxdt\Big)^{1/p_1}.$$

Из последнего неравенства следует

$$\lim_{\rho \to 0} J_{4,1} = 0. \tag{1.43}$$

Рассмотрим $J_{4,2}$. Представим $\Omega_\rho = \Omega_\rho^1 \bigcup \Omega_\rho^2 \bigcup \Omega_\rho^3$, где

$$\Omega_\rho^1 = \Big\{x \ni \Omega_\rho : u_1(x) - u_2(x) \le 0\Big\},$$

$$\Omega_\rho^2 = \Big\{x \ni \Omega_\rho : u_1(x) - u_2(x) > 0,\ \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial r} \ge 0\Big\},$$

$$\Omega_\rho^3 = \Big\{x \ni \Omega_\rho : u_1(x) - u_2(x) > 0,\ \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial r} \le 0\Big\}.$$

Измеримость множеств Ω_ρ^k следует из включения $u_1 - u_2 \in \overset{\circ}{W}(0,T)$. В дальнейшем для краткости изложения обозначим

$$F(x,t) = \sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ (k_i(x, \nabla u_1(t)) -$$

$$-k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \gamma(x,t) \chi'(\frac{|r|}{\rho}) \frac{\partial r}{\partial x_i}.$$

Заметим, что $H(u_1(x,t) - u_2(x,t)) = 0$ для $\forall x \in \Omega_\rho^1$, поэтому

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^T \int_{\Omega_\rho^1} F(x,t) H(u_1 - u_2)\, dxdt = 0, \quad \forall \rho. \tag{1.44}$$

Далее, поскольку

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) - k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \frac{\partial (u_1(t) - u_2(t))}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial (u_1(t) - u_2(t))}{\partial r} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) -$$

$$-k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \frac{\partial r(x))}{\partial x_i},$$

то из условий (1.8), (1.11) следует, что в точках Ω_ρ^2

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ (k_i(x, \nabla u_1(t)) - k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \frac{\partial r(x))}{\partial x_i} \geq 0.$$

Учитывая, что $H(u_1(x,t) - u_2(x,t)) = 1$ для $\forall x \in \Omega_\rho^2$, будем иметь

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^T \int_{\Omega_\rho^2} F(x,t)\, dxdt \leq 0, \quad \forall \rho. \tag{1.45}$$

Докажем далее, что

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \int_0^T \int_{\Omega_\rho^3} F(x,t)\, dxdt = 0. \tag{1.46}$$

Пусть $\Gamma^3_\rho = \Gamma \bigcap \partial\Omega^3_\rho$. [1)] Если Γ^3_ρ — пустое множество, то справедливость (1.46) очевидна. Пусть Γ^3_ρ не пусто. Докажем, что $mes(\Gamma^3_\rho) = 0$. Предположим обратное. Пусть $mes(\Gamma^3_\rho) \neq 0$. Так как $\Gamma_\rho \subset \partial\Omega_\rho$ и $mes(\Gamma^3_\rho) \neq 0$, то найдется хотя бы одна точка $x^\star \in \Gamma^3_\rho$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$U_\alpha(x^\star) \cap \Omega_\rho \subset \Omega^3_\rho,$$

здесь U_α — окрестность точки $x^\star$ радиуса α. Пусть $x' \in U_\alpha(x^\star) \cap \Omega_\rho$ такова, что $x' + r(x') = x^\star$. Рассмотрим далее поведение функции $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ на множестве $\{x' + tr(x'),\, 0 \le t \le 1\}$. Имеем

$$w(x') = w(x') - w(x^\star) = \frac{\partial w}{\partial r}(x' + \xi r(x'))|r(x')|.$$

Поскольку $x' \in \Gamma^3_\rho$, то левая часть последнего равенства строго больше нуля, а правая строго меньше нуля, так как $x' + \xi r(x')$ принадлежит $U_\alpha(x^\star) \cap \Omega_\rho$. Полученное противоречие означает, что $mes(\Gamma^3_\rho) = 0$.

Далее обозначим

$$s(\tau) = \left\{ x \in \Omega^3_\rho :\, dist(x, \Gamma) = \tau \right\}.$$

Ясно, что $s(\tau) \to \Gamma^3_\rho$ при $\tau \to 0$. Имеем

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^3_\rho} |F(x,t)|\, dxdt = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^T \int\limits_0^\rho d\tau \int\limits_{s(\tau)} |F(x,t)|\, d\xi dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^1 d\tau' \int\limits_{s(\rho\tau')} |F(x,t)|\, d\xi dt. \tag{1.47}$$

Правая часть в (1.47) стремится к нулю поскольку $mes(s(\rho\tau)) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом из (1.44)–(1.46) следует, что

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} J_4 \le 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} J_5 \le 0.$$

[1)]Заметим, что Γ^3_ρ не зависит от ρ, поскольку $\Omega^3_{\rho_1} \supset \Omega^3_{\rho_2}$, если $\rho_1 > \rho_2$.

Из двух последних неравенств и (1.42) следует (1.40). Соотношения (1.39), (1.40) обеспечивают справедливость неравенства (1.38) для любой функции γ из $C_0^\infty\big(C^\infty(\Omega);(-\infty,T/2]\big)$. Выбирая в (1.38) функцию $\gamma(x,t)=\gamma(t)$, получим

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1)-\varphi_i(u_2))^+\frac{d\gamma(t)}{dt}dxdt\le 0. \tag{1.48}$$

Ясно, что (1.48) будет иметь место и для функции γ из $W_\infty^1(0,T/2)$, $\gamma(T/2)=0$. Выберем в (1.48)

$$\gamma(t) \ = \left\{\begin{array}{ll} t^*-t, & 0\ \le\ t\ \le\ t^*, \\ 0, & \qquad t\ \ge\ t^*, \end{array}\right.$$

где $t^*\in[0,T/2]$. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^{t^*}\int\limits_{\Omega}\big(\varphi_1(u_1)-\varphi_1(u_2)\big)^+dxdt+$$

$$+\int\limits_0^{t^*}\int\limits_{\Pi}\big(\varphi_2(u_1)-\varphi_2(u_2)\big)^+dsdt\ \le 0.$$

Из последнего неравенства в силу монотонности φ_i и произвольности t^* следует, что $u_1\le u_2$ почти всюду в $Q_{T/2}$. Поскольку функции u_1, u_2 во всех рассуждениях можно поменять местами, то из последнего неравенства следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) главы 1 на $[0,T/2]$. Чтобы получить единственность на $[0,T]$, нужно уравнения (1.1)–(1.3) главы 1 рассмотреть на $[0,2T]$, полагая $f_i(t)=0,\ g(x,t)=g(x,2T-t)$ при $t>T$. Теорема доказана.

§ 2. Задача с ограничением

В этом параграфе доказывается теорема единственности решения следующей задачи: найти функцию u из множества

$$K=\left\{v-u^D\in\overset{\circ}{W}(0,T):\ v(x,t)\geqslant g(x)\ \text{п.в. в}\ \ Q_T\ \ \text{и на}\ \ \Pi_T\right\}$$

такую, что

$$\int_0^T \langle J(u), \cdots \rangle_* \, dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п.в. в } \Omega \quad \text{и на } \Pi\,, \tag{2.2}$$

и для любой функции $v \in K$ справедливо неравенство

$$\int_0^T \Big\{ \langle J(u), v-u \rangle_* + \langle Lu, v-u \rangle + \langle L_\Pi u, v-u \rangle_\Pi \Big\} \, dt \geq \tag{2.3}$$

$$\geq \int_0^T \Big\{ \langle f_1, v-u \rangle + \langle f_2, v-u \rangle_\Pi \Big\} \, dt.$$

Здесь $u^D \in W(0,T)$ — продолжение на Q_T функции, которая определяет значение искомого решения на Γ. Таким образом рассматривается случай с неоднородным, но с независимым от переменной t ограничением и нестационарными условиями на границе области. Представленный здесь результат является аналогом теоремы 1.2 для вариационного неравенства. Его доказательство близко к доказательству теоремы 1.2 и во многом его повторяет.

При доказательстве наряду с леммами 1.1–1.3, 1.5 понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть u — решение задачи* (2.1)–(2.3)*, функция η удовлетворяет условиям леммы* 1.2*, а $\gamma \in C_0^\infty((-\infty,T];C_0^\infty(\Omega))$. Тогда для любой функции $v \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ такой, что $v \geq g$ п.в. в Ω и на* Π, *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^T \int_{\Omega_i} \big(\Phi_\eta^i(u_0,v) - \Phi_\eta^i(u,v) \big) \frac{\partial \gamma}{\partial t} \, dx\, dt + \tag{2.4}$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u) k_i(x,\nabla u) \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta'(u-v)\gamma) \, dx\, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Pi a_\Pi(s,u) k_\Pi\big(s, \frac{\partial u}{\partial s}\big) \frac{\partial}{\partial s} (\eta'(u-v)\gamma) \, ds\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \langle f_1, \eta'(u-v)\gamma \rangle \, dt + \int_0^T \langle f_2, \eta'(u-v)\gamma \rangle_\Pi \, dt\,.$$

Доказательство. Положим $z = u - \varepsilon\gamma\eta'(u-v)$, где $\varepsilon < 1$ — произвольная постоянная, удовлетворяющая почти всюду на Q_T и Π_T следующему условию

$$\varepsilon\gamma(x,t)\eta''(\xi) \leq 1 \qquad \forall\, \xi \in [-1,1]\,. \tag{2.5}$$

Докажем, что $z \in K$. Принадлежность $z - u^D$ пространству $\overset{\circ}{W}(0,T)$ очевидна. Убедимся в том, что

$$z(x,t) \geq g(x) \tag{2.6}$$

почти всюду в Q_T и на Π_T. Учитывая, что $\eta'(0) = 0$, оценим функцию z следующем образом

$$z \geq u + \varepsilon\gamma\eta''(\theta(v-u))(v-u), \quad \theta \in (0,1). \tag{2.7}$$

Если $(v-u) \geq 0$ в точке (x,t), то из (2.7) следует, что в этой точке $z \geq u \geq g$. В противном случае из неравенства (2.5) и условия леммы получим

$$z \geq u + (v-u) \geq v \geq g.$$

Таким образом, неравенство (2.6) имеет место для почти всех (x,t) из Q_T и Π_T, то есть $z \in K$.

Выбирая z в качестве пробной функции в неравенстве (2.4) главы 2, будем иметь

$$- \int_0^T \langle\, J(u)\,,\ \varepsilon\gamma\eta'(u-v)\ \rangle_* \, dt -$$

$$- \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u) k_i(x,\nabla u) \frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon\gamma\eta'(u-v)) \, dx\, dt -$$

$$- \int_0^T \int_\Pi a_\Pi(s,u) k_\Pi\big(s, \frac{\partial u}{\partial s}\big) \frac{\partial}{\partial s}(\varepsilon\gamma\eta'(u-v)) \, ds\, dt \geq$$

$$\geq - \int_0^T \langle f_1, \varepsilon\gamma\eta'(u-v) \rangle \, dt - \int_0^T \langle f_2, \varepsilon\gamma\eta'(u-v) \rangle_\Pi \, dt\,.$$

Из последнего неравенства после деления его на $-\varepsilon$ и леммы 1.3 следует неравенство (2.4). Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть функции φ_i, a_i, k_i, a_Π, k_Π удовлетворяют перечисленным в теореме* 1.1 *условиям, кроме того, для любых ξ_1, $\xi_2 \in R^1$ имеют место неравенства*

$$|a_i(x,\xi_1) - a_i(x,\xi_2)| \le c_1|\xi_1 - \xi_2|, \tag{2.8}$$

$$|a_\Pi(x,\xi_1) - a_\Pi(x,\xi_2)| \le c_2|\xi_1 - \xi_2|. \tag{2.9}$$

Тогда при любых

$$f_1 \in L_{p_1'}(Q_T), \qquad f_2 \in L_{p_2'}(\Pi_T),$$

$$u^D \in W(0,T), \quad g \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega),$$

$$u_0 \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega), \quad u_0(x) \geqslant g(x) \text{ п. в. в } \Omega \text{ и на } \Pi\,,$$

решение задачи (2.1)–(2.3) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что u_1,u_2 — два решения задачи (2.1)–(2.3). В силу леммы 2.1 для каждого из них справедливо неравенство (2.4). Пусть $\widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)$ — произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty((-\infty,T]^2;C_0^\infty(\Omega))$. Запишем (2.4) для функции $u_1(x,t_1)$, полагая при этом $\gamma(x,t_1) = \widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)$, $\eta(\xi) = \eta_\delta(\xi)$, $v = u_2(x,t_2)$. Полученное неравенство проинтегрируем по параметру t_2. Затем запишем (2.4) для $u_2(x,t_2)$, выбирая $\gamma(x,t_2) = \widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)$, $\eta(\xi) = \overline{\eta}_\delta(\xi)$, $v = u_1(x,t_1)$, и проинтегрируем по переменной t_1. Складывая полученные неравенства и учитывая, что $\overline{\eta}_\delta{}'(\xi) = -\eta_\delta{}'(\xi)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\Big(\Phi^i_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2)) - \tag{2.10}$$

$$- \Phi^i_{\eta_\delta}(u_1(t_1),u_2(t_2))\Big)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1dt_2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\Big(\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_0,u_1(t_1)) -$$

$$- \Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_2(t_2),u_1(t_1))\Big)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}\,dx\,dt_1dt_2 +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Big(\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) -$$

$$
-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\Big)dx dt_1 dt_2+
$$

$$
+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1))-
$$

$$
-\mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2))\Big)\frac{\partial}{\partial s}\Big(\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\Big)\,ds\,dt_1 dt_2\ \le
$$

$$
\le\int\limits_0^T\int\limits_0^T\langle f_1(t_1)-f_1(t_2),\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\rangle\,dt_1 dt_2+
$$

$$
+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\langle f_2(t_1)-f_2(t_2),\bar{\eta}_\delta'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\rangle_\Pi\,dt_1\,dt_2,
$$

здесь

$$
\mathbf{ak_i}(z(t))=a_i(x,z(t))k_i(x,\nabla z(t)),
$$

$$
\mathbf{ak_\Pi}(z(t))=a_\Pi(s,z(t))k_\Pi(\frac{\partial z(t)}{\partial s}).
$$

Дальнейшее доказательство теоремы состоит из трех этапов. На первом этапе в полученном неравенстве совершаем предельный переход при $\delta\to 0$. При обосновании предельного перехода в слагаемых, содержащих функционалы $\Phi^i_{\eta_\delta}$ или $\Phi^i_{\bar{\eta}_\delta}$ воспользуемся леммой 1.2 и теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В результате, например, получим

$$
\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\Phi^i_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1 dt_2\to
$$

$$
\to\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(t_2)))^+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1 dt_2,
$$

$$
\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\Phi^i_{\bar{\eta}_\delta}(u_0,u_2(t_2))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1 dt_2\ \to
$$

$$
\to\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u_2(t_2))-\varphi_i(u_0))^+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1\,dt_2,\quad i=1,2.
$$

Рассмотрим, далее, слагаемое, содержащее пространственный оператор. Имеем

$$I=\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t_1))-$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\eta_\delta{}'(\Delta z)}{\partial x_i}\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1dt_2=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2 a_i(x,u_1(t_1))\Big\{k_i(x,\nabla u_1(t_1))-$$

$$-k_i(x,\nabla u_2(t_2))\Big\}\frac{\partial\Delta z}{\partial x_i}\eta_\delta{}''(\Delta z)\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{a_i(x,u_1(t_1))-$$

$$-a_i(x,u_2(t_2))\Big\}k_i(x,\nabla u_2(t_2))\frac{\partial\Delta z}{\partial x_i}\eta_\delta{}''(\Delta z)\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t_1))-$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big\}\eta_\delta{}'(\Delta z)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\,dx\,dt_1dt_2=I_1+I_2+I_3\,,$$

здесь $\Delta z=u_1(t_1)-u_2(t_2)$.

Из условия (1.11) главы 1 на функции k_i, неотрицательности $\eta_\delta{}''$ и $\widetilde{\gamma}$ следует, что $I_1\geq 0$. Тогда для I имеет место неравенство

$$I\geq I_2+I_3.$$

Далее, используя условия теоремы на функции a_i и неравенство (1.9) главы 1, получим

$$|\,I_2\,|\leq c_1\beta\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2|\,\Delta z\,|\,\eta_\delta{}''(\Delta z)\Big\{1+$$

$$+\sum_{i=1}^2\Big|\frac{\partial u_2(t_2)}{\partial x_i}\Big|^{p_1-1}\Big\}\,\Big|\frac{\partial\Delta z}{\partial x_i}\widetilde{\gamma}\Big|\,dx\,dt_1dt_2,\qquad(2.11)$$

здесь $\beta = \max\{\beta_{21}, \beta_{31}\}$. Нетрудно видеть, что

$$|z|\, \eta_\delta{}''(z) \,\le\, 1 \;\; \forall z \in R^1.$$

Поэтому подынтегральная функция в правой части неравенства (2.11) ограничена интегрируемой функцией. Кроме того, при $\delta \to 0$

$$\frac{z}{\delta}\, \eta''(\frac{z}{\delta}) \;\to\; 0 \;\text{ п. в. в }\; R^1.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{\delta\to 0} I_2 = 0.$$

Для I_3, I_4 учитывая, что при $\delta \to 0$

$$\eta'_\delta(\xi) \to H(\xi) \;=\; \begin{cases} 1, & \xi \;>\; 0, \\ 0, & \xi \;\le\; 0, \end{cases}$$

будем иметь

$$\lim_{\delta\to 0} I_3 = \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) -$$

$$- \mathbf{ak_i}(u_2(t_2)) \Big\} H(\Delta z) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\, dx\, dt_1 dt_2,$$

$$\lim_{\delta\to 0} I_4 = \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Big\{ \mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1)) -$$

$$- \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2)) \Big\} H(\Delta z) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial s}\, ds\, dt_1 dt_2.$$

В результате предельного перехода при $\delta \to 0$ в неравенстве (2.10) получим

$$- \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(t_2))\big)^+ \widetilde{\gamma}(x, 0, t_2)\, dx\, dt_2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_1(t_1))\big)^+ \widetilde{\gamma}(x, t_1, 0)\, dx\, dt_1 - \qquad (2.12)$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1(t_1))\,-\varphi_i(u_2(t_2))\big)^+\Big\{\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}\Big\}\,dx\,dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t_1))\;-\;\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big\}\,H(\Delta z)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\,dx\,dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Pi}\Big\{\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1))\;-\;\mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2))\Big\}\,H(\Delta z)\,\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\,ds\,dt_1dt_2\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}(f_i(t_1)-f_i(t_2))H(\Delta z)\,\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1dt_2.$$

Далее, пусть $\gamma(x,t)\in C_0^\infty(-\infty,T/2;C_0^\infty(\Omega))$, $q\in C_0^\infty(R^1)$ — неотрицательные функции. Кроме того, функция q четная и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\xi)d\xi=1. \tag{2.13}$$

В неравенстве (2.12) выберем

$$\widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)=\frac{1}{\varepsilon}q(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon})\gamma(x,\frac{t_1+t_2}{2})$$

и введем новые переменные

$$t=t_1,\;\;\tau=\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}=\frac{1}{\varepsilon}q\bigg(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\bigg)\,\frac{\partial\gamma(x,\xi)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\frac{t_1+t_2}{2}},$$

неравенство (2.12) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{5}I_i\equiv-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{T/\varepsilon}\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)- \tag{2.14}$$

$$-\,\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\big)^+q(\tau)\,\gamma\big(x,\frac{\varepsilon\tau}{2}\big)\,dx\,d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_1(\varepsilon\tau))\big)^+ q(\tau)\,\gamma\big(x,\frac{\varepsilon\tau}{2}\big)\,dx\,d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1(t))-$$

$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^+ q(\tau)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t))-$$

$$-\mathbf{ak_i}(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big\}H(\Delta z_\varepsilon)\,q(\tau)\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Pi}\Big\{\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t))-$$

$$-\mathbf{ak_\Pi}(u_2(t-\varepsilon\tau))\Big\}H(\Delta z_\varepsilon)\,q(\tau)\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t-\frac{\varepsilon\tau}{2})\,ds\,dt\,d\tau\ \le$$

$$\le\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int\limits_{\Omega_i}\Big(f_i(t)-$$

$$-f_i(t-\varepsilon\tau)\Big)\,H(\Delta z_\varepsilon)\,q(\tau)\,\gamma\big(x,t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\big)\,dx\,dt\,d\tau.$$

здесь $\Delta z_\varepsilon = u_1(t) - u_2(t-\varepsilon\tau)$.

Следующий этап доказательства — предельный переход по параметру ε в неравенстве (2.14). Докажем, что

$$I_1 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть $M \in [\,0, T/\varepsilon\,]$, представим I_1 в виде

$$I_1 = -\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{M} q(\tau)\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)\,-\,\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\big)^+\gamma(x,\frac{\varepsilon\tau}{2})\,dx\,d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{M}^{T/\varepsilon} q(\tau)\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_0)\,-\,\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\big)^{+}\gamma(x,\frac{\varepsilon\tau}{2})\;dx\,d\tau \equiv -I_{1,1}-I_{1,2}.$$

Покажем, что каждое $I_{1,i}$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора M и ε. Учитывая, что $(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^{+}$ принадлежит пространству $L_\infty(0,T/\varepsilon;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$, а функция $\gamma(x,\varepsilon\tau/2)$ ограничена, для $I_{1,2}$ получим оценку

$$I_{1,2}\le c\int\limits_{M}^{T/\varepsilon} q(\tau)\;d\tau. \tag{2.15}$$

Условие (2.13) позволяет выбрать M так, что правая часть (2.15) была не больше наперед заданной малой величины ρ. Записав $I_{1,1}$ в виде

$$I_{1,1}=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{M} q(\tau)\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_0)\,-\,\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\Big)^{+}\Big(\gamma\big(x,\frac{\varepsilon\tau}{2}\big)-\gamma(x,0)\Big)\;dx\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{M} q(\tau)\int\limits_{\Omega_i}\Big(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau))\Big)^{+}\gamma(x,0)\;dx\,d\tau$$

и учитывая непрерывность функций γ, q и лемму 1.5, нетрудно доказать существование такого ε_0, что

$$I_{1,1}\;\le\;\rho\quad\;\forall\,\varepsilon\;\le\;\varepsilon_0.$$

Из выше сказанного следует, что и $I_1\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Аналогичный результат имеет место и для I_2.

Докажем далее, что

$$I_3\to -\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1)-\varphi_i(u_2)\big)^{+}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx\,dtd\tau\;\equiv\;J\,.$$

Учитывая, что

$$J=-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\tau)\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1)\,-\,\varphi_i(u_2)\big)^{+}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt\,d\tau,$$

представим $I_3 - J$ в виде суммы следующих слагаемых

$$I_{3,1} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{-M} q(\tau) \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) \,-\, \varphi_i(u_2(t))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t)\, dx\, dt\, d\,\tau,$$

$$I_{3,2} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{M}^{\infty} q(\tau) \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) \,-\, \varphi_i(u_2(t))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t)\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$I_{3,3} = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-T/\varepsilon}^{-M} q(\tau) \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) -$$

$$- \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2})\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$I_{3,4} = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{M}^{T/\varepsilon} q(\tau) \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) -$$

$$- \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2})\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$I_{3,5} = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-M}^{M} q(\tau) \int\limits_{0}^{\max(0,\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) -$$

$$- \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2})\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$I_{3,6} = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-M}^{M} q(\tau) \int\limits_{\min(T,T+\varepsilon\tau)}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) -$$

$$- \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^{+}\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$I_{3,7} = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-M}^{M} q(\tau) \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{ \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2}) -$$

$$- \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\big)^{+} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t) \Big\}\, dx\, dt\, d\tau.$$

Нетрудно показать по аналогии с предыдущим случаем, что величины $|I_{3,i}|$, $1 \le i \le 4$, могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора M. Что касается $|I_{3,5}|$, $|I_{3,6}|$, то их значения малы при малом ε. Распишем $I_{3,7}$ следующим образом

$$I_{3,7} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-M}^{M} q(\tau) \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) -$$

$$- \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^+ \Big\{ \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x, t - \frac{\varepsilon\tau}{2}) - \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t) \Big\}\, dx\, dt\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-M}^{M} q(\tau) \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \Big\{ \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau))\big)^+ -$$

$$- \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\big)^+ \Big\} \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\, dx\, dt\, d\tau.$$

Первый интеграл правой части последнего равенства стремится к нулю, поскольку функция γ гладкая, а функции $\varphi_i(u_1)$ и $\varphi_i(u_1)$ принадлежат пространствам $L_\infty(0,T; L_{\alpha_i}(\Omega_i))$. Второй интеграл также стремится к нулю по свойству непрерывности в целом интегрируемых по Лебегу функций. Таким образом

$$|I_3 - J| \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Аналогично доказывается, что при $\varepsilon \to 0$

$$I_4 \ \to \ \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak_i}(u_2(t)) \Big\} H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t)\, dx\, dt,$$

$$I_5 \ \to \ \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \Big\{ \mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t)) \Big\} H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial\gamma}{\partial s}(x,t)\, ds\, dt,$$

а слагаемые, содержащие функции f_i, стремятся к нулю. В результате при $\varepsilon \to 0$ из (2.14) получим

$$- \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega_i} \big(\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t))\big)^+ \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\, dx\, dt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{2}\Big\{\mathbf{ak_i}(u_1(t))- \tag{2.16}$$

$$-\,\mathbf{ak_i}(u_2(t))\Big\}H(u_1(t)-u_2(t))\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t)\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{2}\Big\{\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t))-$$

$$-\,\mathbf{ak_\Pi}(u_2(t))\Big\}H(u_1(t)-u_2(t))\frac{\partial\gamma}{\partial s}(x,t)\,ds\,dt\leq\ 0.$$

Докажем далее, и это третий этап доказательства, что (2.16) имеет место для любой функции $\gamma\in C_0^\infty(-\infty,T/2;C^\infty(\Omega))$. С этой целью введем гладкую функцию $\chi(\xi)$ такую, что $\chi(0)=0$ и $\chi(\xi)=1$ при $\xi\geq 1$. Обозначим Ω_ρ приграничную полосу области Ω ширины ρ. В каждой точке $x\in\Omega_\rho$ определим вектор $r(x)$ такой, что $|r(x)|=\operatorname{dist}(x,\Gamma)$, а $x-r(x)\in\Gamma$. Определим функцию

$$\chi_\rho(x_1,x_2)=\chi(\frac{|r|}{\rho}).$$

Очевидно, что

$$\gamma(x,t)=\chi_\rho\gamma(x,t)+(1-\chi_\rho)\gamma(x,t).$$

Для краткости записи в дальнейшем обозначим через $<T,\gamma>$ левую часть неравенства (2.16). Поскольку функция $\chi_\rho\gamma$ принадлежит пространству $C_0^\infty(-\infty,T/2;C_0^\infty(\Omega))$, то согласно (2.16) имеет место неравенство

$$<T,\chi_\rho\gamma\ >\leq 0. \tag{2.17}$$

Докажем далее, что

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}<T,(1-\chi_\rho)\gamma>\leq 0. \tag{2.18}$$

Представим

$$<T,(1-\chi_\rho)\gamma>=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5, \tag{2.19}$$

где

$$J_1=-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t))\big)^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(1-\chi_\rho)dxdt,$$

$$J_2 = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak_i}(u_2(t)) \Big\} H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (1 - \chi_\rho)\, dx\, dt,$$

$$J_3 = \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Big\{ \mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t)) \Big\} H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial s} (1 - \chi_\rho)\, ds\, dt,$$

$$J_4 = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big\{ \mathbf{ak_i}(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak_i}(u_2(t)) \Big\} H(u_1(t) - u_2(t))\, \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} (1 - \chi_\rho)\, dx\, dt,$$

$$J_5 = \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Big\{ \mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) -$$

$$- \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t)) \Big\} H(u_1(t) - u_2(t))\, \gamma \frac{\partial}{\partial s} (1 - \chi_\rho)\, ds\, dt.$$

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и определение функции χ_ρ, нетрудно показать, что

$$\lim_{\rho \to 0} J_i = 0, \ i = \overline{1,3}. \tag{2.20}$$

Докажем далее, что

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} J_4 \le 0.$$

Имеем

$$J_4 = -\frac{1}{\rho} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^2 \Big\{ a_i(x, u_1(t)) - a_i(x, u_2(t)) \Big\} \times$$

$$\times k_i(x, \nabla u_1(t)) H(u_1(t) - u_2(t))\, \gamma\, \chi'(\frac{|r|}{\rho}) \frac{\partial |r|}{\partial x_i}\, dx\, dt -$$

$$-\frac{1}{\rho} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^2 a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) -$$

$$-k_i(x,\nabla u_2(t))\Big\}H(u_1(t)-u_2(t))\,\gamma\,\chi'(\frac{|r|}{\rho})\,\frac{\partial|r|}{\partial x_i}\,dx\,dt =$$
$$= J_{4,1}+J_{4,2}.$$

Учитывая условие (2.8) теоремы и неравенство (1.9) главы 1, получим

$$J_{4,1}\le\frac{c}{\rho}\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho}|u_1-u_2|^{p_1}\,dx\,dt\Big)^{1/p_1}.$$

Представим Ω_ρ в виде объединения конечного числа подмножеств Ω_ρ^k, в каждом из которых можно задать локальную декартову систему координат (σ^k,ξ^k), удовлетворяющую следующим условиям:

$$|(\sigma^k,x)|\le\lambda\,\rho,\qquad\forall x\in\Omega_\rho,$$

($\lambda>0$ — константа, определяемая областью Ω); и для любой точки $x\in\Omega_\rho$ найдется точка $x^*\in\Gamma\bigcap\overline{\Omega}_\rho$ такая, что $(\xi^k,x)=(\xi^k,x^*)$. Тогда, продолжая функцию (u_1-u_2) нулем вне Ω, будем иметь

$$|(u_1-u_2)(x)| = |(u_1-u_2)(x)-(u_1-u_2)(x^*)| =$$
$$=\Big|\int\limits_0^{\alpha(x)}\frac{\partial(u_1-u_2)(x-\nu\,\sigma_k)}{\partial\nu}\,d\nu\Big|\le\int\limits_0^{2\lambda\rho}\Big|\frac{\partial(u_1-u_2)(x-\nu\,\sigma_k)}{\partial\nu}\Big|\,d\nu,$$
$$\le\int\limits_0^{2\lambda\rho}\Big|\frac{\partial(u_1-u_2)(x-\nu\,\sigma_k)}{\partial\nu}\Big|\,d\nu, \tag{2.21}$$

здесь $\alpha(x)=-(\xi^k,x)+(\xi^k,x^*)$.

Используя неравенства Гельдера и (2.21), нетрудно получить оценку

$$J_{4,1}\le\frac{c(\lambda)\rho^{1+1/p_1'}}{\rho}\Big(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big|\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\Big|^{p_1}\,dx\,dt\Big)^{1/p_1}.$$

Из последнего неравенства и принадлежности функции (u_1-u_2) пространству $\overset{\circ}{W}(0,T)$ следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}J_{4,1}=0. \tag{2.22}$$

Рассмотрим $J_{4,2}$. Представим $\Omega_\rho = \Omega_\rho^1 \bigcup \Omega_\rho^2 \bigcup \Omega_\rho^3$, где

$$\Omega_\rho^1 = \Big\{ x \ni \Omega_\rho : \;\; u_1(x) - u_2(x) \leq 0 \Big\},$$

$$\Omega_\rho^2 = \Big\{ x \ni \Omega_\rho : \;\; u_1(x) - u_2(x) > 0, \; \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial |r|} \geq 0 \Big\},$$

$$\Omega_\rho^3 = \Big\{ x \ni \Omega_\rho : \;\; u_1(x) - u_2(x) > 0, \; \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial |r|} < 0 \Big\}.$$

Измеримость множеств Ω_ρ^k следует из включения $u_1 - u_2 \in \overset{\circ}{W} (0,T)$. В дальнейшем для краткости изложения обозначим

$$F(x,t) = \sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) -$$
$$- k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \gamma(x,t) \chi'(\frac{|r|}{\rho}) \frac{\partial |r|}{\partial x_i}.$$

Заметим, что $H(u_1(x,t) - u_2(x,t)) = 0$ для $\forall x \in \Omega_\rho^1$, поэтому

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^T \int_{\Omega_\rho^1} F(x,t) H(u_1 - u_2)\, dxdt = 0, \quad \forall \rho. \tag{2.23}$$

Далее, поскольку

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) \; - \; k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \frac{\partial(u_1(t) - u_2(t))}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial(u_1(t) - u_2(t))}{\partial |r(x)|} \sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) -$$
$$- k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \frac{\partial |r(x)|}{\partial x_i},$$

то из условия (1.11) следует, что в точках Ω_ρ^2

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x, u_2(t)) \Big\{ k_i(x, \nabla u_1(t)) \; - \; k_i(x, \nabla u_2(t)) \Big\} \frac{\partial |r(x)|}{\partial x_i} \geq 0.$$

Учитывая, что $H(u_1(x,t) - u_2(x,t)) = 1$ для $\forall x \in \Omega_\rho^2$, будем иметь

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho^2} F(x,t)\,dx\,dt \le 0, \quad \forall\rho. \tag{2.24}$$

Докажем далее, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho^3} F(x,t)\,dx\,dt = 0. \tag{2.25}$$

Пусть $\Gamma_\rho^3 = \Big(\Gamma \cap \partial\Omega_\rho^3\Big)$[1)]. Если Γ_ρ^3 — пустое множество, то справедливость (2.25) очевидна. Пусть Γ_ρ^3 не пусто. Докажем, что $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3) = 0$. Предположим обратное. Пусть $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3) \neq 0$. Так как $\Gamma_\rho^3 \subset \Gamma$ и $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3) \neq 0$, то найдется хотя бы одна точка $x^\star \in \Gamma_\rho^3$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$U_\varepsilon(x^\star) \cap \Omega_\rho \subset \Omega_\rho^3,$$

здесь $U_\varepsilon(x^\star)$ — окрестность точки $x^\star$ радиуса ε. Пусть $x' \in U_\varepsilon(x^\star) \cap \Omega_\rho$ такова, что $x' - r(x') = x^\star$. Рассмотрим поведение функции

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

на множестве $\{x' - \zeta r(x'),\, 0 \le \zeta \le 1\}$. Обозначим $x_\alpha = x^\star + \alpha\, r(x')$. Имеем

$$w(x_\alpha,t) = w(x_\alpha,t) - w(x^\star,t) =$$

$$= \int\limits_0^\alpha \frac{\partial w(x_\xi,t)}{\partial\xi}\,d\xi = \int\limits_0^\alpha \frac{\partial w(x_\xi,t)}{\partial|r(x_\xi)|}\;\frac{\partial|r(x_\xi)|}{\partial\xi}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\alpha \frac{\partial w(x_\xi,t)}{\partial|r(x_\xi)|}\;|r(x')|\,d\xi\,, \tag{2.26}$$

так как для $\forall\xi \in [0,1]$, очевидно, имеет место равенство

$$|r(x^\star + \xi r(x'))| = \xi|r(x')|.$$

Поскольку $(x^\star + \xi r(x')) \in \Omega_\rho^3$ для всех $\forall\xi \in (0,1]$, то правая часть (2.26) отрицательна в то время, как левая больше нуля. Полученное противоречие означает, что $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3) = 0$.

[1)]Заметим, что Γ_ρ^3 не зависит от ρ, поскольку $\Omega_{\rho_1}^3 \supset \Omega_{\rho_2}^3$, если $\rho_1 > \rho_2$.

Далее обозначим

$$S(\tau) = \Big\{ x \in \Omega_\rho^3 : \ \mathrm{dist}(x, \Gamma) = \tau \Big\}.$$

Ясно, что $\mathrm{mes}\, S(\tau) \to \mathrm{mes}\, \Gamma_\rho^3$ при $\tau \to 0$. Имеем

$$\frac{1}{\rho} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho^3} |F(x,t)|\, dx\, dt = \frac{1}{\rho} \int\limits_0^T \int\limits_0^\rho d\tau \int\limits_{S(\tau)} |F(x,t)|\, d\xi\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^1 d\tau' \int\limits_{S(\rho\tau')} |F(x,t)|\, d\xi\, dt. \tag{2.27}$$

Правая часть в (2.27) стремится к нулю, поскольку $\mathrm{mes}\,(S(\rho\tau)) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом, (2.27) имеет место, из (2.23)–(2.27) следует, что

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} J_4 \le 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} J_5 \le 0.$$

Из двух последних неравенств и (2.20) следует (2.18). Неравенства (2.17), (2.18) обеспечивают справедливость неравенства (2.16) для любой функции γ из $C_0^\infty(-\infty, T/2; C^\infty(\Omega))$. Выбирая в (2.16) функцию $\gamma(x,t) = \gamma(t)$, получим

$$\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dx\, dt \le 0. \tag{2.28}$$

Ясно, что (2.28) будет иметь место и для γ из $W_\infty^1(0, T/2)$ такой, что $\gamma(T/2) = 0$. Выберем в (2.28)

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^* - t, & 0 \le t < t^*, \\ 0, & t \ge t^*, \end{cases}$$

где $t^* \in [0, T/2]$. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^{t^*} \int\limits_\Omega (\varphi_1(u_1) - \varphi_1(u_2))^+ \, dx\, dt +$$

$$+\int_0^{t^*}\int_\Pi (\varphi_2(u_1)-\varphi_2(u_2))^+\ ds\,dt\ \le 0.$$

Из последнего неравенства в силу монотонности φ_i и произвольности t^* следует, что $u_1 \le u_2$ почти всюду в $Q_{T/2}$. Поскольку функции u_1, u_2 во всех рассуждениях можно поменять местами, то из последнего неравенства следует единственность решения задачи (2.1)–(2.3) на $[0, T/2]$. Чтобы получить единственность на $[0, T]$, нужно задачу (2.1)–(2.3) рассмотреть на $[0, 2T]$, полагая $f_i(t) = 0$, $u^D(x,t) = u^D(x, 2\,T - t)$ при $t > T$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Из теоремы 2.1 следует единственность решения задачи (2.1)–(2.4) главы 2, а при независимости функции ограничения от переменной t — единственность решения задачи (2.51), (2.2)–(2.4) главы 2.

Замечание 2.2. Доказательство единственности решения этих задач, учитывая однородность граничных условий, можно существенно упростить, если воспользоваться схемой доказательства теоремы 1.1.

Глава 4
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Явная разностная схема

В этом параграфе рассматривается случай, когда область Ω — прямоугольник, а разрез Π параллелен оси x_1.

На множествах $[0,T]$ и $\overline{\Omega}$ зададим равномерные сетки. Пусть τ — шаг по времени,

$$\omega_\tau = \{\tau, 2\tau, \ldots, T\}, \qquad \overline{\omega}_\tau = \{0, \tau, \ldots, N\tau = T\},$$

$\overline{\omega}$ — равномерная по каждому направлению сетка на $\overline{\Omega}$, при этом Π является одной из прямых, образующих ее. Введем следующие обозначения:

$$\Pi_h = \overline{\omega} \cap \Pi, \qquad \gamma = \Gamma \cap \overline{\omega}, \qquad \omega = \overline{\omega} \backslash \gamma,$$

$$\bar{h} = \max\{h_1, h_2\}, \quad h = \min\{h_1, h_2\}, \quad \vec{h} = (h_1, h_2),$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\bar{h} \leqslant ch$, где $c = \mathrm{const} > 0$. Пусть, кроме того, H, H_Π — множества сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}$ и Π_h соответственно, $\overset{\circ}{H}$ — множество сеточных функций, равных нулю на γ. Полагая далее, что r — n-мерный вектор с координатами $r_i = \pm 1$, определим сеточные аппроксимации градиента следующим образом: $\nabla_r y(x) = (\partial_{r_1} y(x), \partial_{r_2} y(x))$, где

$$\partial_{r_i} y(x) = \begin{cases} y_{x_i}(x), & r_i = +1, \\ y_{\bar{x}_i}(x), & r_i = -1. \end{cases}$$

Обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки $\overline{\omega}$, , которая содержит все точки сетки, участвующие в записи оператора $\nabla_r y(x)$, ω_r — множество точек $x \in \overline{\omega}$, в которых определен оператор $\nabla_r y(x)$. В пространстве сеточных функций H введем следующие нормы и скалярные произведения

$$(y, v)_r = \sum_{x \in \omega_r} \tilde{H}_r \, y(x) \, v(x), \qquad [y, v] = (1/2^n) \sum_r (y, v)_r,$$

$$\| \, y \, \|_{p_1} = [| \, y \, |^{p_1}, 1]^{1/p_1}, \ \| \, y \, \|_{+p_1}^{p_1} = \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^{n} (| \, \partial_{r_i} y \, |^p, 1)_r,$$

$$\| \, y \, \|_{-p'} = \sup_{v \neq 0} \frac{[y, v]}{\| \, v \, \|_{+p}},$$

здесь $\tilde{H}_r = \text{mes } H_r(x)$. В H_Π определим следующие скалярные произведения и нормы

$$(y, v)_{r,\Pi} \; = \sum_{x \in \Pi_h \cap \omega_\tau} h_1 \, y(x) \, v(x), \;\; [y, v]_\Pi \; = \; \frac{1}{4} \sum_r (y, v)_{r,\Pi},$$

$$\|y\|^{p_2}_{p_2,\Pi} \; = \; [|y|^{p_2}, 1]_\Pi, \;\; \|y\|^{p_2}_{+,\Pi} \; = \; \frac{1}{4} \sum_r \, (|\partial_{r_1} y|^{p_2}, 1)_{r,\Pi}$$

Для сеточных функций определим кусочно-постоянные восполнения по x

$$\Pi_r z(x) = \Big\{ z(x'), \; x' \in \omega_r : x \in H_r(x') \Big\},$$

$$\Pi^+_r w = \Pi^+ \Pi_r w, \quad \Pi^-_r w = \Pi^- \Pi_r w.$$

В дальнейшем будет использоваться следующий вспомогательный результат.

Лемма 1.1. *Для любого $y \in H$ справедливо неравенство*

$$\| \, y \, \|_{+p} \leqslant \lambda_\alpha \, \| \, y \, \|_\alpha, \tag{1.1}$$

где $\lambda_\alpha = \dfrac{c\sqrt[p]{n}}{h^{1+n(p-\alpha)/\alpha p}}$, *если* $p \geqslant \alpha$ *и* $\lambda_\alpha = \dfrac{c\sqrt[p]{n}}{h}$, *если* $1 < p < \alpha$[1)]

Доказательство. Заметим, что

$$| \, \partial_{r_i} y(x) \, |^p = \left| \frac{y(x) - y(x + r_i h_i e_i)}{h_i} \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^p}{h^p} (| \, y(x) \, |^p + | \, y(x + r_i h_i e_i) \, |^p), \tag{1.2}$$

здесь e_i — орт оси x_i. Из (1.2) следует, что

$$\|y\|^p_{+p} = 2^{-n} \sum_{i=1}^{n} \sum_r \sum_{x \in \omega_r} \tilde{H}_r \, | \, \partial_{r_i} y(x) \, |^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-n+1} h^{-p} n \sum_r \sum_{x \in \omega_r} \tilde{H}_r \, | \, y(x) \, |^p \, . \tag{1.3}$$

[1)]Здесь и в дальнейшем буквой c возможно с индексами обозначены положительные постоянные, n — размерность пространства.

Пусть $1 < p < \alpha$. Оценивая правую часть (1.3) с помощью неравенства Гельдера с показателем α/p, получим

$$\|y\|_{+p}^p \leqslant 2^{p+1}h^{-p}n\Big(2^{-n}\sum_r\sum_{x\in\omega_r}\tilde{H}_r\mid y(x)\mid^\alpha\Big)^{p/\alpha}(mes\,\Omega)^{\frac{\alpha-p}{p}}.$$

Из последнего неравенства следует оценка (1.1) с константой $\lambda_\alpha = c\sqrt[p]{n}/h$.

Рассмотрим теперь случай $p \geqslant \alpha$. Запишем следующее легко проверяемое неравенство

$$\|y\|_\alpha^\alpha = 2^{-n}\sum_r\sum_{x\in\omega_r}\tilde{H}_r\mid y(x)\mid^\alpha \geqslant 2^{-n}h^n\max_{x\in\bar{\omega}}\mid y(x)\mid^\alpha. \tag{1.4}$$

Далее (1.3) представим в следующем виде

$$\|y\|_{+p}^p \leqslant 2^{p-n+1}h^{-p}n\sum_r\sum_{x\in\omega_r}\tilde{H}_r\mid y(x)\mid^\alpha\mid y(x)\mid^{p-\alpha}.$$

Последний сомножитель в правой части этого неравенства оценим, используя (1.4), в результате получим

$$\|y\|_{+p}^p \leqslant \frac{2^{p+1+n(p-\alpha)/\alpha}n}{h^{p+n(p-\alpha)/\alpha}}\|y\|_\alpha^\alpha.$$

Лемма доказана.

Определение 1.1. *Сеточную функцию* $y(x,t)$ *назовем решением явной разностной схемы для задачи* (1.1)–(1.3) *главы* 1, *если*

$$y(x,t) - u_{h\tau}^D(x,t) \;=\; 0 \;\;\forall x\in\gamma,\; \forall t\in\overline{\omega}_\tau\,; \quad y(x,0) = y_0(x) \;\;\forall x\in\overline{\omega}\,,$$

и для любой функции v *из* $\overset{\circ}{H}$ *справедливо следующее сумматорное тождество*

$$[y_t,v] + [y_t,v]_\Pi + \frac{1}{4}\sum_r\sum_{i=1}^2\Big(a_i(x,y)k_i(x,\nabla_r y),\partial_{r_i}v\Big)_r +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_r\Big(a_\Pi(x_1,y)k_\Pi(x_1,\partial_{r_1}y),\partial_{r_1}v\Big)_{r,\Pi} = [f_{1,h\tau},v] + [f_{2,h\tau},v]_\Pi, \tag{1.5}$$

здесь $y_0(x)$, $u_{h\tau}^D$ *— разностные аналоги функций* $u_0(x)$ *и* $u^D(x,t)$ *такие, что при* $\tau,\bar{h}\to 0$

$$\Pi_r y_0 \;\to\; u_0 \qquad \text{в} \quad L_{\alpha_1}(\Omega),$$

$$\Pi_r y_0 \;\to\; u_0 \qquad \textit{в} \quad L_{\alpha_2}(\Pi),$$

$$\Pi_r^{\pm}\, u_{h\tau}^D \;\to\; u^D, \quad \Pi_r^{\pm}\, \partial_{r_i}\, u_{h\tau}^D \;\to\; \frac{\partial u^D}{\partial x_i} \quad \textit{в} \quad L_{p_1}(Q_T),$$

$$\Pi_r^{\pm}\, u_{h\tau}^D \;\to\; u^D, \quad \Pi_r^{\pm}\, \partial_{r_i}\, u_{h\tau}^D \;\to\; \frac{\partial u^D}{\partial x_1} \quad \textit{в} \quad L_{p_2}(\Pi_T),$$

а $f_{i,h\tau}$ $(i = 1,2)$ *— сеточные функции, аппроксимирующие правые части уравнений (1.1),(1.2) главы 1 и определяемые формулами*

$$[f_{1,h\tau}, v] \;=\; \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=0}^{2} (f_{1,h\tau}^{i,r}\,, \partial_{r_i} v)_r\,,$$

$$[f_{2,h\tau}, v]_\Pi \;=\; \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=0}^{1} (f_{2,h\tau}^{i,r}\,, \partial_{r_i} v)_{r,\Pi}\,,$$

$$f_{1,h\tau}^{i,r}(x,t) \;=\; \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int\limits_t^{t+\tau} \int\limits_{H_r(x)} f_1^i(x',t')\, dx'\, dt'\,,$$

$$f_{2,h\tau}^{i,r}(x,t) \;=\; \frac{r_1}{\tau h_1} \int\limits_t^{t+\tau} \int\limits_{x_1}^{x_1+r_1h_1} f_2^i(x',t')\, dx'\, dt'\,,$$

$$f_1 = f_1^0 + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\, f_1^i, \qquad f_2 = f_2^0 + \frac{\partial f_2^1}{\partial x_1}\,.$$

Тождество (1.5) является разностной аппроксимацией интегрального тождества (1.16) главы 1. Нетрудно видеть, что (1.5) эквивалентно следующей системе разностных уравнений

$$\varphi_{1t}(y) + Ay \;=\; f_{1,h\tau}, \qquad x \in \omega_h \setminus \Pi_h, \tag{1.6}$$

$$\varphi_{2t}(y) + h_2\, \varphi_{1t}(y) + A_\Pi y + h_2 Ay \;=\; f_{2,h\tau} + h_2 f_{1,h\tau}, \quad x \in \Pi_h\,, \tag{1.7}$$

$$y(x,0) = y_0(x); \quad y(x,t) = u_{h\tau}^D(x), \quad x \in \gamma. \tag{1.8}$$

Здесь A, A_Π — разностные операторы, определяемые для любой функции v из $\overset{\circ}{H}$ равенствами

$$[Ay, v] \;=\; \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^{2} \sum_{x\in\omega_\tau} h_1 h_2\, a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r y)\, \partial_{r_i} v,$$

$$[A_\Pi\, y, v]_\Pi \;=\; \frac{1}{4}\sum_r \sum_{x\in\, \omega_\tau\cap\Pi_h} h_1\, a_\Pi(x,y)\, k_\Pi(x_1, \partial_{r_1}\, y)\, \partial_{r_1} v.$$

Заметим, что однозначная разрешимость явной разностной схемы (1.6)–(1.8) следует из строгой монотонности функций φ_i $(i = 1, 2)$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\alpha_i \geq 2$, *функции* φ_i *наряду с* (1.4)–(1.6) *удовлетворяют неравенству* (2.3) *главы* 1. *Кроме того, выполнены условия* (1.2), (1.3) *главы* 2,

$$f_i \in L_{q_i}(0,T; W_{p_i'}^{-1}(\Omega_i)), \quad q_i = \max\{\alpha_i', p_i'\}, \quad i = 1, 2, \tag{1.9}$$

а шаги τ *и* h *выбраны так, что имеет место неравенство*

$$\tau \;\leq\; c\, h^\rho, \tag{1.10}$$

где

$$\rho = \begin{cases} \max\Big\{\alpha_1, \alpha_2\Big\},\ 1 < p_i < \alpha_i, \\ \max\Big\{p_1 + \dfrac{2(p_1-\alpha_1)}{\alpha_1}, p_2 + \dfrac{p_2-\alpha_2}{\alpha_2}\Big\},\ p_i \geq \alpha_i, \\ \max\Big\{p_1 + \dfrac{2(p_1-\alpha_1)}{\alpha_1}, \alpha_2\Big\}, p_1 \geq \alpha_1, 1 < p_2 < \alpha_2, \\ \max\Big\{\alpha_1, p_2 + \dfrac{p_2-\alpha_2}{\alpha_2}\Big\}, 1 < p_1 < \alpha_1,\ p_2 \geq \alpha_2, \end{cases}$$

Тогда для решения разностной схемы (1.6)–(1.8) *справедливы следующие априорные оценки*

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau\, [\|y\|_+^{p_1} \;+\; \|y\|_{+,\Pi}^{p_2}\,] \;\leq\; \text{const}, \tag{1.11}$$

$$\max_{t'\in\bar\omega_\tau}\Big\{\|y(t')\|_{\alpha_1}^{\alpha_1} + \|y(t')\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2}\Big\} \;\leq\; \text{const}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau^{\alpha_1}\, \|y_t\|_{\alpha_1}^{\alpha_1} \;\leq\; \text{const}, \tag{1.13}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau^{\alpha_2}\, \|y(t)\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2} \;\leq\; \text{const}. \tag{1.14}$$

Доказательство. В тождестве (1.5) положим

$$v = \tau(y^\theta - (u^D)^\theta),$$

где $z^\theta = \theta\hat{z} - (\theta - 1)z$, ($\theta > 1$). В результате получим

$$\tau[\varphi_{1t}(y), y^\theta] + \tau[\varphi_{2t}(y), y^\theta]_\Pi + \tau[A\,y, y^\theta] + \tau\,[A_\Pi\, y, y^\theta]_\Pi -$$
$$- \tau\,[\varphi_{1t}(y), u_{h\tau}^{D\theta}] - \tau\,[\varphi_{2t}(y), u_{h\tau}^{D\theta}]_\Pi - \tau\,[A\,y, u_{h\tau}^{D\theta}] - \tau\,[A_\Pi\, y, u_{h\tau}^{D\theta}]_\Pi =$$
$$= \tau[f_{1,h\tau}(y), y^\theta] + [f_{2,h\tau}(y), y^\theta]_\Pi - \tau\,[f_{1,h\tau}, u_{h\tau}^{D\theta}] - \tau\,[f_{2,h\tau}, u_{h\tau}^{D\theta}]_\Pi,$$

или

$$\tau[\varphi_{1t}(y), y^\theta] + \tau\,[\varphi_{2t}(y), y^\theta]_\Pi + \tau[A\,y, y] + \tag{1.15}$$
$$+ \tau\,[A_\Pi\, y, y]_\Pi + \tau^2\,\theta\,[A\,y, y_t - u_{h\tau t}^D] + \tau^2\,\theta\,[A\,y, y_t - u_{h\tau t}^D]_\Pi =$$
$$= \tau[f_{1,h\tau}, y - u_{h\tau}^D] + \tau[f_{2,h\tau}, y - u_{h\tau}^D]_\Pi + \tau^2\,\theta\,[f_{1,h\tau}, y_t - u_{h\tau t}^D] +$$
$$+ \tau^2\,\theta\,[f_{2,h\tau}, y_t - u_{h\tau t}^D]_\Pi - \tau[A\,y, u_{h\tau}^D] - \tau[A_\Pi\, y, u_{h\tau}^D]_\Pi +$$
$$+ [\varphi_1(\hat{y}), \hat{u}_{h\tau}^D] - [\varphi_1(y), u_{h\tau}^D] + [\varphi_2(\hat{y}), \hat{u}_{h\tau}^D] - [\varphi_2(y), u_{h\tau}^D]_\Pi +$$
$$- [\varphi_2(y), u_{h\tau}^D]_\Pi + (\theta - 1)\tau\,[\varphi_1(\hat{y}), u_{h\tau,t}^D] + (\theta - 1)\tau\,[\varphi_2(\hat{y}), u_{h\tau,t}^D]_\Pi.$$

Воспользовавшись леммой 2.1, оценим первые два слагаемых левой части равенства (1.15)

$$\tau\,[\varphi_{it}(y), y^\theta]_{\Omega_i} \ge [\Phi_i(\hat{y}) - \Phi_i(y), 1]_{\Omega_i} +$$
$$+ c_i\,\tau^{\alpha_i}\,\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{1.16}$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей использованы обозначения

$$[\ \ ,\ \ ]_{\Omega_1} = [\ \ ,\ \ ], \quad [\ \ ,\ \ ]_{\Omega_2} = [\ \ ,\ \ ]_\Pi,$$
$$\|\cdot\|_{\alpha_1,\Omega_1} = \|\cdot\|_{\alpha_1}, \quad \|\cdot\|_{\alpha_2,\Omega_2} = \|\cdot\|_{\alpha_2,\Pi},$$
$$\|\cdot\|_{+,\Omega_1} = \|\cdot\|_{+}, \quad \|\cdot\|_{+,\Omega_2} = \|\cdot\|_{+,\Pi}.$$

Из коэрцитивности операторов A и A_Π (см. (1.10), (1.13) глава 1) следует, что

$$\tau\,[A\,y, y] \ge M_{21}\,\tau\,\|y\|_+^{p_1} - \mu_1\tau, \tag{1.17}$$
$$\tau\,[A_\Pi\, y, y]_\Pi \ge M_{22}\,\tau\,\|y\|_{+,\Pi}^{p_2} - \mu_2\tau, \tag{1.18}$$

где μ_i — постоянные, не зависящие от h и τ. Для оценки следующих двух слагаемых левой части равенства (1.15) воспользуемся (1.9), (1.12) главы 1 и неравенством Гельдера:

$$\tau^2\,\theta\,\Big|[A\,y, y_t - u_{h\tau,t}^D]\Big| \le \tag{1.19}$$

$$\leq\ \tau^2\,\theta\Big(M_{01}\,\|y\|_+^{p_1-1}\ +\ M_{11}\Big)\Big(\|y_t\|_+\ +\ \|u^D_{h\tau,t}\|_+\Big)\ \equiv\ I_1,$$

$$\tau^2\,\theta\,\Big|[A_\Pi\,y, y_t-u^D_{h\tau,t}]_\Pi\Big|\leq \tag{1.20}$$

$$\leq\ \tau^2\,\theta\Big(M_{02}\,\|y\|_{+,\Pi}^{p_2-1}\ +\ M_{12}\Big)\Big(\|y_t\|_{+,\Pi}\ +\ \|u^D_{h\tau,t}\|_{+,\Pi}\Big)\ \equiv\ I_2.$$

Правую часть равенства (1.15) оценим с помощью неравенства Гельдера, условий (1.8), (1.9), (1.12) главы 1, неравенства Юнга и леммы 1.1 данной главы. В результате получим

$$\tau\,\Big|\,[f_{i,h\tau}, y-u^D_{h\tau}]_{\Omega_i}\,\Big|\leq\ \frac{\tau}{\varepsilon^{p_i'}p_i}\ \sum_{j=0}^{k_i}\ \|f^j_{i,h\tau}\|^{p_i'}_{p_i,\Omega_i}+ \tag{1.21}$$

$$+\frac{\tau\varepsilon^{p_i}\,2^{p_i}\,(1+c_{i\Omega})}{p_i}\|y\|^{p_i}_{+,\Omega_i}+\frac{\tau\varepsilon^{p_i}\,2^{p_i}}{p_i}\|u^D_{h\tau}\|^{p_i}_{+,\Omega_i},$$

$$\theta\,\tau^2\,\Big|\,[f_{i,h\tau}, y_t-u^D_{h\tau,t}]_{\Omega_i}\,\Big|\leq\ \frac{\tau}{\alpha_i'\,\varepsilon_1^{\alpha_i'}}\ \sum_{j=0}^{k_i}\ \|f^j_{i,h\tau}\|^{\alpha_i'}_{p_i',\Omega_i}+ \tag{1.22}$$

$$+\ \frac{\theta^{\alpha_i}\,\varepsilon_1^{\alpha_i}\,\tau^{\alpha_i+1}\,2^{\alpha_i}}{\alpha_i}\ \Big(\|y_t\|^{\alpha_i}_{+,\Omega_i}\ +\ \|y_t\|^{\alpha_i}_{p_i,\Omega_i}\ +\ \|u^D_{h\tau,t}\|^{\alpha_i}_{+,\Omega_i}\ +\|u^D_{h\tau,t}\|^{\alpha_i}_{p_i,\Omega_i}\Big)\leq$$

$$\leq\frac{\tau}{\alpha_i'\,\varepsilon_1^{\alpha_i'}}\sum_{j=0}^{k_i}\ \|f^j_{i,h\tau}\|^{\alpha_i'}_{p_i',\Omega_i}+$$

$$+\frac{\theta^{\alpha_i}\varepsilon_1^{\alpha_i}\tau^{\alpha_i+1}2^{\alpha_i}}{\alpha_i}(1+c_{i\Omega})\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_i}\Big(\|y_t\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i}+\|u^D_{h\tau,t}\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i}\Big),$$

$$\tau\,\Big|\,[A\,y, u^D_{h\tau}]\,\Big|\leq\ \tau\frac{\varepsilon^{p_1'}}{p_1'}\,M_{01}\,\|y\|^{p_1}_+\ +$$

$$+\ \tau\left(\frac{M_{01}}{\varepsilon^{p_1}\,p_1}\ +\ \mu_1\right)\|u^D_{h\tau}\|^{p_1}_+\ +\ \tilde c_1\,\tau, \tag{1.23}$$

$$\tau\,\Big|\,[A_\Pi\,y, u^D_{h\tau}]_\Pi\,\Big|\leq\ \tau\frac{\varepsilon^{p_2'}}{p_2'}\,M_{02}\,\|y\|^{p_2}_{+,\Pi}+$$

$$+\ \tau\left(\frac{M_{11}}{\varepsilon^{p_2}\,p_2}\ +\ \mu_2\right)\|u^D_{h\tau}\|^{p_2}_{+,\Pi}\ +\ \tilde c_2\,\tau, \tag{1.24}$$

$$(\theta-1)\,\tau\,\Big|\,[\varphi_i(\hat y), u^D_{h\tau,t}]_{\Omega_i}\,\Big|\leq\ \tau\,(\theta-1)\,b_{4i}\ \frac{\varepsilon^{\alpha_i'}}{\alpha_i'}\ \|y\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i}\ +$$

$$+ (\theta - 1)\,\tau \left(\frac{b_{4i}}{\alpha_i \varepsilon^{\alpha_i}} + \mu_i\right) \|u^D_{h\tau,t}\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i}, \tag{1.25}$$

Здесь $i = 1, 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ c_{i\Omega}$ — постоянные из разностного аналога неравенства Фридрихса, $\lambda_{\alpha_1},\ \lambda_{\alpha_2}$ — постоянные, определенные в лемме 1.1 при $n = 2$ и $n = 1$ соответственно. Используя (1.16)–(1.25), из (1.15) нетрудно получить следующее неравенство

$$\begin{gathered}
[\Phi_1(\hat y) - \Phi_1(y), 1] \ + \ [\Phi_2(\hat y) - \Phi_2(y), 1]_\Pi \ + \ c_1\,\tau^{\alpha_1}\,\|y_t\|^{\alpha_1}_{\alpha_1} + \\
+ c_2\,\tau^{\alpha_2}\,\|y_t\|^{\alpha_2}_{\alpha_2,\Pi} \ + \ \tau\,\delta_1\,\|y\|^{p_1}_{+} \ + \ \tau\,\delta_2\,\|y\|^{p_2}_{+,\Pi} \ \le \\
\le \sum_{i=1}^{2}\Bigl(\frac{\tau}{\varepsilon^{p_i'} p_i'} \sum_{j=0}^{k_i} \|f^j_{i,h\tau}\|^{p_i'}_{p_i',\Omega_i} + \frac{\tau}{\varepsilon_1^{\alpha_i'} \alpha_i'} \sum_{j=0}^{k_i} \|f^j_{i,h\tau}\|^{\alpha_i'}_{\alpha_i,\Omega_i}\Bigr) + \\
+ \ \sum_{i=1}^{2} \tau\left(\frac{M_{0i}}{\varepsilon^{p_i}\,p_i} \ + \ M_{1i}\,\mu_i \ + \ \frac{2^{p_i}\,\varepsilon^{p_i}}{p_i}\right) \|u^D_{h\tau}\|^{p_i}_{+,\Omega_i} + \\
+ (\theta - 1)\ \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{b_{4i}}{\varepsilon^{\alpha_i}\,\alpha_i} \ + \ b_{5i}\,\mu_i\right) \|u^D_{h\tau,t}\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i} + \\
+ \sum_{i=1}^{2} \frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,\varepsilon_1^{\alpha_i}\,\tau^{\alpha_i+1}}{\alpha_i}\,(1 + c_{i\Omega})\,\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_i}\Bigl(\|y_t\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i} + \|u^D_{h\tau,t}\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i}\Bigr) + \\
+(\theta - 1)\ \sum_{i=1}^{2} b_{4i} \frac{\varepsilon^{\alpha_i'}}{\alpha_i'} \|\hat y\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i} + \sum_{i=1}^{2}\ \Bigl([\varphi_i(\hat y), \hat u^D_{h\tau}]_{\Omega_i} - [\varphi_i(y), u^D_{h\tau}]_{\Omega_i}\Bigr) = \\
= I_1 + I_2 + \tilde c\,\tau,
\end{gathered} \tag{1.26}$$

здесь

$$\delta_i = M_{2i} \ - \ \frac{\varepsilon^{p_i}\,2^{p_i}\,(1 + c_{i\Omega})}{p_i} \ - \ \frac{\varepsilon^{p_i'}}{p_i'}\,M_{0i}.$$

Оценим I_i. Сначала рассмотрим случай $1 < p_i < \alpha_i$. Используя неравенство Юнга, лемму 1.1 главы 4, нетрудно получить

$$\begin{gathered}
I_i \ \le \ \frac{\tau\,\varepsilon_2^{p_i'}\,M_{0i}}{p_i'}\,\|y\|^{p_i}_{+,\Omega_i} + \\
+ \ 2^{p_i}\,\theta^{p_i}\,\tau^{p_i+1}\left(\frac{M_{0i}}{\varepsilon_2^{p_i'}\,p_i'} \ + \ \frac{M_{1i}}{\varepsilon_3^{p_i}\,p_i}\right)\Bigl(\|y_t\|^{p_i}_{+,\Omega_i} \ + \ \|u^D_{h\tau,t}\|^{p_i}_{+,\Omega_i}\Bigr) \ + \ \tilde c_i\tau \ \le \\
\le \ \frac{\tau\,\varepsilon_2^{p_i'}\,M_{0i}}{p_i'}\,\|y\|^{p_i}_{+,\Omega_i} +
\end{gathered} \tag{1.27}$$

$$+\, 2^{p_i}\,\theta^{p_i}\,\tau^{\alpha_i+1}\,\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\Big(\frac{M_{0i}}{\varepsilon_2^{p'_i}\,p'_i}\ +\ \frac{M_{1i}}{\varepsilon_3^{p_i}\,p_i}\Big)\left(\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\ +\ \|u_{h\tau,t}^D\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\right)\ +\ \tilde{c}_i\tau.$$

Преобразуем (1.26) с помощью (1.27), суммируя полученное неравенство по t от 0 до $t'-\tau$, будем иметь

$$[\Phi_1(y(t')),1]\ +\ [\Phi_2(y(t')),1]_\Pi\ +\bar{\delta}_1\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|y\|_+^{p_1}\ +\bar{\delta}_2\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y\|_{+,\Pi}^{p_2}+$$

$$+\bar{c}_1\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau^{\alpha_1}\,\|y_t\|_{\alpha_1}^{\alpha_1}\ +\ \ \bar{c}_2\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau^{\alpha_2}\,\|y_t\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2}\ \le \tag{1.28}$$

$$\le\ \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon_i^{p'_i}\,p'_i}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_{j=0}^{k_i}\|f_{i,h\tau}^j\|_{p'_i,\Omega_i}^{p'_i}\ +\ \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha'_i}\,\alpha'_i}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_{j=0}^{k_i}\|f_{i,h\tau}^j\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha'_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{M_{0i}}{\varepsilon^{p_i}\,p_i}+\mu_i+\frac{2^{p_i}\,\varepsilon^{p_i}}{p_i}\Big)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|u_{h\tau}^D\|_{+,\Omega_i}^{p_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\frac{(\theta-1)b_{4i}}{\varepsilon^{\alpha_i}\alpha_i}+\mu_i+\frac{2^{\alpha_i}\theta^{\alpha_i}\varepsilon_1^{\alpha_i}}{\alpha_i}\,(1+c_{i\Omega})\,\tau^{\alpha_i}\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\ +$$

$$+2^{p_i}\,\theta^{p_i}\Big(\frac{M_{0i}}{\varepsilon_2^{p_i}\,p_i}+\frac{M_{1i}}{\varepsilon_3^{p_i}\,p_i}\Big)\,\tau^{\alpha_i}\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\Bigg)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\left(u_{h\tau}^D\right)_t\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}+$$

$$+[\Phi_1(0),1]+[\Phi_2(0),1]_\Pi+(\theta-1)\sum_{i=1}^{2}b_{4i}\,\frac{\varepsilon^{\alpha'_i}}{\alpha'_i}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\hat{y}\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\ +$$

$$+(\theta-1)\sum_{i=1}^{2}b_{4i}\,\frac{\varepsilon^{\alpha'_i}}{\alpha'_i}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\hat{y}\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\ +$$

$$+\ \sum_{i=1}^{2}[\varphi_i(y(t')),u_{h\tau}^D(t')]_{\Omega_i}-\sum_{i=1}^{2}[\varphi_i(y_0),u_{h\tau}^D(0)]_{\Omega_i}.$$

Условия (1.10) позволяют выбрать $\bar{h},\tau,\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ так, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$\bar{c}_i=c_i\ -\ 2^{p_i}\,\theta^{p_i}\,\left(\frac{M_{0i}}{\varepsilon_2^{p_i}\,p_i}\ +\ \frac{M_{1i}}{\varepsilon_3^{p_i}\,p_i}\right)\tau\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}-$$

$$-\ \frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,\varepsilon_1^{\alpha_i}}{\alpha_i}\,(1+c_{i\Omega})\,\tau\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\ \ge\ \beta>0,\quad i=1,2,$$

$$\overline{\delta}_i = \delta_i \; - \; \frac{\varepsilon_2^{p_i'}}{p_i} M_{0i} \; \geq \beta_1 > 0,$$

$$b_{0i} \; - \; \frac{\varepsilon_4^{\alpha_i'}}{\alpha_i'} \; - \; (\theta - 1) b_{4i} \frac{\varepsilon^{\alpha_i'}}{\alpha_i'} \tau \; \geq \; \beta_2 > 0.$$

Поэтому из (1.28) и разностного аналога леммы Гронуолла, будем иметь

$$\|y(t')\|_{\alpha_1}^{\alpha_1} \; + \; \|y(t')\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2} \; \leq \; c \tag{1.29}$$

для любого $t' \in \omega_\tau$. Из (1.28) и (1.29) следуют оценки (1.11), (1.13), (1.14).

Пусть теперь $p_i \geq \alpha_i$. Оценим $I_i, \; i = 1, 2$, используя неравенства Гельдера и лемму 1.1 главы 4. В результате получим

$$\begin{aligned} I_i \leq \tau^2 \, \theta \, \lambda_{\alpha_i} \Big(M_{0i} \, \|y\|_{+,\Omega_i}^{p_i/\alpha_i'} \, \|y\|_{+,\Omega_i}^{(p_i - \alpha_i)/\alpha_i'} \; + \; M_{1i} \Big) \times \\ \times \Big(\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i} + \| \big(u_{h\tau}^D\big)_t \|_{\alpha_i,\Omega_i} \Big) \leq \\ \leq \; \tau^2 \theta \, M_{0i} \, \|y\|_{+,\Omega_i}^{p_i/\alpha_i'} \, \lambda_{\alpha_i}^{p_i/\alpha_i'} \|y\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{(p_i - \alpha_i)/\alpha_i'} \Big(\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i} + \|u_{h\tau,t}^D\|_{\alpha_i,\Omega_i} \Big) + \\ + \tau^2 \theta \, M_{1i} \, \lambda_{\alpha_i} \Big(\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i} + \| \big(u_{h\tau}^D\big)_t \|_{\alpha_i,\Omega_i} \Big) \leq \tau \, \frac{\varepsilon_2^{\alpha_i'}}{\alpha_i'} \, M_{0i} \, \|y\|_{+,\Omega_i}^{p_i} + \\ + 2^{\alpha_i} \, \theta^{\alpha_i} \, \tau^{\alpha_i + 1} \left(\lambda_{\alpha_i}^{p_i} \, \frac{M_{0i}}{\varepsilon_2^{\alpha_i} \, \alpha_i} \, \|y\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{p_i - \alpha_i} + \lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i} \, \frac{M_{1i}}{\varepsilon_3^{\alpha_i} \, \alpha_i} \right) \|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i} + \\ + 2^{\alpha_i} \, \theta^{\alpha_i} \, \tau^{\alpha_i + 1} \left(\lambda_{\alpha_i}^{p_i} \, \frac{M_{0i}}{\varepsilon_2^{\alpha_i} \, \alpha_i} + \lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i} \, \frac{M_{1i}}{\varepsilon_3^{\alpha_i} \, \alpha_i} \right) \|u_{h\tau,t}^D\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i} + \tilde{c}\tau. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Подставляя (1.30) в (1.26) и суммируя полученные равенства по t то 0 до $t' - \tau$, будем иметь

$$\begin{aligned} [\Phi_1(y(t')), 1] + [\Phi_2(y(t')), 1]_\Pi + \left(\delta_1 - \frac{\varepsilon_2^{\alpha_1'} \, M_{01}}{\alpha_1'} \right) \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|y\|_+^{p_1} + \\ + \left(\delta_2 - \frac{\varepsilon_2^{\alpha_2'} \, M_{02}}{\alpha_2'} \right) \; \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|y\|_{+,\Pi}^{p_2} + \\ + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \sum_{i=1}^{2} \left\{ c_i - \frac{2^{\alpha_i} \, \theta^{\alpha_i} \, \varepsilon_1^{\alpha_i}}{\alpha_i} \, (1 + c_{i\Omega}) \, \tau \lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i} \; - \; \frac{2^{\alpha_i} \, \theta^{\alpha_i} \, M_{0i}}{\varepsilon_2^{\alpha_i} \, \alpha_i} \, \tau \lambda_{\alpha_i}^{p_i} \, \|y\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{p_i - \alpha_i} - \right. \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$-\frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,M_{1i}}{\varepsilon_3^{\alpha_i}\,\alpha_i}\,\tau\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\Big\}\,\tau^{\alpha_i}\,\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\;\le\;I(t')\,+$$

$$+\,(\theta-1)\,\sum_{i=1}^{2}b_{4i}\,\frac{\varepsilon^{\alpha_i'}}{\alpha_i'}\,\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\hat{y}\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\;+\;\frac{\varepsilon_4^{\alpha_1'}}{\alpha_1'}\,\|y(t')\|_{\alpha_1}^{\alpha_1}\;+\;\frac{\varepsilon_4^{\alpha_2'}}{\alpha_2'}\,\|y(t')\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2},$$

где

$$I(t')\;=\;\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\left\{\frac{1}{\varepsilon^{p_i'}\,p_i'}\sum_{j=0}^{k_i}\|f_{i,h\tau}^{j}\|_{p_i',\Omega_i}^{p_i'}\;+\;\frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_i'}\,\alpha_i'}\sum_{j=0}^{k_i}\|f_{i,h\tau}^{j}\|_{\alpha_i',\Omega_i}^{\alpha_i'}\,+\right.$$

$$+\,\left(\frac{M_{0i}}{\varepsilon^{p_1}\,p_1}\;+\;\mu_i\;+\;\frac{2^{p_i}\,\varepsilon^{p_i}}{p_i}\right)\|u_{h\tau}^{D}\|_{+,\Omega_i}^{p_i}\,+$$

$$+\left\{\frac{(\theta-1)b_{4i}}{\varepsilon^{\alpha_i}\,\alpha_i}\;+\;\mu_i\;+\frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,\varepsilon_1^{\alpha_i}\,\tau^{\alpha_i}}{\alpha_i}\,(1+c_{i\Omega})\,\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\,+\right.$$

$$\left.\left.+\,2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,\tau^{\alpha_i}\left(\frac{\lambda_{\alpha_i}^{p_i}}{\varepsilon_2^{\alpha_i}\alpha_i}\,M_{0i}\;+\;\frac{\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}}{\varepsilon_3^{\alpha_i}\alpha_i}\,M_{1i}\right)\right\}\|\big(u_{h\tau}^{D}\big)_t\|_{\alpha_i}^{\alpha_i}\right\}+$$

$$+\,[\Phi_1(0),1]\;+\;[\Phi_2(0),1]_\Pi\;+\;[\Phi_1(y_0),u_{h\tau}^{D}(0)]\;+\;[\Phi_2(y_0),u_{h\tau}^{D}(0)]_\Pi\;+\nu.$$

Докажем сначала, что из (1.31) следует оценка

$$\|y(t')\|_{\alpha_1}^{\alpha_1}\;+\;\|y(t')\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2}\;\le\;I(T)=m \tag{1.32}$$

для любого t' из ω_τ. При $t'=0$ оценка (1.32) справедлива в силу условий леммы. Предположим, что (1.32) имеет место для $t'\le t_1$, $t',t_1\in\omega_\tau$. Докажем, что (1.32) справедлива и при $t'=t_1+\tau$. Для этого запишем (1.31) при $t'=t_1+\tau$, учитывая, что $\|y(t)\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\leqslant m$ для любого $t\le t_1$, в результате получим

$$[\Phi_1(y(t_1+\tau)),1]\;+\;[\Phi_2(y(t_1+\tau)),1]_\Pi\,+$$

$$+\,(\delta_1-\frac{\varepsilon_2^{\alpha_1}}{\alpha_1'}M_{01})\,\sum_{t=0}^{t_1}\tau\,\|y(t)\|_{+}^{p_1}\;+\;(\delta_2-\frac{\varepsilon_2^{\alpha_2'}}{\alpha_2'}M_{02})\,\sum_{t=0}^{t_1}\tau\,\|y(t)\|_{+,\Pi}^{p_2}\,+$$

$$+\,\sum_{t=0}^{t'-\tau}\sum_{i=1}^{2}\left\{c_i\;-\;\frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,\varepsilon_1}{\alpha_{i+2}}\,(1+c_{i\Omega})\,\tau\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\,-\right.$$

$$\left.-\;\frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,M_{0i}}{\varepsilon_2^{\alpha_i}\,\alpha_i}\,\tau\lambda_{\alpha_i}^{p_i}\,m^{(p_i-\alpha_i)/\alpha_i}\;-\;\frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,M_{1i}}{\varepsilon_3\,\alpha_i}\,\tau\lambda_{\alpha_i}^{\alpha_i}\right\}\tau^{\alpha_i}\,\|y_t\|_{\alpha_i,\Omega_i}^{\alpha_i}\;\le$$

$$\leq\ I(t_1+\tau)\ +\ (\theta-1)\ \sum_{i=1}^{2} b_{4i}\,\frac{\varepsilon^{\alpha_i'}}{\alpha_i'}\ \sum_{t=0}^{t_1}\tau\,\|\hat{y}\|^{\alpha_i}_{\alpha_i,\Omega_i}\ +$$

$$+\ \frac{\varepsilon_4^{\alpha_1'}}{\alpha_1'}\,\|y(t_1+\tau)\|^{\alpha_1}_{\alpha_1}\ +\ \frac{\varepsilon_4^{\alpha_2'}}{\alpha_2'}\,\|y(t_1+\tau)\|^{\alpha_2}_{\alpha_2,\Pi}. \tag{1.33}$$

Выберем $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\bar{h},\tau$ так, чтобы

$$\delta_i-\frac{\varepsilon_2^{\alpha_i'}}{\alpha_i'}M_{0i}\ \geq\ \beta_1>0,$$

$$c_i\ -\ \frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,\varepsilon_1}{\alpha_i}\,(1+c_{i\Omega})\,\tau\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_i}\ -$$

$$-\ \frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,M_{0i}}{\varepsilon_2^{\alpha_i}\,\alpha_i}\,\tau\lambda^{p_i}_{\alpha_i}\,m^{(p_i-\alpha_i)/\alpha_i}\ -\ \frac{2^{\alpha_i}\,\theta^{\alpha_i}\,M_{1i}}{\varepsilon_3\,\alpha_i}\,\tau\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_i}\ \geq\ \beta_2>0.$$

Используя условие (2.2), оценку (1.32) при $t'\leqslant t_1$, из (1.33) нетрудно получить (1.32) при $t'=t_1+\tau$. Следовательно, оценка (1.32) справедлива для любого $t'\in\omega_\tau$. Из (1.32) и (1.33), в свою очередь, следуют оценки (1.11), (1.13), (1.14).

В случаях, когда $1<p_1<\alpha_1$, а $p_2\geq\alpha_2$, или, когда $p_1\geq\alpha_1$, а $1<p_2<\alpha_2$, оценки получаются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть выполнены условия леммы* 1.2. *Тогда решение разностной схемы* (1.6)–(1.8) *удовлетворяет неравенствам*

$$\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau[\triangle\varphi_i(y(t)),\triangle y(t)]_{\Omega_i}\ \leq\ c\,k\,\tau\,,\quad i=1,2,\quad 1\ \leq\ k\ \leq\ N, \tag{1.34}$$

Здесь

$$\triangle\varphi_i(y(t))=\varphi_i(y(t+k\tau))-\varphi_i(y(t)),$$
$$\triangle y(t)=y(t+k\tau)-y(t).$$

Доказательство. Просуммируем (1.5) по t от t' до $t'+(k-1)\tau$. В полученном тождестве положим

$$v=\bar{y}(t'+k\tau)-\bar{y}(t'),\qquad \bar{y}(t)=y(t)-u^D_{h\tau}(t)$$

и вновь просуммируем его по t' от 0 до $T-k\tau$. Результатом будет следующее равенство

$$\frac{1}{\tau}\ \sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\left\{[\triangle\varphi_1(y(t')),\triangle y(t')]\ +\ [\triangle\varphi_2(y(t')),\triangle y(t')]_{\Pi}\right\}\ = \tag{1.35}$$

$$= -\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big\{[Ay(t),\triangle\bar{y}(t')]-[A_\Pi y(t),\triangle\bar{y}(t')]_\Pi\Big\}+$$

$$+\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big\{[f_{1,h\tau},\triangle\bar{y}(t')]+[f_{2,h\tau},\triangle\bar{y}(t')]_\Pi\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\Big\{[\triangle\varphi_1(y(t')),\triangle u^D_{h\tau}(t')]+[\triangle\varphi_2(y(t')),\triangle u^D_{h\tau}(t')]_\Pi\Big\}.$$

Докажем, что правая часть (1.35) ограничена величиной kc, где c, как обычно, — постоянная, не зависящая от $\bar{h}$ и τ. Используя условия (1.8), (1.9) главы 1 и неравенство Гельдера для оценки первого слагаемого, будем иметь

$$I\equiv\Big|\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\,[A\,y(t),\triangle\bar{y}(t')]\Big|\le$$

$$\le\beta_0\sum_{t=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big(M_{01}\|y(t)\|_+^{p_1-1}+\mu\Big)\Big(\|y(t'+k\tau)\|_++$$

$$+\|y(t')\|_++\|u^D_{h\tau}(t'+k\tau)\|_++\|u^D_{h\tau}(t')\|_+\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\nu\Bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\,\|y(t)\|_+^{p_1}\;+\;kT\Bigg)^{1/p_1'}\times$$

$$\times\Bigg\{\Bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\,\|y(t'+k\tau)\|_+^{p_1}\Bigg)^{1/p_1}+$$

$$+\Bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\,\|y(t')\|_+^{p_1}\Bigg)^{1/p_1}+$$

$$+\Bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\,\|u^D_{h\tau}(t'+k\tau)\|_+^{p_1}\Bigg)^{1/p_1}+$$

$$+\Bigg(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\,\|u^D_{h\tau}(t')\|_+^{p_1}\Bigg)^{1/p_1}\Bigg\}.$$

Из последнего неравенства, оценки (1.11) и условия леммы 1.1 следует, что

$$I \;\le\; k\,c.$$

Аналогично оцениваются и остальные слагаемые правой части (1.35), поэтому имеем

$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\,[\triangle\varphi_i(y(t))\,,\,\triangle y(t)]_{\Omega_i} \;\le\; k\,c.$$

Отсюда в силу монотонности функций φ_i, очевидно, следуют оценки (1.34). Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть* $\{y\}$ *— последовательность функций, определенных на* $\bar\omega\times\bar\omega_\tau$, *для которых справедливы оценки* (1.11), (1.12) *и* (1.34). *Тогда существуют функция* $u\in W(0,T)$ *и последовательности шагов* $\{\tau\}$ *и* $\{\vec h\}$ *такие, что*

$$\Pi_r^{\pm}\,y \;\rightharpoonup\; u \quad *\text{-слабо} \quad в \quad L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega)), \tag{1.36}$$

$$\Pi_r^{\pm}\,y \;\rightharpoonup\; u \quad *\text{-слабо} \quad в \quad L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi)), \tag{1.37}$$

$$\Pi_r^{\pm}\,y \;\rightharpoonup\; u, \quad \Pi_r^{\pm}\,\partial_{r_i}y \;\rightharpoonup\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad в \quad L_{p_1}(Q_T), \tag{1.38}$$

$$\Pi_r^{\pm}\,y \;\rightharpoonup\; u, \quad \Pi_r^{\pm}\,\partial_{r_1}y \;\rightharpoonup\; \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad в \quad L_{p_2}(\Pi_T), \tag{1.39}$$

$$\varphi_1(\Pi_r^{+}\,y) \;\to\; \varphi_1(u) \qquad п.в. \quad в \quad Q_T, \tag{1.40}$$

$$\varphi_2(\Pi_r^{+}\,y) \;\to\; \varphi_2(u) \qquad п.в. \quad в \quad \Pi_T, \tag{1.41}$$

при $\bar h,\ \tau\to 0$.

Доказательство. Из оценок (1.11), (1.12) следует, что существуют функции

$$u\in L_{p_1}(0,T;W^1_{p_1}(\Omega))\cap L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega)),$$

$$\xi\in L_{p_2}(0,T;W^1_{p_2}(\Pi))\cap L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$$

и последовательность $\{\vec h\},\{\tau\}$ такие, что имеют место соотношения (1.36), (1.38) и

$$\Pi_r^{\pm}\,y \;\rightharpoonup\; \xi, \quad \Pi_r^{\pm}\,\partial_{r_1}y \;\rightharpoonup\; \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \quad \text{в} \quad L_{p_2}(\Pi_T). \tag{1.42}$$

Докажем, что ξ есть след функции u на Π. Пусть $\Lambda\, z$ — полилинейное восполнение функции $z \in H$. Из априорной оценки (1.11) следует ограниченность $\{\Pi^{\pm}\Lambda\, y\}$ в $V(0,T)$. Поэтому будет существовать подпоследовательность сходящая слабо в $V(0,T)$. Ясно, что предел этой подпоследовательности есть функция u. То есть, $u \in V(0,T)$ и

$$\Pi^{\pm}\,\Lambda\, y \rightharpoonup u \qquad \text{в} \quad L_{p_2}(0,T;W^1_{p_2}(\Pi)).$$

Сравнивая последнее соотношение с (1.42), приходим к выводу, что $\xi = u$.

Утверждения (1.40)–(1.41) нетрудно получить, используя леммы 2.3, 2.4. Лемма доказана.

Заметим, что из леммы 1.4 и строгой монотонности функций φ_i следует, что

$$\Pi^{+}_{r}\, y \to u, \qquad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad Q_T \text{ и } \Pi_T. \tag{1.43}$$

Кроме того условия (1.9), (1.12) и оценка (1.12) обеспечивают существования последовательностей $\{\vec{h}\}$, $\{\tau\}$ таких, что при $\bar{h}, \tau \to 0$

$$\Pi^{\pm}_{r}\, k_i(x, \nabla_r y) \rightharpoonup \overline{K}_i \qquad \text{в} \quad L_{p_1'}(Q_T), \tag{1.44}$$

$$\Pi^{\pm}_{r}\, k_{\Pi}(x_1, \partial_{r_1} y) \rightharpoonup \overline{K}_{\Pi} \qquad \text{в} \quad L_{p_2'}(\Pi_T). \tag{1.45}$$

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *второй главы и леммы* 1.2, *шаги* τ *и* h *выбраны так, что*

$$\tau/h^{\rho} \to 0\,, \qquad \textit{при } \tau, \bar{h} \to 0\,, \tag{1.46}$$

где ρ *— константа, определенная в лемме* 1.2. *Тогда последовательность кусочно-постоянных восполнений решений разностной схемы* (1.6)–(1.8), *определенная соотношениями* (1.36)–(1.41), *сходится к обобщенному решению задачи* (1.1)–(1.3) *главы* 1. *В условиях единственности решения вся последовательность кусочно-постоянных восполнений сходится к обобщенному решению задачи.*

Доказательство теоремы 1.1 близко к доказательству теоремы 1.1 второй главы, поэтому приведем отличные от теоремы 1.1 главы 1 фрагменты доказательства.

В тождестве (1.5) положим $v(x) = z_{h\tau}$, где $z_{h\tau}$ — снос в точки сетки функции z из $C^{\infty}(0,T;C_0^{\infty}(\Omega))$, $z(x,T) = 0$. Умножив полученное равенство на τ и просуммировав по t от 0 до $T-\tau$, получим

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \Bigg\{ [\varphi_{1t}, z_{h\tau}] \;+\; [\varphi_{2t}, z_{h\tau}]_{\Pi} \;+\; [Ay, z_{h\tau}] \;+$$

$$+ \, [A_\Pi \, y, z_{h\tau}]_\Pi \Big\} \; = \; \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left\{ [f_{1,h\tau}, z_{h\tau}] \; + \; [f_{2,h\tau}, z_{h\tau}]_\Pi \right\}.$$

Первые два слагаемых преобразуем с помощью формулы суммирования по частям. Полученное равенство запишем с помощью кусочно-постоянных восполнений в следующем виде

$$- \int_0^T \frac{1}{4} \sum_r \Big\{ \int_\Omega \Pi_r^+ \, \varphi_1(y) \, \Pi_r^- \, z_{h\tau\bar{t}} \, dx + \int_\Pi \Pi_r^+ \, \varphi_2(y) \, \Pi_r^- \, z_{h\tau\bar{t}} \, dx_1 \Big\} \, dt \, -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_r \Big\{ \int_\Omega \Pi_r \Big(\varphi_1(y(0)) z_{h\tau}(0) \Big) \, dx \, - \int_\Pi \Pi_r \Big(\varphi_2(y(0)) z_{h\tau}(0) \Big) \, dx_1 \, \Big\} +$$

$$+ \int_0^T \frac{1}{4} \sum_r \Big\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi_r^+ \Big(a_i(x,y) k_i(x, \nabla_r y) \partial_{r_i} z_{h\tau} \Big) \, dx \, +$$

$$+ \int_\Pi \Pi_r^+ \Big(a_\Pi(x_1, y) k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} y) \partial_{r_1} z_{h\tau} \Big) \, dx_1 \Big\} \, dt \; =$$

$$= \int_0^T \frac{1}{4} \sum_r \Big\{ \int_\Omega \sum_{i=0}^2 \Pi_r^+ \Big(f^i_{1,h\tau} \partial_{r_i} z_{h\tau} \Big) \, dx, +$$

$$+ \int_\Pi \sum_{i=0}^1 \Pi_r^+ \Big(f^i_{2,h\tau} \partial_{r_1} z_{h\tau} \Big) \, dx_1 \Big\} dt \, .$$

Используя соотношения (1.36)–(1.41), (1.44), (1.45), в последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau, \bar{h} \to 0$. В результате будем иметь

$$- \int_0^T \Big\{ \int_\Omega \varphi_1(u) \, \frac{\partial z}{\partial t} \, dx \; + \int_\Pi \varphi_2(u) \, \frac{\partial z}{\partial t} \, dx_1 \Big\} \, dt \, - \tag{1.47}$$

$$- \int_\Omega \varphi_1(u_0) \, z(x,0) \, dx \; - \int_\Pi \varphi_2(u_0) \, z(x,0) \, dx_1 \, +$$

$$+ \int_0^T \Big\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u) \, \overline{K}_i \, \frac{\partial z}{\partial x_i} \, dx \; + \int_\Pi a_\Pi(x_1,u) \, \overline{K}_\Pi \, \frac{\partial z}{\partial x_1} \, dx_1 \Big\} \, dt \; =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ \langle f_1, z\rangle \ + \ \langle f_2, z\rangle_\Pi \Big\}\, dt\,.$$

Нетрудно показать (см. доказательство теоремы 1.1, глава 2), что равенство

$$\int\limits_0^T \langle J(u), z\rangle_*\, dt + \int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\, \overline{K}_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \int\limits_\Pi a_\Pi(x,u) \overline{K}_\Pi\, \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 \Big\}\, dt = \int\limits_0^T \Big\{ \langle f_1, z\rangle + \langle f_2, z\rangle_\Pi \Big\}\, dt\,.$$

имеет место для любого $z \in \overset{\circ}{V}\ (0,T)$ и, что $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π.

Докажем, далее, что

$$\int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u) \overline{K}_i \frac{\partial z}{\partial x_i} dx + \int\limits_\Pi a_\Pi(x,u) \overline{K}_\Pi \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 \Big\} dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)\, k_i(x, \nabla u) \frac{\partial z}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int\limits_\Pi a_\Pi(x_1,u) k_\Pi\big(x_1, \frac{\partial u}{\partial x_1}\big) \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 \Big\} dt.$$

для любой функции $z \in \overset{\circ}{V}\ (0,T)$. С этой целью рассмотрим следующее неравенство

$$\frac{1}{\tau}\, [\varphi_1(\hat{y}) - \varphi_1(y), \hat{y}] \ + \ \frac{1}{\tau}\, [\varphi_2(\hat{y}) - \varphi_2(y), \hat{y}]_\Pi \ + \tag{1.48}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^2 \Big(a_i(x,y) \big(k_i(x, \nabla_r y) - k_i(x, \nabla_r \hat{v}_{h\tau})\big), \partial_{r_i}(y - \hat{v}_{h\tau}) \Big)_r +$$

$$+ \ \frac{1}{4} \sum_r \Big(a_\Pi(x_1,y) \big(k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} y) \ - \ k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} \hat{v}_{h\tau})\big), \partial_{r_1}(y - \hat{v}_{h\tau}) \Big)_{r,\Pi} \ \geqslant$$

$$\geq \ \frac{1}{\tau}\, [\Phi_1(\hat{y}) - \Phi_1(y), 1] \ + \ \frac{1}{\tau}\, [\Phi_2(\hat{y}) - \Phi_2(y), 1]_\Pi,$$

здесь $v_{h\tau} = \bar{v}_{h\tau} + u^D_{h\tau}$, $\bar{v}_{h\tau}$ — снос функции $\bar{v} \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ в точки сетки. Справедливость неравенства (1.48) следует из (1.8), (1.11), (1.14) и (2.1) главы 1. Ясно, что

$$\Pi_r^\pm v_{h\tau} \ \to \ v, \quad \Pi_r^\pm \partial_{r_i} v_{h\tau} \ \to \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \text{в} \quad L_{p_1}(Q_T),$$

$$\Pi_r^\pm v_{h\tau} \ \to \ v, \quad \Pi_r^\pm \partial_{r_1} v_{h\tau} \ \to \ \frac{\partial v}{\partial x_1} \qquad \text{в} \quad L_{p_2}(\Pi_T).$$

Поскольку функция y удовлетворяет сумматорному тождеству (1.5), то неравенство (1.48) можно записать в эквивалентном виде:

$$\begin{gathered}
[f_{1,h\tau}, \hat{y} - \hat{u}^D_{h\tau}] \ + \ [f_{2,h\tau}, \hat{y} - \hat{u}^D_{h\tau}]_\Pi \ + \ [\varphi_{1t}, \hat{u}^D_{h\tau}] \ + \ [\varphi_{2t}, \hat{u}^D_{h\tau}] - \\
- \frac{1}{4} \sum_r \tau \sum_{i=1}^2 \Big(a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r y), \partial_{r_i}(\hat{y} - \hat{u}^D_{h\tau})_t \Big)_r - \qquad (1.49) \\
- \frac{1}{4} \sum_r \tau \Big(a_\Pi(x_1,y) k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} y), \partial_{r_1}(\hat{y} - \hat{u}^D_{h\tau})_t \Big)_{r,\Pi} + \\
+ \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^2 \Big(a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r y), \partial_{r_i}(u^D_{h\tau} - \hat{v}_{h\tau}) \Big)_r + \\
+ \frac{1}{4} \sum_r \Big(a_\Pi(x_1,y) k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} y), \partial_{r_1}(u^D_{h\tau} - \hat{v}_{h\tau}) \Big)_{r,\Pi} - \\
- \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^2 \Big(a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r \hat{v}_{h\tau}), \partial_{r_i}(y - \hat{v}_{h\tau}) \Big)_r - \\
- \frac{1}{4} \sum_r \Big(a_\Pi(x_1,y) k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} \hat{v}_{h\tau}), \partial_{r_1}(y - \hat{v}_{h\tau}) \Big)_{r,\Pi} \ \geqslant \\
\geqslant \ \frac{1}{\tau} [\Phi_1(\hat{y}) - \Phi_1(y), 1] \ + \ \frac{1}{\tau} [\Phi_2(\hat{y}) - \Phi_2(y), 1]_\Pi.
\end{gathered}$$

Преобразуем слагаемые $[\varphi_{1t}, u^D_{h\tau}]$ и $[\varphi_{2t}, u^D_{h\tau}]_\Pi$ в неравенстве (1.49), воспользовавшись формулой (1.7) из главы 2. Полученное неравенство с помощью кусочно-постоянных восполнений запишем для всех $t \in (0,T)$. Результат проинтегрируем по отрезку $[0,t_1]$ и, учитывая, что

$$-\frac{\tau}{4} \sum_r \int_0^{t_1} \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi_r^+ (a(x,y) k_i(x, \nabla_r y) \partial_{r_i}(y - u^D_{h\tau})_t) dx dt \le$$

$$\le \frac{1}{4}\sum_r \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \Big| \Big(a(x,y) k_i(x, \nabla_r y), \partial_{r_i}(y - u_{h\tau}^D)_t \Big)_r \Big| \equiv J_1,$$

$$-\frac{\tau}{4}\sum_r \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Pi \Pi_r^+ (a_\Pi(x,y) k_\Pi(x, \partial_{r_1} y) \partial_{r_1}(y - u_{h\tau}^D)_t) dx_1\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{4}\sum_r \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \Big| \Big(a_\Pi(x,y) k_\Pi(x, \partial_{r_1} y), \partial_{r_1}(y - u_{h\tau}^D)_t \Big)_{r,\Pi} \Big| \equiv J_2,$$

получим

$$I(t_1) \equiv \frac{1}{4}\sum_r \Big\{ -\int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \Pi_r^+ (\varphi_1(y)\, u_{h\tau\bar{t}}^D)\, dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} \int\limits_\Omega \Pi_r^+ (\varphi_1(y) u_{h\tau}^D) dx\, dt - \int\limits_\Omega \Pi_r(\varphi_1(y(0)) u_{h\tau}^D(0))\, dx -$$

$$- \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Pi \Pi_r^+\, \varphi_2(y)\; \Pi_r^+\, u_{h\tau\bar{t}}^D\, dx_1\, dt +$$

$$+\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} \int\limits_\Pi \Pi_r^+ (\varphi_2(y) u_{h\tau}^D) dx_1 dt - \int\limits_\Pi \Pi_r(\varphi_2(y(0)) u_{h\tau}^D(0)) dx_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \Big\langle \Pi_r^+\, f_{1,h\tau}, \Pi_r^+(\hat{y} - \hat{u}_{h\tau}^D) \Big\rangle\, dt + \int\limits_0^{t_1} \Big\langle \Pi_r^+\, f_{2,h\tau}, \Pi_r^+(\hat{y} - \hat{u}_{h\tau}^D) \Big\rangle_\Pi\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi_r^+ (a_i(x,y) k_i(x, \nabla_r y)) \Pi_r^+ \partial_{r_i}(u_{h\tau}^D - \hat{v}_{h\tau}) dx dt -$$

$$- \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi_r^+ (a_i(x,y) k_i(x, \nabla_r \hat{v}_{h\tau})) \Pi_r^+ \partial_{r_i}(y - \hat{v}_{h\tau}) dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Pi \Pi_r^+ (a_\Pi(x_1,y) k_\Pi(x_1, \partial_{r_1} y)) \Pi_r^+ \partial_{r_1}(u_{h\tau}^D - \hat{v}_{h\tau})\, dx_1 dt -$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Pi}\Pi_r^+(a_\Pi(x_1,y)k_\Pi(x_1,\partial_{r_1}\hat v_{h\tau}))\Pi_r^+\partial_{r_1}(y-\hat v_{h\tau})dx_1dt\Big\} + J_1 + J_2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac14\sum_r\Big\{\frac1\tau\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau}\int\limits_\Omega \Phi_1(\Pi_r^+y)\,dxdt - \int\limits_\Omega\Phi_1(\Pi_r y(0))\,dx +$$

$$+\frac1\tau\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau}\int\limits_\Pi \Phi_2(\Pi_r^+y)\,dx_1dt - \int\limits_\Pi\Phi_2(\Pi_r y(0))\,dx_1\Big\}.$$

Для оценки правой части полученного неравенства воспользуемся свойством (1.35) из главы 2. В результате будем иметь

$$I(t_1)\geq\frac14\sum_r\Big\{\int\limits_\Omega\Phi_1(\Lambda_\tau\Pi_r y(t_1))\,dx-\int\limits_\Omega\Phi_1(\Pi_r y_0(x))\,dx+$$

$$+\int\limits_\Pi\Phi_2(\Lambda_\tau\Pi_r y(t_1))\,dx_1-\int\limits_\Pi\Phi_2(\Pi_r y_0(x))\,dx_1\Big\}. \tag{1.50}$$

Докажем далее, что

$$J_i\to 0 \quad \text{при}\;\; h,\tau\to 0\,,\quad i=1,2. \tag{1.51}$$

Используя неравенства Гельдера с показателями α_1 и α_2, неравенства (1.8), (1.9), (1.12) главы 1 и лемму 1.1, получим

$$J_1\leq c\tau^{1/\alpha_1}\lambda_{\alpha_1}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_+^{\sigma_1}\Big)^{1/\alpha_1'}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^{\alpha_1}\|y_t(t)\|_{\alpha_1}^{\alpha_1}\Big)^{1/\alpha_1}+$$

$$+c\,\tau\lambda_{\alpha_1}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_+^{\sigma_1}\Big)^{1/\alpha_1'}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|u^D_{h\tau t}(t)\|_{\alpha_1}^{\alpha_1}\Big)^{1/\alpha_1},$$

$$J_2\;\leq\;c\,\tau^{1/\alpha_2}\,\lambda_{\alpha_2}\;\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+,\Pi}^{\sigma_2}\Big)^{1/\alpha_2'}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^{\alpha_2}\|y_t(t)\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2}\Big)^{1/\alpha_2}+$$

$$+c\,\tau\,\lambda_{\alpha_2}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+,\Pi}^{\sigma_2}\Big)^{1/\alpha_2'}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|u^D_{h\tau\,t}(t)\|_{\alpha_2,\Pi}^{\alpha_2}\Big)^{1/\alpha_2},$$

здесь $\sigma_i = \alpha_i'(p_i - 1)$, $i = 1, 2$. Если $1 < p_i < \alpha_i$ $(i = 1, 2)$, то, очевидно, имеют место неравенства

$$\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+,\Omega_i}^{\sigma_i}\Big)^{\frac{1}{\alpha_i'}} \le c\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+,\Omega_i}^{p_i}\Big)^{\frac{p_i-1}{p_i}}. \tag{1.52}$$

Из (1.52), оценок (1.11), (1.13), (1.14) и условия (1.46) следует (1.51) при $1 < p_i < \alpha_i$.

Далее, пусть $p_i \ge \alpha_i$ $(i = 1, 2)$. Используя лемму 1.1 и неравенство Гельдера проведем следующие оценки:

$$\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+,\Omega_i}^{\alpha_i'(p_i-1)}\Big)^{1/\alpha_i'} = \Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+,\Omega_i}^{p_i} \|y(t)\|_{+,\Omega_i}^{(\alpha_i'-1)p_i-\alpha_i'}\Big)^{1/\alpha_i'} \le$$

$$\le \lambda_{\alpha_i}^{p_i/\alpha_i - 1} \max_{t' \in \bar\omega_\tau} \|y(t')\|_{\alpha_i}^{p_i/\alpha_i - 1}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+,\Omega_i}^{p_i}\Big)^{1/\alpha_i'}, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому

$$J_i \le \mu\,\tau^{1/\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}^{p_i/\alpha_i} \max_{t' \in \bar\omega_\tau} \|y(t')\|_{\alpha_i}^{p_i/\alpha_i - 1} \times$$

$$\times \Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+,\Omega_i}\Big)^{1/\alpha_i'} \Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^{\alpha_i} \|y_t(t)\|_{\alpha_i}^{\alpha_i}\Big)^{1/\alpha_i} +$$

$$+ \mu\,\tau\,\lambda_{\alpha_i}^{p_i/\alpha_i} \max_{t' \in \bar\omega_\tau} \|y(t')\|_{\alpha_i}^{\alpha_i}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|u_{h\tau\,t}^{D}(t)\|_{\alpha_i}^{\alpha_i}\Big)^{1/\alpha_i}.$$

Из последнего неравенства и оценок (1.11)–(1.14) будем иметь

$$J_i \le c_1(\tau\,\lambda_{\alpha_i}^{p_i})^{1/\alpha_i} + c_2(\tau\,\lambda_{\alpha_i}^{p_i})^{1/\alpha_i}\,\tau^{(1-\alpha_i)/\alpha_i}, \quad i = 1, 2.$$

По условию (1.46) $\tau\,\lambda_i^{p_i} \to 0$ при $h, \tau \to 0$. Следовательно, (1.51) выполнено и при $p_i \ge \alpha_i$.

По аналогии нетрудно доказать справедливость (1.51) и в случаях, когда $1 < p_1 < \alpha_1$, а $p_2 \ge \alpha_2$, и, когда $p_1 \ge \alpha_1$, $1 < p_2 < \alpha_2$.

Учитывая (1.51), в неравенстве (1.50) перейдем к пределу при $h, \tau \to 0$. Обоснование предельного перехода и дальнейшее доказательство теоремы проводится аналогично теореме 1.1 главы 2. Теорема доказана.

§ 2. Неявная схема МКЭ

В этом параграфе исследуется приближенный метод решения задачи совместного движения поверхностных и подземных вод, построенный с помощью метода полудискретизации по временной переменной и метода конечных элементов по пространственным переменным. Здесь рассматривается задача более общего вида по сравнению с главой первой:

$$\frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(K_i(x,u,\nabla u)\Big) = f_1, \quad x\in\Omega_\Pi,\ \ t\in(0,T), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\varphi_2(u)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\bigg(K_\Pi\Big(s,u,\frac{\partial u}{\partial s}\Big)\bigg) + \tag{2.2}$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{2} K_i(x,u,\nabla u)\cos(n,x_i)\Big]_\Pi = f_2,\ \ x\in\Pi,\ \ t\in(0,T),\ \ [u]_\Pi = 0,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in\Omega;\quad u(x,t)=0,\ \ x\in\Gamma,\ \ t\in(0,T)\,. \tag{2.3}$$

Предполагается, что функции $K_i(x,\xi_0,\xi)$, $i=1,2$, и $K_\Pi(s,\xi_0,\widetilde{\xi})$ непрерывны по ξ_0, ξ, $\widetilde{\xi}$, измеримыми по x, s, и удовлетворяют при любых $x\in\Omega$, $s\in\Pi$, $\xi_0\in R^1$, $\xi^1,\xi^2,\xi\in R^2$, $\widetilde{\xi},\widetilde{\xi}^1,\widetilde{\xi}^2\in R^1$ следующим условиям

$$|\ K_i(x,\xi_0,\xi)\ | \leqslant M_{01}\sum_{j=1}^{2}|\ \xi_i\ |^{p_1-1} + M_{11},\quad M_{01}>0,\ M_{11}\geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{2} K_i(x,\xi_0,\xi)\xi_i \geqslant M_{21}\sum_{i=1}^{2}|\ \xi_i\ |^{p_1} - M_{31},\quad M_{21}>0,\ M_{31}\geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(K_i(x,\xi_0,\xi^1) - K_i(x,\xi_0,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)\geqslant 0, \tag{2.6}$$

$$|\ K_\Pi(x,\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\xi})\ | \leqslant\ M_{02}\ |\ \widetilde{\xi}\ |^{p_2-1} + M_{12}, \tag{2.7}$$

$$K_\Pi(x,\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\xi})\widetilde{\xi}\ \geqslant\ M_{22}\ |\ \widetilde{\xi}\ |^{p_2} - M_{32},\quad M_{22}>0,\ M_{32}\geqslant 0, \tag{2.8}$$

$$(K_\Pi(x,\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\xi}^1) - K_\Pi(x,\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\xi}^2))(\widetilde{\xi}^1-\widetilde{\xi}^2)\ \geqslant\ 0\,. \tag{2.9}$$

Здесь также предполагается, что $p_i>1$, $i=1,2$.

Заметим, что для

$$K_i(x, u, \nabla u) = a_i(x, u) k(x, \nabla u),$$

$$K_\Pi(s, u, \nabla u) = a_\Pi(s, u) k_\Pi(s, \frac{\partial u}{\partial s}),$$

из условий (1.8)–(1.14) на функции $a_i,\ k_i,\ a_\Pi,\ k_\Pi$ следуют условия (2.4)–(2.9) для функций $K_i,\ K_\Pi$.

Определение 2.1. *Функцию* $u \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ *такую, что*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. в. в } \Omega \text{ и в } \Pi,$$

$$\int\limits_0^T \langle\, J(u)\,, \cdot\,\rangle_* \,dt \,\in\, (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{2.10}$$

назовем обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3), *если для любой функции* v *из пространства* $\overset{\circ}{W}(0,T)$ *справедливо интегральное тождество*

$$\int\limits_0^T \langle\, J(u)\,,\, v\,\rangle_* \,dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2} K_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dxdt + \tag{2.11}$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi K_\Pi\Big(s, u, \frac{\partial u}{\partial s}\Big) \frac{\partial v}{\partial s}\, dsdt = \int\limits_0^T \langle f_1, v\rangle \,dt + \int\limits_0^T \langle f_2, v\rangle_\Pi \,dt.$$

Для задачи (2.1)–(2.3) с помощью метода полудискретизации по переменной t и МКЭ по пространственным переменным построим приближенный метод решения. Пусть, как и ранее, $\overline{\omega}_\tau$ — равномерная сетка на $[0,T]$, τ — шаг сетки, $N\tau = T$. Далее, в предположении, что Ω — выпуклая область, определим вписанный в Ω многоугольник Ω_h с границей Γ_h, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Для любой точки $x \in \Gamma$ существует точка ξ из Γ_h, находящаяся от x на расстоянии не большем h (h — шаг сетки по пространственным переменным);

2) Точки пересечения Γ и Π являются вершинами многоугольника Ω_h.

Триангуляция области Ω_h осуществим треугольниками по следующему правилу: для каждой из подобластей $\Omega_h^1 \subset \Omega_h$ и $\Omega_h^2 \subset \Omega_h$, на которые разрез Π делит Ω_h, триангуляция проводится автономно, но так, что множества узлов построенных на Ω_h^1 и на Ω_h^2 сеток, принадлежащих Π, совпадают. В окрестности Π элементами триангуляции являются треугольники с одной криволинейной стороной, принадлежащей Π. Обозначим через $\overset{\circ}{V}_h$ множество функций из $\overset{\circ}{V}$, сужение которых на каждый конечный элемент есть образ линейной по каждому из аргументов функции на базисном элементе (см. [13, с. 113], [17, с. 47]).

Определение 2.2. *Функцию $y(t) \in \overset{\circ}{V}_h$ для $t \in \{0, \tau, \dots, T\}$ назовем решением полудискретной задачи, если для любой функции $z \in \overset{\circ}{V}_h$ и для всех $t \in \{0, \tau, T-\tau\}$ выполнены равенства*

$$\int\limits_{\Omega_h} \left(\varphi_{1t}(y(t))\; z(x) \; + \sum_{i=1}^{2} K_i(x, y, \nabla \hat{y}) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i}\right) dx + \tag{2.12}$$

$$+ \int\limits_{\Pi} \left(\varphi_{2t}(y(t))\; z(s) \; + K_\Pi\Big(s, y, \frac{\partial \hat{y}}{\partial s}\Big) \frac{\partial z(s)}{\partial s}\right) ds \; =$$

$$= \int\limits_{\Omega_h} \sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_{\Pi} \left(f^0_{2,\tau}(t) z(s) + f^1_{2,\tau}(t) \frac{\partial z(s)}{\partial s}\right) ds,$$

$$y(x,0) = u_0(x) \;\; \text{п. в. в} \;\; \Omega_h \;\; \text{и на} \;\; \Pi. \tag{2.13}$$

Здесь функции f_1^i, f_2^i выбраны так, что

$$f_1 = f_1^0 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} f_1^i, \quad f_2 = f_2^0 - \frac{\partial}{\partial s} f_2^1,$$

$$f^i_{j,\tau}(x,t) = \frac{1}{\tau} \int\limits_t^{t+\tau} f^i_j(x, \xi)\, d\xi, \quad j = 1, 2, \quad \hat{y}(t) = y(t+\tau).$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $f_1^0 = \partial f_1^0 / \partial x_0$.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$f_1 \in L_{p_1'}(0, T; W^{-1}_{p_1'}(\Omega)), \quad f_2 \in L_{p_2'}(0, T; W^{-1}_{p_2'}(\Pi)),$$

$$u_0 \in \; L_{\alpha_1}(\Omega) \cap L_{\alpha_2}(\Pi).$$

Тогда задача (2.12)–(2.13) *разрешима.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что при известном $y(t) \in L_{\alpha_1}(\Omega_h) \cap L_{\alpha_2}(\Pi)$ задача (2.12) разрешима относительно $\hat{y}(t)$. Для этого (2.12) запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_h} \Big\{\varphi_1(\hat{y})\, z \; + \tau \sum_{i=1}^{2} K_i(x, y, \nabla \hat{y}) \frac{\partial z}{\partial x_i}\Big\} dx + \tag{2.14}$$

$$+ \int\limits_{\Pi} \Big\{\varphi_2(\hat{y})\, z \; + \tau K_{\Pi}\big(s, y, \frac{\partial \hat{y}}{\partial s}\big) \frac{\partial z}{\partial s}\Big\} ds \; =$$

$$= \int\limits_{\Omega_h} \Big\{\varphi_1(y) z + \tau \sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t) \frac{\partial z}{\partial x_i}\Big\} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} \Big\{\varphi_2(y) z + \tau f^0_{2,\tau}(t) z + \tau f^1_{2,\tau}(t) \frac{\partial z}{\partial s}\Big\} ds \quad \forall\, z \in \overset{\circ}{V}_h \; .$$

Отметим, что задача (2.14) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно значений функции $\hat{y}$ в узлах Ω_h сетки. Обозначим через N число узлов сетки, через $\vec{c}(z) \in R^N$ — вектор значений функции z в узлах сетки. С помощью формул

$$(\vec{c}(z), \vec{c}(v))_{R^N} = \int\limits_{\Omega_h} z(x) v(x) dx + \int\limits_{\Pi} z(s) v(s) ds,$$

$$(F(\vec{c}(z)), \vec{c}(v))_{R^N} = \int\limits_{\Omega_h} \Big\{ \big(\varphi_1(z) - \varphi_1(y)\big)\; v \; +$$

$$+ \tau \sum_{i=1}^{2} K_i(x, y, \nabla z) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \; \tau \sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t) \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big\} dx \; +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} \Big\{ \big(\varphi_2(z) - \varphi_2(y)\big)\; v \; + \tau\, K_{\Pi}\big(s, y, \frac{\partial z}{\partial s}\big)\, \frac{\partial v}{\partial s} -$$

$$- \tau\, f^0_{2,\tau}(t)\, v - \tau\, f^1_{2,\tau}(t) \frac{\partial v}{\partial s}\Big\}\, ds$$

определим скалярное произведение в R^N и оператор $F : R^N \to R^N$, порождаемый задачей (2.14). Здесь z и v — произвольные элементы из $\overset{\circ}{V}_h$. Разрешимость (2.14) будет следовать из топологической леммы (см.[18, стр.66]) при условии, что оператор F непрерывен и существует ρ такое, что

$$(F(\vec{c}), \vec{c})_{R^N} \ \geq \ 0 \ \ \forall \vec{c} \ \in \ R^N : ||\vec{c}||_{R^N} \ \geq \ \rho. \tag{2.15}$$

Непрерывность оператора F следует из непрерывности функций $K_i(x, \xi_0, \xi)$ и $K_\Pi(s, \xi_0, \xi)$ по аргументу ξ. Докажем справедливость неравенства (2.15). Используя неравенства

$$(\varphi_i(\xi) - \varphi_i(\eta))\, \xi \ \geq \ \Phi_i(\xi) - \Phi_i(\eta) \ \ \forall \xi,\, \eta \ \in \ R_1, \tag{2.16}$$

доказанные в первой главе, свойства (1.4) из первой главы, (2.5), (2.8), неравенства Гельдера и ε-неравенство, получим

$$\begin{gathered}
(F(\vec{c}(v)), \vec{c}(v))_{R^N} = \int\limits_{\Omega_h} \Big\{ \big(\varphi_1(v) - \varphi_1(y)\big)\ v + \\
+\tau \sum_{i=1}^{2} K_i(x, y, \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \tau \sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t) \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big\} dx + \\
+ \int\limits_{\Pi} \Big\{ \big(\varphi_2(v) - \varphi_2(y)\big)\ v \ + \tau\, K_\Pi\big(s, y, \frac{\partial v}{\partial s}\big) \frac{\partial v}{\partial s} - \\
-\tau\, f^0_{2,\tau}(t)\, v - \tau\, f^1_{2,\tau}(t) \frac{\partial v}{\partial s} \Big\} ds \ \geq b_{01} \|v\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} + \\
+ b_{02} \|v\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \tau (M_{21} - \varepsilon_1^{p_1}) \|v\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)} + \\
+ \tau (M_{22} - \varepsilon_2^{p_2}) \|v\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} - \Big\{ b_{21} \|y\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} + b_{22} \|y\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \\
+ \tau \frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}} \sum_{i=0}^{2} \|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)} + \tau \frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}} \sum_{i=0}^{1} \|f^i_{2,\tau}\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)} + \\
+ \tau (b_{11} + M_{31}) \operatorname{mes} \Omega_h + \tau (b_{12} + M_{32}) \operatorname{mes} \Pi \Big\}.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Из соотношения (2.17) следует справедливость неравенства (2.15) при

$$\rho = b_{21} \|y\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} + b_{22} \|y\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \tau \frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}} \sum_{i=0}^{2} \|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)} +$$

$$+\tau\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{i=0}^{1}\|f_{2,\tau}\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+\tau(b_{11}+M_{31})\,\mathrm{mes}\,\Omega_h+\tau(b_{12}+M_{32})\,\mathrm{mes}\,\Pi$$

а значит, разрешимость задачи (2.14) относительно $\hat{y}(t)$. Лемма доказана.

Отметим, что по построению

$$(F(\vec{c}(\hat{y})),\vec{c}(v))_{R^N}=0 \qquad \forall\, v\in \overset{\circ}{V}_h\,.$$

Из этого равенства и неравенства (2.17), очевидно, вытекает оценка

$$\begin{gathered}
b_{21}\Big\{\|\hat{y}(t)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}-\|y\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}\Big\}+b_{22}\Big\{\|\hat{y}(t)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}-\|y\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}\Big\}+\\
+\tau(M_{21}-\varepsilon_1^{p_1})\|\hat{y}(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\tau(M_{22}-\varepsilon_2^{p_2})\|\hat{y}(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\ \le\\
\le\tau\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}}\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}+\tau\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+ \qquad (2.18)\\
+\tau(b_{11}+M_{31})\,\mathrm{mes}\,\Omega_h+\tau(b_{12}+M_{32})\,\mathrm{mes}\,\Pi.
\end{gathered}$$

Лемма 2.2. *Пусть* $u_0\in L_{\alpha_1}(\Omega)\cap L_{\alpha_2}(\Pi)$, $f_1\in L_{p_1'}(0,T;W^{-1}_{p_1'}(\Omega))$, $f_2\in L_{p_2'}(0,T;W^{-1}_{p_2'}(\Pi))$. *Тогда для решения задачи* (2.12), (2.13) *при любых* $k\in\{1,2,\ldots,N\}$ *и* $t'\in\omega_\tau$ *справедливы следующие априорные оценки*

$$\max_{t'\in\overline{\omega}_\tau}\Big\{\|y(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}+\|y(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}\Big\}\le \mathrm{const}, \qquad (2.19)$$

$$\sum_{t=0}^{t'}\tau\Big\{\|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\|y(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\Big\}\le \mathrm{const}, \qquad (2.20)$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{k\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\Big\{\int\limits_{\Omega_h}\triangle\varphi_1(y(t'))\triangle y(t')dx+\\
+\int\limits_{\Pi}\triangle\varphi_2(y(t'))\triangle y(t')dx\Big\}\le\ \mathrm{const}. \qquad (2.21)
\end{gathered}$$

Доказательство. Для получения оценок (2.19), (2.20) просуммируем неравенства (2.18) по t от 0 до $t'-\tau$, $t'\in\omega_\tau$:

$$\|y(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}+\tau\frac{(M_{21}-\varepsilon_1^{p_1})}{b}\sum_{t=0}^{t'}\|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+$$

$$+\|y(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\tau\frac{(M_{22}-\varepsilon_2^{p_2})}{b}\sum_{t=0}^{t'}\|y(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\le$$

$$\le\|y(0)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}+\|y(0)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}b}\sum_{t=0}^{t'}\tau\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}b}\sum_{t=0}^{t'}\tau\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}(t)\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+\tau\frac{(b_{11}+M_{31})}{b}\operatorname{mes}\Omega_h+$$

$$+\tau\frac{(b_{12}+M_{32})}{b}\operatorname{mes}\Pi. \qquad (2.22)$$

Здесь $b=\min\{b_{21},b_{22}\}$. Из (2.22) следуют оценки (2.19), (2.20).

Для доказательства оценки (2.21) просуммируем соотношение (2.12) по t от t' до $t'+(k-1)\tau$, где t' — произвольная точка из множества $\omega_\tau\cap[0,T-(k-1)\tau]$, затем положим

$$z=\frac{\tau}{k}(y(t'+k\tau)-y(t'))=\frac{\tau}{k}\triangle y(t'),$$

результат просуммируем по t' от 0 до $T-k\tau$. Полученное в итоге неравенство запишем в виде

$$J=\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big\{\int\limits_{\Omega_h}\Big(\sum_{i=1}^{2}K_i\big(x,y(t),\nabla\hat y(t)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle y(t')\big)-$$

$$-\sum_{i=0}^{2}f^i_{1,\tau}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle y(t')\big)\Big)dx+\int\limits_{\Pi}\Big(K_\Pi\big(s,y(t),\frac{\partial\hat y(t)}{\partial s}\big)\frac{\partial}{\partial s}\big(\triangle y(t')\big)-$$

$$-f^0_{2,\tau}(t)\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big)-f^1_{2,\tau}(t)\frac{\partial}{\partial s}\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big)\Big)\,ds\Big\},$$

где J левая часть оценки (2.21). Используя условия (2.4), (2.7), неравенство Гельдера, нетрудно показать, что

$$J\le\frac{1}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big\{\Big(M_{01}\|\hat y(t)\|^{p_1-1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+M_{11}\Big)\times$$

$$\times\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\|y(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\Big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}(t)\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\|y(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\Big)+$$
$$+\Big(M_{02}\|\hat y(t)\|^{p_2-1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+M_{12}\Big)\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+\|y(t')\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\Big)+$$
$$+\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}(t)\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+\|y(t')\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\Big)\Big\}. \qquad (2.23)$$

Докажем, что правая часть неравенства (2.23) ограничена постоянной, не зависящей от h и τ. Рассмотрим слагаемое

$$J_1=\frac{1}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau M_{01}\|\hat y(t)\|^{p_1-1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\|y(t'+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}.$$

Оценивая его с помощью неравенства Гельдера, нетрудно получить

$$J_1\le\frac{M_{01}}{k}\Big(k\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\|\hat y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\Big)^{1/p_1'}\Big(k\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\Big)^{1/p_1}.$$

Из последнего неравенства, оценки (2.20) следует ограниченность J_1 сверху постоянной, не зависящей от h и τ. Оценка остальных слагаемых проводится аналогично. Лемма доказана.

Исследуем сходимость метода. Продолжим функцию y продолжим нулем на множестве $\Omega\setminus\Omega_h$, сохранив за продолжением то же обозначение. Из леммы 2.2 следуют равномерные по h и τ оценки для $\Pi^{\pm}y$ в пространствах $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))$, $L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$ и справедливость неравенства, аналогичного (2.21), с интегрированием по Ω. Поэтому найдутся функция $u\in\overset{\circ}{W}(0,T)$ и последовательности $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$ такие, что при $n\to+\infty$ выполняются предельные соотношения

$$\Pi^{\pm}y_n \rightharpoonup u \text{ в } \overset{\circ}{V}(0,T); \qquad (2.24)$$
$$\Pi^{\pm}y_n \rightharpoonup u \ *-\text{слабо в } L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega)); \qquad (2.25)$$
$$\Pi^{\pm}y_n \rightharpoonup u \ *-\text{слабо в } L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi)). \qquad (2.26)$$

Здесь y_n — решение задачи (2.12)–(2.13) при $h=h_n$, $\tau=\tau_n$. Оценки (2.19)–(2.21) и леммы 2.3, 2.4 главы 1 позволяют выделить подпоследовательности $\{h_{n'}\}_{n'=0}^\infty\subset\{h_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{\tau_{n'}\}_{n'=0}^\infty\subset\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$, для которых, наряду с (2.24)–(2.26), будет справедливым и предельное соотношение

$$\Pi^{\pm}y_{n'} \to u \text{ п.в. в } Q_T \text{ и на } \Pi_T. \qquad (2.27)$$

В силу непрерывности функций $\varphi_i,\ i = 1, 2$, из (2.27) следует, что

$$\Pi^{\pm}\varphi_1(y_{n'}) \;\to\; \varphi_1(u) \text{ п.в. в } Q_T; \tag{2.28}$$

$$\Pi^{\pm}\varphi_2(y_{n'}) \;\to\; \varphi_2(u) \text{ п.в. в } \Pi_T. \tag{2.29}$$

Докажем, что функция, определенная соотношениями (2.24)–(2.27) является обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3).

Из оценки (2.20) и условий (2.4), (2.7) следует равномерная ограниченность последовательностей

$$\left\{\Pi^{\pm}K_i(x, y_{n'}, \bigtriangledown\hat{y}_{n'})\right\} \quad \text{в} \quad L_{p_1'}(0, T; L_{p_1'}(\Omega))$$

и

$$\left\{\Pi^{\pm}K_{\Pi}(s, y_{n'}, \partial\hat{y}_{n'}/\partial s)\right\} \quad \text{в} \quad L_{p_2'}(0, T; L_{p_2'}(\Pi)).$$

Тогда найдутся подпоследовательности $\{h_{n''}\}_{n''=0}^{\infty}$ и $\{\tau_{n''}\}_{n''=0}^{\infty}$ указанных последовательностей и функции
$\overline{K}_i \in L_{p_1'}(0, T; L_{p_1'}(\Omega))$, $\overline{K}_{\Pi} \in L_{p_2'}(0, T; L_{p_2'}(\Pi))$ такие, что при $n'' \to \infty$

$$\Pi^{\pm}K_i(x, y_{n''}, \bigtriangledown\hat{y}_{n''}) \rightharpoonup \overline{K}_i \text{ в } L_{p_1'}(0, T; L_{p_1'}(\Omega)), \tag{2.30}$$

$$\Pi^{\pm}K_{\Pi}(s, y_{n''}, \frac{\partial\hat{y}_{n''}}{\partial s}) \rightharpoonup \overline{K}_{\Pi} \text{ в } L_{p_2'}(0, T; L_{p_2'}(\Pi)). \tag{2.31}$$

В дальнейшем за подпоследовательностями $\{h_{n''}\}_{n''=0}^{\infty}$ и $\{\tau_{n''}\}_{n''=0}^{\infty}$, для которых справедливы (2.24)–(2.31), сохраним обозначение $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть v — произвольная функция из пространства $C_0^{\infty}(\Omega)$, обозначим $v_h \in \overset{\circ}{V}_h$ — интерполянт функции v. В (2.12) положим $z = v_h\eta_\tau$, где η_τ — сеточная функция, полученная сносом в точки сетки $\overline{\omega}_\tau$ функции η из пространства $C^{\infty}(0, T)$ такой, что $\eta(T) = 0$. Полученное равенство умножим на τ, просуммируем по t от 0 до $T-\tau$, первое и третье слагаемое преобразуем с помощью формулы суммирования по частям. Результат, используя кусочно-постоянные восполнения, запишем в виде:

$$-\int_0^T\int_\Omega \Pi^{+}\varphi_1(\hat{y}_n(t))\, v_h\, \Pi^{+}(\eta_\tau)_{\bar{t}}\, dx\, dt - \int_\Omega \varphi_1(u_0(x))\, v_h\, \eta(0)\, dx +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\Pi^{+}K_i(x, y_n, \nabla\hat{y}_n)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\ \Pi^{+}\eta_\tau\, dx\, dt -$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \Pi^+\varphi_2(\hat{y}_n(t))\, v_h\, \Pi^+(\eta_\tau)_{\bar t}\, ds\, dt - \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(x))\, v_h\, \eta(0)\, ds +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \Pi^+K_\Pi(s, y_n, \frac{\partial\hat{y}_n}{\partial s})\frac{\partial v_h}{\partial s}\,\Pi^+\eta_\tau ds\, dt \;=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^{2} f_1^i(t)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\,\Pi^+\eta_\tau\, dx\, dt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \Big\{f_2^0(t)v_h + f_2^1\frac{\partial v_h}{\partial s}\Big\}), \Pi^+\eta_\tau\, ds\, dt. \qquad (2.32)$$

В равенстве (2.32) перейдем к пределу при $n \to \infty$. Используя соотношения (2.27)–(2.32), гладкость функций v и η, получим следующее равенство

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \varphi_1(u(x,t))\; v(x)\; \frac{\partial\eta}{\partial t}(t)\; dx\, dt - \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x))\, v(x)\, \eta(0)\, dx +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2}\overline{K}_i\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\eta(t)\, dx\, dt - \int\limits_0^T\int\limits_\Pi \varphi_2(u(x,t))\; v(x)\; \frac{\partial\eta}{\partial t}\, ds\, dt-$$

$$-\int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(x))\, v(x)\, \eta(0)\, ds \;+ \int\limits_0^T\int\limits_\Pi \overline{K}_\Pi\frac{\partial v}{\partial s}(s)\,\eta(t)\, ds\; dt = \qquad (2.33)$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^{2} f_1^i(t)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\eta(t)\, dx\, dt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \left(f_2^0(t)v(s) + f_2^1\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right)\eta(t)\, ds\, dt.$$

Из плотности вложения $C_0^\infty(\Omega)$ в $\overset{\circ}{V}\cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ следует справедливость (2.33) для произвольной функции $v \in\overset{\circ}{V}\cap L_{\alpha_1}(\Omega)$. Выбрав далее функцию $\eta \in C_0^\infty(0,T)$, запишем (2.33) в виде

$$-\int_0^T \Big\{ \int_\Omega \ \varphi_1(u(x,t))\ v(x)\,dx + \int_\Pi \ \varphi_2(u(s,t))\ v(s)\,ds \Big\}\ \frac{\partial\eta}{\partial t}(t)\ dt =$$

$$= \int_0^T \Big\{ < f_1, v > - \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \overline{K}_i \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \Big\} \eta\, dt +$$

$$+ \int_0^T \Big[< f_2, v >_\Pi - \int_\Pi \overline{K}_\Pi \frac{\partial v}{\partial s}(s) \Big] \eta\, dt \equiv \int_0^T \big\langle G(t),\, v \big\rangle_* \eta\, dt. \tag{2.34}$$

Из равенства (2.34) следует, что

$$\big\langle G(t),\, v \big\rangle_* = \frac{d}{dt} \Big\{ \int_\Omega \varphi_1(u) v\, dx \ + \ \int_\Pi \varphi_2(u) v\, ds \Big\} = \big\langle J(u(t)), v \big\rangle_*,$$

и справедливо следующее включение

$$\int_0^T \big\langle J(u(t)), \cdot \big\rangle_* dt \ \in \ \big(\overset{\circ}{V}\ (0,T)\big)^*.$$

В силу плотности множества функций

$$\Big\{ w(x,t) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x) \eta_k(t),\ v_k \in \overset{\circ}{V},\ \eta_k \in C_0^\infty(0,T),\ m \in N \Big\}$$

в $\overset{\circ}{W}\ (0,T)$ из (2.34) и последнего соотношения следует справедливость равенства

$$\int_0^T \big\langle J(u(t)), w \big\rangle_* dt \ = \ \int_0^T \Big\{ < f_1\,, w > - \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \overline{K}_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx \Big\}\, dt +$$

$$+ \int_0^T \Big\{ < f_2\,, w >_\Pi - \int_\Pi K_\Pi \frac{\partial w}{\partial s}\ ds \Big\}\, dt \tag{2.35}$$

для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}\ (0,T)$.

Докажем, что $u(x,0)=u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π. Для этого выберем в (2.35) $w(x,t)=v(x)\eta(t)$, где $v\in\overset{\circ}{V}$, $\eta\in C^\infty(0,T)$, $\eta(T)=0$; результат, используя равенство (2.33), запишем в виде

$$\int_0^T \big\langle J(u(t)),v\big\rangle_* \eta\,dt = -\int_0^T\int_\Omega \varphi_1(u(x,t))v(x)\frac{\partial\eta}{\partial t}(t)dx\,dt-$$

$$-\int_\Omega \varphi_1(u_0(x))\,v(x)\eta(0)\,dx - \int_0^T\int_\Pi \varphi_2(u(s,t))v(s)\,\frac{\partial\eta}{\partial t}(t)ds\,dt-$$

$$-\int_\Pi \varphi_2(u_0(x))\,v(x)\,\eta(0)\,ds.$$

Из последнего равенства и формулы интегрирования по частям следует, что

$$\int_\Omega \Big(\varphi_1(u_0(x))-\varphi_1(u(x,0))\Big)v(x)\eta(0)\,dx+$$

$$+\int_\Pi \Big(\varphi_2(u_0(s))-\varphi_2(u(s,0))\Big)v(s)\eta(0)\,ds=0 \qquad (2.36)$$

для любой функции v из $\overset{\circ}{V}$. В силу произвольности функции v и взаимооднозначности функций φ_i, $i=1,2$ из (2.36) следует, что $u(x,0)=u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π.

Осталось доказать, что

$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^2 \overline{K}_i\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Pi \overline{K}_\Pi\frac{\partial w}{\partial s}\,ds\,dt = \qquad (2.37)$$

$$=\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^2 K_i(x,u,\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Pi K_\Pi\big(s,u,\frac{\partial u}{\partial s}\big)\frac{\partial w}{\partial s}\,ds\,dt.$$

С этой целью рассмотрим неравенство

$$\int_\Omega \frac{\varphi_1(\hat y_n(t))\;-\;\varphi_1(y_n(t))}{\tau}\,\hat y_n(t)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Pi} \frac{\varphi_2(\hat{y}_n(t)) - \varphi_2(y_n(t))}{\tau}\hat{y}_n(t)\,ds + \qquad (2.38)$$

$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Big(K_i\big(x,y_n,\nabla\hat{y}_n\big) - K_i\big(x,y_h,\nabla\hat{v}_h\big)\Big)\frac{\partial\hat{z}_n}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Pi}\Big(K_\Pi\big(s,y_n,\frac{\partial\hat{y}_n}{\partial s}\big) - K_\Pi\big(s,y_h,\frac{\partial\hat{v}_h}{\partial s}\big)\Big)\frac{\partial\hat{z}_n}{\partial s}\,ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\Phi_1(\hat{y}_n(t)) - \Phi_1(y_n(t))\Big)dx + \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Pi}\Big(\Phi_2(\hat{y}_n(t)) - \Phi_2(y_n(t))\Big)ds.$$

Здесь $\hat{z}_n = \hat{y}_n - \hat{v}_h$, через v_h обозначена функция, определенная на множестве $\overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ и являющаяся при $t \in \overline{\omega}_\tau$ интерполянтом из $\overset{\circ}{V}_h$ функции v из $C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Справедливость неравенства (2.38) следует из свойств (2.6), (2.9) и соотношения (2.16).

Используя (2.12), запишем неравенство (2.38) в виде

$$\langle f_{1\tau}(t),\hat{y}_n\rangle + \langle f_{2\tau}(t),\hat{y}_n\rangle_\Pi -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}K_i(x,y_n,\nabla\hat{y}_n)\,\frac{\partial\hat{v}_h}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_{\Pi}K_\Pi\big(x,y_n,\frac{\partial\hat{y}_n}{\partial s}\big)\frac{\partial\hat{v}_h}{\partial s}\,ds -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}K_i(x,y_n,\nabla\hat{v}_h)\,\frac{\partial\hat{z}_n}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_{\Pi}K_\Pi\big(s,y_n,\frac{\partial\hat{v}_h}{\partial s}\big)\frac{\partial\hat{z}_n}{\partial s}\,ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\Phi_1(\hat{y}_n(t)) - \Phi_1(y_n(t))\Big)dx + \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Pi}\Big(\Phi_2(\hat{y}_n(t)) - \Phi_2(y_n(t))\Big)ds.$$

Полученное неравенство с помощью кусочно-постоянных восполнений запишем для всех $t \in [0,T]$. Интегрируя результат по отрезку $[0,t_1]$, $t_1 \in [0,T]$, получим

$$I_1 \equiv \int\limits_0^{t_1}\Pi^+\langle f_{1\tau}(t),\hat{y}_n\rangle dt + \int\limits_0^{t_1}\Pi^+\langle f_{2\tau}(t),\hat{y}_n\rangle_\Pi dt -$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Pi^+\Big(K_i\big(x,y_n,\nabla\hat{y}_n\big)\,\frac{\partial\hat{v}_h}{\partial x_i}\Big)\,dx\,dt -$$

$$\int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+\Big(K_\Pi\big(s, y_n, \frac{\partial \hat{y}_n}{\partial s}\big)\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial s}\Big)\, ds\, dt -$$

$$-\int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\Pi^+\Big(K_i\big(x, y_n, \nabla \hat{v}_h\big)\frac{\partial \hat{z}_n}{\partial x_i}\Big)\, dx\, dt -$$

$$-\int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+\Big(K_\Pi\big(s, y_n, \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial s}\big)\frac{\partial \hat{z}_n}{\partial s}\Big)\, ds\, dt \ \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_1}\int_\Omega \Phi_1(\Pi^+\hat{y}_n(t))\, dx\, dt \ - \int_\Omega \Phi_1(u_0)\, dx +$$

$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_1}\int_\Pi \Phi_2(\Pi^+\hat{y}_n(t))\, ds\, dt - \int_\Pi \Phi_2(u_0) ds.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_1}\int_{\Omega_i} \Phi_i(\Pi^+\hat{y}_n(t))\, dx\, dt \ \geq \int_{\Omega_i} \Phi_i(\Lambda y_n(t_1))\, dx,\ i = 1, 2,$$

будем иметь

$$I_1 \ \geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\Big(\Phi_i(\Lambda y_n(t_1)) \ - \ \Phi_i(u_0(x))\Big)\, dx, \qquad (2.39)$$

где $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \Pi$, Λz – линейное восполнение функции z.

В неравенстве (2.39), используя соотношения (2.24)–(2.31), перейдем к пределу при $h, \tau \ \to 0$. В результате получим

$$\int_0^{t_1}\langle f_1(t), u\rangle dt \ + \int_0^{t_1}\langle f_2(t), u\rangle_\Pi dt - \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\overline{K}_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i} dx\, dt -$$

$$-\int_0^{t_1}\int_\Pi \overline{K}_\Pi \frac{\partial v}{\partial s} ds\, dt - \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} K_i\big(x, u, \nabla v\big)\frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} dx\, dt -$$

$$-\int_0^{t_1}\int_\Pi K_\Pi\big(s,u,\frac{\partial v}{\partial s}\big)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}ds\,dt\ \geq$$

$$\geq\ \varliminf_{\tau,h\to 0}\Big\{\int_\Omega \Phi_1(\Lambda y_n(t_1))\,dx\ -\int_\Omega \Phi_1(u_0)\,dx+$$

$$+\int_\Pi \Phi_2(\Lambda y_n(t_1))\,ds\,dt-\int_\Pi \Phi_2(u_0)ds\Big\}.$$

Последнее неравенство преобразуем, используя (2.35), следующим образом:

$$I_2(t_1)\equiv\int_0^{t_1}\big\langle J(u(t)),u\big\rangle_*\,dt+$$

$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega\ \sum_{i=1}^{2}\Big(\overline{K}_i\ -\ K_i\big(x,u,\nabla v\big)\Big)\,\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dx\,dt+$$

$$+\int_0^{t_1}\int_\Pi\ \Big(\overline{K}_\Pi\ -\ K_\Pi\big(s,u,\frac{\partial v}{\partial s}\big)\Big)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,ds\,dt\ \geq$$

$$\geq\ \varliminf_{\tau,h\to 0}\Big\{\int_\Omega \Phi_1(\Lambda y_n(t_1))\,dx\ -\int_\Omega \Phi_1(u_0)\,dx+$$

$$+\int_\Pi \Phi_2(\Lambda y_n(t_1))\,ds\,dt-\int_\Pi \Phi_2(u_0)ds\Big\}. \tag{2.40}$$

Проинтегрируем (2.40) по t_1 от $T-\lambda$ до T, где $\lambda>0$. В результате будем иметь

$$\int_{T-\lambda}^{T} I_2(t_1)\,dt_1\ \geq\int_{T-\lambda}^{T}\ \varliminf_{\tau,h\to 0}\int_\Omega \Phi_1(\Lambda y_n(t_1))\,dx\,dt_1+$$

$$+\int_{T-\lambda}^{T}\ \varliminf_{\tau,h\to 0}\int_\Pi \Phi_2(\Lambda y_n(t_1))\,ds\,dt_1\ -\ \lambda\int_\Omega \Phi_1(u_0(x))\,dx-$$

$$-\,\lambda\int_\Pi \Phi_2(u_0(x))\,ds. \tag{2.41}$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционалов $\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\xi)\,dx\,dt$, $i=1,2$, в пространстве $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$ вытекает, что

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T}\varliminf_{\tau,h\to 0}\int\limits_{\Pi}\Phi_i(\Lambda y_n(t_1))\,ds\,dt_1\geq\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u(t_1))\,dx\,dt_1\,. \tag{2.42}$$

Левую часть неравенства (2.41) преобразуем с помощью теоремы о среднем значении. Затем получившееся неравенство поделим на λ и перейдем к пределу при $\lambda\to 0$, откуда с учетом оценок (2.42) вытекает, что

$$\int\limits_0^T\big\langle J(u(t)),u\big\rangle_*\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big(\overline{K}i-K_i\big(x,u,\nabla v\big)\Big)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\Big(\overline{K}_\Pi-K_\Pi\big(s,u,\frac{\partial v}{\partial s}\big)\Big)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,ds\,dt\geq \tag{2.43}$$

$$\geq\varliminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\Big(\int\limits_\Omega\Phi_1(u)\,dx-\int\limits_\Omega\Phi_1(u_0)\,dx\Big)+$$

$$+\varliminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\Big(\int\limits_\Pi\Phi_2(u)\,ds-\int\limits_\Pi\Phi_2(u_0)\,ds\Big).$$

Используя равенство

$$\int\limits_0^T\big\langle J(u(t)),u\big\rangle_*\,dt=\varliminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^2\Big(\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u)\,dx-\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u_0)\,dx\Big), \tag{2.44}$$

справедливость которого следует из леммы 2.5 первой главы, из (2.43) имеем

$$\int\limits_0^T\Big\{\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big(\overline{K}_i-K_i\big(x,u,\nabla v\big)\Big)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+\int\limits_\Pi\Big(\overline{K}_\Pi-K_\Pi\big(s,u,\frac{\partial v}{\partial s}\big)\Big)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,ds\Big\}\,dt\geq 0.$$

Полагая в последнем неравенстве $v = u - \lambda w$, где λ — произвольное положительное число, w — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}(0,T)$, перейдем, после деления на λ, в полученном неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, в результате будем иметь

$$\int\limits_0^T \Big\{ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big(\overline{K}_i - K_i\big(x,u,\nabla u\big)\Big) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \int\limits_\Pi \Big(\overline{K}_\Pi - K_\Pi\big(s,u,\frac{\partial u}{\partial s}\big)\Big) \frac{\partial w}{\partial s}\, ds \Big\} dt \geq 0.$$

В силу произвольности функции w из последнего неравенства вытекает равенство (2.37).

Суммируя все вышесказанное, сформулируем теорему сходимости.

Теорема 2.1. *Пусть* Ω — *выпуклая область пространства* R^2, *функции* φ_i, K_i, $i = 1,2$, K_Π *удовлетворяют условиям* (1.4), (1.5) *первой главы,* (2.4)–(2.9),

$$f_1 \in L_{p'_1}(0,T;W^{-1}_{p'_1}(\Omega)),\ f_2 \in L_{p'_2}(0,T;W^{-1}_{p'_2}(\Pi)),$$

$$u_0 \in L_{\alpha_1}(\Omega) \cap L_{\alpha_2}(\Pi).$$

Тогда подпоследовательность кусочно-постоянных восполнений решения схемы (2.12)–(2.13), *удовлетворяющая соотношениям* (2.24)–(2.27), *сходится к обобщенному решению задачи* (1.1)–(1.3) *главы* 1. *В условиях единственности решения вся последовательность кусочно-постоянных восполнений сходится к обобщенному решению задачи.*

Литература

1. **Антонцев С.Н., Епихов Г.П., Кашеваров А.А.** Системное математическое моделирование процессов водообмена. – Новосибирск: Наука 1986. — 215 с.

2. **Антонцев С.Н., Мейрманов А.М.** Математические вопросы корректности одной модели совместного движения поверхностных и подземных вод. // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1977. — Вып.31. — С. 5–51.

3. **Антонцев С.Н., Мейрманов А.М.** Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод. — Новосибирск: изд-во НГУ, 1979. — 80 с.

4. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

5. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** Разностная схема решения задачи совместного движения грунтовых и поверхностных вод // Изв. вузов. Математика. — 1984. — №9 — С. 72–75.

6. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** О численном решении нестационарной задачи совместного движения грунтовых и поверхностных вод // Исследования по прикладной математики. — Казань, 1989. — Вып. 16 — С. 34–40.

7. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** О сходимости неявной разностной схемы для задачи совместного движения грунтовых и русловых вод с произвольной формой поперечного сечения русла реки // Исследования по прикладной математики. — Казань, 1990. — Вып. 17 — С. 27–45.

8. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** Теорема единственности решения одной задачи теории совместного движения русловых и подземных вод // Изв. вузов. Математика. — 2000. — №11. — С. 12–25.

9. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** Теорема о единственности решения одной задачи теории совместного движения русловых и подземных вод с нестационарными граничными условиями // Исследования по прикладной математике и информатике. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2003. — Вып. 24 — С. 31–42.

10. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** О единственности решения вариационного неравенства теории совместного движения поверхностных и подземных вод при неоднородном ограничении и неоднородных краевых условиях // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физ.-матем. науки. — 2007. — Том 149, кн. 4.— С. 73–89.

11. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** О разрешимости задачи совместного движения поверхностных и подземных вод при неоднородном ограничении на решение // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физ.-матем. науки. — 2012. — Том 154, кн. 1. — С. 147–161.

12. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** О приближенном методе решения задачи совместного движения поверхностных и подземных вод с точной аппроксимацией линии разреза // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физ.-матем. науки. — 2016. — Том 158, кн. 4. — С. 482–499.

13. **Даутов Р.З., Карчевский М.М.** Введение в теорию метода конечных элементов. — Казань: Казан. ун-т.— 2011. — 240 с.

14. **Дубинский Ю.А.** Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. // УМН. — 1968. — Т.23, вып. 1. — С. 45-90.

15. **Дьяконов Е.Г.** Оценки N-поперечников в смысле Колмогорова для некоторых компактов в усиленных пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. — 1997. — №7. — С. 32–50.

16. **Киндерлерер Д., Стампаккья Г.** Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983. — 256 с.

17. **Корнеев В.Г.** Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л.: ЛГУ. — 1977. — 206 с.

18. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

19. **Павлова М.Ф.** Сеточные методы решения нелинейных уравнений и неравенств с двойным вырождением, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, КГУ, Казань, 1998. — 238 с.

20. **Тимербаев М.Р.** Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева I// Известия Вузов. Математика.-2003.-№ 5.-С. 55-65.

21. **Тимербаев М.Р.** Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева II// Известия Вузов. Математика.-2003.-№ 9.-С. 46-53.

22. **Alt H.W., Luckhaus S.** Quasilinear elliptic-parabolic differential equation // Math.Z. — 1983. — Bd.183. - № 8. — pp. 311–341.

23. **Otto F.** L-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equation // J. Differential Equations, 1996, vol. 131, №1, October 10, pp. 20–38.

24. **Otto F.** L-contraction and uniqueness for unstationari saturated-unsaturated porous media flow. // Adv. Math. Sci. Appl., 1997, № 7(2), pp. 537–553.

Глазырина Людмила Леонидовна
Павлова Мария Филипповна

ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Монография

Подписано в печать
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л.
Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28