

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Б. Плещинский

СИНГУЛЯРНЫЕ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
СО СЛОЖНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

Монография

Казань
2018

УДК 517.968

*Публикуется по решению Ученого совета
Института вычислительной математики и информационных технологий,
по рекомендации кафедры прикладной математики*

Научный редактор

доктор физико-математических наук, профессор **А.М. Елизаров**

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор **А.С. Ильинский**,

кандидат физ.-мат. наук, доцент **Д.Н. Тумаков**

Плещинский Н.Б.

Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре: Монография / Н.Б. Плещинский. – Казанский федеральный университет, 2018. – 160 с.

Рассматриваются сингулярные интегральные уравнения, ядра которых имеют особенности логарифмического или степенного типа, а также одновременно слабые и сильные особенности в различных сочетаниях. Обсуждаются некоторые простые алгоритмы численного решения сингулярных интегральных уравнений, основанные на глобальном выделении особенностей из сингулярного интеграла. Рассмотрен ряд задач плоской контактной теории упругости и некоторые граничные задачи для упругих тел с дефектами.

Для студентов, аспирантов и научных работников, интересующихся теорией сингулярных интегральных уравнений, алгоритмами их численного решения и приложениями.

Электронная версия книги, изданной в 2011 году издательством LAP LAMBERT Academic Publishing, ISBN 978-3-8473-0898.

УДК 517.968

© Казанский федеральный университет, 2018 г.

© Плещинский Н.Б., 2018 г.

Введение

В книге рассматриваются сингулярные интегральные уравнения, ядра которых имеют особенности логарифмического или степенного типа, а также одновременно слабые и сильные особенности в различных сочетаниях.

Сингулярные интегральные уравнения на протяжении более чем ста лет привлекают внимание многих исследователей. Первые серьезные результаты в этом направлении были получены в работах Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Ф. Нетера и Т. Карлемана. Оказалось, что изучать такие уравнения существенно труднее, чем интегральные уравнения Фредгольма, и, следовательно, интереснее. Сингулярные интегральные уравнения встречаются в многих разделах математической физики, что стимулирует как развитие теории, так и поиск простых и эффективных алгоритмов их численного решения.

Линейное интегральное уравнение называют *сингулярным* (СИУ), если его ядро имеет сильную особенность, или когда это уравнение не подчиняется теории Фредгольма. Свойства *полного СИУ с ядром Коши* на отрезке или на кусочно-гладкой линии L во многом такие же, как у *характеристического СИУ с ядром Коши*, когда регулярное слагаемое является вполне непрерывным оператором в рассматриваемых пространствах функций. Но, как известно, это условие нарушается, если ядро регулярной части сингулярного уравнения представляет собой произведение функций, одна из которых имеет слабую особенность, а другая имеет разрыв при совпадении аргументов.

В современной теории сингулярных уравнений можно выделить несколько направлений, которые взаимно обогащают друг друга, но и конкурируют между собой. Классический подход представлен в получивших широкую известность книгах Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили, он существенно опирается на тесную связь между сингулярными интегральными уравнениями и граничными задачами теории аналитических функций. Второе направление сформировалось под влиянием функционального анализа, его фундамент образует абстрактная теория линейных операторов (как известно, теория операторов Нетера построена как обобщение классической теории разрешимости уравнений с ядром Гильберта и с ядром Коши).

Данная книга написана в стиле первого направления, основное внимание уделено описанию классов интегральных уравнений, решения которых могут быть найдены

в замкнутой форме, и изучению картины разрешимости конкретных СИУ, причем в естественных для них классах функций. Рассматриваются главным образом такие сингулярные уравнения, для которых устанавливается связь между их решениями и решениями некоторого СИУ с ядром Коши. Эта связь, как правило, задается в форме интегрального уравнения.

Решения уравнений 1-го рода с *логарифмической особенностью* в ядре могут быть получены дифференцированием из решений эквивалентных им характеристических СИУ с ядром Коши. При построении решений интегральных уравнений *со степенными особенностями* в ядрах нужно обращать уравнение Абеля или его обобщения. Таким образом, соответствующие интегральные операторы представляют собой композиции двух интегральных операторов, один из которых – характеристический оператор с ядром Коши.

Новые семейства СИУ *со сложной особенностью* в ядре найдены при условии, что соответствие между их решениями и решениями уравнений с ядром Коши устанавливается в форме интегрального уравнения Вольтерра с вырожденным ядром, в том числе со слабой особенностью. В некоторых случаях это соответствие порождается дифференциальными равенствами.

В книге обсуждаются также некоторые *алгоритмы численного решения* различных классов СИУ, основанные на глобальном выделении особенностей из сингулярного интеграла. Условия разрешимости аппроксимирующих уравнений, доказательства сходимости приближенных методов и оценки погрешностей остались за ее пределами. Отметим, что разработку методов приближенного решения сингулярных уравнений и их теоретическое обоснование можно отнести к третьему направлению в общей теории интегральных уравнений.

Среди многочисленных приложений сингулярных интегральных уравнений рассмотрены только некоторые плоские задачи *контактной теории упругости* и некоторые граничные задачи для *упругих тел с дефектами* (трещинами). При исследовании первой группы задач особое внимание уделено различным способам выбора ядра основания при различных гипотезах о свойствах упругой среды. Во втором случае предлагается использовать в качестве потенциалов криволинейные интегралы с логарифмическими ядрами.

В книге использованы материалы докторской диссертации автора, с уточнениями и дополнениями. Текст разделен на главы, главы состоят из разделов (параграфов). Принята двойная нумерация разделов, формул и утверждений.

Глава 1.

Классы функций в теории сингулярных интегральных уравнений

В главе 1 изложены необходимые в дальнейшем сведения об основных классах функций, которые используются при построении теории СИУ.

Систематическое исследование сингулярных интегральных уравнений было начато в работах Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Ф. Нетера и Т. Карлемана. В работах Ф.Д. Гахова, Н.И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа, Н.П. Векуа, С.Г. Михлина, Б.В. Хведелидзе была построена теория СИУ с ядром Коши на гладких линиях в гильдеровских классах функций. Позже эта теория была перенесена в работах Б.В. Хведелидзе, И.Ц. Гохберга, Н.Я. Крупника и других авторов на классы функций, интегрируемых по Лебегу с весом.

Условие Гельдера оказалось наиболее простым достаточным условием на плотность сингулярного интеграла с ядром Коши, обеспечивающим существование интеграла в смысле главного значения на основе интеграла Римана. Переход к интегралам Лебега дал возможность рассматривать в качестве искомого решения функции из классов $L_p(\rho)$, $p > 1$. Хотя для многих прикладных задач условие H не является естественным, класс H^* Н.И. Мусхелишвили "является целесообразно подобранным классом" (см. [60], §116). В этой главе вводятся верхние показатели Гельдера для функций, что позволит в дальнейшем уточнить свойства сингулярных интегралов.

Все рассматриваемые ниже функции предполагаются в общем случае комплекснозначными. Всюду, где это не вызовет недоразумений, будем придерживаться следующих обозначений: $f(\cdot)$ – функция, определенная на некотором множестве; $f(t)$ – значение $f(\cdot)$ на элементе t данного множества.

1.1. Кусочно-гладкие линии. Условие Гельдера

Будем использовать с незначительными изменениями терминологию и обозначения, принятые в книге Н.И. Мусхелишвили [60].

Гладкой разомкнутой дугой ab будем называть линию без точек самопересечения на комплексной плоскости с концами a и b , задаваемую параметрическим уравнением $t = t(s)$, $s \in [0, l]$ – дуговая абсцисса, l – длина дуги, при условии, что $t(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $t'(\cdot) \equiv 1$. Будем считать, что точки a и b содержатся в множестве ab . Если хотя бы одна из концевых точек исключена, будем использовать обозначения (ab, ab) и (ab) . Таким образом, ab – закрытая дуга, а (ab) – открытая.

Кусочно-гладкая линия L представляет собой совокупность конечного числа гладких разомкнутых дуг, $L = a_1b_1 \cup \dots \cup a_mb_m$, не имеющих общих точек, кроме, может быть, концов. Точки кусочно-гладкой линии, являющиеся концами одной или нескольких дуг a_kb_k , будем называть *узлами* и обозначать c_j , $j = 1..n$. Множество *обыкновенных* точек кусочно-гладкой линии L обозначим (L) . Будем считать, что значения рассматриваемых функций на кусочно-гладких линиях определены во всех обыкновенных точках этих линий. *Гладкий замкнутый контур* можно рассматривать как кусочно-гладкую линию, состоящую только из одной разомкнутой дуги, начало и конец которой совпадают.

Для заданных на кусочно-гладких линиях *непрерывных* функций будем предполагать следующее. Если функция $f(\cdot)$ рассматривается на дуге ab , то существуют ее конечные или бесконечные пределы в точках a и b , или, хотя бы, существуют конечные пределы в точках a и b у произведения $\omega(\cdot)f(\cdot)$, где $\omega(\cdot)$ – некоторая непрерывная на ab функция. Если функция $f(\cdot)$ рассматривается на кусочно-гладкой линии L , то она определена на каждой из гладких разомкнутых дуг a_kb_k , составляющих L , в указанном выше смысле. Будем говорить, что функция непрерывна на кусочно-гладкой линии, если она непрерывна на каждой закрытой дуге a_kb_k , не предполагая, что в узлах линии совпадают предельные значения функции, вычисляемые при стремлении аргумента к узлу по сходящимся в нем дугам.

Свойства функции $f(\cdot)$ на гладкой дуге ab могут быть определены через соответствующие свойства функции $f[t(\cdot)]$ на отрезке $[0, l]$. В частности, по определению криволинейного интеграла

$$\int_{ab} f(t) dt = \int_0^l f[t(s)]t'(s) ds.$$

Производная $f'(t)$ вдоль дуги также может быть определена через производную $df[t(s)]/ds$.

При исследовании одномерных СИУ во многих случаях достаточно рассматривать в качестве области определения функций отрезок (интервал) вещественной оси. Это связано, прежде всего, со свойством гладких дуг (см. [60], §2)

$$\exists k_0, \quad 0 < k_0 < 1, \quad |k_0|s_1 - s_2| \leq |t(s_1) - t(s_2)| \leq |s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in [0, l]. \quad (1.1)$$

Пусть $0 < \lambda \leq 1$. Говорят, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет *условию Гельдера с показателем* λ (или просто условию H_λ) на множестве M , если

$$\exists A > 0 \quad |f(t') - f(t'')| \leq A|t' - t''|^\lambda \quad \forall t', t'' \in M. \quad (1.2)$$

Будем обозначать $H_\lambda(ab)$ класс функций, удовлетворяющих условию H_λ на закрытой дуге ab , и $H_\lambda(L)$ – класс функций, удовлетворяющих условию H_λ на каждой из дуг

$a_k b_k$, составляющих кусочно-гладкую линию L . Класс $C(ab)$ непрерывных на закрытой дуге функций будем обозначать также и $H_0(ab)$, тогда $H_0(L)$ – класс функций, непрерывных на каждой из дуг $a_k b_k$, составляющих L . Отметим, что в [60] $H_0(L)$ означает то же самое, что у нас $H_\lambda(L)$ при некотором λ , а принадлежность функции классу $H_\lambda(L)$ предполагает, что равны ее предельные значения в каждом из узлов вдоль всех дуг, сходящихся в узле.

Условимся в дальнейшем не писать в обозначениях классов функций множество, на котором они определены, если только это не вызовет недоразумений.

Говорят, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условию H_λ в точке $t \in ab$, если (см. [60], с. 46) в некоторой окрестности t

$$\exists A > 0 \mid |f(t') - f(t)| \leq A|t' - t| \quad \forall t'. \quad (1.3)$$

Очевидно, что если $f(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, то $f(\cdot)$ удовлетворяет условию H_λ в каждой из точек ab . Обратное утверждение не имеет места, так как коэффициент A в неравенстве (1.3) в общем случае зависит от t , и может оказаться, что функция $A(\cdot)$ неограничена.

Если $f(\cdot) \in H_\lambda$ на открытой дуге (ab) , то в конечных точках дуги эта функция может быть неограниченной. Предположения о непрерывности функции $f(\cdot)$ на конце дуги недостаточно для распространения условия H_λ на этот конец. Действительно, функция $(t - a)^\alpha$ в интервале (a, b) удовлетворяет условию H_λ при любом λ , в частности, при $\lambda > \alpha$, но на отрезке $[a, b]$ – только при $\lambda \leq \alpha$.

Легко видеть, что $f(\cdot) \in H_\lambda(ab)$ тогда и только тогда, когда $f(\cdot) \in H_\lambda$ на (ab) и удовлетворяет условию H_λ в точке a и в точке b . В известном утверждении о "склеивке" двух гельдеровских функций ([60], с. 21) – если $c \in (ab)$, $f(\cdot) \in H_\lambda(ac)$, $f(\cdot) \in H_\lambda(cb)$ и $f(c - 0) = f(c + 0)$, то $f(\cdot) \in H_\lambda(ab)$ – также нельзя рассматривать открытые в точке c дуги ac и cb .

Будем обозначать $H^*(L)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем на каждой из открытых дуг, составляющих L , а в окрестности узлов имеющих интегрируемые особенности, то есть представимых в виде

$$f(t) = \frac{f_*(t)}{|t - c_j|^{\alpha_j}}, \quad 0 \leq \alpha_j < 1, \quad f_*(\cdot) \in H_\lambda. \quad (1.4)$$

При исследовании СИУ с логарифмическими и степенными особенностями в ядрах будет важно знать более точно характер особенностей в узлах и показатель Гельдера рассматриваемых функций. Различные подклассы класса H^* будут введены в главе 2 после того, как будет принято соглашение о ветвях многозначных функций.

1.2. Интегрируемые по Лебегу функции и их первообразные

Измеримая на ab функция $f(\cdot)$ называется *суммируемой со степенью p* , $p \geq 1$, если функция $|f(\cdot)|^p$ интегрируема по Лебегу на ab , то есть

$$\int_{ab} |f(t)|^p dt < +\infty. \quad (1.5)$$

Множество всех таких функций обозначается $L_p(ab)$ (*класс Лебега с показателем p*).

Пусть функция $\mu(\cdot)$ задана на гладкой разомкнутой дуге ab и на ab выбраны произвольным образом точки $t_0 = a, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = b$. Будем говорить, что функция $\mu(\cdot)$ принадлежит *классу $A_p(ab)$* , если выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^n \frac{|\mu(t_{j+1}) - \mu(t_j)|^p}{|t_{j+1} - t_j|^{p-1}} < K, \quad (1.6)$$

где K – постоянная, не зависящая от выбора точек t_j , $j = 1 \dots n$.

Лемма 1.1. *Функция $\mu(\cdot)$ на ab представима в виде*

$$\mu(t) = \mu(a) + \int_{at} \nu(\tau) d\tau, \quad \nu(\cdot) \in L_p(ab), \quad p > 1, \quad (1.7)$$

тогда и только тогда, когда $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$.

Следствие 1.1. *Функция $\mu(\cdot)$ на ab представима в виде*

$$\mu(t) = \int_{at} \nu(\tau) d\tau, \quad \nu(\cdot) \in L_p(ab), \quad p > 1,$$

тогда и только тогда, когда

- 1) $\mu(a) = 0$;
- 2) $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$.

Доказательство. Пусть $t = t(s)$, $s \in [0, l]$, – параметрическое уравнение дуги ab . Точкам t_0, \dots, t_{n+1} дуги будут соответствовать точки $s_0 = 0, s_1, \dots, s_n, s_{n+1} = l$ отрезка $[0, l]$, причем интервалы (s_j, s_{j+1}) , $j = 0 \dots n$, пересекаться не будут. Если дуга гладкая, то

$$|t_{j+1} - t_j| \leq |s_{j+1} - s_j| \leq k_1 |t_{j+1} - t_j|,$$

где постоянная k_1 , $0 < k_1 < 1$, не зависит от выбора точек t_j , $j = 1 \dots n$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} k_1^p \sum_{j=0}^n \frac{|\mu(t_{j+1}) - \mu(t_j)|^p}{|t_{j+1} - t_j|^{p-1}} &\leq \sum_{j=0}^n \frac{|\mu[t(s_{j+1})] - \mu[t(s_j)]|^p}{|s_{j+1} - s_j|^{p-1}} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^n \frac{|\mu(t_{j+1}) - \mu(t_j)|^p}{|t_{j+1} - t_j|^{p-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$ тогда и только тогда, когда $\mu[t(\cdot)] \in A_p([0, l])$. Утверждение леммы следует из известного критерия Рисса [64], с. 225 •

Лемма 1.2. $H_1(ab) \subset A_p(ab) \subset H_\lambda(ab)$, $\lambda = (p-1)/p$, $p > 1$.

Следствие 1.2. Функция $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$ тогда и только тогда, когда

1) $\mu(\cdot) \in H_\lambda$, $\lambda = (p-1)/p$;

2) существует почти всюду производная $\mu'(\cdot) \in L_p$.

Доказательство. Если $f(\cdot) \in H_1(ab)$, то $|f(t') - f(t'')| \leq A|t' - t''|$. Тогда

$$|f(t') - f(t'')|^p \leq A^p |t' - t''|^p, \quad \frac{|f(t') - f(t'')|^p}{|t' - t''|^{p-1}} \leq A^p |t' - t''|$$

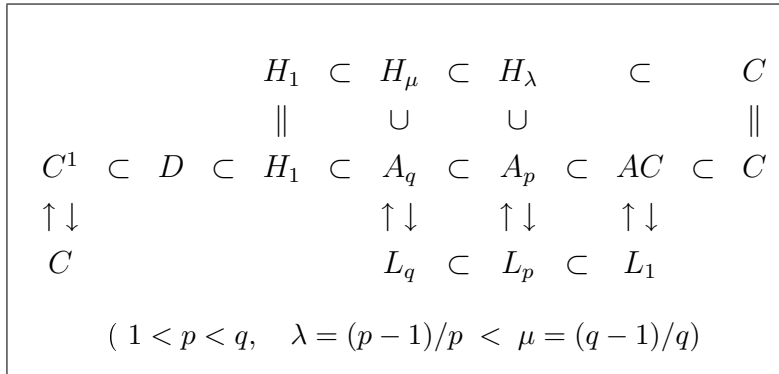
и, следовательно,

$$\sum_{j=0}^n \frac{|f(t_{j+1}) - f(t_j)|^p}{|t_{j+1} - t_j|^{p-1}} \leq A^p \sum_{j=0}^n |t_{j+1} - t_j|.$$

Если $f(\cdot) \in A_p(ab)$, то при любых t', t''

$$\frac{|f(t') - f(t'')|^p}{|t' - t''|^{p-1}} \leq K, \quad |f(t') - f(t'')| \leq K^{\frac{1}{p}} |t' - t''|^{\frac{p-1}{p}} \bullet$$

Связи между различными классами функций показаны на схеме:



Здесь учтены почти очевидные включения $H_\mu \subset H_\lambda \forall \lambda, \mu, 0 < \lambda < \mu \leq 1$; $L_q \subset L_p$, $A_q \subset A_p \forall p, q, 1 < p < q$. Соответствие между функциями и их первообразными задается на схеме вертикальными стрелками, это соответствие осуществляют операторы дифференцирования и интегрирования.

В теории сингулярных интегральных уравнений также часто используются *весовые классы* гельдеровских и суммируемых функций. Определения таких классов и свойства принадлежащих им функций подробно изложены в книге С.Г.Самко, А.А.Килбаса и О.И.Маричева [130], §1.

1.3. Верхние показатели Гельдера. Примеры

Известен ряд признаков принадлежности функций классам H_λ ([60], [19]). Почти все они указывают один из показателей Гельдера для исследуемой функции, но не дают ответа на вопрос: может ли эта функция удовлетворять условию Гельдера с бóльшим показателем. В то же время, если $f(\cdot) \in H_\lambda(M)$, то $f(\cdot) \in H_\mu(M) \quad \forall \mu < \lambda$. Поэтому, чтобы точнее описать гельдеровские свойства функции, желательно указать для нее наибольший из возможных показателей Гельдера.

Назовем *верхним показателем Гельдера функции $f(\cdot)$ на множестве M*

$$h(f(\cdot), M) = \sup\{ \lambda \mid f(\cdot) \in H_\lambda(M) \}.$$

Очевидно, $h(f(\cdot), M) \leq 1$ и $f(\cdot) \in H_\lambda(M) \quad \forall \lambda < h(f(\cdot), M)$.

Пусть $f(\cdot)$ удовлетворяет условию Гельдера на множестве M с некоторым показателем и t_0 – внутренняя точка M . Различным окрестностям $U(t_0)$ этой точки могут соответствовать различные значения верхнего показателя Гельдера. Легко видеть, что при уменьшении окрестности верхний показатель Гельдера не уменьшается, то есть $h(f(\cdot), U_1(t_0)) \geq h(f(\cdot), U_2(t_0))$, если $U_1(t_0) \subset U_2(t_0)$.

Назовем *верхним показателем Гельдера функции $f(\cdot)$ в точке t_0*

$$h(f(\cdot), t_0) = \sup_{U(t_0) \subset M} h(f(\cdot), U(t_0)).$$

Для точек, в которых $f(\cdot)$ имеет разрыв, введем левый и правый верхние показатели Гельдера $h^\pm(f(\cdot), t_0)$.

Назовем *верхним функциональным показателем Гельдера функции $f(\cdot)$ на множестве M* определенную на M функцию

$$h(f(\cdot), t) = \sup_{U(t) \subset M} h(f(\cdot), U(t)) \quad \forall t \in M.$$

Например,

$$h(|t - t_0|^\lambda, t) = \{1, \quad t \neq t_0; \quad \lambda, \quad t = t_0\}.$$

Рассмотрим примеры функций, имеющих верхние показатели Гельдера, отличные от 1 (см. [78]).

Для простоты рассуждений будем рассматривать вещественнозначные функции на вещественной оси R^1 . Легко видеть, что функции, имеющие на любом отрезке R^1 отличный от 1 постоянный верхний показатель Гельдера, содержатся среди функций, непрерывных на R^1 , но не дифференцируемых в каждой точке.

Пусть

$$\varphi(x) = \{x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 2 - x, \quad 1 \leq x \leq 2\}, \quad \varphi(x + 2) = \varphi(x).$$

Рассмотрим непрерывные на всей вещественной прямой и периодические с периодом $2/4^n$ функции

$$\varphi_n(x) = \varphi(4^n x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Теорема 1.1. *Функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda_0} \varphi_n(x), \quad 0 < \lambda_0 \leq 1, \quad (1.8)$$

непрерывна на всей вещественной прямой и ни в одной ее точке не имеет конечной производной.

Доказательство. Пусть $x \in R^1$, m – произвольное целое число. Найдется такое целое k , что $k \leq 4^m x < k+1$. Обозначим $\alpha_m = k 4^{-m}$, $\beta_m = (k+1)4^{-m}$. По построению $\beta_m - \alpha_m = 4^{-m}$,

$$\varphi_n(\beta_m) - \varphi_n(\alpha_m) = \{0, n > m; \pm 4^{n-m}, n \leq m\}.$$

Если $0 < \lambda_0 < 1$, то

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq 4^{-m\lambda_0} - \sum_{n=0}^{m-1} 4^{-n\lambda_0} 4^{n-m} > \frac{1}{2} 4^{-m\lambda_0}$$

и

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} 4^{m(1-\lambda_0)}.$$

При $\lambda_0 = 1$

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \sum_{n=0}^m (\pm 1).$$

Перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получим, что функция $f(\cdot)$ не может иметь конечной производной в точке x .

С другой стороны, так как $|4^{-n\lambda_0} \varphi_n(x)| \leq 4^{-n\lambda_0}$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda_0}$ – сходящаяся геометрическая прогрессия, то функциональный ряд (1.8) из непрерывных функций равномерно сходится относительно x . Следовательно, его сумма – непрерывная функция

•

Замечание. Функция $f(\cdot)$ – известный пример непрерывной, но не дифференцируемой функции, построенный Вейерштрассом. При $\lambda_0 = 1$ эта функция незначительно отличается от рассмотренной в [132], п. 444; при $\lambda_0 = 1 - \ln 3 / \ln 4$ функция $f(\cdot)$ совпадает с примером, приведенным в [113], п. 7.18.

Лемма 1.3. *На любом отрезке вещественной оси функция $f(\cdot)$ не удовлетворяет условию H_λ с показателем $\lambda > \lambda_0$ ($\lambda_0 < 1$).*

Доказательство. Пусть x – внутренняя точка рассматриваемого отрезка, A – произвольное достаточно большое число. Выберем целое m так, чтобы $\frac{1}{2}4^{m(\lambda-\lambda_0)} > A$ и построенные по x и m изложенным при доказательстве теоремы 1.1 способом точки α_m и β_m принадлежали выбранному отрезку. Так как $|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| > \frac{1}{2}4^{-m\lambda_0}$ и $\beta_m - \alpha_m = 4^{-m}$, то

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| > \frac{1}{2} 4^{-m\lambda_0} 4^{m\lambda} |\beta_m - \alpha_m|^\lambda > A|\beta_m - \alpha_m|^\lambda \bullet$$

Лемма 1.4. Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки R^1 . Имеют место неравенства

$$|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leq 4^n |x_1 - x_2|, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.9)$$

и

$$|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leq \frac{1}{2} 4^m |x_1 - x_2|, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.10)$$

если на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $\varphi(\cdot)$ обращается в нуль не менее двух раз.

Доказательство. Пусть над отрезком $[x_1, x_2]$ расположен прямолинейный участок графика функции $\varphi_n(\cdot)$. Тогда $\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) = \pm 4^n(x_1 - x_2)$. Если точки x_1 и x_2 лежат под разными прямолинейными участками графика, $\varphi_n(x_1) \neq \varphi_n(x_2)$, то найдутся такие точки x'_1 и x'_2 , расположенные под одним прямолинейным участком графика, что $\varphi_n(x'_1) = \varphi_n(x_1)$, $\varphi_n(x'_2) = \varphi_n(x_2)$ и $|x'_2 - x'_1| < |x_2 - x_1|$. Тогда $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| = |\varphi_n(x'_1) - \varphi_n(x'_2)| = 4^n |x'_1 - x'_2| < 4^n |x_1 - x_2|$.

Пусть на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $\varphi_m(x)$ обращается в нуль не менее двух раз. Расстояние между ее соседними нулями равно $2/4^m$, поэтому $|x_1 - x_2| \geq 2/4^m$ или, что одно и то же, $1 \leq \frac{1}{2}4^m |x_1 - x_2|$. Отсюда и из неравенства $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leq 1$ сразу следует неравенство (1.10) •

Заметим, что при малых значениях $|x_1 - x_2|$ неравенство (1.9) является более сильным, чем неравенство $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leq 1$, а неравенство (1.10) является более сильным, чем неравенство (1.9), если $n \geq m$.

Лемма 1.5. На любом отрезке вещественной оси функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условию H_λ с показателем $\lambda \leq \lambda_0$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки рассматриваемого отрезка. Пусть k – наименьший номер, начиная с которого все функции $\varphi_n(\cdot)$ не менее двух раз обращаются в нуль на отрезке $[x_1, x_2]$. Тогда $|x_1 - x_2| < 16/4^k$.

Рассмотрим разность

$$f(x_1) - f(x_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda_0} [\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)].$$

Для оценки первых k слагаемых используем неравенство (1.9) из леммы 1.4, а для остальных – неравенство (1.10). Получим при $0 < \lambda_0 < 1$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 16 \left[1/(4^{1-\lambda_0} - 1) + \frac{1}{2} 4^{\lambda_0}/(4^{\lambda_0} - 1) \right] |x_1 - x_2|^\lambda$$

или $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ при $\lambda_0 = 1$ •

Из лемм 1.3 и 1.5 следует

Теорема 1.2. *На любом отрезке $[a, b]$ вещественной прямой верхний показатель Гельдера функции (1.8)*

$$h(f(\cdot), [a, b]) = \lambda_0.$$

Следствие 1.3. *На вещественной прямой $h(f(\cdot), x) = \lambda_0 \quad \forall x \in R^1$.*

Рассмотрим теперь задачу о построении функций, имеющих на вещественной прямой заданный верхний функциональный показатель $\lambda(x)$. Если использовать для этого функциональный ряд (1.8), где вместо λ_0 подставлено $\lambda(x)$, то функция $\lambda(x)$ должна быть по крайней мере непрерывной. Ниже будет показано, что на $\lambda(x)$ должно быть наложено более сильное ограничение.

Сформулируем вспомогательные утверждения, которые доказываются методом от противного.

Лемма 1.6. *Если $f(\cdot) \in H(M)$, то $f(\cdot) \in H_\mu(M) \quad \forall \mu < \inf_{x \in M} h(f(\cdot), x)$.*

Следствие 1.4. *Если $h(f(\cdot), x) = \lambda(x)$ на M , то $h(f(\cdot), M_1) = \inf_{x \in M_1} \lambda(x) \quad \forall M_1 \subset M$.*

Лемма 1.7. *Пусть $f(\cdot) \in H(M)$. Если $\lambda(x)$ – такая непрерывная на R^1 функция, что $h(f(\cdot), M_1) = \inf_{x \in M_1} \lambda(x) \quad \forall M_1 \subset M$, то $h(f(\cdot), x) = \lambda(x)$ на M .*

Теорема 1.3. *Пусть $\lambda(x)$ – функция, удовлетворяющая на всей вещественной прямой условиям $h(\lambda(\cdot), x) \geq \lambda(x), \quad 0 < \lambda(x) \leq 1$. Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda(x)} \varphi_n(x) \tag{1.11}$$

имеет верхний функциональный показатель Гельдера $h(f(\cdot), x) = \lambda(x)$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 – любые две точки произвольно выбранного отрезка $[a, b]$ вещественной прямой. Оценим разность

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \left| \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda(x_1)} \varphi_n(x_1) - \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda(x_1)} \varphi_n(x_2) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda(x_1)} \varphi_n(x_2) - \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda(x_2)} \varphi_n(x_2) \right| = S_1 + S_2.$$

Для функции $f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n\lambda(x_1)}$ по лемме 1.5 $h(f_1(\cdot), x) = \lambda(x_1)$ и тогда

$$S_1 \leq A_1 |x_1 - x_2|^{\lambda(x_1)} \leq A |x_1 - x_2|^\lambda, \quad \lambda \leq \lambda_0 = \inf_{x \in [a, b]} \lambda(x).$$

Так как по формуле конечных приращений Лагранжа

$$4^{-nt_1} - 4^{-nt_2} = -n \ln 4 \cdot 4^{-n\xi} (t_1 - t_2), \quad t_1 < \xi < t_2,$$

то второе слагаемое оценивается так:

$$S_2 \leq \ln 4 \cdot |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| \sum_{n=0}^{+\infty} n 4^{-n\xi}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} n 4^{-n\xi}$ сходится по признаку Даламбера. Так как $h(\lambda(\cdot), x) \geq \lambda(x)$, то $|\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| \leq A_2 |x_1 - x_2|^\lambda \quad \forall \lambda < \lambda_0$ в силу леммы 1.6, причем $\sup\{\lambda\} \geq \lambda_0$. Окончательно верхний показатель Гельдера $h(f(\cdot), [a, b]) = \lambda_0$ и $h(f(\cdot), x) = \lambda(x)$ по лемме 1.7 •

Замечание. Условие $h(\lambda(\cdot), x) \geq \lambda(x)$ выполняется, например, для всех функций класса $H_1(M)$. Можно показать, что если $h(\lambda(\cdot), x) < \lambda(x)$, то функция $f(\cdot)$, определенная как сумма ряда (1.11), не будет иметь верхним функциональным показателем Гельдера функцию $\lambda(\cdot)$.

Рассмотренные примеры показывают, что функции, удовлетворяющие на некотором множестве условию Гельдера с заданным показателем, но не с большим, достаточно экзотичны. Для "обычных" функций верхний показатель Гельдера, как правило, отличен от 1 только в конечном числе точек.

Для суммируемых функций можно определить *верхний показатель Лебега* на множестве. Верхний показатель Лебега, легко видеть, задает границу L -характеристики оператора, действующего в пространстве суммируемых функций [47], §1.

Глава 2.

Характеристическое сингулярное уравнение с ядром Коши

В этой главе содержатся основные положения классической теории СИУ с ядром Коши в гильбертовых классах функций, на основе которых в следующих главах будут построены новые классы сингулярных интегральных уравнений.

Подробные исторические сведения и литературные ссылки можно найти в монографиях Ф.Д. Гахова [19], Н.И. Мусхелишвили [60], И.Ц. Гохберга, Н.Я. Крупника [21], работах Б.В. Хведелидзе [133], [134], а также в обзоре Э. Пресдорфа [103]. Различные вопросы общей теории СИУ с ядром Коши изложены также в книгах [69], [102], [138] и [79].

Чтобы уточнить соответствие между классами правых частей характеристического СИУ с ядром Коши и классами решений сингулярного уравнения, введены подклассы класса H^* Н.И. Мусхелишвили и исследованы свойства сингулярных интегралов с ядром Коши с плотностями из таких подклассов. Принято правило: не использовать (в комплексном случае) ветви многозначных функций, имеющих точки ветвления на бесконечности. Такой подход основан на методах глобального выделения особенностей из сингулярного интеграла, изложенных в монографии Л.И. Чибриковой [138], §6.

2.1. Ветви многозначных функций

Вычислим интеграл с ядром Коши с единичной плотностью. В случае, когда рассматриваются вещественнозначные функции на отрезке вещественной оси,

$$\int_a^b \frac{dt}{t-x} = \left\{ \ln \frac{b-x}{x-a}, \quad a < x < b; \quad \ln \frac{b-x}{a-x}, \quad x < a; \quad \ln \frac{x-b}{x-a}, \quad x > b \right\}, \quad (2.1)$$

причем при $x \in (a, b)$ сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения. Чтобы аргументы логарифмических функций всегда были положительными, условимся, что если аргументом логарифма является дробь, то ее числитель и знаменатель положительны. Поэтому при $x < a$ и при $x > b$ использованы разные формы записи для одной и той же логарифмической функции.

В случае комплекснозначных функций на произвольных линиях дело обстоит несколько сложнее. Пусть

$$\ln \frac{z-b}{z-a}, \quad z \notin ab,$$

– выделенная в разрезанной по дуге ab плоскости ветвь многозначной логарифмической функции, обращающаяся в нуль в бесконечно удаленной точке. Предельные

значения этой ветви слева и справа на ab обозначим

$$\left[\ln \frac{t-b}{t-a} \right]^{\pm}, \quad t \in (ab).$$

Хорошо известно, что интеграл с ядром Коши с единичной плотностью существует в смысле главного значения, при этом

$$\int_{ab} \frac{d\tau}{\tau-t} = \left[\ln \frac{t-b}{t-a} \right]^{\mp} \pm i\pi, \quad t \in (ab).$$

Определим главное значение на ab логарифмической функции как полусумму ее предельных значений слева и справа:

$$\ln \frac{b-t}{t-a} := \frac{1}{2} \left(\left[\ln \frac{t-b}{t-a} \right]^+ + \left[\ln \frac{t-b}{t-a} \right]^- \right), \quad t \in (ab), \quad (2.2)$$

тогда имеет место

Лемма 2.1.

$$\int_{ab} \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln \frac{b-t}{t-a}, \quad t \in (ab). \quad (2.3)$$

В дальнейшем нам будет удобно рассматривать логарифмическую функцию (2.3) именно как главное значение сингулярного интеграла.

Как и в вещественном случае,

$$\int_{ab} \frac{d\tau}{\tau-z} = \ln \frac{z-b}{z-a} = \ln \frac{b-z}{a-z}, \quad z \notin ab,$$

при этом можно не различать две формы записи логарифма.

Лемма 2.2.

$$\int_{ab} \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{2} \left[\left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 - \pi^2 \right], \quad t \in (ab), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{K_1} (-1)^k \pi^{2k} C_m^{2k+1} \int_{ab} \left(\ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^{m-2k-1} \frac{d\tau}{\tau-t} = \\ & = \sum_{k=0}^{K_2} (-1)^k \pi^{2k} C_m^{2k} \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^{m-2k}, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $K_1 = [(m-1)/2]$, $K_2 = [m/2]$, $[\cdot]$ – целая часть.

Доказательство. Пусть $\psi(\cdot)$ – кусочно-голоморфная функция с линией разрыва ab , принимающая конечное значение на бесконечности. Пусть $\psi^{\pm}(\cdot)$ – ее предельные значения на ab . По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\psi^+(\tau) d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\psi^-(\tau) d\tau}{\tau-z} = \psi(z) - \psi(\infty).$$

Тогда при $z \rightarrow t \in (ab)$ получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} [\psi^+(\tau) - \psi^-(\tau)] \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} [\psi^+(t) + \psi^-(t)] - \psi(\infty). \quad (2.6)$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \left(\ln \frac{z-b}{z-a} \right)^m, \quad z \notin ab.$$

Подставим ее предельные значения

$$\psi^\pm(t) = \left(\ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \pm i\pi \right)^m = \sum_{j=0}^m (\pm i\pi)^j C_m^j \left(\ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^{m-j}$$

в формулу (2.6) и получим после приведения подобных членов формулу (2.5).

Равенство (2.4) является частным случаем (2.5) при $m = 2$. При $m = 1$ получим (2.3), а при $m = 3$ имеем

$$\int_{ab} \left(\ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^2 \frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{3} \left[\left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^3 - 2\pi^2 \ln \frac{b-t}{t-a} \right], \quad t \in (ab) \bullet$$

Замечание. Из равенства (2.5) можно получить формулу для вычисления сингулярного интеграла от целой положительной степени логарифмической функции.

Определим главное значение на дуге ab степенной функции

$$\left(\frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha := \exp \left[\alpha \ln \frac{b-t}{t-a} \right] = \exp \int_{ab} \frac{\alpha d\tau}{\tau-t}, \quad t \in (ab), \quad (2.7)$$

здесь α – некоторое комплексное число. Тогда выделенная в разрезанной по дуге ab плоскости ветвь многозначной степенной функции, обращающаяся в 1 в бесконечно удаленной точке,

$$\left(\frac{z-b}{z-a} \right)^\alpha = \exp \int_{ab} \frac{\alpha d\tau}{\tau-z}, \quad z \notin ab,$$

имеет предельные значения на ab

$$\left[\left(\frac{t-b}{t-a} \right)^\alpha \right]^\pm = \exp[\pm i\alpha\pi] \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha, \quad t \in (ab).$$

Лемма 2.3. Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ – такие комплексные числа, что $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $-1 < \operatorname{Re} \beta < 1$. Тогда

$$\int_{ab} \left(\frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^\alpha \frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \left[\cos \alpha\pi \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha - 1 \right], \quad t \in (ab), \quad (2.8)$$

$$\int_{ab} \left(\frac{\tau-a}{b-\tau} \right)^\beta \frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{\pi}{\sin \beta\pi} \left[1 - \cos \beta\pi \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\beta \right], \quad t \in (ab). \quad (2.9)$$

Доказательство. Формула (2.8) следует из формулы (2.6), если в качестве функции $\psi(\cdot)$ рассмотреть степенную функцию. Формула (2.9) может быть получена аналогичным образом, но достаточно в формуле (2.8) заменить α на $-\beta$ •

Лемма 2.4. Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ – такие комплексные числа, что $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $-1 < \operatorname{Re} \beta < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{ab} \left(\frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^\alpha \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \frac{d\tau}{\tau-t} = \\ & = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \left[\cos \alpha\pi \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha \ln \frac{b-t}{t-a} - \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha + \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi \right], \quad t \in (ab), \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{ab} \left(\frac{\tau-a}{b-\tau} \right)^\beta \ln \frac{\tau-a}{b-\tau} \frac{d\tau}{\tau-t} = \\ & = \frac{\pi}{\sin \beta\pi} \left[-\cos \beta\pi \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\beta \ln \frac{t-a}{b-t} + \frac{\pi}{\sin \beta\pi} \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\beta - \pi \operatorname{ctg} \beta\pi \right], \quad t \in (ab). \quad (2.11) \end{aligned}$$

Формулы (2.10) и (2.11) также следуют из тождества (2.6). Можно рассмотреть и более общий случай, когда логарифмическая функция в их левой части содержится в любой целой положительной степени.

Введем следующие подклассы класса $H^*(ab)$. Обозначим $H_\lambda^0(ab)$ класс функций, принадлежащих $H_\lambda(ab)$ и обращающихся в нуль в точках a и b .

Будем говорить, что $f(\cdot) \in H_\lambda^l(ab)$, если

$$\exists f_l(\cdot), f_0(\cdot) \in H_\lambda(ab) \mid f(t) = f_l(t) \ln \frac{b-t}{t-a} + f_0(t) \quad \forall t \in (ab) \quad (2.12)$$

и $f(\cdot) \in H_\lambda^{l,m}(ab)$, $m = 1, 2, \dots$, если

$$\begin{aligned} & \exists f_{l,m}(\cdot) \in H_\lambda(ab), \quad f_0(\cdot) \in H_\lambda^{l,m-1}(ab) \mid \\ & f(t) = f_{l,m}(t) \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^m + f_0(t) \quad \forall t \in (ab), \quad (2.13) \end{aligned}$$

здесь $H_\lambda^{l,1}(ab) = H_\lambda^l(ab)$.

Заметим, что если $f(\cdot) \in H_\lambda^{l,m}(ab)$ и $f_{l,m}(a) = 0$, $f_{l,m}(b) = 0$, то $f(\cdot) \in H_\lambda^{l,m-1}(ab)$ (λ – верхний показатель Гельдера). Будем предполагать в дальнейшем, что функция $f_{l,m}(\cdot)$ не обращается в нуль в точках a и b одновременно.

Классы функций, имеющих степенные особенности на концах дуги, будем обозначать $H_\lambda^p(ab)$. Точнее, будем говорить, что $f(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$, $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < 1$, $0 \leq \operatorname{Re} \beta < 1$, если

$$\exists f_a(\cdot), f_b(\cdot) \in H_\lambda(ab) \quad \mid \quad f_a(a) \neq 0, \quad f_b(b) \neq 0,$$

$$f(t) = f_a(t) \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha + f_b(t) \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\beta + f_0(t) \quad \forall t \in (ab), \quad (2.14)$$

где или $f_0(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, или имеет логарифмические особенности на концах дуги, или $f_0(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha_0, \beta_0](ab)$, $\operatorname{Re} \alpha_0 < \operatorname{Re} \alpha$, $\operatorname{Re} \beta_0 < \operatorname{Re} \beta$. В некоторых случаях удобно из определения класса $H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$ исключить требование $f_a(a) \neq 0$, $f_b(b) \neq 0$. Тогда, если нужно более точно описать поведение функции на концах дуги, будем использовать следующее определение.

Пусть функция $f(\cdot)$ имеет в узле c_j линии L интегрируемую особенность. Назовем *порядком степенной особенности* функции $f(\cdot)$ в узле c_j

$$\gamma_j = \inf \left\{ \operatorname{Re} \gamma \mid \lim_{t \rightarrow c_j} f(t) \left(\frac{t-c_j}{t-c_k} \right)^\gamma = 0 \right\}, \quad (2.15)$$

здесь c_k – любой из узлов линии L , совпадающих с концами составляющих L разомкнутых дуг, сходящихся в узле c_j . Иногда также важно знать, достигается ли неточная грань в определении порядка особенности.

Для классов функций, имеющих на концах дуги степенно-логарифмические особенности, будем использовать обозначения $H_\lambda^{p,l,m}[\alpha, \beta](ab)$. Возможны также ситуации, когда на концах дуги рассматриваемые функции имеют особенности различных типов.

Условимся, если это не вызовет недоразумений, не указывать в обозначениях классов те или иные элементы.

2.2. Свойства интеграла с ядром Коши

Теория СИУ с ядром Коши в гельдеровых классах функций основана на следующих утверждениях.

Теорема 2.1. *Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, $0 < \lambda \leq 1$, то сингулярный интеграл*

$$(S_{ab}\mu)(t) := \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} \quad (2.16)$$

существует в смысле главного значения $\forall t \in (ab)$. Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^0(ab)$, $0 < \lambda \leq 1$, то $(S_{ab}\mu)(\cdot) \in H_\lambda(ab)$ при $\lambda < 1$ и $(S_{ab}\mu)(\cdot) \in H_{1-\varepsilon}(ab) \quad \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ при $\lambda = 1$.

Доказательство имеется в книгах [60], [19]. Заметим только, что если использовать понятие верхнего показателя Гельдера, то в формулировке теоремы не нужно выделять случай $\lambda = 1$.

Теорема 2.2. *Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{l,m}(ab)$, то $(S_{ab}\mu)(\cdot) \in H_\lambda^{l,m+1}(ab)$, $m = 0, 1, \dots$. При этом $\exists l_m(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, $l_m(a) = \mu(a)/m!$, $l_m(b) = \mu(b)/m!$, $m_0(\cdot) \in H_\lambda^{l,m}(ab) \quad |$*

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = l_m(t) \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^m + m_0(t), \quad t \in (ab). \quad (2.17)$$

Следствие 2.1. Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, то в окрестностях точек a и b

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \mu(a) \ln \frac{b-t}{t-a} + \mu_a(t), \quad \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \mu(b) \ln \frac{b-t}{t-a} + \mu_b(t), \quad (2.18)$$

где $\mu_a(\cdot), \mu_b(\cdot) \in H_\lambda(ab)$.

Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^l(ab)$, то в окрестностях точек a и b

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} \mu(a) \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 + m_a(t), \quad (2.19)$$

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} \mu(b) \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 + m_b(t), \quad (2.20)$$

где $m_a(\cdot), m_b(\cdot) \in H_\lambda^l(ab)$.

Доказательство. Пусть $\mu(\cdot) \in H_\lambda(ab)$ ($m = 0$) и

$$l(t) = \mu(a) \frac{b-t}{b-a} + \mu(b) \frac{t-a}{b-a} \quad (2.21)$$

(линейная аппроксимация функции $\mu(\cdot)$ на ab). Тогда

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{l(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{ab} \frac{\mu(\tau) - l(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

При этом

$$\int_{ab} \frac{l(\tau) d\tau}{\tau - t} = l(t) \ln \frac{b-t}{t-a} + \mu(b) - \mu(a) \quad \forall t \in (ab),$$

а второе слагаемое принадлежит классу $H_\lambda(ab)$ по теореме 2.1, так как $\mu(\cdot) - m_l(\cdot) \in H_\lambda^0(ab)$.

Заметим, что коэффициент $l(\cdot)$ при логарифмической функции не только гельдеров с показателем λ , но и дифференцируем. Можно было также выбрать $l(t) = \mu(t)$.

При $m = 1, 2, \dots$ доказательство проводится по той же схеме.

Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^l(ab)$, то в качестве вспомогательной функции также можно взять функцию (2.21). Из формулы (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{ab} l(\tau) \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \frac{d\tau}{\tau-t} &= \frac{1}{2} l(t) \left[\left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 - \pi^2 \right] + \\ &+ \frac{\mu(b) - \mu(a)}{b-a} + \int_{ab} \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} d\tau \quad \forall t \in (ab) \bullet \end{aligned}$$

Пусть теперь плотность интеграла (2.16) допускает особенности степенного или степенно-логарифмического типа на концах дуги ab .

Теорема 2.3. Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{pl,m}[\alpha, \beta](ab)$, то $(S_{ab}\mu)(\cdot) \in H_\lambda^{pl,m}[\alpha, \beta](ab)$,
 $m = 0, 1, \dots$. При этом $\exists pl_{a,m}(\cdot), pl_{b,m}(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, |

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = pl_{a,m}(t) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\alpha \left(\ln \frac{b-t}{t-a}\right)^m -$$

$$- pl_{b,m}(t) \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^\beta \left(\ln \frac{b-t}{t-a}\right)^m + m_0(t), \quad t \in (ab), \quad (2.22)$$

где функция $m_0(\cdot)$ имеет в точках a и b особенности порядков меньших, чем $\mu(\cdot)$, или вообще не имеет особенностей.

Следствие 2.2. Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$, то в окрестностях точек a и b

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi \mu(a) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\alpha + m_a(t), \quad (2.23)$$

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = -\pi \operatorname{ctg} \beta \pi \mu(b) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\alpha + m_b(t), \quad (2.24)$$

где $m_a(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha_0, \beta](ab)$, $m_b(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta_0](ab)$, $\operatorname{Re} \alpha_0 < \operatorname{Re} \alpha$, $\operatorname{Re} \beta_0 < \operatorname{Re} \beta$.

Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{pl}[\alpha, \beta](ab)$, то в окрестностях точек a и b

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi \mu(a) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\alpha \ln \frac{b-t}{t-a} + m_a(t), \quad (2.25)$$

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = -\pi \operatorname{ctg} \beta \pi \mu(b) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\alpha \ln \frac{b-t}{t-a} + m_b(t), \quad (2.26)$$

где $m_a(\cdot), m_b(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$.

Доказательство. Пусть $\mu(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$ и

$$\mu(t) = \mu_a(t) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\alpha + \mu_b(t) \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^\beta + \mu_0(t) \quad \forall t \in (ab).$$

Тогда

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \mu_a(t) \int_{ab} \left(\frac{b-\tau}{\tau-a}\right)^\alpha \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{ab} \left(\frac{b-\tau}{\tau-a}\right)^\alpha [\mu_a(\tau) - \mu_a(t)] \frac{d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ \mu_b(t) \int_{ab} \left(\frac{\tau-a}{b-\tau}\right)^\beta \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{ab} \left(\frac{\tau-a}{b-\tau}\right)^\beta [\mu_b(\tau) - \mu_b(t)] \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{ab} \frac{\mu_0(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

Осталось применить формулы (2.8) и (2.9).

Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{pl}[\alpha, \beta](ab)$, то используем формулы (2.10) и (2.11). При $m = 2, 3, \dots$ рассуждения аналогичны •

2.3. Характеристическое СИУ с ядром Коши. Классы Гельдера

Пусть L – кусочно-гладкая линия, c_j , $j = 1..n$, – ее узлы. Рассмотрим *характеристическое СИУ с ядром Коши*

$$(K\mu)(t) := A(t)\mu(t) + B(t) \int_L \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in (L). \quad (2.27)$$

Сингулярный интеграл в левой части (2.27) будем понимать в смысле главного значения по Коши, то есть как предел криволинейного интеграла Римана по линии L без вырезанной окружностью малого радиуса окрестности точки t , если радиус этой окружности стремится к нулю. Будем считать, что равенство (2.27) выполняется только в обыкновенных точках линии L .

Из теорем раздела 2.2 следует, что в качестве области определения характеристического сингулярного интегрального оператора K , ставящего функции $\mu(\cdot)$ в соответствие стоящее в левой части (2.27) выражение, можно рассматривать любой из подклассов класса $H^*(L)$, определенных в конце раздела 2.1.

Уточним классы функций, которым принадлежат значения оператора K .

Теорема 2.4. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in H_\lambda(ab)$.

- 1) Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^0(ab)$, то $(K\mu)(\cdot) \in H_\lambda(ab)$;
- 2) если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{l,m}(ab)$, $m = 0, 1, \dots$, то $(K\mu)(\cdot) \in H_\lambda^{l,m+1}(ab)$;
- 3) если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{pl,m}[\alpha, \beta](ab)$, $m = 0, 1, \dots$, и не выполняются равенства

$$A(a) + \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi B(a) = 0, \quad A(b) - \pi \operatorname{ctg} \beta \pi B(b) = 0, \quad (2.28)$$

то $(K\mu)(\cdot) \in H_\lambda^{pl,m}[\alpha, \beta](ab)$, иначе $(K\mu)(\cdot) \in H_\lambda^{pl,m-1}[\lambda_a, \lambda_b](ab)$ или $(K\mu)(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha_0, \beta_0](ab)$ при $m = 0$, где $0 \leq \operatorname{Re} \alpha_0 < \operatorname{Re} \alpha$, $0 \leq \operatorname{Re} \beta_0 < \operatorname{Re} \beta$.

Это утверждение также следует непосредственно из теорем раздела 2.2. Если условия (2.28) выполняются, то правая часть уравнения necessarily имеет особенности порядков меньших, чем решение уравнения. Будем это учитывать, когда речь пойдет об определении решения уравнения по заданной правой части.

Следствие 2.3. Если $A(\cdot), B(\cdot) \in H_\lambda(L)$ и $\mu(\cdot) \in H^*(L)$, то $(K\mu)(\cdot) \in H^*(L)$.

При необходимости всегда можно более точно исследовать поведение функции $(K\mu)(t)$ при стремлении t к каждому из узлов линии L по любой из сходящихся в узле гладких разомкнутых дуг.

Рассмотрим метод аналитического продолжения в комплексную плоскость (метод сведения к *краевой задаче Римана* или к задаче линейного сопряжения), используемый при построении решений СИУ (2.27) в гельдеровых классах функций, следуя

[60] и [19]. При этом обратим особое внимание на поведение решения и правой части уравнения (2.27) в узлах линии L .

Теорема 2.5. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in H_\lambda(L)$. Если выполняется условие

$$A^2(t) + \pi^2 B^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in L, \quad (2.29)$$

то любое решение $\mu(\cdot) \in H^*(L)$ уравнения (2.27) может быть записано в виде

$$\mu(t) = \frac{A(t)}{A^2(t) + \pi^2 B^2(t)} f(t) - \frac{B(t)}{A^2(t) + \pi^2 B^2(t)} Z(t) \left[\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\varkappa-1}(t) \right], \quad (2.30)$$

$$Z(t) = \sqrt{A^2(t) + \pi^2 B^2(t)} \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \frac{A(t) - i\pi B(t)}{A(t) + i\pi B(t)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right] \prod_{j=1}^n (t - c_j)^{\varkappa_j} \quad (2.31)$$

– одна из канонических функций уравнения, \varkappa_j – некоторые целые числа, $\varkappa = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_n$ – индекс данной канонической функции, $P_{\varkappa-1}(t)$ – некоторый полином степени не выше, чем $\varkappa - 1$. Если $\varkappa \leq 0$, то $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$. При $\varkappa < 0$

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1 \dots -\varkappa. \quad (2.32)$$

Замечание. Если условие (2.29) выполнено, то всегда можно считать, что $A^2(t) + \pi^2 B^2(t) \equiv 1$.

Доказательство. Если $\mu(\cdot) \in H^*(L)$ – решение уравнения (2.27), то интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (2.33)$$

– кусочно-голоморфная функция с линией скачков L , исчезающая на бесконечности. Из формул Сохоцкого следует, что ее предельные значения во всех обыкновенных точках линии L связаны равенством

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (2.34)$$

где

$$G(t) = \frac{A(t) - i\pi B(t)}{A(t) + i\pi B(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{A(t) + i\pi B(t)}.$$

Построим решения задачи (2.34) в классе исчезающих на бесконечности кусочно-голоморфных с линией скачков L функций. Пусть

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \left[- \sum_{(k)} \ln G(a_k) + \sum_{(k)} \ln G(b_k) \right], \quad (2.35)$$

здесь суммирование ведется по всем дугам $a_k b_k$, имеющим узел c_j в качестве общей точки. *Каноническая функция задачи Римана* имеет вид

$$X(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z} \right] \prod_{j=1}^n (z - c_j)^{-\kappa_j}, \quad (2.36)$$

где целые числа κ_j выбираются так, чтобы выполнялись условия $-1 < \operatorname{Re} \gamma_j - \kappa_j < 1$. Если $\operatorname{Re} \gamma_j$ – целое (c_j – *особенный узел*), то, легко видеть, $\kappa_j = \operatorname{Re} \gamma_j$. Для *неособенных узлов* ($\operatorname{Re} \gamma_j$ – не целое) имеется возможность выбирать числа κ_j так, чтобы выполнялось одно из двух неравенств: $-1 < \operatorname{Re} \gamma_j - \kappa_j < 0$ или $0 < \operatorname{Re} \gamma_j - \kappa_j < 1$. Пусть пока числа κ_j выбраны так, чтобы для всех неособенных узлов $-1 < \operatorname{Re} \gamma_j - \kappa_j < 0$. Все решения задачи Римана в рассматриваемом классе функций дает формула

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{\kappa-1}(z), \quad (2.37)$$

здесь $X^+(t)$ – предельное значение слева на L канонической функции (2.36). Условия (2.32) обеспечивают при $\kappa < 0$ нужное поведение решения на бесконечности. Тогда все решения уравнения (2.27) класса H^* могут быть получены как разность предельных значений на L функции (2.37). Таким образом, формула (2.30) следует из формулы $\mu(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$, при этом *каноническая функция уравнения* $Z(t) = [A(t) + i\pi B(t)]X^+(t)$ •

За счет выбора чисел κ_j в формулу (2.30) могут быть подставлены канонические функции $Z(\cdot)$ с различным поведением в неособенных узлах, но всегда плотность сингулярного интеграла $f(\cdot)/Z(\cdot)$ должна иметь в узлах линии L особенность не более чем интегрируемого порядка.

Пусть решение $\mu(\cdot)$ уравнения (2.27) имеет в узле c_j особенность порядка δ_j . Тогда правая часть $f(\cdot)$ уравнения необходимо имеет особенность того же (или меньшего) порядка в этом узле. Рассмотрим второе слагаемое в правой части формулы (2.30). Если каноническая функция $Z(\cdot)$ имеет особенность порядка $\operatorname{Re} \gamma_j$ в узле c_j , то возможны три ситуации: $\operatorname{Re} \gamma_j < \delta_j$, $\operatorname{Re} \gamma_j = \delta_j$ и $\operatorname{Re} \gamma_j > \delta_j$. В первом случае плотность $f(\cdot)/Z(\cdot)$ интеграла с ядром Коши имеет особенность порядка $\delta_j - \operatorname{Re} \gamma_j$, такую же особенность имеет интеграл, а все второе слагаемое имеет особенность порядка ровно δ_j . Во втором случае плотность интеграла особенности не имеет, сам интеграл с ядром Коши может иметь логарифмическую особенность, но порядок особенности второго слагаемого в правой части формулы (2.30) все равно остается равным δ_j . Наконец, в третьем случае плотность интеграла с ядром Коши обращается в нуль в узле c_j , а стоящая перед интегралом каноническая функция $Z(\cdot)$ имеет особенность порядка большего, чем δ_j . Чтобы второе слагаемое в правой части (2.30) имело требуемое поведение в узле c_j , должно выполняться одно из двух требований:

или каноническая функция $Z(\cdot)$ должна иметь в узле меньший порядок степенной особенности, или должно иметь место равенство

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - c_j} + P_{\varkappa-1}(c_j) = 0. \quad (2.38)$$

Покажем, что эти два требования равносильны. Действительно, при $\varkappa \geq 1$

$$P_{\varkappa-1}(t) = P_{\varkappa-1}(c_j) + (t - c_j)P'_{\varkappa-1}(t) = \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - c_j} + (t - c_j)P'_{\varkappa-1}(t).$$

Так как

$$\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - c_j} = \frac{t - c_j}{(\tau - c_j)(\tau - t)},$$

то

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\varkappa-1}(t) = (t - c_j) \left[\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau - c_j)} \frac{d\tau}{\tau - t} + P'_{\varkappa-1}(t) \right].$$

Поэтому требование (2.38) сводится к умножению канонической функции $Z(t)$ на $t - c_j$, при этом степень полинома в правой части формулы (2.30) уменьшается на единицу (при $\varkappa = 1$ полином исчезает). При $\varkappa \leq 0$ условие (2.38) примет вид

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - c_j} = 0.$$

Тогда

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} = \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - c_j} = (t - c_j) \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau - c_j)} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Следовательно, значение индекса \varkappa также уменьшится на единицу, и порядок степенной особенности канонической функции $Z(\cdot)$ в узле c_j понизится (особенность вообще пропадет).

Рассмотрим теперь достаточные условия, при которых СИУ (2.27) на ab имеет решения, ограниченные на концах дуги.

Теорема 2.6. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, причем выполнено условие (2.29), и $f(\cdot) \in H_\lambda(ab)$. Если

- 1) числа \varkappa_a, \varkappa_b выбраны так, что каноническая функция $Z(\cdot)$ (2.31) ограничена в точках a и b ;
- 2) при $\varkappa = \varkappa_a + \varkappa_b < 0$ функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям (2.32);
- 3) при $B(a) = 0$ и (или) $B(b) = 0$ выполняются условия $f(a) = 0$ и (или) $f(b) = 0$;
- 4) при $2\pi\varkappa_a = \arg G(a)$ и $2\pi\varkappa_b = \arg G(b)$ существуют конечные пределы функции $\mu(\cdot)$ (2.30) в точках a и b ,

то функция $\mu(\cdot)$ (2.30) – решение СИУ (2.27) класса $H_\lambda^0(ab)$.

Доказательство. Легко видеть, что определенная формулой (2.30) функция $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условию H_λ на любой закрытой дуге, принадлежащей (ab) . Исследуем поведение этой функции в точках a и b .

Пусть

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln G(a), \quad \beta = \frac{1}{2\pi i} \ln G(b).$$

Тогда в окрестностях точек a и b

$$Z(t) = Z_a(t) \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\alpha - \varkappa_a}, \quad -1 < \operatorname{Re} \alpha - \varkappa_a \leq 0,$$

$$Z(t) = Z_b(t) \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\beta - \varkappa_b}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \beta - \varkappa_b < 1.$$

Если a и b – неособенные концы, то есть $\operatorname{Re} \alpha - \varkappa_a \neq 0$, $\operatorname{Re} \beta - \varkappa_b \neq 0$, то из формул (2.23), (2.24) следует, что

$$\mu(a) = \frac{f(a)}{A^2(a) + \pi^2 B^2(a)} [A(a) - B(a) \pi \operatorname{ctg}(\varkappa_a - \alpha) \pi],$$

$$\mu(b) = \frac{f(b)}{A^2(b) + \pi^2 B^2(b)} [A(b) + B(b) \pi \operatorname{ctg}(\beta - \varkappa_b) \pi].$$

Но при этом

$$\pi \operatorname{ctg}(\varkappa_a - \alpha) = i\pi \frac{\exp(-2\pi i \alpha) + 1}{\exp(-2\pi i \alpha) - 1} = i\pi \frac{1 + G(a)}{1 - G(a)} = \frac{A(a)}{B(a)},$$

$$\pi \operatorname{ctg}(\beta - \varkappa_b) = i\pi \frac{\exp(2\pi i \beta) + 1}{\exp(2\pi i \beta) - 1} = i\pi \frac{G(b) + 1}{G(b) - 1} = -\frac{A(b)}{B(b)},$$

и тогда $\mu(a) = 0$ и $\mu(b) = 0$.

Если a – особенный конец, то есть $\operatorname{Re} \alpha - \varkappa_a = 0$, то возможны два случая. При $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$ каноническая функция $Z(\cdot)$ содержит степенную функцию в чисто мнимой степени. Поэтому предел функции $\mu(\cdot)$ в точке a существует, если обращается в нуль в этой точке часть выражения, стоящего в квадратных скобках в правой части формулы (2.30), оставшаяся после выделения содержащего степенную функцию слагаемого из сингулярного интеграла. При этом $\mu(a) = 0$. Если $\operatorname{Im} \alpha = 0$, что равносильно $G(a) = 1$ или $B(a) = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow a} \mu(a) = \frac{f(a)}{A(a)}.$$

Все рассуждения для особенного конца b точно такие же •

Теорема 2.7. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in H_\lambda(ab)$, причем выполнено условие (2.29), и $f(\cdot) \in H_\lambda^1(ab)$. Если

1) числа \varkappa_a, \varkappa_b выбраны так, что каноническая функция $Z(\cdot)$ (2.31) ограничена в

точках a и b ;

2) при $\varkappa = \varkappa_a + \varkappa_b < 0$ функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям (2.32);

3) при $2\pi\varkappa_a = \arg G(a)$ и $2\pi\varkappa_b = \arg G(b)$ существуют конечные пределы функции $\mu(\cdot)$ (2.30) в точках a и b ,

то функция $\mu(\cdot)$ (2.30) – решение СИУ (2.27) класса $H_\lambda(ab)$.

Доказательство основано на таких же рассуждениях, что и выше. Вместо формул (2.23), (2.24) для неособенных концов используются формулы (2.25), (2.26) •

2.4. Полные СИУ с ядром Коши. Классы Лебега

Сингулярные интегральные операторы вида

$$(K\mu)(t) := a(t)\mu(t) + b(t) \int_L \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_L \mu(\tau)K(\tau, t) d\tau, \quad t \in (L),$$

являются классическим примером нетеровых операторов. В зависимости от того, какие классы функций рассматриваются, различают два варианта теории разрешимости полных СИУ с ядром Коши. Для гельдеровых классов функций в качестве условий разрешимости полного СИУ рассматривается ортогональность его правой части решениям однородного транспонированного уравнения, которому соответствует оператор

$$(K'\nu)(t) = a(t)\nu(t) - \int_L \frac{b(\tau)\nu(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_L \nu(\tau)K(t, \tau) d\tau, \quad t \in (L).$$

Для классов функций, интегрируемых в смысле Лебега, более естественно вместо транспонированного рассматривать сопряженный оператор K^* .

Картину разрешимости полных СИУ с ядром Коши характеризуют следующие два утверждения (приведем с незначительными изменениями формулировки теорем 31.6 и 31.7 из книги [130] для операторов на отрезке вещественной оси).

Пусть коэффициенты $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ вещественнозначны на $[a, b]$,

$$\theta(x) = \arg \frac{a(x) - i\pi b(x)}{a(x) + i\pi b(x)}, \quad 0 \leq \theta(x) < 2\pi \quad \forall x \in [a, b], \quad K(t, x) = \frac{K_0(t, x)}{|t - x|^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

$$K_0(t, x) = \{K_1(t, x), t < x; \quad K_2(t, x), t > x\}, \quad K_{1,2}(t, x) \in H_\lambda.$$

Теорема 2.8. Пусть $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in H_\lambda$, $a^2(x) + \pi^2 b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ и $\theta(a) \neq 0$, $\theta(b) \neq 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Уравнение $K\mu = f$ разрешимо в классах H^* , H_a^* , H_b^* , H тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b f(x)\nu_j(x) dx = 0,$$

где $\{\nu_j(\cdot)\}$ – полная система решений уравнения $K'\nu = 0$ классов H, H_b^*, H_a^*, H^* соответственно. Разность чисел линейно независимых решений однородного уравнения $K'\nu = 0$ и условий разрешимости равна

$$\varkappa = \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} \right] + \{1 \text{ для класса } H^*; 0 \text{ для классов } H_a^*, H_b^*; -1 \text{ для класса } H\}.$$

Теорема 2.9. Пусть $a(\cdot), b(\cdot) \in C([a, b])$. Оператор K нетеров в пространстве $L_p(\rho)$, $1 < p < \infty$, $\rho(x) = (x - a)^\alpha(b - x)^\beta$, $-1 < \alpha < p - 1$, $-1 < \beta < p - 1$ тогда и только тогда, когда

- 1) $a^2(x) + \pi^2 b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$;
- 2) $\theta(a) \neq 2\pi(1 + \alpha)/p$, $\theta(b) \neq -2\pi(1 + \beta)/p \pmod{2\pi}$.

При выполнении этих условий индекс оператора K вычисляется по формуле

$$\varkappa = \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} + \frac{1 + \beta}{p} \right] - \left[\frac{\theta(a)}{2\pi} - \frac{1 + \alpha}{p} \right].$$

В случае $K(t, x) \equiv 0$ оператор K имеет d -характеристику $(0, \varkappa)$ при $\varkappa \geq 0$ и $(0, -\varkappa)$ при $\varkappa \leq 0$.

Отметим, что теория Нетера возникла как обобщение теории Фредгольма на новые классы интегральных уравнений, а позже и на широкие классы абстрактных операторных уравнений. Первое время СИУ использовались в прикладных задачах с осторожностью. Дело в том, что для приложений особое значение представляла альтернатива Фредгольма. Например, при сведении граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными к интегральным уравнениям Фредгольма существование решения рассматриваемой задачи было следствием единственности ее решения. Как писал Д.И.Шерман в предисловии к книге [69], "памятно то время, когда почти любой автор, занимающийся какой-либо нетривиальной задачей теории упругости, считал чуть ли не делом своей чести свести ее во что бы то ни стало к фредгольмову уравнению второго рода". Для приближенных методов фредгольмовость исходной задачи также важна, поскольку при определенных условиях утверждение о единственности решения наследуется уравнением, аппроксимирующим точное. Нетеровы уравнения при ненулевом индексе с этой точки зрения менее удобны в приложениях. В связи с этим обычно предпринимаются следующие действия (например, при теоретическом обосновании численных методов решения СИУ): при положительном индексе задают дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения задачи, сужая тем самым класс искомых решений, а при отрицательном индексе выбирают более узкий класс правых частей уравнений, чтобы заведомо были выполнены условия разрешимости.

Глава 3.

Сингулярные интегральные уравнения с логарифмическими ядрами

В главе 3 построена теория СИУ 1-го рода, ядра которых представимы в виде интегралов с ядром Коши с переменным пределом (*логарифмические ядра*). Немного позже, в главе 6, будут рассмотрены уравнения, ядра которых являются показательными функциями от таких интегралов (*обобщенные степенные ядра*). Первые результаты, полученные при исследовании интегральных уравнений с логарифмическими ядрами и с обобщенными степенными ядрами, были опубликованы в статьях Л.И. Чибриковой и автора [139]. В этих статьях использовался в основном метод аналитического продолжения, а в данной книге предпочтение отдано методу интегральных тождеств. Можно показать (это было сделано схематично в [79], §6), что метод аналитического продолжения и метод интегральных тождеств эквивалентны.

Дополнительные замечания и литературные указания содержатся в разделе 3.5.

3.1. Эквивалентность характеристическому СИУ с ядром Коши

Пусть ab – гладкая разомкнутая дуга, функция $\varphi(\cdot) \in H(ab)$, $\varphi(t) \neq 0 \quad \forall t \in ab$. Назовем *логарифмическим ядром* функцию

$$L_{a,\varphi}(t, \tau) = \int_{a\tau} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - t}, \quad \tau, t \in ab \quad (\tau \neq t). \quad (3.1)$$

При $t \in (a\tau)$ интеграл (3.1) понимается в смысле главного значения по Коши, при $t \in (\tau b)$ он является аналитической функцией от t . В окрестности точки $t = \tau$ функция $L_{a,\varphi}(t, \tau)$ имеет логарифмическую особенность.

При $\varphi(\xi) \equiv 1$ имеем, как частный случай, чисто логарифмическое ядро

$$L_{a,1}(t, \tau) = \int_{a\tau} \frac{d\xi}{\xi - t} = \left\{ \ln \frac{\tau - t}{t - a}, \quad t \in (a\tau); \quad \ln \frac{t - \tau}{t - a}, \quad t \in (\tau b) \right\}. \quad (3.2)$$

Отметим, что логарифмические функции в формуле (3.2) при $t \in a\tau$ и при $t \in \tau b$ специально записаны по-разному. Здесь $\ln \frac{t-\tau}{t-a}$ – просто значение обращающейся в нуль на бесконечности ветви логарифмической функции $\ln \frac{z-\tau}{z-a}$, выделенной в плоскости с разрезом по $a\tau$, а $\ln \frac{\tau-t}{t-a}$ – полусумма предельных значений на $(a\tau)$ при $z \rightarrow t^\pm \in (a\tau)$ той же ветви (см. главу 2).

Рассмотрим на ab СИУ с логарифмическим ядром

$$(L_{a,\varphi}\nu)(t) := A(t)\varphi(t) \int_{tb} \nu(\tau) d\tau + B(t) \int_{ab} \nu(\tau) L_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau = f(t), \quad t \in (ab), \quad (3.3)$$

интегралы в левой части (3.3) в общем случае понимаются в смысле Лебега.

Теорема 3.1. *Уравнение с логарифмическим ядром (3.3) и характеристическое СИУ с ядром Коши*

$$A(t)\mu(t) + B(t) \int_{ab} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\xi - t} = f(t), \quad t \in (ab), \quad (3.4)$$

эквивалентны в том смысле, что

1) если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (3.3), то определенная равенством

$$\varphi(t) \int_{tb} \nu(\tau) d\tau = \mu(t), \quad t \in ab, \quad (3.5)$$

функция $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (3.4);

2) если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (3.4), представимое в виде (3.5), то $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (3.3).

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством

$$\int_{ab} \nu(\tau) \left[\int_{a\tau} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - t} \right] d\tau = \int_{ab} \left[\varphi(\xi) \int_{\xi b} \nu(\tau) d\tau \right] \frac{d\xi}{\xi - t} \bullet \quad (3.6)$$

Замечание. В формулировке утверждения теоремы умышленно не сделано каких-либо предположений о коэффициентах и правых частях уравнений, а также о классах искомых функций. Если речь идет о гельдеровых классах функций, то тождество (3.6) – следствие, например, леммы из [19], §7. Для функций, интегрируемых в смысле Лебега, тождество (3.6) выполняется в силу теоремы Фубини. Действительно, если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (3.3), то подразумевается, что интеграл в левой части (3.6) сходится. Тогда сходится интеграл в правой части формулы (3.6), и оба этих интеграла равны. Аналогично, если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (3.4), представимое в виде (3.5), то сходится интеграл в правой части формулы (3.6). Тогда сходится интеграл в левой части этой формулы, и оба интеграла равны.

Будем говорить в дальнейшем, что равенство (3.5) *устанавливает соответствие между решениями уравнений.*

Из теоремы 3.1 с помощью лемм 1.1, 1.2 и теорем 2.4 и 2.5 легко получить следующие утверждения.

Следствие 3.1. *Пусть $p > 1$, $\lambda = (p - 1)/p$, $A(\cdot), B(\cdot), \varphi(\cdot) \in H_\lambda(ab)$. Если $\nu(\cdot) \in L_p(ab)$ – решение уравнения (3.3), то $f(\cdot) = (L_{a,\varphi}\nu)(\cdot) \in H_\lambda^1(ab)$.*

Замечание. Подчеркнем, что условие $f(\cdot) \in H_\lambda^1(ab)$ только необходимое, но еще не достаточное для существования решения уравнения (3.3).

Следствие 3.2. Если, кроме того, $A^2(t) + \pi^2 B^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in ab$, то

$$\nu(t) = -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{A(t)}{A^2(t) + \pi^2 B^2(t)} \frac{f(t)}{\varphi(t)} - \frac{B(t)}{A^2(t) + \pi^2 B^2(t)} \frac{Z(t)}{\varphi(t)} \left[\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\kappa-1}(t) \right] \right\}, \quad (3.7)$$

где $Z(\cdot)$ – ограниченная во всех узлах каноническая функция уравнения (3.4), κ – индекс, $P_{\kappa-1}(\cdot)$ – полином степени не выше, чем $\kappa - 1$. При $\kappa \leq 0$ $P_{\kappa-1}(\cdot) \equiv 0$, и при $\kappa < 0$ выполняются условия (2.32).

Формулы дифференцирования сингулярных интегралов будут получены в следующем разделе.

Следствие 3.3. Если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условиям

1) $\mu(b) = 0$;

2) функция

$$\nu(t) = \frac{d}{dt} \frac{\mu(t)}{\varphi(t)} \in L_p(ab), \quad p > 1 \quad (\text{или } L(ab)), \quad (3.8)$$

то $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (3.3) класса $L_p(ab)$, $p > 1$ (или $L(ab)$).

Таким образом, чтобы получить решения $\nu(\cdot)$ уравнения (3.3) класса $L_p(ab)$, нужно предварительно построить решения $\mu(\cdot)$ уравнения (3.4), удовлетворяющие условиям 1) и 2) следствия 3.3.

Аналогичные утверждения имеют место для логарифмического ядра

$$L_{b,\varphi}(t, \tau) = \int_{\tau b} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - t}, \quad t, \tau \in ab \quad (t \neq \tau), \quad (3.9)$$

и СИУ с логарифмическим ядром

$$(L_{b,\varphi}\nu)(t) := A(t)\varphi(t) \int_{at} \nu(\tau) d\tau + B(t) \int_{ab} \nu(\tau) L_{b,\varphi}(t, \tau) d\tau = f(t), \quad t \in (ab). \quad (3.10)$$

Чтобы получить их, достаточно переобозначить концы дуги ab и учесть, что при этом изменится ее ориентация.

Если L – произвольная кусочно-гладкая линия, состоящая из гладких разомкнутых дуг $a_k b_k$, $k = 1 \dots n$, то назовем уравнением с логарифмическим ядром

$$(L\nu)(t) := A(t)\varphi(t) \int_{a_k t (t b_k)} \nu(\tau) d\tau + B(t) \sum_{k=1}^n \int_{a_k b_k} \nu(\tau) L_k(t, \tau) d\tau = f(t), \quad t \in (a_k b_k), \quad k = 1 \dots n, \quad (3.11)$$

где некоторые из логарифмических ядер $L_k(t, \tau)$ определены по формуле (3.1), а остальные – по формуле (3.9).

3.2. Дифференцирование сингулярных интегралов

Рассмотрим формулы дифференцирования сингулярных интегралов, зависящих от параметра.

Лемма 3.1. При $t \neq a, t \neq b$

$$\frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{d\xi}{\xi - t} = \frac{1}{t - b} - \frac{1}{t - a}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Если $t \notin ab$, то дифференцируемый интеграл – аналитическая функция. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{d\xi}{\xi - t} = \int_{ab} \frac{d\xi}{(\xi - t)^2} = \frac{1}{t - b} - \frac{1}{t - a}.$$

Пусть теперь $t \in (ab)$, s – дуговая абсцисса точки t , Δs – достаточно малое положительное число, $t_1 = t(s - \Delta s)$, $t_2 = t(s + \Delta s) \in (ab)$. Имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{d\xi}{\xi - t} = \frac{1}{t'(s)} \frac{d}{ds} \int_{ab} \frac{d\xi}{\xi - t(s)} = \frac{1}{t'(s)} \frac{d}{ds} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\int_0^{s-\Delta s} + \int_{s+\Delta s}^l \right) \frac{t'(\sigma) d\sigma}{t(\sigma) - t(s)},$$

здесь использован тот факт, что при определении главного значения сингулярного интеграла можно вырезать из линии интегрирования дугу $t_1 t_2$, концы которой не обязательно находятся на равном расстоянии от точки t ([60], с.45, замечание 3).

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_0^{s-\Delta s} + \int_{s+\Delta s}^l \right) \frac{t'(\sigma) d\sigma}{t(\sigma) - t(s)} &= t'(s) \int_0^{s-\Delta s} \frac{t'(\sigma) d\sigma}{[t(\sigma) - t(s)]^2} + \frac{t'(s - \Delta s)}{t(s - \Delta s) - t(s)} + \\ &+ t'(s) \int_{s+\Delta s}^l \frac{t'(\sigma) d\sigma}{[t(\sigma) - t(s)]^2} - \frac{t'(s + \Delta s)}{t(s + \Delta s) - t(s)} = \\ &= t'(s) \left[\frac{1}{t - b} - \frac{1}{t - a} \right] + \frac{d}{ds} \ln \frac{t(s - \Delta s) - t(s)}{t(s + \Delta s) - t(s)}. \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \ln \frac{t(s - \Delta s) - t(s)}{t(s + \Delta s) - t(s)} = -\pi i,$$

и получим нужный результат •

Замечание. При $t \in (ab)$ можно было бы получить формулу (3.12) следующим образом. Рассматриваемый интеграл – полусумма предельных значений слева и справа на ab логарифмической функции (лемма 2.1). Тогда можно просто перейти к пределу на ab слева или справа в формуле (3.12) при $t \notin ab$. Но это не вполне удобно в методическом плане, поскольку доказательство того, что производные предельных значений интеграла типа Коши совпадают с предельными значениями интеграла от производных его плотности, обычно основано как раз на формуле дифференцирования (3.12) (см. [138], теорема 7.3).

Теорема 3.2. *Если $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$, $p > 1$, то*

$$\frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{\mu'(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{\mu(b)}{t - b} - \frac{\mu(a)}{t - a}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Запишем функцию $\mu(\cdot)$ в виде

$$\mu(\tau) = \int_{a\tau} \mu'(\xi) d\xi + \mu(a).$$

Тогда

$$\int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \left[\int_{a\tau} \mu'(\xi) d\xi \right] \frac{d\tau}{\tau - t} + \mu(a) \int_{ab} \frac{d\xi}{\xi - t}.$$

В повторном интеграле изменим порядок интегрирования,

$$\int_{ab} \left[\int_{a\tau} \mu'(\xi) d\xi \right] \frac{d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \mu'(\xi) \left[\int_{\xi b} \frac{d\tau}{\tau - t} \right] d\xi.$$

Производная логарифмического ядра в правой части существует и вычисляется по формуле (3.12), поэтому можно дифференцировать под знаком интеграла. Получим, еще раз используя формулу (3.12),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} &= \int_{ab} \mu'(\xi) \left[\frac{1}{t - b} - \frac{1}{t - \xi} \right] d\xi + \mu(a) \frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{d\xi}{\xi - t} = \\ &= \int_{ab} \frac{\mu'(\xi) d\xi}{\xi - t} + \frac{1}{t - b} [\mu(b) - \mu(a)] + \mu(a) \left(\frac{1}{t - b} - \frac{1}{t - a} \right). \bullet \end{aligned}$$

Следствие 3.4. *Если $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$, $p > 1$, то*

$$\frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{\mu(\tau) - \mu(t)}{\tau - t} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{\mu(t)}{t - b} - \frac{\mu(t)}{t - a}. \quad (3.14)$$

Схема доказательства имеется в [79], §9.

Теорема 3.3. Пусть $\mu(\cdot) \in A_p(ab)$, $p > 1$, $Q(\cdot)$ – полином. Тогда

$$Q(t) \frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{\mu'(\tau) Q(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + \int_{ab} \mu(\tau) \left[Q'(\tau) - \frac{Q(\tau) - Q(t)}{\tau - t} \right] \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{Q(b)\mu(b)}{t - b} - \frac{Q(a)\mu(a)}{t - a}. \quad (3.15)$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$Q(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{\mu(\tau) Q(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_{ab} \mu(\tau) \frac{Q(\tau) - Q(t)}{\tau - t} d\tau.$$

Продифференцируем первый интеграл справа по формуле (3.13) и учитывая, что ядро второго интеграла – полином, получим

$$Q(t) \frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} + Q'(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{\mu'(\tau) Q(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{ab} \frac{\mu(\tau) Q'(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + \frac{Q(b)\mu(b)}{t - b} - \frac{Q(a)\mu(a)}{t - a} + \int_{ab} \mu(\tau) \left[\frac{Q'(t)}{\tau - t} + \frac{Q(t) - Q(\tau)}{(\tau - t)^2} \right] d\tau.$$

Отсюда следует формула (3.15) •

Следствие 3.5. Если a и b – корни полинома $Q(\cdot)$, то

$$Q(t) \frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{ab} \frac{\mu'(\tau) Q(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{ab} \mu(\tau) \left[Q'(\tau) - \frac{Q(\tau) - Q(t)}{\tau - t} \right] \frac{d\tau}{\tau - t}. \quad (3.16)$$

Следствие 3.6. Пусть $p(\cdot)$ – дифференцируемая функция, $Q(\cdot)$ – полином и $p(a)Q(a) = 0$, $p(b)Q(b) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \left[p(t) Q(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau) Q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right] = p(t) \int_{ab} \frac{\mu'(\tau)}{p(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \\ + p(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau) Q(\tau)} \left[\frac{p'(t)}{p(t)} Q(t) - \frac{p'(\tau)}{p(\tau)} Q(\tau) + Q'(t) - \frac{Q(\tau) - Q(t)}{\tau - t} \right] d\tau. \quad (3.17)$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left[p(t) Q(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau) Q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right] = \\ = [p(t) Q(t)]' \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau) Q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + p(t) Q(t) \frac{d}{dt} \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau) Q(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Остается использовать формулу (3.16) для вычисления производной второго слагаемого в правой части и привести подобные члены •

В частном случае, при $Q(\cdot) \equiv 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[p(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} \right] = \\ & = p'(t) \int_{ab} \frac{\mu'(\tau)}{p(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + p(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau)}{p(\tau)} \left[\frac{p'(t)}{p(t)} - \frac{p'(\tau)}{p(\tau)} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для гельдеровых классов функций формула (3.13) была доказана при других предположениях в работах Ю.М. Крикунова и Р.С. Исаханова (см. [138], §4, п.4⁰). Формула дифференцирования (3.15) была впервые получена в [139], III, для случая $\mu(\cdot) \in H^*$, $(Q(\cdot)\mu'(\cdot))' \in H^*$. Случай, когда плотность сингулярных интегралов принадлежит классу A_p , $p > 1$, рассмотрен в работе В.Л. Дильмана, Л.И. Чибриковой [27]. В этой же работе выведен частный случай формулы (3.17), когда $p(t)Q(t) = R(t) = (b-t)^{\delta_b}(t-a)^{\delta_a}$. Для отрезка вещественной оси аналогичные результаты были получены раньше С.Г. Самко [127].

3.3. Достаточные условия разрешимости

Необходимые условия на коэффициенты и правую часть уравнения (3.3) с логарифмическим ядром были сформулированы в следствии 3.1, а достаточные – в терминах решения $\mu(\cdot)$ характеристического уравнения (3.4) – в следствии 3.3. Уточним некоторые детали.

Теорема 3.4. Пусть $A(\cdot), B(\cdot), \varphi(\cdot) \in H_\lambda(ab)$ и $f(\cdot) \in H_\lambda^1(ab)$, причем логарифмическая особенность допускается только в точке a . Если

- 1) числа \varkappa_a, \varkappa_b выбраны так, что каноническая функция (2.31) уравнения (3.4) ограничена в точках a и b ;
- 2) при $\varkappa = \varkappa_a + \varkappa_b < 0$ функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям (2.32);
- 3) при $B(b) = 0$ выполняется условие $f(b) = 0$;
- 4) при $2\pi\varkappa_a = \arg G(a)$, $B(a) = 0$ и (или) $2\pi\varkappa_b = \arg G(b)$, $B(b) = 0$ существуют конечные пределы решения $\mu(\cdot)$ (2.30) уравнения (3.4) в точках a и (или) b ;
- 5) функция

$$\frac{\mu(t)}{\varphi(t)} \in A_p(ab), \quad p = 1/(1 - \lambda), \quad (3.19)$$

то ее производная – решение СИУ (3.4) класса $L_p(ab)$.

Доказательство. Если условия 1)–4) выполнены, то, в соответствии с утверждениями теорем 2.6 и 2.7, существует решение $\mu(\cdot)$ уравнения (3.4) класса $H_\lambda(ab)$, причем

такое, что $\mu(b) = 0$. Условие (3.19) и условие 2) из следствия 3.3 – одно и то же •

Возможны два способа проверки принадлежности функции $\mu(\cdot)$ классу $A_p(ab)$: а) распространить теорию характеристического СИУ с ядром Коши с гельдеровских классов на классы $A_p(ab)$; б) вычислить производную $\mu'(\cdot)$ с помощью формул дифференцирования сингулярных интегралов, полученных в разделе 3.2, и убедиться, что она принадлежит классу $L_p(ab)$. Заметим, что функции из класса $A_p(ab)$ в каком-то смысле не слишком отличаются от функций из класса $H_\lambda(ab)$, $\lambda = (p - 1)/p$, так как дополнительное предположение о принадлежности их классу $H_1(ab)$ (лемма 1.2) является уже избыточным.

Свойства комплекснозначных функций из классов $A_p(ab)$ и условия, при которых решение характеристического СИУ с ядром Коши принадлежит этим классам, подробно исследованы в работе В.Л. Дильмана, Л.И. Чибриковой [27].

Случай, когда СИУ (3.11) задано на гладкой прерывистой линии L , то есть на совокупности гладких разомкнутых дуг, не имеющих общих точек, мало отличается от рассмотренного случая одной дуги. В соответствии с утверждениями теорем 2.6 и 2.7 легко сформулировать условия, при которых решение эквивалентного характеристического СИУ с ядром Коши будет принадлежать классу $H_\lambda(L)$ и обращаться в нуль на концах дуг b_j или a_j . Эти условия незначительно отличаются от условий теорем 10.2 и 10.3 из [79], полученных в предположении, что решения СИУ с логарифмическим ядром принадлежат классу $H^*(L)$. При этом общее число условий разрешимости и число произвольных постоянных, содержащихся в решении уравнения, такие же.

Если в узлах кусочно-гладкой линии L сходятся несколько составляющих ее гладких дуг, то исследование поведения решения характеристического уравнения усложняется. Наиболее важный случай, когда узел s является точкой разрыва 1-го рода рассматриваемых функций, также рассмотрен в книге [79], лемма 8.2 и теорема 10.4. Там же имеются полные выражения для решений СИУ с логарифмическим ядром, полученные в результате дифференцирования функции (2.30) по формулам из раздела 3.2.

3.4. Уравнение с логарифмическим ядром на отрезке

Рассмотрим в качестве примера СИУ с логарифмическим ядром на отрезке вещественной оси

$$A_1(x) \int_a^x \nu(t) dt + A_2(x) \int_x^b \nu(t) dt + B(x) \int_a^b \nu(t) \ln |t - x| dt = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (3.20)$$

Пусть $[A_1(x) - A_2(x)]^2 + \pi^2 B^2(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ и $A_1(\cdot), A_2(\cdot), B(\cdot), f(\cdot) \in H_\lambda(ab)$. Преобразуем уравнение (3.20) к виду

$$[A_1(x) - A_2(x)] \int_a^x \nu(t) dt - B(x) \int_a^b \nu(t) \ln \frac{b-x}{|t-x|} dt = f_1(x), \quad (3.21)$$

где

$$f_1(x) = f(x) - N[B(x) \ln(b-x) + A_2(x)],$$

а

$$N = \int_a^b \nu(t) dt$$

– дополнительно введенная неизвестная постоянная.

Из тождества

$$\int_a^b \nu(\tau) \ln \frac{b-x}{|\tau-x|} d\tau = \int_a^b \frac{\mu(t) dt}{t-x}, \quad \mu(x) = \int_a^x \nu(\tau) d\tau$$

получим эквивалентное уравнению (3.21) характеристическое СИУ с ядром Коши с такими же коэффициентами.

Условия разрешимости и значения постоянной N в различных случаях указаны в таблице

Значения коэффициентов		Усл. разрешимости	Постоянная N
$B(a) \neq 0, B(b) \neq 0$		нет	произвольная
$B(a) = 0,$	$A_2(a) \neq 0$	нет	$f(a)/A_2(a)$
$B(b) \neq 0$	$A_2(a) = 0$	$f(a) = 0$	произвольная
$B(a) \neq 0,$	$A_1(b) \neq 0$	нет	$f(b)/A_1(b)$
$B(b) = 0$	$A_1(b) = 0$	$f(b) = 0$	произвольная
$B(a) = 0,$	$A_2(a) \neq 0, A_1(b) \neq 0$	$\frac{f(a)}{A_2(a)} = \frac{f(b)}{A_1(b)}$	$\frac{f(a)}{A_2(a)} = \frac{f(b)}{A_1(b)}$
	$A_2(a) = 0, A_1(b) \neq 0$	$f(a) = 0$	$f(b)/A_1(b)$
$B(b) = 0$	$A_2(a) \neq 0, A_1(b) = 0$	$f(b) = 0$	$f(a)/A_2(a)$
	$A_2(a) = A_1(b) = 0$	$f(a) = f(b) = 0$	произвольная

Действительно, если $B(a) \neq 0$, $B(b) \neq 0$, то концы отрезка неособенные и уравнение (3.21) безусловно разрешимо. Пусть пока $\varkappa \geq 0$.

Если $B(a) = 0$, $B(b) \neq 0$, то на особенном конце a должно выполняться условие $f_1(a) = 0$, то есть $A_2(a)N = f(a)$. Если в уравнении (3.20) перейти к пределу при $x \rightarrow a$, то получим это же равенство в качестве необходимого условия разрешимости. При $A_2(a) \neq 0$ постоянная N определяется, а при $A_2(a) = 0$ остается произвольной, но при этом должно выполняться условие разрешимости $f(a) = 0$.

Пусть $B(a) \neq 0$, $B(b) = 0$. Если перейти к пределу при $x \rightarrow b$ в уравнении (3.20), то получим необходимое условие разрешимости $A_1(b)N = f(b)$. При $A_1(b) \neq 0$ постоянная N определяется, при $A_1(b) = 0$ – остается произвольной, но появляется условие $f(b) = 0$.

Если же $B(a) = 0$, $B(b) = 0$, то должны одновременно выполняться два условия: $A_2(a)N = f(a)$ и $A_1(b)N = f(b)$. Если $A_2(a) \neq 0$, $A_1(b) \neq 0$, то при условии совместности двух уравнений $A_1(b)f(a) = A_2(a)f(b)$ постоянная N определяется. Если только одно из значений $A_2(a)$ и $A_1(b)$ отлично от нуля, то постоянная N также определяется, но должно выполняться условие $f(b) = 0$ или $f(a) = 0$. Если же $A_2(a) = 0$, $A_1(b) = 0$, то $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ и постоянная N остается произвольной.

При $\varkappa < 0$ все сказанное выше сохраняется. Кроме того, появляются условия разрешимости вида (2.32)

$$\int_a^b \frac{f(t)}{Z(t)} t^{j-1} dt = N \int_a^b \frac{B(t) \ln(b-t) + A_2(t)}{Z(t)} t^{j-1} dt, \quad j = 1 \dots -\varkappa. \quad (3.22)$$

Если постоянная N уже определена, то все условия (3.22) сохраняются. Если же эта постоянная осталась неопределенной, то ее можно найти из одного из условий (3.22), в котором отличен от нуля множитель в правой части при N . При этом общее число условий разрешимости уменьшится.

Уравнение (3.20) и другие СИУ с логарифмическими ядрами на отрезке вещественной оси подробно исследовал С.Г.Самко [127], [128].

Для уравнения Карлемана

$$\int_a^b \nu(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (3.23)$$

единственное условие разрешимости (первая строка таблицы) имеет вид

$$N \int_a^b \frac{\ln(b-t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = - \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}. \quad (3.24)$$

Так как

$$\int_a^b \frac{\ln(b-t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \pi \ln \frac{b-a}{4},$$

то возможны два случая. Если $b - a \neq 4$, то постоянная N однозначно определяется из (3.24) и уравнение (3.23) имеет единственное решение. Если $b - a = 4$, то уравнение (3.23) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = 0,$$

при этом постоянная N остается произвольной. Условия разрешимости вида $b - a \neq 4$ названы в [127] "патологическими".

3.5. Дополнительные замечания и библиографические указания

Первые интегральные уравнения с логарифмическим и степенным ядром

$$\int_0^1 \varphi(t) \ln |t - x| dt = f(x), \quad \int_0^1 \frac{\varphi(t) dt}{|t - x|^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < x < 1,$$

(уравнения Карлемана) решил в замкнутой форме Т. Карлеман в 1922 г. *методом аналитического продолжения* в комплексную плоскость. Как отмечено в [19], с. 596, использованные Карлеманом вспомогательные аналитические функции имели точки ветвления на бесконечности, что создавало определенные трудности. К. Пирсон, А. Хейнс и Р. Мак-Ками показали, что методом аналитического продолжения могут быть решены более сложные интегральные уравнения, ядра которых имеют логарифмическую особенность.

По инициативе Ф.Д. Гахова, начиная примерно с 1960 г., проводились систематические исследования одномерных интегральных уравнений 1-го рода со слабой особенностью в ядре методами, близкими к используемым в теории СИУ с ядром Коши. Особое внимание было уделено интегральным уравнениям, решение которых может быть получено в замкнутой форме. Исторические сведения, основные идеи и результаты изложены в монографии [19], §§54–56, в обзорных статьях С.Г. Самко [129] и А.А. Килбаса [45], а также в книге С.Г. Самко, А.А. Килбаса, О.И. Маричева [130], гл. 6. Интерес к теоретическому исследованию интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами и к разработке методов их решения поддерживался приложениями к широкому кругу прикладных задач, в первую очередь, к задачам теории упругости, к задачам дифракции электромагнитных волн и к теории уравнений с частными производными смешанного типа.

В работах [118], [120] рассматривались обобщения уравнения Карлемана с логарифмическим ядром как на отрезке вещественной оси, так и на гладкой разомкнутой дуге. Ф.В. Чумаков исследовал уравнения с логарифмическими ядрами [142], [145]

$$A(x) \int_a^x \varphi(t) dt + \frac{B(x)}{\pi} \int_a^b \ln \frac{|t-x|}{b-x} \varphi(t) dt = f(x),$$

$$A(x) \int_x^b \varphi(t) dt + \frac{B(x)}{\pi} \int_a^b \ln \frac{|t-x|}{x-a} \varphi(t) dt = f(x),$$

союзные с ними [146], уравнения на системе отрезков вещественной оси [147] (в работе [144] – со степенными ядрами), а также полные уравнения с логарифмическими [143] и со степенными [141] ядрами.

В работах С.Г. Самко [122], [123] для исследования интегральных уравнений со степенными ядрами предложен *метод интегральных тождеств*, основанный на переходе от уравнения 1-го рода к характеристическому СИУ с ядром Коши. Для исследования СИУ с логарифмическими ядрами этот метод был использован в работах [127], [128]. Подробно исследовано, в частности, уравнение

$$(M\varphi)(x) := A(x) \int_a^x \varphi(t) dt + B(x) \int_x^b \varphi(t) dt + \frac{C(x)}{\pi} \int_a^b \ln |t-x| \varphi(t) dt = f(x).$$

Его условия разрешимости разделены на три группы: 1) интегральные (ортогональность правой части обычным функциям); 2) точечные (ортогональность обобщенным функциям, сосредоточенным на концах интервала) и 3) "патологические", среди которых, например, содержатся ограничения на длину интервала.

Эволюцию методов решения СИУ 1-го рода со слабой особенностью в ядре можно проследить, сравнивая соответствующие главы в двух изданиях монографии Ф.Д. Гахова [18] и [19].

Исследование на нетеровость оператора

$$\int_a^b [u(t, x) + v(t, x) \ln |t-x|] \varphi(t) dt, \quad \varphi(\cdot) \in L_p(a, b),$$

в случае, когда функция $u(t, x)$ имеет разрыв при $t = x$, дано в [128]. Случай, когда $u(t, x) \equiv 0$, исследован в [107], [109].

В [128] отмечено, что "значительно больший интерес представляет не констатация факта о том, что число нулей оператора M и число условий разрешимости конечны, а исследование конкретного характера условий разрешимости".

Глава 4.

СИУ с периодическими логарифмическими ядрами

К интегральным уравнениям с логарифмическими периодическими ядрами приводятся некоторые задачи контактной теории упругости и электродинамики. В [153] уравнение

$$\int_{\Gamma} p(t) \ln \frac{1}{2|\sin \frac{t-x}{2}|} dt = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.1)$$

выведено как основное уравнение периодической контактной задачи. Более сложные СИУ с логарифмическими периодическими ядрами контактной теории упругости рассмотрены в работе С.М. Мхитаряна [62]. Уравнение (4.1) получено в работе Г.Н. Гестриной [20] (см. также [149]) при исследовании задачи дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечной периодической решетке из металлических лент. Формулы обращения уравнения (4.1) получены в [79], §23 методом, близким к методу решения СИУ с логарифмическим ядром без условия периодичности (см. главу 3). Аналогичные результаты имеются в работе Н.В. Ногина [65].

Рассмотрим два СИУ с логарифмическими периодическими ядрами

$$\int_{\Gamma} p(t) \left[\ln \frac{1}{|\sin \frac{t-x}{2}|} + \ln \frac{1}{\sin \frac{t+x}{2}} \right] dt = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.2)$$

$$\int_{\Gamma} p(t) \left[\ln \frac{1}{|\sin \frac{t-x}{2}|} - \ln \frac{1}{\sin \frac{t+x}{2}} \right] dt = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.3)$$

Решения уравнения (4.1) при $\Gamma = [b, \pi - b]$ и уравнений (4.1) и (4.2) при $\Gamma = [0, b] \cup [\pi - b, \pi]$ в гильбертовских классах функций получил и использовал при исследовании микрополосковых линий передачи Е.В. Чернокожин [136], [137].

Цель данной главы – получить формулы обращения уравнений (4.2) и (4.3) в пространстве функций $L_p(\Gamma)$ в случае, когда Γ – конечная совокупность отрезков вещественной оси, $\Gamma = [\alpha_1, \beta_1] \cup \dots \cup [\alpha_M, \beta_M]$, причем $\Gamma \subseteq [0, \pi]$. Следуя работе [82], уравнения (4.2) и (4.3), насколько это возможно, будем рассматривать параллельно. При этом верхний знак в формулах будет соответствовать уравнению (4.2), нижний – уравнению (4.3).

Уравнения (4.2), (4.3) могут быть исследованы различными методами. Наиболее естественными среди них, на наш взгляд, являются те, которые основаны на эквивалентности рассматриваемых уравнений и СИУ с ядром Коши или, что почти одно и то же, краевых задач Римана для кусочно-голоморфных функций. Вывод формул

обращения сводится к следующим шагам: 1) преобразование логарифмических периодических ядер в обычные логарифмические ядра, записанные в виде интегралов типа Коши с переменными пределами, с помощью замены переменных; 2) переход от уравнений с логарифмическими ядрами к уравнениям с аналогами ядра Коши, удовлетворяющими условиям типа автоморфности, и сведение полученных уравнений к краевым задачам Римана; 3) решение краевых задач Римана в классе функций, удовлетворяющих условию типа автоморфности; 4) возврат к старым переменным.

Заметим, что последовательность действий, осуществляющих переход от рассматриваемых интегральных уравнений к краевым задачам, может быть изменена. Привлечение теории краевых задач для автоморфных функций позволяет сократить выкладки и упростить рассуждения.

4.1. Переход к краевым задачам Римана

Обозначим $e^{ix} = y$, $e^{it} = \tau$, $e^{i\alpha_m} = a_m$, $e^{i\beta_m} = b_m$, $m = 1..M$. При преобразовании $w = e^{iz}$ отрезки вещественной оси $[\alpha_m, \beta_m]$ перейдут в дуги $a_m b_m$ единичной окружности, линия Γ – в линию L .

Пусть $a_m b_m$ - дуга единичной окружности, $\tau \in a_m b_m$. Рассмотрим интеграл типа Коши с переменным пределом

$$\int_{\tau}^{b_m} \frac{d\xi}{\xi - y} = \left[\ln \frac{b_m - y}{\tau - y}, \quad y \notin \tau b_m; \quad \ln \frac{b_m - y}{y - \tau}, \quad y \in \tau b_m \right].$$

Так как

$$\frac{b_m - y}{\tau - y} = e^{i\frac{\beta_m - t}{2}} \frac{\sin \frac{\beta_m - t}{2}}{\sin \frac{t - x}{2}}, \quad \frac{b_m - y}{y - \tau} = e^{i\frac{\beta_m - t}{2}} \frac{\sin \frac{\beta_m - t}{2}}{\sin \frac{x - t}{2}},$$

$x \notin [t, \beta_m]$ при $y \notin \tau b_m$, $x \in [t, \beta_m]$ при $y \in \tau b_m$ и $|t - x|/2 \leq \pi$ при $t, x \in [0, \pi]$, то

$$\int_{\tau}^{b_m} \frac{d\xi}{\xi - y} = \ln \frac{\sin \frac{|\beta_m - x|}{2}}{\sin \frac{|t - x|}{2}} + i \frac{\beta_m - t}{2} = \ln \frac{|\sin \frac{\beta_m - x}{2}|}{|\sin \frac{t - x}{2}|} + i \frac{\beta_m - t}{2}.$$

При $1/y \notin \tau b_m$

$$\int_{\tau}^{b_m} \frac{d\xi}{\xi - 1/y} = \ln \frac{\sin \frac{\beta_m + x}{2}}{\sin \frac{t + x}{2}} + i \frac{\beta_m - t}{2}.$$

Введем новые неизвестные постоянные

$$c_m = \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(t) dt, \quad m = 1..M,$$

и добавим к обеим частям уравнений (4.2), (4.3) выражения

$$h(x) = \sum_{m=1}^M c_m \left(\ln \left| \sin \frac{\beta_m - x}{2} \right| \pm \ln \sin \frac{\beta_m + x}{2} \right).$$

Исходные уравнения примут теперь более естественный вид

$$\sum_{m=1}^M \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(t) \left[\ln \frac{|\sin \frac{\beta_m - x}{2}|}{|\sin \frac{t-x}{2}|} \pm \ln \frac{\sin \frac{\beta_m + x}{2}}{\sin \frac{t+x}{2}} \right] dt = f(x) + h(x), \quad x \in \Gamma.$$

Перейдем с плоскости z на плоскость $w = e^{iz}$ с помощью приведенных выше формул. В некоторых случаях будет удобно использовать одновременно и новые, и старые обозначения.

Условимся, что при замене $\tau = e^{it}$ выражение $p(t)dt$ переходит в выражение $\nu(\tau)d\tau$. Тогда получим

$$\sum_{m=1}^M \int_{a_m b_m} \nu(\tau) \int_{\tau}^{b_m} k_j(\xi, y) d\xi d\tau = g(y), \quad y \in L, \quad j = 1, 2, \quad (4.4)$$

где $g(y) = f(x) + h(x)$. При этом в случае уравнения (4.2)

$$k_1(\xi, y) = \frac{1}{\xi - y} + \frac{1}{\xi - 1/y} - \frac{1}{\xi}$$

и в случае уравнения (4.3)

$$k_2(\xi, y) = \frac{1}{\xi - y} - \frac{1}{\xi - 1/y}.$$

Кроме того,

$$c_m = \int_{a_m b_m} \nu(\tau) d\tau, \quad m = 1..M.$$

Изменим в (4.4) порядок интегрирования и перейдем к интегральным уравнениям с аналогами ядра Коши

$$\int_L \mu(\xi) k_j(\xi, y) d\xi = g(y), \quad y \in L, \quad j = 1, 2, \quad (4.5)$$

относительно новой искомой функции

$$\mu(\xi) = \int_{a_m \xi} \nu(\tau) d\tau, \quad \xi \in a_m b_m.$$

Так как $\nu(\xi) = \mu'(\xi)$, то $\mu(a_m) = 0 \quad \forall m = 1..M$ и дополнительные постоянные $c_m = \mu(b_m)$, $m = 1..M$.

Решениям класса $L_p(\Gamma)$ уравнений (4.2), (4.3) соответствуют решения класса $L_p(L)$ уравнений (4.4). В силу вложения $A_p \subset H_\lambda$, $\lambda = \frac{p-1}{p}$, функции $\mu(\tau)$ – решения уравнений (4.5) – должны принадлежать гильбертовому классу $H_\lambda(L)$ и обращаться в нуль на концах a_m дуг, составляющих линию L . Стоящие в левых частях уравнений

(4.2), (4.3) интегральные операторы действуют из пространства $L_p(\Gamma)$ в пространство функций, удовлетворяющих условию H_λ , $\lambda = (p-1)/p$, на каждой части линии Γ , не содержащей ее концов, ограниченных в точках α_m и допускающих особенности логарифмического типа в точках β_m , $m = 1..M$. Будем предполагать пока, что правые части уравнений (4.2), (4.3) принадлежат именно такому классу функций.

С помощью вспомогательных интегралов – аналогов интеграла типа Коши

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\xi) k_j(\xi, w) d\xi, \quad j = 1, 2,$$

интегральные уравнения (4.5) преобразуются в условие краевой задачи Римана

$$\Phi^+(y) + \Phi^-(y) = \frac{1}{\pi i} g(y), \quad y \in L. \quad (4.6)$$

Решения краевой задачи нужно искать ограниченными вблизи всех концов линии L , исчезающими на бесконечности в случае уравнения (4.2) и удовлетворяющими условию типа автоморфности $\Phi(1/w) = \pm \Phi(w)$ относительно группы дробно-линейных преобразований $1/w, w$.

4.2. Явные решения краевых задач

Пусть $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_M \neq \pi$ и, следовательно, $a_1 \neq 1$, $b_M \neq -1$. Чтобы построить решение краевой задачи в нужном классе, вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln(-1) \left(\frac{1}{\tau - w} + \frac{1}{\tau - 1/w} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \ln \left(\frac{w - b_m}{w - a_m} \frac{1/w - b_m}{1/w - a_m} \right) \end{aligned}$$

(здесь можно также использовать обращающийся в нуль на бесконечности автоморфный аналог ядра Коши $k_1(\tau, w)$). Все концы линии L являются неособенными, и каноническая функция задачи

$$\begin{aligned} X(w) &= e^{\gamma(w)} \prod_{m=1}^M (w - a_m)(1/w - a_m) = \\ &= \sqrt{\prod_{m=1}^M (w - b_m)(1/w - b_m)(w - a_m)(1/w - a_m)} \end{aligned}$$

ограничена на всех концах и автоморфна, то есть $X(1/w) = X(w)$. Индекс задачи $\varkappa = -M$.

Так как условие задачи Римана преобразуется к виду

$$\frac{\Phi^+(y)}{X^+(y)} = \frac{\Phi^-(y)}{X^-(y)} + \frac{g(y)}{\pi i X^+(y)},$$

и функция $\Psi(w) = \Phi(w)/X(w)$ должна удовлетворять условию $\Psi(1/w) = \pm\Psi(w)$, то единственное решение задачи (4.6)

$$\Phi(w) = -\frac{X(w)}{2\pi^2} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} k_j(\tau, w) d\tau, \quad j = 1, 2,$$

и тогда

$$\mu(y) = \Phi^+(y) - \Phi^-(y) = -\frac{X^+(y)}{\pi^2} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} k_j(\tau, y) d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (4.7)$$

– единственное решение интегрального уравнения (4.5).

В окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{\tau - w} + \frac{1}{\tau - 1/w} - \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} - \tau \right) \frac{1}{w} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau^2} - \tau^2 \right) \frac{1}{w^2} + \dots$$

Поэтому в случае уравнения (4.2) решение краевой задачи обращается в нуль на бесконечности тогда и только тогда, когда

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\tau^j - \frac{1}{\tau^j} \right) \frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad j = 1..M.$$

В случае уравнения (4.3) вспомогательный интеграл принимает на бесконечности значение $-\frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$. Так как в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{\tau - w} - \frac{1}{\tau - 1/w} = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) \frac{1}{w} - \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau^2} + \tau^2 \right) \frac{1}{w^2} - \dots,$$

то необходимые и достаточные условия разрешимости в этом случае имеют вид

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\tau^j + \frac{1}{\tau^j} \right) \frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad j = 1..M - 1,$$

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left[Q \left(\tau^M + \frac{1}{\tau^M} \right) \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\pi^2} \int_L X^+(\xi) k_2(\tau, \xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] d\tau = 0,$$

$$Q = \prod_{m=1}^M \sqrt{a_m \cdot b_m} = \exp \left[i \sum_{m=1}^M (\alpha_m + \beta_m) \right].$$

Или постоянные c_m , $m = 1..M$ однозначно определяются из полученных условий разрешимости, или некоторые из них остаются произвольными при выполнении дополнительных условий, ограничивающих класс функций $f(x)$.

Вычислим значения функции (4.7) на концах дуг $a_m b_m$ и получим, что $\mu(a_m) = 0$ и $\mu(b_m) = c_m$, $m = 1..M$. Следовательно, решение уравнений (4.5) построено в нужном классе.

Чтобы найти функцию $\nu(\tau)$ – решение интегрального уравнения (4.4), нужно дифференцировать правую часть формулы (4.7). Плотность аналога интеграла типа Коши имеет особенности на концах дуг $a_m b_m$, поэтому при дифференцировании интеграла будем использовать следующий прием. Обозначим $P(y) = [X^+(y)]^2$, полином $P(y)$ обращается в нуль на всех концах a_m, b_m линии L , где у плотности дифференцируемого интеграла есть особенности. В соответствии с формулой (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_L g(\tau) X^+(\tau) \frac{P(y)}{P(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - y} &= \int_L [g(\tau) X^+(\tau)]' \frac{d\tau}{\tau - y} + \\ &+ \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left[2X^{+'}(y) X^+(y) - \frac{P(\tau) - P(y)}{\tau - y} \right] \frac{d\tau}{\tau - y} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\nu(y) = \mu'(y) = -\frac{1}{\pi^2 X^+(y)} \int_L [g(\tau) X^+(\tau)]' \frac{d\tau}{\tau - y} - \frac{1}{\pi^2} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} N(\tau, y) d\tau, \quad (4.8)$$

$$N(\tau, y) = X^{+'}(y) k_j(\tau, y) +$$

$$+ \frac{1}{X^+(y)} \left(X^{+'}(\tau) - \frac{[X^+(\tau)]^2 - [X^+(y)]^2}{\tau - y} \right) \frac{1}{\tau - y} \mp \frac{X^+(y)}{(1 - \tau y)^2}.$$

Если дифференцировать функцию $g(y)$ нежелательно, то вместо формулы дифференцирования типа (3.13)

$$\frac{d}{dy} \int_{a_m b_m} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - y} = \int_{a_m b_m} \frac{\psi'(\tau) d\tau}{\tau - y} + \frac{\psi(b_m)}{y - b_m} - \frac{\psi(a_m)}{y - a_m}$$

нужно использовать формулу типа (3.14)

$$\frac{d}{dy} \int_{a_m b_m} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - y} = \int_{a_m b_m} \frac{\psi(\tau) - \psi(y)}{\tau - y} \frac{d\tau}{\tau - y} + \frac{\psi(y)}{y - b_m} - \frac{\psi(y)}{y - a_m}.$$

Заметим, что во многих случаях вполне достаточно иметь выражение не самой функции $\nu(y)$, а только ее первообразной.

При сделанных выше предположениях о правых частях уравнений (4.2) и (4.3) мы получим функцию $\mu(\tau)$, удовлетворяющую условию H_λ на всех частях линии L , не содержащих концов, и с нужным поведением на этих концах. Чтобы получить решение уравнения (4.4) в пространстве $L_p(L)$, нужно наложить такие дополнительные условия на функции $f(x)$, при которых $\mu(\tau) \in A_p(L)$. В силу вложения $H_1 \subset A_p(L)$ достаточно считать, что $f(x) \in H_1$, допуская логарифмические особенности в точках

β_m , $m = 1..M$. Если же функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная принадлежит классу $H^*(\Gamma)$, то формула (4.8) дает решение интегрального уравнения (4.4) того же класса $H^*(L)$.

Дифференцировать уравнения (4.2) и (4.3), чтобы сразу перейти к уравнениям с аналогами ядра Коши, не вполне удобно, так как решения продифференцированных уравнений нужно рассматривать в том же пространстве, что и решения исходных уравнений.

Осталось вернуться на плоскость z с помощью обратной замены переменных. Из формулы (4.7) получим

$$\int_{\alpha_m}^x p(t) dt = -\frac{R(x)}{2\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{R(t)} \left(\operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \pm \operatorname{ctg} \frac{t+x}{2} \right) dt, \quad (4.9)$$

где

$$g(t) = f(t) + \sum_{m=1}^M c_m \left(\ln \left| \sin \frac{\beta_m - x}{2} \right| \pm \ln \sin \frac{\beta_m + x}{2} \right),$$

$$R(x) = \sqrt{\prod_{m=1}^M \left| \sin \frac{\beta_m - x}{2} \right| \cdot \sin \frac{\beta_m + x}{2} \cdot \left| \sin \frac{x - \alpha_m}{2} \right| \cdot \sin \frac{x + \alpha_m}{2}}.$$

В случае уравнения (4.2), например, система уравнений для определения постоянных c_m будет иметь вид

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t) + \sum_{m=1}^M c_m \left(\ln \left| \sin \frac{\beta_m - t}{2} \right| \pm \ln \sin \frac{\beta_m + t}{2} \right)}{R(t)} \sin(tj) dt = 0,$$

$$j = 1..M.$$

4.3. Дополнительные замечания

Ситуация, когда хотя бы одно из условий $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_M \neq \pi$ не выполняется, требует более тщательного исследования условий разрешимости и поведения функции $\mu(y)$ в точках $a_1 = 1$ и $b_M = -1$.

Пусть $\alpha_1 = 0$, $\beta_M \neq \pi$, и тогда $a_1 = 1$, $b_M \neq -1$. Умножить функцию $\exp \gamma(w)$ на $(w-1)(1/w-1)$ при построении канонической функции нельзя, так как при этом поведение произведения в окрестности неподвижной точки группы $w = 1$ будет определять множитель $(w-1)^{3/2}$. Поэтому

$$X(w) = e^{\gamma(w)} (w-1) \prod_{m=2}^M (w-a_m)(1/w-a_m),$$

индекс по-прежнему будет равен $-M$. Но теперь нарушено условие автоморфности, $X(1/w) = -\frac{1}{w}X(w)$. Поэтому при построении решения неоднородной задачи Римана нужно использовать другой аналог ядра Коши,

$$\Phi(w) = -\frac{X(w)}{2\pi^2} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - w} \pm \frac{1}{1 - \tau w} \right) d\tau.$$

Аналогично, в случае $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_M = \pi$

$$X(w) = e^{\gamma(w)} \frac{1}{w+1} \prod_{m=1}^M (w - a_m)(1/w - a_m), \quad X(1/w) = wX(w),$$

$$\Phi(w) = -\frac{X(w)}{2\pi^2} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - w} \pm \frac{w}{\tau - 1/w} \right) d\tau, \quad \varkappa = -M + 1,$$

и в случае $\alpha_1 = 0$, $\beta_M = \pi$

$$X(w) = e^{\gamma(w)} \frac{w-1}{w+1} \prod_{m=2}^M (w - a_m)(1/w - a_m), \quad X(1/w) = -X(w),$$

$$\Phi(w) = -\frac{X(w)}{2\pi^2} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - w} \mp \frac{1}{\tau - 1/w} \pm \frac{1}{\tau} \right) d\tau.$$

Условия разрешимости краевой задачи выписываются на основании разложений аналогов ядра Коши в окрестности бесконечно удаленной точки.

В случае $a_1 = 1$, $b_M \neq \pi$ предельное значение на L канонической функции принимает в точке a_1 вполне определенное конечное значение, функция $g(y)$ – тоже. Выделим из $\mu(y)$ слагаемое, содержащее логарифмическую особенность:

$$\begin{aligned} \int_{a_1 b_1} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - y} \pm \frac{1}{1 - \tau y} \right) d\tau &= \frac{g(1)}{X^+(1)} \int_{a_1 b_1} \left(\frac{1}{\tau - y} \pm \frac{1}{1 - \tau y} \right) d\tau + \\ &+ \int_{a_1 b_1} \left(\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} - \frac{g(1)}{X^+(1)} \right) \left(\frac{1}{\tau - y} \pm \frac{1}{1 - \tau y} \right) d\tau, \end{aligned}$$

предел при $y \rightarrow 1$ первого слагаемого в правой части равен нулю в случае уравнения (4.2) и бесконечен в случае уравнения (4.3). Тогда во втором случае должно быть выполнено условие $g(1) = 0$.

Обозначим часть $\mu(y)$, не содержащую логарифма,

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \sum_{m=2}^M \int_{a_m b_m} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - y} \pm \frac{1}{1 - \tau y} \right) d\tau + \\ &+ \int_{a_1 b_1} \left(\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} - \frac{g(1)}{X^+(1)} \right) \left(\frac{1}{\tau - y} \pm \frac{1}{1 - \tau y} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Эта функция удовлетворяет условию $\psi(1/y) = \mp\psi(y)/y$, тогда при $y \rightarrow 1$ в случае уравнения (4.2) имеем $\psi(1) = -\psi(1)$, следовательно, $\psi(1) = 0$ автоматически. В случае уравнения (4.3) должно выполняться условие

$$\psi(1) = \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - 1} = 0$$

(с учетом того, что $g(1) = 0$).

При $a_1 = 1$, $b_M = -1$ предел функции $\mu(y)$ при $y \rightarrow 1$ равен нулю в случае уравнения (2.2.2), если

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} = 0,$$

и в случае уравнения (4.3), если

$$g(1) = 0, \quad \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{\tau + 1}{\tau(\tau - 1)} d\tau = 0.$$

Поведение функции $\mu(y)$ при $y \rightarrow -1$ исследуется аналогичным образом.

Если по каким-либо причинам использовать аппарат теории краевых задач для автоморфных функций нежелательно, нужно рассуждать следующим образом. Обозначим $\Gamma^* = \sum_{m=1}^M [2\pi - \beta_m, 2\pi - \alpha_m]$ и $\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma^*$ (линии Γ^* и Γ расположены симметрично относительно точки π). Пусть $p(t)$ – решение уравнения (4.2) или (4.3). Распространим это уравнение на линию Γ_1 . Так как

$$\left| \sin \frac{t-x}{2} \right| = \sin \frac{t+x_1}{2}, \quad \sin \frac{t+x}{2} = \left| \sin \frac{t-x}{2} \right|,$$

то

$$\int_{\Gamma} p(t) \left[\ln \frac{1}{\left| \sin \frac{t-x}{2} \right|} \pm \ln \frac{1}{\sin \frac{t+x_1}{2}} \right] dt = \pm f(2\pi - x), \quad x_1 \in \Gamma^*.$$

Стоящие в левых частях уравнений (4.2), (4.3) и последнего уравнения интегралы разобьем на два и сделаем замену переменной $t = 2\pi - t_1$, $t_1 \in \Gamma^*$ во вторых слагаемых. Функция $p_1(t) = \{p(t), t \in \Gamma; \pm p(2\pi - t), t \in \Gamma^*\}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{\Gamma_1} p_1(t) \ln \frac{1}{\left| \sin \frac{t-x}{2} \right|} dt = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (4.10)$$

где $f_1(x) = \{f(x), x \in \Gamma; \pm f(2\pi - x), x \in \Gamma^*\}$.

С другой стороны, если $p_1(t)$ – решение уравнения (4.10), удовлетворяющее условию $p_1(2\pi - t) = \pm p_1(t)$, то $p(t) = p_1(t)$, $t \in \Gamma$ – решение исходного уравнения.

Уравнение (4.10) внешне совпадает с уравнением (4.1), но дополнительное требование $p_1(2\pi - t) = \pm p_1(t)$ представляет собой существенно усложняет ситуацию.

После перехода на плоскость $w = e^{iz}$, например, новая искомая функция $\nu(\tau)$ должна удовлетворять условию $\nu(1/\tau) = \pm\tau^2\nu(\tau)$. Чтобы построить решение уравнения с таким свойством, нужно фактически повторить все то, что было сделано раньше, но вместо автоморфных функций или подобных им использовать симметричные продолжения этих функций на всю комплексную плоскость.

Явные формулы обращения интегральных уравнений с логарифмическими периодическими ядрами можно использовать при сведении полных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма 2-го рода *методом полубращения*. Но, к сожалению, регуляризованные уравнения (см., например, [70]), остаются слишком сложными для численного решения. В работе [95], раздел 7, показано, что при решении задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке из идеально проводящих бесконечно тонких лент существенно проще переходить к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Флоке искомого поля *методом интегральных тождеств*. Такая БСЛАУ легко может быть решена численно методом усечения. Такую же конечную систему линейных алгебраических уравнений можно получить, если полное интегральное уравнение с логарифмической особенностью в ядре решать приближенно методом Галеркина.

Глава 5.

Интегралы с обобщенными степенными ядрами и интегральные тождества

В этой главе исследуются обобщенные степенные ядра, представляющие собой показательные функции от интегралов с ядром Коши с переменным пределом. Как и в случае логарифмических ядер (глава 3), интегральные операторы с обобщенными логарифмическими ядрами являются композициями двух интегральных операторов, один из которых – характеристический оператор с ядром Коши.

5.1. Обобщенные степенные ядра

Пусть ab – гладкая разомкнутая дуга, $\varphi(\cdot) \in H(ab)$.

Назовем *обобщенными степенными ядрами* показательные функции от интегралов типа Коши с переменными пределами

$$P_{a,\varphi}(t, \tau) := \exp\left[-\int_{a\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t}\right], \quad (5.1)$$

$$P_{b,\varphi}(t, \tau) := \exp\left[\int_{\tau b} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t}\right], \quad \tau, t \in (ab).$$

При любом $\tau \in (ab)$ функция $P_{a,\varphi}(t, \tau)$ удовлетворяет условию Гельдера по t на $(a\tau)$ (интеграл понимается в смысле главного значения), голоморфна по t на (τb) (интеграл понимается в обычном смысле), ограничена в точке $t = a$, неограничена в окрестности точки $t = \tau$ (имеет степенную особенность порядка $\operatorname{Re} \varphi(\tau)$) и непрерывно продолжима в точку $t = b$. При любом $t \in ab$ степенное ядро $P_{a,\varphi}(t, \tau)$ является дифференцируемой по τ функцией на (at) и (tb) , неограниченной в точке $\tau = t$, но имеющей степенную особенность интегрируемого порядка $\operatorname{Re} \varphi(t)$. Функция $P_{b,\varphi}(t, \tau)$ имеет аналогичные свойства и отличается от ядра $P_{a,\varphi}(t, \tau)$ множителем

$$\tilde{\varphi}(t) := \exp \int_{ab} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t}, \quad t \in ab, \quad (5.2)$$

интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Будем также рассматривать *обобщенные степенные ядра*

$$P_{a,\varphi,0}(t, \tau) := \frac{1}{t - a} P_{a,\varphi}(t, \tau), \quad (5.3)$$

$$P_{b,\varphi,0}(t, \tau) := \frac{1}{t - b} P_{b,\varphi}(t, \tau), \quad \tau, t \in ab.$$

Отметим, что обобщенные степенные ядра с индексами a и b переходят друг в друга при формальной перестановке концов a и b дуги.

Лемма 5.1. Пусть ab – гладкая разомкнутая дуга, $\varphi(\cdot) \in H(ab)$, причем $-1 < \operatorname{Re} \varphi(t) < 1 \quad \forall t \in ab$. Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_{a\tau} \sin \pi \varphi(\xi) P_{a,\varphi}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\xi - t} = \begin{cases} 1 - \cos \pi \varphi(t) P_{a,\varphi}(t, \tau), & t \in a\tau, \\ 1 - P_{a,\varphi}(t, \tau), & t \in \tau b, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{a\tau} \sin \pi \varphi(\xi) P_{a,\varphi,0}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\xi - t} = \begin{cases} -\cos \pi \varphi(t) P_{a,\varphi,0}(t, \tau), & t \in a\tau, \\ -P_{a,\varphi,0}(t, \tau), & t \in \tau b, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\tau b} \sin \pi \varphi(\xi) P_{b,\varphi}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\xi - t} = \begin{cases} -1 + \cos \pi \varphi(t) P_{b,\varphi}(t, \tau), & t \in \tau b, \\ -1 + P_{b,\varphi}(t, \tau), & t \in a\tau, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\tau b} \sin \pi \varphi(\xi) P_{b,\varphi,0}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\xi - t} = \begin{cases} \cos \pi \varphi(t) P_{b,\varphi,0}(t, \tau), & t \in \tau b, \\ P_{b,\varphi,0}(t, \tau), & t \in a\tau. \end{cases} \quad (5.7)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$P_{a,\varphi}(z, \tau) := \exp \left[- \int_{a\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right],$$

кусочно-голоморфную по z с линией разрыва $a\tau$, обращающуюся в 1 на бесконечности (при любом $\tau \in ab$). Ее предельные значения на ab (при $z \rightarrow t^\pm \in ab$)

$$P_{a,\varphi}^\pm(t, \tau) = \exp[\mp i\pi \varphi(t)] P_{a,\varphi}(t, \tau), \quad t \in a\tau,$$

$$P_{a,\varphi}^\pm(t, \tau) = P_{a,\varphi}(t, \tau), \quad t \in \tau b.$$

Поэтому, как решение задачи о скачке,

$$P_{a,\varphi}(z, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{a\tau} \sin \pi \varphi(\xi) P_{a,\varphi}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\xi - z} + 1.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $z \rightarrow t^+ \in a\tau$ или при $z \rightarrow t^- \in a\tau$, тогда получим верхнюю часть тождества (5.4), и при $z \rightarrow t \in \tau b$ – нижнюю его часть.

Ядро

$$P_{a,\varphi,0}(z, \tau) := \frac{1}{z - a} P_{a,\varphi}(z, \tau)$$

отличается тем, что как функция от z обращается в нуль на бесконечности.

Формулы (5.6) и (5.7) могут быть получены из (5.4) и (5.5) формальной перестановкой a и b •

5.2. Тождества для интегралов с обобщенными степенными ядрами

Будем называть *интегралами с обобщенными степенными ядрами*

$$(J_{at}^{a,\varphi}\nu)(t) := \sin \pi\varphi(t) \int_{at} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau, \quad (5.8)$$

$$(J_{tb}^{a,\varphi}\nu)(t) := \sin \pi\varphi(t) \int_{tb} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau, \quad (5.9)$$

и еще три пары интегралов с ядрами $P_{b,\varphi}(t, \tau)$, $P_{a,\varphi,0}(t, \tau)$ и $P_{b,\varphi,0}(t, \tau)$. Множитель $\sin \pi\varphi(t)$ используется для некоторого упрощения формул, которые будут получены ниже.

Будем обозначать

$$(S_{ab}\mu)(t) := \frac{1}{\pi} \int_{ab} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\xi - t}, \quad C_{\nu(\cdot)} := \int_{ab} \nu(\tau) d\tau. \quad (5.10)$$

Лемма 5.2. *Если $\nu(\cdot) \in L(ab)$, то*

$$J_{at}^{a,\varphi}\nu(\cdot) = \sin \pi\varphi(\cdot) C_{\nu(\cdot)} - \cos \pi\varphi(\cdot) J_{tb}^{a,\varphi}\nu(\cdot) - \sin \pi\varphi(\cdot) S_{ab} J_{\xi b}^{a,\varphi}\nu(\cdot), \quad (5.11)$$

$$J_{at}^{a,\varphi,0}\nu(\cdot) = -\cos \pi\varphi(\cdot) J_{tb}^{a,\varphi,0}\nu(\cdot) - \sin \pi\varphi(\cdot) S_{ab} J_{\xi b}^{a,\varphi,0}\nu(\cdot), \quad (5.12)$$

$$J_{tb}^{b,\varphi}\nu(\cdot) = \sin \pi\varphi(\cdot) C_{\nu(\cdot)} - \cos \pi\varphi(\cdot) J_{at}^{b,\varphi}\nu(\cdot) + \sin \pi\varphi(\cdot) S_{ab} J_{a\xi}^{b,\varphi}\nu(\cdot), \quad (5.13)$$

$$J_{tb}^{b,\varphi,0}\nu(\cdot) = -\cos \pi\varphi(\cdot) J_{at}^{b,\varphi,0}\nu(\cdot) + \sin \pi\varphi(\cdot) S_{ab} J_{a\xi}^{b,\varphi,0}\nu(\cdot). \quad (5.14)$$

Доказательство. Рассмотрим повторный интеграл

$$(S_{ab} J_{\xi b}^{a,\varphi}\nu)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{ab} \left[\sin \pi\varphi(\xi) \int_{\xi b} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(\xi, \tau) d\tau \right] \frac{d\xi}{\xi - t}.$$

Изменим порядок интегрирования и запишем затем внешний интеграл в виде суммы двух. Тогда

$$(S_{ab} J_{\xi b}^{a,\varphi}\nu)(t) = \left(\int_{at} + \int_{tb} \right) \nu(\tau) \left[\frac{1}{\pi} \int_{a\tau} \sin \pi\varphi(\xi) P_{a,\varphi}(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - t} \right] d\tau.$$

Заменим выражения, стоящие в квадратных скобках, на правые части формулы (5.4) и получим

$$(S_{ab} J_{\xi b}^{a,\varphi}\nu)(t) = C_{\nu(\cdot)} - \frac{1}{\sin \pi\varphi(t)} (J_{at}^{a,\varphi}\nu)(t) - \frac{\cos \pi\varphi(t)}{\sin \pi\varphi(t)} (J_{tb}^{a,\varphi}\nu)(t)$$

или, что одно и то же, (5.11). Тождество (5.12) доказывается с помощью формулы (5.5). Тождества (5.13) и (5.14) могут быть получены или с помощью аналогичных рассуждений, или просто формальной перестановкой a и b •

Замечание 1. Из формул (5.11), (5.12) и (5.13), (5.14) следуют тождества

$$(t - a)S_{ab} \frac{1}{\xi - a} J_{\xi b}^{a, \varphi} \nu(\cdot) = S_{ab} J_{\xi b}^{a, \varphi} \nu(\cdot) - C_{\nu(\cdot)}, \quad (5.15)$$

$$(t - b)S_{ab} \frac{1}{\xi - b} J_{a \xi}^{b, \varphi} \nu(\cdot) = S_{ab} J_{a \xi}^{b, \varphi} \nu(\cdot) + C_{\nu(\cdot)}, \quad (5.16)$$

переходящие друг в друга при перестановке точек a и b . Каждое из них может быть получено и более простым путем. Например, так как

$$\frac{t - a}{(\xi - a)(\xi - t)} = \frac{1}{\xi - t} - \frac{1}{\xi - a},$$

то

$$[(t - a)S_{ab} \frac{1}{\xi - a} J_{\xi b}^{a, \varphi} \nu(\cdot)](t) = (S_{ab} J_{\xi b}^{a, \varphi} \nu)(t) - (S_{ab} J_{\xi b}^{a, \varphi} \nu)(a),$$

но

$$(S_{ab} J_{\xi b}^{a, \varphi} \nu)(a) = \int_{ab} \nu(\tau) \left[\frac{1}{\pi} \int_{a\tau} \sin \pi \varphi(\xi) P_{a, \varphi}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\xi - a} \right] d\tau.$$

Если перейдем к пределу при $t \rightarrow a$ в представлении для $P_{a, \varphi}(t, \tau)$, то получим, что стоящее в квадратных скобках выражение обращается в 1.

Замечание 2. Если заменить обобщенные степенные ядра на другие, используя множитель (5.2), можно получить из (5.11)–(5.14) еще 4 тождества, связывающие интегралы с обобщенными степенными ядрами.

5.3. Тождества для интегралов с транспонированными ядрами

Рассмотрим теперь *интегралы с транспонированными степенными ядрами*

$$({}^t J_{at}^{a, \varphi} \nu)(t) := \int_{at} \nu(\tau) \sin \pi \varphi(\tau) P_{a, \varphi}(\tau, t) d\tau, \quad (5.17)$$

$$({}^t J_{tb}^{a, \varphi} \nu)(t) := \int_{tb} \nu(\tau) \sin \pi \varphi(\tau) P_{a, \varphi}(\tau, t) d\tau, \quad (5.18)$$

а также еще три пары интегралов с ядрами $\sin \pi \varphi(\tau) P_{b, \varphi}(\tau, t)$, $\sin \pi \varphi(\tau) P_{a, \varphi, 0}(\tau, t)$ и $\sin \pi \varphi(\tau) P_{b, \varphi, 0}(\tau, t)$. Заметим, что здесь сохранено соглашение о том, что нижние индексы at и tb обозначают дугу интегрирования, в то время как формальная перестановка аргументов в ядре интеграла $J_{at}^{a, \varphi}$ дает интеграл ${}^t J_{tb}^{a, \varphi}$.

Лемма 5.3. Если $\nu(\cdot) \in L(ab)$, то

$${}^t J_{tb}^{a,\varphi} \nu(\cdot) = C_{\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)} - {}^t J_{at}^{a,\varphi} (\cos \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)) + {}^t J_{at}^{a,\varphi} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)), \quad (5.19)$$

$${}^t J_{tb}^{a,\varphi,0} \nu(\cdot) = -{}^t J_{at}^{a,\varphi,0} (\cos \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)) + {}^t J_{at}^{a,\varphi,0} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)), \quad (5.20)$$

$${}^t J_{at}^{b,\varphi,0} \nu(\cdot) = -{}^t J_{tb}^{b,\varphi,0} (\cos \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)) - {}^t J_{tb}^{b,\varphi,0} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)), \quad (5.21)$$

$${}^t J_{at}^{b,\varphi} \nu(\cdot) = C_{\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)} - {}^t J_{tb}^{b,\varphi} (\cos \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)) - {}^t J_{tb}^{b,\varphi} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)). \quad (5.22)$$

Доказательство. Рассмотрим повторный интеграл

$$({}^t J_{at}^{a,\varphi} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)))(t) = \int_{at} \left[\frac{1}{\pi} \int_{ab} \frac{\sin \pi \varphi(\xi) \nu(\xi) d\xi}{\xi - \tau} \right] \sin \pi \varphi(\tau) P_{a,\varphi}(\tau, t) d\tau.$$

Изменим порядок интегрирования и запишем затем внешний интеграл в виде суммы двух. Тогда

$$\begin{aligned} & ({}^t J_{at}^{a,\varphi} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)))(t) = \\ & - \left(\int_{at} + \int_{tb} \right) \sin \pi \varphi(\xi) \nu(\xi) \left[\frac{1}{\pi} \int_{at} \sin \pi \varphi(\tau) P_{a,\varphi}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Заменим выражения, стоящие в квадратных скобках, на правые части формулы (5.4) и получим

$$({}^t J_{at}^{a,\varphi} S_{ab}(\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)))(t) = -C_{\sin \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)} + {}^t J_{at}^{a,\varphi} (\cos \pi \varphi(\cdot) \nu(\cdot)) + {}^t J_{tb}^{a,\varphi} (\nu(\cdot))$$

или, что одно и то же, (5.19). Тождества (5.20)–(5.22) доказываются аналогично •

Замечание. Еще 4 тождества для интегралов с транспонированными степенными ядрами можно получить, используя переходы от одного ядра к другому с помощью множителя (5.2).

5.4. Факторизация оператора интегрирования

Лемма 5.4. Пусть ab – гладкая разомкнутая дуга, $\varphi(\cdot) \in H(ab)$, причем $0 < \operatorname{Re} \varphi(t) < 1 \quad \forall t \in ab$. Если $\nu(\cdot) \in L(ab)$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{tb} \left[\sin \pi \varphi(\xi) \int_{\xi b} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(\xi, \tau) d\tau \right] \frac{1}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi = - \int_{tb} \nu(\tau) d\tau, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{at} \left[\sin \pi \varphi(\xi) \int_{a\xi} \nu(\tau) P_{b,\varphi}(\xi, \tau) d\tau \right] \frac{1}{\xi - b} P_{b,1-\varphi}(\xi, t) d\xi = \int_{at} \nu(\tau) d\tau, \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{tb} \left[\sin \pi \varphi(\xi) \int_{\xi b} \nu(\tau) P_{b,\varphi}(\xi, \tau) d\tau \right] \frac{1}{b-\xi} P_{b,1-\varphi}(\xi, t) d\xi = - \int_{tb} \nu(\tau) d\tau, \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{at} \left[\sin \pi \varphi(\xi) \int_{a\xi} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(\xi, \tau) d\tau \right] \frac{1}{a-\xi} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi = \int_{at} \nu(\tau) d\tau. \quad (5.26)$$

Доказательство. В повторном интеграле, стоящем в левой части формулы (5.23), изменим порядок интегрирования. Тогда получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{tb} \nu(\tau) \left\{ \int_{t\tau} \sin \pi \varphi(\xi) \exp \left[- \int_{t\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} \right] \frac{d\xi}{\xi - t} \right\} d\tau.$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\int_{\partial D} \psi(z) dz,$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{z-t} \exp \left[- \int_{t\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right]$$

и ∂D – граница двусвязной области D , состоящей из проходимой в направлении против часовой стрелки окружности C_R достаточно большого радиуса R и лежащего внутри C_R замкнутого контура, образованного берегами разреза комплексной плоскости по дуге $t\tau$ и проходимыми в направлении по часовой стрелке окружностями c_r^t и c_r^τ достаточно малого радиуса r с центрами в точках t и τ соответственно. Функция $\psi(z)$ голоморфна в D и непрерывна на ∂D . По теореме Коши рассматриваемый интеграл равен нулю, то есть

$$\left(\int_{C_R} + \int_{c_r^t} + \int_{(t\tau)^+} + \int_{c_r^\tau} + \int_{(t\tau)^-} \right) \psi(z) dz = 0.$$

Так как в точках t и τ функция $\psi(z)$ может иметь самое большее степенные особенности интегрируемого порядка, то при $r \rightarrow 0$ интегралы по c_r^t и по c_r^τ обратятся в нуль. Интеграл по C_R вычисляется через коэффициент при первой отрицательной степени разложения функции $\psi(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки,

$$\int_{C_R} \psi(z) dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \psi(z) = 2\pi i.$$

Значения функции $\psi(z)$ на берегах разреза при $r \rightarrow 0$ перейдут в предельные значения этой функции на $t\tau$ слева и справа

$$\psi^\pm(\xi) = \frac{1}{\xi-t} \exp[\mp \pi i \psi(\xi)] \exp \left[- \int_{t\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} \right].$$

Поэтому при $r \rightarrow 0$ получим, что

$$\int_{t\tau} \sin \pi \varphi(\xi) \exp \left[- \int_{t\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} \right] \frac{d\xi}{\xi - t} = -\pi.$$

Тождество (5.24) следует из (5.23), если переставить местами концы дуги ab . Тождества (5.25) и (5.26) легко получить из (5.23) и (5.24), если перенести из одного степенного ядра в другое множитель (5.2) •

5.5. Операторы с обобщенными степенными ядрами

Операторы, ставящие в соответствие определенной на дуге ab функции $\nu(\cdot)$ один из интегралов с обобщенным степенным ядром, будем называть *интегральными операторами с обобщенными степенными ядрами*. Для обозначения таких операторов будем использовать те же конструкции, что и в случае интегралов с обобщенными степенными ядрами. Например,

$$J_{at}^{a,\varphi} : \nu(\cdot) \mapsto (J_{at}^{a,\varphi} \nu)(\cdot).$$

Пусть $ab = [a, b]$ – отрезок вещественной оси, и $\varphi(t) \equiv 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$P_{a,\varphi}(t, \tau) = \left(\frac{t-a}{|\tau-t|} \right)^{1-\alpha}, \quad J_{at}^{a,\varphi} = \sin \pi \alpha (t-a)^{1-\alpha} \int_a^t \frac{\nu(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

В этом частном случае оператор с обобщенным степенным ядром только постоянным множителем отличается от оператора дробного интегрирования

$$I_{a+}^{\alpha}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\nu(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

При этом из тождеств (5.12) и (5.20), например, следуют тождества

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{\nu(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} &= \cos \pi \alpha \int_t^b \frac{\nu(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{1-\alpha}} - \\ &- \sin \pi \alpha (t-a)^{\alpha} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{(\xi-a)^{\alpha}} \int_{\xi}^b \frac{\nu(\tau) d\tau}{(t-\xi)^{1-\alpha}} \right] \frac{d\xi}{\xi-t}, \\ \int_t^b \frac{\nu(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{1-\alpha}} &= \cos \pi \alpha \int_a^t \frac{\nu(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} + \\ &+ \sin \pi \alpha \int_a^t \frac{1}{(\tau-a)^{\alpha}} \frac{1}{\pi} \int_a^b (\xi-a)^{\alpha} \frac{\nu(\xi) d\xi}{\xi-\tau} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

(во втором случае выражение $\nu(t)(t-a)^{-\alpha}$ заменено на $\nu(t)$), совпадающие с тождествами (11.19) и (11.16) из [130] или с тождествами (14') и (15) из [123]. Исчерпывающие сведения о свойствах операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования имеются в книге С.Г. Самко, А.А. Килбаса и О.И. Маричева [130].

Можно ли рассматривать операторы с обобщенными степенными ядрами как обобщение операторов дробного интегрирования на случай, когда порядком интегрирования является не число, а функция $\varphi(\cdot)$? Покажем, что на этот вопрос следует пока дать отрицательный ответ.

Рассмотрим следующее абстрактное определение операторов нецелого интегрирования. Пусть $J(\mu)$ – определенная на промежутке $(0, 1]$ оператор-функция, значениями которой являются операторы J_μ , действующий из одного пространства функций в другое. Будем говорить, что задано семейство операторов интегрирования порядка μ , если

- 1) J_1 совпадает с оператором интегрирования J ;
- 2) выполняется полугрупповое свойство

$$J_\mu \circ J_\nu = J_{\mu+\nu} \quad \forall \mu, \nu, \mu + \nu \in (0, 1].$$

В качестве оператора интегрирования J можно выбрать любой из двух операторов

$$(J_{at}\varphi)(t) := \int_{at}^t \varphi(\tau) d\tau, \quad (J_{tb}\varphi)(t) := - \int_{tb}^t \varphi(\tau) d\tau,$$

что дает основания рассматривать в дальнейшем левосторонние и правосторонние операторы нецелого интегрирования. Из аксиом 1) и 2) следует, что

3)

$$J_\mu \circ J_{1-\mu} = J \quad \forall \mu \in (0, 1]$$

(имеет место факторизация оператора интегрирования). В определении семейства операторов интегрирования можно заменить аксиому 1) на аксиому 3). Операторы I_{a+}^α и I_{b-}^α полностью соответствуют таким определениям.

Для операторов с обобщенными степенными ядрами выполняются тождества (5.23)–(5.26), каждое из которых задает разложение оператора интегрирования в произведение двух операторов, хотя и разной структуры. Можно так изменить аксиому 3), чтобы в композиции операторов, определяющей разложение оператора интегрирования, слева и справа стояли операторы из разных семейств. Но для операторов с обобщенными степенными ядрами не выполняется полугрупповое свойство 3) или ему аналогичное. Какие-либо модификации таких операторов, для которых выполнялось бы полугрупповое свойство, пока не найдены.

Глава 6.

Сингулярные интегральные уравнения с обобщенными степенными ядрами

В главе 6 рассматриваются СИУ с обобщенными степенными ядрами, эквивалентные характеристическому СИУ с ядром Коши. Связь между решениями этих уравнений задается в форме обобщенного интегрального уравнения Абеля.

6.1. Эквивалентность характеристическому СИУ с ядром Коши

Пусть ab – гладкая разомкнутая дуга, функция $\varphi(\cdot) \in H(ab)$, $\varphi(t) \neq 0$, $0 < \operatorname{Re} \varphi(t) < 1 \quad \forall t \in ab$.

Рассмотрим СИУ со степенным ядром

$$\begin{aligned} (P_{a,\varphi,0}\nu)(t) &:= A(t) \sin \pi\varphi(t) \int_{at} \nu(\tau) P_{a,\varphi,0}(t, \tau) d\tau + \\ &+ B(t) \sin \pi\varphi(t) \int_{tb} \nu(\tau) P_{a,\varphi,0}(t, \tau) d\tau = f(t), \quad t \in (ab) \end{aligned} \quad (6.1)$$

или, в операторной форме,

$$A(\cdot) J_{at}^{a,\varphi,0} \nu(\cdot) + B(\cdot) J_{tb}^{a,\varphi,0} \nu(\cdot) = f(\cdot), \quad (6.2)$$

где $P_{a,\varphi,0}$ – обобщенное степенное ядро, $J_{at}^{a,\varphi,0}$, $J_{tb}^{a,\varphi,0}$ – интегральные операторы с обобщенным степенным ядром, определенные в главе 5. Интегралы в (6.1) в общем случае понимаются в смысле Лебега.

Теорема 6.1. СИУ со степенным ядром (6.1) и характеристическое СИУ с ядром Коши

$$A_1(t)\mu(t) + B_1(t) \int_{ab} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\xi - t} = f(t), \quad t \in (ab), \quad (6.3)$$

где

$$A_1(t) = B(t) - \cos \pi\varphi(t) A(t), \quad B_1(t) = -\sin \pi\varphi(t) A(t), \quad (6.4)$$

эквивалентны в том смысле, что

1) если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (6.1), то определенная равенством

$$(J_{tb}^{a,\varphi,0}\nu)(t) = \mu(t), \quad t \in (ab) \quad (6.5)$$

функция $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (6.3);

2) если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (6.3), представимое в виде (6.5), то $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (6.1).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из тождества (5.12). Здесь, как и в случае теоремы 3.1, можно не делать каких-либо предположений о коэффициентах и правых частях уравнений, а также о классах искомых функций •

Для интегрального уравнения с транспонированным степенным ядром справедливо следующее утверждение, основанное на тождестве (5.20).

Теорема 6.2. *СИУ со степенным ядром*

$${}^t J_{at}^{a,\varphi,0}[A(\cdot)\nu(\cdot)] + {}^t J_{tb}^{a,\varphi,0}[B(\cdot)\nu(\cdot)] = f(\cdot) \quad (6.6)$$

и характеристическое СИУ с ядром Коши

$$A_1(t)\nu(t) + \int_{ab} \frac{B_1(\xi)\nu(\xi) d\xi}{\xi - t} = \mu(t), \quad t \in (ab), \quad (6.7)$$

где

$$A_1(t) = A(t) - \cos \pi\varphi(t) B(t), \quad B_1(t) = \sin \pi\varphi(t) B(t) \quad (6.8)$$

эквивалентны в том смысле, что

1) если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (6.6), то определенная равенством (6.7) функция $\mu(\cdot)$ – решение уравнения

$$({}^t J_{at}^{a,\varphi,0} \mu)(t) = f(t), \quad t \in (ab); \quad (6.9)$$

2) если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (6.9), то любое решение уравнения (6.7) с такой правой частью – решение уравнения (6.6).

Как следует из теорем 6.1 и 6.2, чтобы получить необходимые и достаточные условия разрешимости СИУ (6.1), (6.6) и других уравнений с обобщенными степенными ядрами, а также формулы, дающие их решения, нужно исследовать интегральные уравнения (6.5), (6.9) и другие уравнения того же вида.

Аналогичные утверждения справедливы для уравнений с обобщенными степенными ядрами

$$A(\cdot)J_{at}^{a,\varphi}\nu(\cdot) + B(\cdot)J_{tb}^{a,\varphi}\nu(\cdot) = f(\cdot), \quad A(\cdot)J_{at}^{b,\varphi,0}\nu(\cdot) + B(\cdot)J_{tb}^{b,\varphi,0}\nu(\cdot) = f(\cdot),$$

$$A(\cdot)J_{at}^{b,\varphi}\nu(\cdot) + B(\cdot)J_{tb}^{b,\varphi}\nu(\cdot) = f(\cdot), \quad {}^t J_{at}^{a,\varphi}[A(\cdot)\nu(\cdot)] + {}^t J_{tb}^{a,\varphi}[B(\cdot)\nu(\cdot)] = f(\cdot),$$

$${}^t J_{at}^{b,\varphi,0}[A(\cdot)\nu(\cdot)] + {}^t J_{tb}^{b,\varphi,0}[B(\cdot)\nu(\cdot)] = f(\cdot), \quad {}^t J_{at}^{b,\varphi}[A(\cdot)\nu(\cdot)] + {}^t J_{tb}^{b,\varphi}[B(\cdot)\nu(\cdot)] = f(\cdot).$$

Отметим, что в случае ядер $P_{a,\varphi}(t, \tau)$ и $P_{b,\varphi}(t, \tau)$ при переходе от уравнений с обобщенными степенными ядрами к СИУ с ядром Коши в правой части появляется

неизвестная постоянная C , значение которой должно совпадать со значением интеграла от искомой функции $\nu(\cdot)$ по дуге ab . Это обстоятельство не вносит каких-либо принципиальных затруднений в общую схему рассуждений.

6.2. Свойства операторов с обобщенными степенными ядрами

Как уже отмечалось в разделе 5.5, операторы с обобщенными степенными ядрами только множителем отличаются от операторов дробного интегрирования, если $ab = [a, b]$ – отрезок вещественной оси и $\varphi(t) \equiv 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Известно [130], §3, что операторы дробного интегрирования не ухудшают свойств функций, то есть не уменьшают показателя Гельдера и не увеличивают порядков особенностей на концах отрезка. Операторы с обобщенными степенными ядрами имеют подобные свойства.

Пусть $t = t(s)$, $s \in [0, l]$ – параметрическое уравнение дуги ab . Тогда

$$(J_{tb}^{a,\varphi}\nu)(t) = \sin \pi\varphi[t(s)] \int_s^l \nu[t(\sigma)] P_{a,\varphi}[t(s), t(\sigma)] t'(\sigma) d\sigma,$$

$$P_{a,\varphi}[t(s), t(\sigma)] = \exp \int_0^\sigma \frac{\varphi[t(\xi)] t'(\xi) d\xi}{t(s) - t(\xi)}.$$

Если из обобщенного степенного ядра выделить слагаемое, содержащее множитель $(\sigma - s)^{\alpha-1}$, то при изучении свойств оператора $J_{tb}^{a,\varphi}$ можно воспользоваться известными сведениями о свойствах интеграла дробного интегрирования. Но это достаточно трудоемко, особенно – преобразование ветвей многозначных степенных функций.

Рассмотрим некоторые из свойств операторов с обобщенными степенными ядрами, которые можно получить не переходя к дуговой абсциссе в интегралах по дуге. Исследуем поведение интеграла $J_{tb}^{a,\varphi}$ с обобщенным степенным ядром в окрестности концов дуги ab .

Лемма 6.1. *Если в окрестности точки b*

$$\nu(\tau) = \nu_b(\tau) \left(\frac{\tau - a}{b - \tau} \right)^\beta, \quad \nu_b(\cdot) \in H, \quad \nu_b(b) \neq 0,$$

и $\lambda_b = h(\nu_b(\cdot), b)$ – верхний показатель Гельдера функции $\nu_b(\cdot)$ в точке b , то функция $(J_{tb}^{a,\varphi}\nu)(\cdot)$ имеет в точке b степенную особенность порядка не выше, чем $\max\{\operatorname{Re} \beta + \operatorname{Re} \varphi(b) - 1, \operatorname{Re} \beta - \lambda_b + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Доказательство. Множитель $\sin \pi\varphi(t)$ не имеет особенностей и не обращается в нуль в точках a и b , поэтому не будем учитывать его при исследовании асимптотики. Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = \int_{tb} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau.$$

Обобщенное степенное ядро представим в виде

$$P_{a,\varphi}(t, \tau) = \exp \int_{a\tau} \frac{1 - \varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \frac{t - a}{\tau - t}.$$

Тогда

$$\mu(t) = \int_{ab} \left(\frac{\tau - a}{b - \tau}\right)^\beta p(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - t},$$

где

$$p(\tau, t) = \left\{ \nu_b(\tau)(t - a) \exp \int_{a\tau} \frac{1 - \varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad \tau \in tb; \quad 0, \quad \tau \in at \right\},$$

и

$$\mu(t) = p(b, t)I_1(t) + I_2(t), \quad (6.10)$$

где

$$I_1(t) = \int_{ab} \left(\frac{\tau - a}{b - \tau}\right)^\beta \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad I_2(t) = \int_{ab} \left(\frac{\tau - a}{b - \tau}\right)^\beta [p(b, t) - p(\tau, t)] \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Интеграл $I_1(t)$ вычисляется по формуле (2.9),

$$I_1(t) = \frac{\pi}{\sin \beta\pi} - \pi \operatorname{ctg} \beta\pi \left(\frac{t - a}{b - t}\right)^\beta, \quad t \in (ab).$$

Функция

$$p(b, t) = \nu_b(b)(t - a) \exp \int_{ab} \frac{\varphi(b) - \varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \left(\frac{b - t}{t - a}\right)^{1 - \varphi(b)}.$$

Поэтому 1-е слагаемое в правой части формулы (6.10) представимо в виде

$$p(b, t)I_1(t) = \omega_1(t) \left(\frac{t - a}{b - t}\right)^{\beta + \varphi(b) - 1} + \omega_2(t),$$

где $\omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot)$ – удовлетворяющие условию H функции, причем $\omega_1(b) \neq 0$.

Рассмотрим теперь интеграл $I_2(t)$. Пусть $\lambda_b = h(\nu_b(\cdot), b)$ – верхний показатель Гельдера функции $\nu_b(\cdot)$ в точке b . Функция $p(\tau, t)$ по переменной τ в точке b имеет такое же значение верхнего показателя Гельдера. Если $\lambda_b > \operatorname{Re} \beta$, то плотность интеграла с ядром Коши $I_2(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\lambda_b - \operatorname{Re} \beta$ в точке b и $h(I_2(\cdot), b) = \lambda_b - \operatorname{Re} \beta$. Если $\lambda_b \leq \operatorname{Re} \beta$, то плотность интеграла $I_2(t)$ имеет особенность в точке b и

$$I_2(t) = \omega_3(t) \left(\frac{t - a}{b - t}\right)^{\beta_0} + \omega_4(t), \quad \operatorname{Re} \beta_0 > \operatorname{Re} \beta - \lambda_b,$$

где функция $\omega_3(\cdot)$ удовлетворяет в окрестности точки b условию H , а функция $\omega_4(\cdot)$ может иметь особенность, но порядка меньшего, чем $\operatorname{Re} \beta - \lambda_b$ •

Таким образом, поведение интеграла с обобщенным степенным ядром $(J_{tb}^{a,\varphi})(\cdot)$ в точке b зависит от трех чисел: $\operatorname{Re} \beta$, $1 - \operatorname{Re} \varphi(b)$ и λ_b .

- а) Если $1 - \operatorname{Re} \varphi(b) > \operatorname{Re} \beta$ и $\lambda_b > \operatorname{Re} \beta$, то у функции $\mu(\cdot)$ в точке b особенности нет.
б) Если $1 - \operatorname{Re} \varphi(b) \leq \operatorname{Re} \beta < \lambda_b$, то поведение $\mu(\cdot)$ определяет слагаемое

$$\omega_1(t) \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{\beta + \varphi(b) - 1}.$$

- в) Если $1 - \operatorname{Re} \varphi(b) > \operatorname{Re} \beta \geq \lambda_b$, то порядок особенности функции $\mu(\cdot)$ в точке b равен $\operatorname{Re} \beta_0 = \operatorname{Re} \beta - \lambda_b + \varepsilon$.
г) Если $1 - \operatorname{Re} \varphi(b) \leq \operatorname{Re} \beta$ и $\lambda_b \leq \operatorname{Re} \beta$, то порядок особенности не более, чем $\max\{\operatorname{Re} \beta + \operatorname{Re} \varphi(b) - 1, \operatorname{Re} \beta_0\}$.

Легко видеть, что всюду указаны наибольшие из возможных значений порядков особенности. В некоторых случаях поведение функции $\mu(\cdot)$ в точке b может быть значительно лучшим. Например, особого исследования требует случай $\beta = 1/2$.

Лемма 6.2. *Если в окрестности точки a*

$$\nu(\tau) = \nu_a(\tau) \left(\frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^\alpha, \quad \nu_a(\cdot) \in H, \quad \nu_a(a) \neq 0,$$

и $\lambda_a = h(\nu_a(\cdot), a)$ – верхний показатель Гельдера функции $\nu_a(\cdot)$ в точке a , то функция $(J_{tb}^{a,\varphi} \nu)(\cdot)$ имеет в точке a степенную особенность порядка не выше, чем $\operatorname{Re} \alpha - \operatorname{Re} \varphi(a) - \lambda_a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Доказательство. Как уже отмечалось в разделе 5.1, обобщенные степенные ядра $P_{a,\varphi}(t, \tau)$ и $P_{b,\varphi}(t, \tau)$ отличаются множителем $\tilde{\varphi}(t)$ (5.2). Поэтому

$$(J_{tb}^{a,\varphi} \nu)(t) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(t)} (J_{tb}^{b,\varphi} \nu)(t).$$

Но из тождества (5.14) следует, что

$$(J_{tb}^{b,\varphi} \nu)(t) = -\cos \pi \varphi(t) (J_{at}^{b,\varphi} \nu)(t) + \sin \pi \varphi(t) (t-b) \left(S_{ab} \left[\frac{1}{\xi-b} J_{a\xi}^{b,\varphi} \nu \right] \right)(t). \quad (6.11)$$

Поэтому поведение интеграла $(J_{tb}^{a,\varphi} \nu)(\cdot)$ в точке a полностью определяется поведением интеграла $(J_{at}^{b,\varphi} \nu)(\cdot)$ в этой точке.

Переформулируем утверждение леммы 6.1, переставив местами концы дуги ab . Поведение интеграла $(J_{at}^{b,\varphi} \nu)(\cdot)$ в точке a зависит от трех чисел: $\operatorname{Re} \alpha$, $1 - \operatorname{Re} \varphi(a)$ и λ_a . При этом функция $(J_{at}^{b,\varphi} \nu)(\cdot)$ имеет в точке a степенную особенность порядка не выше, чем $\max\{\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \varphi(a) - 1, \operatorname{Re} \alpha - \lambda_a + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Сингулярный интеграл в правой части (6.11) имеет тот же порядок особенности в точке a , что и его плотность.

Поведение множителя $\tilde{\varphi}(\cdot)$ в окрестности точки a определяет степенная функция

$$\left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\varphi(a)}.$$

Поэтому порядок степенной особенности в точке a у интеграла $(J_{tb}^{a,\varphi}\nu)(\cdot)$ уменьшается на $\operatorname{Re}\varphi(a)$ и, следовательно, не может превысить величины $\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\varphi(a) - \lambda_a + \varepsilon$. Если же $\lambda_a > \operatorname{Re}\alpha$, то $(J_{tb}^{a,\varphi}\nu)(a) = 0$ •

Окончательный результат сформулируем так:

Теорема 6.3. *Оператор $J_{tb}^{a,\varphi}$ понижает порядки степенных особенностей функций на концах дуги ab .*

Другие операторы с обобщенными степенными ядрами имеют такое же свойство. Случай, когда функция $\nu(\cdot)$ может иметь степенные особенности во внутренних точках дуги ab , рассмотрен в [79], §13.

6.3. Обобщение уравнения Абеля

Интегральное уравнение

$$\sin \pi\varphi(t) \int_{tb}^a \nu(\tau) P_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau = \mu(t), \quad t \in (ab), \quad (6.12)$$

и уравнения того же вида с другими операторами с обобщенным степенным ядром можно рассматривать как одно из обобщений интегрального уравнения Абеля.

Теорема 6.4. *Если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (6.12), то*

$$\nu(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{tb}^a \frac{\mu(\xi)}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi. \quad (6.13)$$

Если $\nu(\cdot) \in AC(ab)$, то уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{tb}^a \frac{\mu(\xi)}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi = \nu(t) \quad (6.14)$$

имеет решение

$$\mu(t) = \sin \pi\varphi(t) \int_{tb}^a \nu'(\tau) P_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau.$$

Это утверждение сразу следует из тождества (5.23). Ясно, что уравнение (6.12) может иметь только одно решение •

Обозначим

$$(Q_{tb}^{a,1-\varphi}\mu)(t) := \frac{1}{\pi} \int_{tb}^a \frac{\mu(\xi)}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi. \quad (6.15)$$

Теорема 6.5. Пусть K – один из подклассов суммируемых или гельдеровых функций. Уравнение (6.12) имеет решение $\nu(\cdot) \in K$ тогда и только тогда, когда

1) $(Q_{tb}^{a,1-\varphi} \mu)(b) = 0;$

2) $(Q_{tb}^{a,1-\varphi} \mu)'(\cdot) \in K.$

При этом $\nu(\cdot) = (Q_{tb}^{a,1-\varphi} \mu)'(\cdot).$

Доказательство. Необходимость утверждения следует из тождества (5.23). Достаточность доказывается сложнее.

Пусть условия 1) и 2) выполнены. Пусть

$$\nu(t) = (Q_{tb}^{a,1-\varphi} \mu)'(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{tb} \frac{\mu(\xi)}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi.$$

Обозначим

$$\mu_1(t) = \sin \pi \varphi(t) \int_{tb} \nu(\tau) P_{a,\varphi}(t, \tau) d\tau.$$

Тогда $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (6.12) с правой частью $\mu_1(\cdot)$. По теореме 6.4

$$\nu(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{tb} \frac{\mu_1(\xi)}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi.$$

Следовательно, $(Q_{tb}^{a,1-\varphi} \mu)(t) - (Q_{tb}^{a,1-\varphi} \mu_1)(t) = const$ и с учетом условия 1)

$$\frac{1}{\pi} \int_{tb} \frac{\mu(\xi) - \mu_1(\xi)}{\xi - a} P_{a,1-\varphi}(\xi, t) d\xi = 0.$$

Так как это уравнение имеет только тривиальное решение, то функция $\nu(\cdot)$ – действительно решение уравнения (6.12).

Достаточность условий теоремы 6.5 может быть установлена непосредственной подстановкой функции (6.13) в уравнение (6.12) •

Теорема 6.5 является аналогом теоремы 2.1 из [130]. Заметим, что для операторов дробного интегрирования доказать достаточность условий 1) и 2) значительно проще, так как при постоянной функции $\varphi(\cdot)$ оператор $Q_{tb}^{a,1-\varphi}$ фактически совпадает с $J_{tb}^{a,1-\varphi}$.

Решение (6.13) обобщенного уравнения Абеля (6.12) можно записать в форме, не содержащей производной функции $\mu(\cdot)$. При дополнительном предположении, что дуга ab удовлетворяет условию Ляпунова, эту формулу получил А.В. Майстер [54].

Достаточные условия разрешимости уравнения (6.12) можно сформулировать и как условия на его правую часть.

Теорема 6.6. Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$ и выполнены условия

1) $\mu(a) = 0$;

2) $\operatorname{Re} \varphi(a) < h(\mu(\cdot), a)$;

3) $\operatorname{Re} \beta < \min\{h(\mu(\cdot), b), h(\varphi(\cdot), b), \operatorname{Re} \varphi(b)\}$,

то функция $\nu(\cdot)$ (6.13) является решением класса $H_\lambda^p(ab)$ уравнения (6.12).

Доказательство имеется в работе А.В. Майстера [53]. В этой работе рассмотрен также случай, когда у функций допускаются интегрируемые особенности во внутренних точках дуги ab .

6.4. Необходимые и достаточные условия разрешимости

После того, как исследовано обобщение уравнения Абеля (6.12), можно сформулировать необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения с обобщенным степенным ядром (6.1).

Следствие 6.1. Пусть $A(\cdot), B(\cdot), \varphi(\cdot) \in H_\lambda(ab)$. Если $\nu(\cdot) \in H_\lambda^p[\alpha, \beta](ab)$ – решение уравнения (6.1), то $f(\cdot) = (P_{a, \varphi, 0} \nu)(\cdot) \in H_{\lambda_0}^p[\alpha_0, \beta_0](ab)$, где $\lambda_0 \geq \lambda$, $\operatorname{Re} \alpha_0 < \operatorname{Re} \alpha$, $\operatorname{Re} \beta_0 < \operatorname{Re} \beta$.

Следствие 6.2. Если, кроме того, $A_1^2(t) + \pi^2 B_1^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in ab$, то

$$\begin{aligned} \nu(t) = & \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{tb}^a \frac{1}{\xi - a} \left\{ \frac{A_1(\xi)}{A_1^2(\xi) + \pi^2 B_1^2(\xi)} f(\xi) - \right. \\ & \left. - \frac{B_1(\xi)}{A_1^2(\xi) + \pi^2 B_1^2(\xi)} Z(\xi) \left[\int_{ab}^{\xi} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + P_{\kappa-1}(\xi) \right] \right\} P_{a, 1-\varphi}(\xi, t) d\xi, \end{aligned}$$

где $Z(\cdot)$ – каноническая функция уравнения (6.3), κ – индекс, $P_{\kappa-1}(\cdot)$ – полином степени не выше, чем $\kappa - 1$. При $\kappa \leq 0$ $P_{\kappa-1}(\cdot) \equiv 0$ и при $\kappa < 0$ выполняются условия (2.32).

Следствие 6.3. Если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (6.3), удовлетворяющее условиям теоремы 6.5, то функция

$$\nu(t) = \frac{d}{dt} (Q_{tb}^{a, 1-\varphi} \mu)(t)$$

– решение уравнения (6.1) класса K .

Пусть $\varphi(\cdot) \equiv \lambda$. Тогда СИУ (6.11) примет вид

$$A(t) \sin \pi \lambda \int_{at}^t \nu(\tau) \left(\frac{t-a}{t-\tau} \right)^\lambda d\tau + B(t) \sin \pi \lambda \int_{tb}^t \nu(\tau) \left(\frac{t-a}{\tau-t} \right)^\lambda d\tau = (t-a) f(t).$$

Если ab – отрезок вещественной оси $[a, b]$, запишем степенную функцию в виде отношения двух функций. Тогда получим уравнение

$$A(t) \int_a^t \frac{\nu(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\lambda} + B(t) \int_t^b \frac{\nu(\tau) d\tau}{(\tau-t)^\lambda} = \frac{1}{\sin \pi \lambda} (t-a)^{1-\lambda} f(t), \quad t \in (a, b), \quad (6.16)$$

которое обычно называют *обобщенным уравнением Абеля*. Условия разрешимости уравнения (6.16) и его решение в замкнутой форме методом интегральных тождеств получил С.Г. Самко.

Покажем, как в рамках общей теории СИУ со степенной особенностью в ядре может быть получено в замкнутой форме решение уравнения со степенным ядром с постоянными коэффициентами

$$A \int_a^x \frac{p(t) dt}{(x-t)^\nu} + B \int_x^b \frac{p(t) dt}{(t-x)^\nu} = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (6.17)$$

Умножим обе части уравнения (6.17) на $(b-x)^\nu$. Тогда

$$A \int_a^x p(t) \left(\frac{b-x}{x-t}\right)^\nu dt + B \int_x^b p(t) \left(\frac{b-x}{t-x}\right)^\nu dt = (b-x)^\nu f(x), \quad x \in (a, b).$$

Обобщенное степенное ядро с постоянной плотностью

$$P_{b,\nu}(x, t) = \exp \int_t^b \frac{\nu d\xi}{\xi-x} = \left\{ \left(\frac{b-x}{x-t}\right)^\nu, t \in (a, x); \left(\frac{b-x}{t-x}\right)^\nu, t \in (x, b) \right\}.$$

Из тождества (5.13) следует, что

$$\int_x^b p(t) \left(\frac{b-x}{t-x}\right)^\nu dt = P - \cos \pi \nu \int_a^x p(t) \left(\frac{b-x}{x-t}\right)^\nu dt + \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \int_a^b \left[\int_a^\xi p(t) \left(\frac{b-\xi}{\xi-t}\right)^\nu dt \right] \frac{d\xi}{\xi-x},$$

где

$$P = \int_a^b p(t) dt.$$

Поэтому СИУ (6.17) эквивалентно характеристическому СИУ с ядром Коши

$$Aq(x) + B \left[P - \cos \pi \nu q(x) + \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \int_a^b \frac{q(\xi) d\xi}{\xi-x} \right] = (b-x)^\nu f(x), \quad x \in (a, b) \quad (6.18)$$

относительно новой искомой функции

$$q(x) = \int_a^x p(t) \left(\frac{b-x}{x-t}\right)^\nu dt, \quad x \in (a, b). \quad (6.19)$$

Заметим, что в соответствии с утверждением теоремы 6.1 можно получить и другое СИУ с ядром Коши, эквивалентное уравнению (6.17), но не содержащее неопределенной постоянной P .

Дальнейшие действия таковы: построим решение $q(\cdot)$ уравнения (6.18) и получим искомую функцию $p(\cdot)$ как решение интегрального уравнения Абеля (6.19).

6.5. Дополнительные замечания и библиографические указания

Как уже было сказано, интегральные уравнения со степенной особенностью в ядре изучались одновременно с интегральными уравнениями с логарифмическим ядром.

Методом сведения к краевой задаче Римана К.Д. Сакалюк получил решение *обобщенного уравнения Абеля* с внешними [116], [117] и внутренними коэффициентами [121]

$$u(x) \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha} + v(x) \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\int_a^x \frac{u(t)\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha} + \int_x^b \frac{v(t)\varphi(t) dt}{(t-x)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

а также некоторых уравнений более общего вида [119].

Работа А. Петерса [158] посвящена уравнениям со степенными ядрами на гладкой дуге. В работе Ф.В. Чумакова и И.Л. Васильева [148] исследовано интегральное уравнение типа Абеля на замкнутом контуре.

Метод интегральных тождеств, предложенный С.Г. Самко, позволил значительно упростить предположения относительно коэффициентов и правых частей уравнений, а также сделать более естественной общую схему рассуждений. Ограничения на коэффициенты обобщенного уравнения Абеля в рамках метода аналитического продолжения были сняты ранее в работе Л. фон Вольферсдорфа [164].

Другие уравнения с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, подобные изученным в главах 3–6, а также некоторые их приложения рассматривались в работах [140], [156], [73]–[76], [77], [79], [80], [81], [82], [83], [159], [160]. Эти исследования продолжили В.Л. Дильман [25]–[27], С.П. Кузнецов [49] и А.В. Майстер [52]–[55].

Глава 7.

Уравнения, порождаемые дифференциальными равенствами

Как было показано в главе 3, взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнения с логарифмическим ядром и характеристического СИУ с ядром Коши задается в случае отрезка вещественной оси простым интегральным равенством

$$\int_a^x \nu(t) dt = \mu(x), \quad x \in [a, b]. \quad (7.1)$$

Это соответствие может быть задано, что равносильно, и в форме задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\mu'(x) = \nu(x), \quad \mu(a) = 0. \quad (7.2)$$

Поэтому будем говорить, что равенства (7.2) порождают уравнение с логарифмическим ядром. Будем называть равенства (7.2) и аналогичные им просто *дифференциальными равенствами*.

Рассмотрим дифференциальные равенства более общего вида, позволяющие установить соответствие между решениями характеристического СИУ с ядром Коши и решениями некоторых интегральных уравнений, ядра которых имеют сложную особенность (содержат слагаемые, одно из которых имеет полярную особенность, а другие – логарифмического типа). Для простоты рассуждений будем рассматривать уравнения, заданные на отрезке вещественной оси.

7.1. Равенства 1-го порядка, условия Коши

Пусть функции $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ связаны соотношениями

$$p_1(x)\mu' + p_0(x)\mu = q_1(x)\nu' + q_0(x)\nu, \quad r_0\mu(a) = s_0\nu(a), \quad (7.3)$$

где $r_0 \neq 0$, $s_0 \neq 0$. Чтобы первое из равенств (7.3) имело смысл и были обоснованы дальнейшие преобразования, будем считать, что выполнено одно из двух условий:

$$\mu(\cdot), \nu(\cdot), p_1(\cdot), q_1(\cdot) \in C^1([a, b]); \quad p_0(\cdot), q_0(\cdot) \in C([a, b]); \quad (A)$$

или

$$\mu(\cdot), \nu(\cdot), p_1(\cdot), q_1(\cdot) \in A_p([a, b]); \quad p_0(\cdot), q_0(\cdot) \in L_p(a, b). \quad (B)$$

В случае (B) предполагается, что первое равенство в (7.3) выполняется почти всюду на $[a, b]$.

Пусть $p_1(x) \neq 0$, найдем функцию $\mu(\cdot)$ как решение задачи Коши (7.3) и, интегрируя по частям, преобразуем полученное выражение так, чтобы в правой части под знаком интеграла не оставалось производной $\nu'(\cdot)$. Получим

$$\begin{aligned} \mu(x) = & \frac{q_1(x)}{p_1(x)}\nu(x) + \frac{1}{P_1(x)} \left(\frac{s_0}{r_0} - \frac{q_1(a)}{p_1(a)} \right) \nu(a) + \\ & + \frac{1}{P_1(x)} \int_a^x \nu(\tau) P_1(\tau) \left[\frac{q_0(\tau)}{p_1(\tau)} - \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)} \frac{q_1(\tau)}{p_1(\tau)} - \left(\frac{q_1(\tau)}{p_1(\tau)} \right)' \right] d\tau, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где

$$P_1(x) = \exp \int_a^x \frac{p_0(t)}{p_1(t)} dt.$$

С другой стороны, из (7.3) при $q_1(x) \neq 0$ следует, что

$$\begin{aligned} \nu(x) = & \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\mu(x) + \frac{1}{Q_1(x)} \left(\frac{r_0}{s_0} - \frac{p_1(a)}{q_1(a)} \right) \mu(a) + \\ & + \frac{1}{Q_1(x)} \int_a^x \mu(\tau) Q_1(\tau) \left[\frac{p_0(\tau)}{q_1(\tau)} - \frac{q_0(\tau)}{q_1(\tau)} \frac{p_1(\tau)}{q_1(\tau)} - \left(\frac{p_1(\tau)}{q_1(\tau)} \right)' \right] d\tau, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где

$$Q_1(x) = \exp \int_a^x \frac{q_0(t)}{q_1(t)} dt.$$

При условии $s_0 p_1(a) = r_0 q_1(a)$ вторые слагаемые в правых частях формул (7.4) и (7.5) пропадут.

Выше предполагалось, что функции $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ дифференцируемы. Но интегральные уравнения (7.4) и (7.5) обращают друг друга и без этого требования, в чем легко убедиться непосредственно подстановкой правой части одной из формул в другую.

Этим установлена

Лемма 7.1. *Если выполнено одно из условий (A) или (B), то интегральные уравнения (7.4) и (7.5) взаимно обращают друг друга.*

Следствие 7.1. *Единственное решение уравнения*

$$a(x)\nu(x) + b(x) \int_a^x c(t)\nu(t) dt = \mu(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (7.6)$$

имеет вид

$$\nu(x) = \frac{\mu(x)}{a(x)} - \exp \left[- \int_a^x \frac{c(t)b(t)}{a(t)} dt \right] \frac{b(x)}{a(x)} \int_a^x \mu(\tau) \exp \left[\int_a^\tau \frac{c(t)b(t)}{a(t)} dt \right] \frac{c(\tau)}{a(\tau)} d\tau. \quad (7.7)$$

Действительно, запишем уравнение (7.4) в виде (7.6), обозначив

$$a(x) = \frac{q_1(x)}{p_1(x)}, \quad b(x) = \frac{1}{P_1(x)}, \quad c(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \left[\frac{q_0(x)}{q_1(x)} + \frac{b'(x)}{b(x)} - \frac{a'(x)}{a(x)} \right].$$

Тогда из (7.5) следует формула (7.7) •

Теорема 7.1. *Интегральное уравнение*

$$A(x)a(x)\nu(x) + A(x)b(x) \int_a^x c(t)\nu(t) dt + B(x) \int_a^b \nu(t) \left[\frac{a(t)}{t-x} + c(t) \int_t^b \frac{b(\tau) d\tau}{\tau-x} \right] dt = f(x), \quad a < x < b \quad (7.8)$$

эквивалентно характеристическому СИУ с ядром Коши

$$A(x)\mu(x) + B(x) \int_a^b \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau-x} = f(x), \quad a < x < b. \quad (7.9)$$

Доказательство. Достаточно подставить левую часть формулы (7.6) в интегральное уравнение (7.9) вместо функции $\mu(\cdot)$ •

Ядро уравнения (7.8) представляет собой сумму ядра Коши и логарифмического ядра, записанного в виде интеграла типа Коши с переменным пределом. Приведенный в монографии Ф.Д.Гахова [19], с.593 пример разрешимого в замкнутой форме интегрального уравнения является частным случаем этого уравнения при $a(x) \equiv p = const$, $b(x) \equiv 1$, $c(x) \equiv -1$.

При $q_1(x) \equiv 0$, $q_0(x) \equiv 1$, $s_0 = 0$, $r_0 = 1$ получим, как частный случай, два обращаящих друг друга уравнения

$$\mu(x) = \frac{1}{P_1(x)} \int_a^x \nu(\tau) \frac{P_1(\tau)}{p_1(\tau)} d\tau, \quad \nu(x) = p_1(x)\mu'(x) + p_0(x)\mu(x),$$

одно из которых интегральное, а другое – дифференциальное.

7.2. Равенства 2-го порядка, условия Коши

Зададим на отрезке $[a, b]$ соответствие между функциями $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ в форме задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$p_2(x)\mu'' + p_1(x)\mu' + p_0(x)\mu = q_2(x)\nu'' + q_1(x)\nu' + q_0(x)\nu, \quad (7.10)$$

$$r_0\mu(a) = s_0\nu(a), \quad r_1\mu'(a) = s_1\nu'(a), \quad (r_0 \neq 0, \quad s_0 \neq 0, \quad r_1 \neq 0, \quad s_1 \neq 0).$$

Лемма 7.2. Пусть $p_2(x) \neq 0, q_2(x) \neq 0; \mu_0(\cdot)$ – нетривиальное решение однородного уравнения $p_2\mu'' + p_1\mu' + p_0\mu = 0$, $\nu_0(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения $q_2\nu'' + q_1\nu' + q_0\nu = 0$,

$$\mu_1(x) = \mu_0(x) \int_a^x \frac{P(t)}{\mu_0^2(t)} dt, \quad P(x) = \exp \left[- \int_a^x \frac{p_1(\tau)}{p_2(\tau)} d\tau \right],$$

$$\nu_1(x) = \nu_0(x) \int_a^x \frac{Q(t)}{\nu_0^2(t)} dt, \quad Q(x) = \exp \left[- \int_a^x \frac{q_1(\tau)}{q_2(\tau)} d\tau \right].$$

Если

$$\frac{s_0}{r_0} = \frac{s_1}{r_1} = \frac{q_2(a)}{p_2(a)}, \quad (7.11)$$

$$p_2(a)[q_2'(a) - q_1(a)] = q_2(a)[p_2'(a) - p_1(a)], \quad (7.12)$$

то интегральные уравнения

$$\mu(x) = -\mu_0(x) \int_a^x \nu(t) M_1(t) dt + \mu_1(x) \int_a^x \nu(t) M_0(t) dt + \frac{q_2(x)}{p_2(x)} \nu(x), \quad (7.13)$$

$$M_i(t) = \left(\frac{\mu_i(t)}{\nu(t)} \frac{q_2(t)}{p_2(t)} \right)'' - \left(\frac{\mu_i(t)}{\nu(t)} \frac{q_1(t)}{p_2(t)} \right)' + \frac{\mu_i(t)}{\nu(t)} \frac{q_0(t)}{p_2(t)}, \quad i = 0, 1,$$

$$v(x) = \mu_0(x)\mu_1'(x) - \mu_0'(x)\mu_1(x),$$

и

$$\nu(x) = -\nu_0(x) \int_a^x \mu(t) N_1(t) dt + \nu_1(x) \int_a^x \mu(t) N_0(t) dt + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \mu(x), \quad (7.14)$$

$$N_i(t) = \left(\frac{\nu_i(t)}{w(t)} \frac{p_2(t)}{q_2(t)} \right)'' - \left(\frac{\nu_i(t)}{w(t)} \frac{p_1(t)}{q_2(t)} \right)' + \frac{\nu_i(t)}{w(t)} \frac{p_0(t)}{q_2(t)}, \quad i = 0, 1,$$

$$w(x) = \nu_0(x)\nu_1'(x) - \nu_0'(x)\nu_1(x),$$

взаимно обращают друг друга.

Доказательство. Функции $\mu_0(\cdot)$ и $\mu_1(\cdot)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, поэтому определитель Вронского $v(x) \neq 0$. Считая функцию $\nu(x)$ заданной, построим решение задачи Коши (7.10) методом вариации произвольных постоянных. Используем формулу интегрирования по частям, чтобы избавиться от входящих в решение производных функции $\nu(x)$. Получим

$$\mu(x) = -\mu_0(x) \int_a^x \nu(t) M_1(t) dt + \mu_1(x) \int_a^x \nu(t) M_0(t) dt + \frac{q_2(x)}{p_2(x)} \nu(x) +$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_0(a)\mu_1(x)\left(\frac{s_1}{r_1} - \frac{q_2(a)}{p_2(a)}\right)\nu'(a) + \left[\left(\frac{s_0}{r_0} - \frac{q_2(a)}{p_2(a)}\right)\left(\frac{\mu_0(x)}{\mu_0(a)} - \mu'_0(a)\mu_1(x)\right) + \right. \\
& \left. +\mu_0(a)\mu_1(x)\frac{p_2(a)[q'_2(a) - q_1(a)] - q_2(a)[p'_2(a) - p_1(a)]}{p_2^2(a)}\right]\nu(a).
\end{aligned}$$

Если условия (7.11) и (7.12) выполнены, то два последних слагаемых в правой части пропадут.

Точно так же из (7.10) получим, что если выполнены условия (7.11) и (7.12), то имеет место равенство (7.14) •

Теорема 7.2. *Интегральное уравнение*

$$\begin{aligned}
& A(x)a(x)\nu(x) + A(x)b_1(x)\int_a^x c_1(t)\nu(t) dt + A(x)b_2(x)\int_a^x c_2(t)\nu(t) dt + \\
& + B(x)\int_a^b \nu(t)\left[\frac{a(t)}{t-x} + c_1(t)\int_t^b \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau-x} + c_2(t)\int_t^b \frac{b_2(\tau) d\tau}{\tau-x}\right] dt = f(x)
\end{aligned} \tag{7.15}$$

эквивалентно характеристическому СИУ с ядром Коши (7.7).

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$a(x)\nu(x) + b_1(x)\int_a^x c_1(t)\nu(t) dt + b_2(x)\int_a^x c_2(t)\nu(t) dt = \mu(x), \quad a \leq x \leq b \tag{7.16}$$

в предположении, что $a(x) \neq 0$, $w(x) = -b_1(x)b'_2(x) + b'_1(x)b_2(x) \neq 0$,

$$a'(a) + b_1(a)c_1(a) + b_2(a)c_2(a) = 0. \tag{7.17}$$

Пусть $p_2(x) \equiv 1$, $q_2(x) = a(x)$, $p_0(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ - коэффициенты уравнения $\mu'' + p_1\mu' + p_0\mu = 0$, имеющего фундаментальную систему решений $b_1(\cdot), b_2(\cdot)$, то есть решение системы уравнений

$$p_0b_1 + p_1b'_1 = -b''_1, \quad p_0b_2 + p_1b'_2 = -b''_2, \tag{7.18}$$

функции $q_0(\cdot)$ и $q_1(\cdot)$ таковы, что

$$\frac{b_2}{w}q_0 - \left(\frac{b_2}{w}q_1\right)' = c_1 - \left(\frac{b_2}{w}a\right)'', \quad \frac{b_1}{w}q_0 - \left(\frac{b_1}{w}q_1\right)' = -c_2 - \left(\frac{b_1}{w}a\right)''. \tag{7.19}$$

Если $\nu(\cdot)$ - решение интегрального уравнения, то при $x = a$ получим из тождества (7.16) и $a(a)\nu(a) = \mu(a)$, $a(a)\nu'(a) = \mu'(a)$ из продифференцированного тождества с учетом (7.17). Тогда $\nu(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ удовлетворяют соотношениям (7.10) при $r_0 = r_1 = a(a)$, $s_0 = s_1 = 1$.

Легко видеть, что равенства (7.11) и (7.12) (это следует из (7.17)) выполнены. Тогда единственное решение уравнения (7.16) может быть получено из формулы (7.14).

Подставим левую часть (7.16) в интегральное уравнение (7.7) вместо функции $\mu(\cdot)$ и получим интегральное уравнение (7.15) •

7.3. Равенства 2-го порядка, краевые условия

Пусть функции $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ связаны соотношениями

$$p_2(x)\mu'' + p_1(x)\mu' + p_0(x)\mu = q_2(x)\nu'' + q_1(x)\nu' + q_0(x)\nu, \quad (7.20)$$

$$r_{11}\mu'(a) + r_{12}\mu(a) = s_{11}\nu'(a) + s_{12}\nu(a) = 0,$$

$$r_{21}\mu'(b) + r_{22}\mu(b) = s_{21}\nu'(b) + s_{22}\nu(b) = 0$$

$$(r_{11}^2 + r_{12}^2 \neq 0, \quad s_{11}^2 + s_{12}^2 \neq 0, \quad r_{21}^2 + r_{22}^2 \neq 0, \quad s_{21}^2 + s_{22}^2 \neq 0).$$

Пусть $p_2(\cdot) \equiv 1, q_2(\cdot) \equiv 1$. Предположим, что однородная краевая задача

$$\mu'' + p_1(x)\mu' + p_0(x)\mu = 0,$$

$$r_{11}\mu'(a) + r_{12}\mu(a) = 0, \quad r_{21}\mu'(b) + r_{22}\mu(b) = 0$$

не имеет нетривиальных решений. Пусть $\mu_1(\cdot)$ – решение однородного уравнения, удовлетворяющее 1-му краевому условию, $\mu_2(\cdot)$ – решение уравнения, удовлетворяющее 2-му краевому условию. Тогда (см., например, [39], гл.3, §77) из (7.20) следует, что

$$\mu(x) = \mu_1(x) \int_x^b \frac{\mu_2(t)}{v(t)} f(t) dt + \mu_2(x) \int_a^x \frac{\mu_1(t)}{v(t)} f(t) dt, \quad (7.21)$$

где

$$v(x) = \mu_1(x)\mu_2'(x) - \mu_1'(x)\mu_2(x) \neq 0,$$

$$f(x) = q_2(x)\nu'' + q_1(x)\nu' + q_0(x)\nu.$$

Потребуем дополнительно, чтобы выполнялись условия

$$r_{11}s_{12} = r_{12}s_{11}, \quad r_{21}s_{22} = r_{22}s_{21}, \quad (7.22)$$

$$\left(\frac{q_2}{w}\right)' = \frac{q_1}{w} \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b. \quad (7.23)$$

Преобразуем правую часть формулы (7.21) и получим

$$\mu(x) = \mu_1(x) \int_x^b \nu(t)M_2(t) dt + \mu_2(x) \int_a^x \nu(t)M_1(t) dt + q_2(x)\nu(x), \quad (7.24)$$

$$M_i(t) = \left(\frac{\mu_i(t)}{v(t)} q_2(t) \right)'' - \left(\frac{\mu_i(t)}{v(t)} q_1(t) \right)' + \frac{\mu_i(t)}{v(t)} q_0(t), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\nu_1(\cdot), \nu_2(\cdot)$ – решения однородного уравнения $\nu'' + q_1(x)\nu' + q_0(x)\nu = 0$, удовлетворяющие соответственно условиям $s_{11}\nu_1'(a) + s_{12}\nu_1(a) = 0$, $s_{21}\nu_2'(b) + s_{22}\nu_2(b) = 0$, и $w(x) = \nu_1(x)\nu_2'(x) - \nu_1'(x)\nu_2(x) \neq 0$. Если выполнены условия (7.22) и

$$\left(\frac{p_2}{w} \right)' = \frac{p_1}{w} \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b, \quad (7.25)$$

то получим из (7.20)

$$\nu(x) = \nu_1(x) \int_x^b \mu(t) N_2(t) dt + \nu_2(x) \int_a^x \mu(t) N_1(t) dt + p_2(x) \mu(x), \quad (7.26)$$

$$N_i(t) = \left(\frac{\nu_i(t)}{\omega(t)} p_2(t) \right)'' - \left(\frac{\nu_i(t)}{\omega(t)} p_1(t) \right)' + \frac{\nu_i(t)}{\omega(t)} p_0(t), \quad i = 1, 2.$$

Лемма 7.3. При сделанных предположениях интегральные уравнения (7.21) и (7.26) взаимно обращают друг друга.

Теорема 7.3. Интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & A(x)a(x)\nu(x) + A(x)b_1(x) \int_a^x c_1(t)\nu(t) dt + A(x)b_2(x) \int_x^b c_2(t)\nu(t) dt + \\ & + B(x) \int_a^b \nu(t) \left[\frac{a(t)}{t-x} + c_1(t) \int_t^b \frac{b_1(\tau)d\tau}{\tau-x} + c_2(t) \int_a^t \frac{b_2(\tau)d\tau}{\tau-x} \right] dt = f(x) \end{aligned} \quad (7.27)$$

эквивалентно характеристическому СИУ с ядром Коши (7.7).

Доказательство. Рассуждая как и выше, рассмотрим интегральное уравнение

$$a(x)\nu(x) + b_1(x) \int_a^x c_1(t)\nu(t) dt + b_2(x) \int_x^b c_2(t)\nu(t) dt = \mu(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (7.28)$$

Пусть

$$v(x) = b_1(x)b_2'(x) - b_1'(x)b_2(x) \neq 0$$

($\mu_1(x) = b_1(x)$, $\mu_2(x) = b_2(x)$). Пусть $p_2(\cdot) \equiv 1$, а $p_0(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ – решение системы уравнений (7.18). Далее, пусть $q_2(x) = a(x)$, а $q_0(x)$ и $q_1(x)$ – решение системы уравнений (7.19). Тогда любое решение $\nu(\cdot)$ уравнения (7.28) является решением краевой задачи (7.20). Это решение дает формула (7.26) •

Как и в разделе 7.1, достаточно считать, что функции $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ только непрерывны. Справедливость формул обращения проверяется непосредственной подстановкой. Коэффициенты $p_k(\cdot), q_k(\cdot)$ должны иметь непрерывные производные до порядка k включительно. Требования, наложенные на коэффициенты интегральных

уравнений (7.16) и (7.28), должны обеспечивать соответствующие свойства функций $p_k(\cdot), q_k(\cdot)$.

Уравнение (7.27) при $b_1(\cdot) \equiv 1, b_2(\cdot) \equiv 1$ и союзное с ним исследовал А.А.Килбас [40].

Заметим, что интегральные уравнения (7.16) и (7.28) приводятся друг к другу, если ввести новую неизвестную постоянную

$$C = \int_a^b c_1(t)\nu(t) dt \quad \text{или} \quad C = \int_a^b c_2(t)\nu(t) dt.$$

Итак, интегральные уравнения (7.6), (7.15) и (7.27) по построению эквивалентны характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши (7.7) и, следовательно, их решение может быть получено из решения этого уравнения по формулам (7.9), (7.14) и (7.26). Решение $\mu(\cdot)$ уравнения (7.7) должно быть построено таким образом, чтобы были разрешимы интегральные уравнения (7.8), (7.16) и (7.28) и их решение $\nu(\cdot)$ принадлежало заданному классу функций.

Глава 8.

Интегральные уравнения Вольтерра с вырожденным ядром

В этой главе рассматриваются интегральные уравнения Вольтерра 1-го и 2-го рода с вырожденным ядром. В главе 7 частные случаи таких уравнений (в ядре только одно или два слагаемых) и формулы, дающие их решения, были получены при исследовании вспомогательных задач для дифференциальных уравнений. Этот метод можно распространить и на общий случай, но при этом будут слишком громоздкими формулы, связывающие коэффициенты дифференциальных и интегральных уравнений. Значительно проще на основании результатов главы 7 предугадать, какой вид должно иметь решение уравнения Вольтерра с вырожденным ядром, а затем обосновать это предположение.

8.1. Уравнение Вольтерра 2-го рода

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с вырожденным ядром

$$a(x)\nu(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \int_a^x c_j(t)\nu(t) dt = \mu(x), \quad a < x < b. \quad (8.1)$$

Пусть вещественные или комплексные функции $a(\cdot)$, $b_j(\cdot)$, $c_j(\cdot)$, $j = 1..n$ и $\mu(\cdot)$ непрерывны на $[a, b]$ или суммируемы с квадратом на (a, b) . Известно, что в этом случае непрерывное или суммируемое с квадратом решение $\nu(\cdot)$ уравнения (3.29) существует и единственно.

Теорема 8.1. *Если $a(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$, то единственное решение уравнения (8.1) имеет вид*

$$\nu(x) = A(x)\mu(x) + \sum_{j=1}^n B_j(x) \int_a^x C_j(t)\mu(t) dt, \quad (8.2)$$

где $A(\cdot)$, $B_j(\cdot)$, $C_j(\cdot)$, $j = 1..n$ - некоторые функции.

Доказательство. Запишем уравнение (8.1) в виде

$$a(x)\nu(x) + \int_a^x (b(x), c(t))\nu(t) dt = \mu(x), \quad a < x < b, \quad (8.3)$$

где $b(\cdot) = (b_1(\cdot), \dots, b_n(\cdot))$, $c(\cdot) = (c_1(\cdot), \dots, c_n(\cdot))$ - введенные для краткости формул вектор-функции, (\cdot, \cdot) - знак операции скалярного произведения. Будем искать решение уравнения (8.3) в виде (8.2), или, что одно и то же, в виде

$$\nu(x) = A(x)\mu(x) + \int_a^x (B(x), C(t))\mu(t) dt, \quad (8.4)$$

где $B(\cdot) = (B_1(\cdot), \dots, B_n(\cdot))$, $C(\cdot) = (C_1(\cdot), \dots, C_n(\cdot))$ – некоторые вектор-функции. Подставим правую часть (8.4) в уравнение (8.3). Полученное равенство будет выполнено, если

$$a(x)A(x) \equiv 1, \quad (8.5)$$

$$a(x)(B(x), C(t)) + A(t)(b(x), c(t)) + \int_t^x (B(\tau), C(t))(b(x), c(\tau)) d\tau = 0. \quad (8.6)$$

Не уменьшая общности можно считать, что $a(\cdot) \equiv 1$, $A(\cdot) \equiv 1$. Если это не так, поделим уравнение (8.3) на коэффициент $a(x)$ и будем рассматривать функции $b(\cdot)/a(\cdot)$, $\mu(\cdot)/a(\cdot)$ вместо $b(\cdot)$, $\mu(\cdot)$. Вектор-функции $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, которые должны удовлетворять условию (8.6), будем искать в виде $B(x) = \mathbb{B}(x)b(x)$, $C(t) = \mathbb{C}(t)c(t)$, где $\mathbb{B}(\cdot)$, $\mathbb{C}(\cdot)$ – невырожденные квадратные матрицы-функции. Тогда из

$$(\mathbb{B}(x)b(x), \mathbb{C}(t)c(t)) + (b(x), c(t)) + \int_t^x (\mathbb{B}(\tau)b(\tau), \mathbb{C}(t)c(t))(b(x), c(\tau)) d\tau = 0 \quad (8.7)$$

при $t = x$ получим

$$(\mathbb{B}(x)b(x), \mathbb{C}(x)c(x)) + (b(x), c(x)) = 0$$

или

$$(b(x), (\mathbb{B}^*(x)\mathbb{C}(x) + E)c(x)) = 0,$$

где $\mathbb{B}^*(\cdot)$ – сопряженная с $\mathbb{B}(\cdot)$ матрица-функция. Последнее условие будет выполнено, если

$$\mathbb{C}(x) = -[\mathbb{B}^*(x)]^{-1}. \quad (8.8)$$

Исключим из (8.7) матрицу $\mathbb{C}(\cdot)$ и получим

$$(\mathbb{B}(x)b(x) - \mathbb{B}(t)b(t) + \int_t^x (b(x), c(\tau))\mathbb{B}(\tau)b(\tau) d\tau, \mathbb{C}(t)c(t)) = 0.$$

Первый множитель в скалярном произведении обратится в нуль, если строки $\mathbb{B}_j(\cdot)$, $j = 1..n$, матрицы $\mathbb{B}(\cdot)$ удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{B}_j(x) - \mathbb{B}_j(t) + \int_t^x c(\tau)(\mathbb{B}\mathbb{B}_j(\tau), b(\tau)) d\tau = 0$$

и линейно независимы на $[a, b]$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{B}_j(x) + \int_a^x c(\tau)(\mathbb{B}_j(\tau), b(\tau)) d\tau = k_j, \quad j = 1..n, \quad (8.9)$$

где k_j , $j = 1..n$, – произвольные постоянные векторы. Построим матрицу $\mathbb{D}(x) = \{b_j(x)c_k(x)\}$, получим из (8.9) матричное уравнение

$$\mathbb{B}(x) + \int_a^x \mathbb{B}(\tau)\mathbb{D}(\tau)d\tau = K, \quad (8.10)$$

где K – некоторая постоянная матрица. При сделанных предположениях существует единственное решение уравнения (8.10).

Если матрица-функция $\mathbb{B}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (8.10) и матрица-функция $\mathbb{C}(\cdot)$ определена по формуле (8.8), то при $A(\cdot) \equiv 1$, $B(x) = \mathbb{B}(x)b(x)$, $C(x) = \mathbb{C}(x)c(x)$ функция $\nu(\cdot)$ вида (8.4) по построению является решением уравнения (8.3) при $a(x) \equiv 1$. Это решение не зависит от выбора K в уравнении (8.10), а других решений уравнение (8.4) иметь не может •

Замечание 1. Утверждение теоремы 8.1 сохраняется при любых других предположениях о ядре и правой части уравнения, если только существует его единственное решение. Как отмечается в [135], наиболее слабое условие на ядро, при котором линейное уравнение Вольтерра имеет единственное решение в классе непрерывных функций, неизвестно.

Замечание 2. Если продифференцируем уравнение (8.10), то получим матричное дифференциальное уравнение

$$\mathbb{B}'(x) + \mathbb{B}(x)\mathbb{D}(x) = 0. \quad (8.11)$$

Любое невырожденное решение этого уравнения, например, фундаментальная матрица, может быть использовано при построении решения уравнения (8.3).

8.2. Уравнение Вольтерра 1-го рода

Интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода с вырожденным ядром

$$\sum_{j=1}^n b_j(x) \int_a^x c_j(t) \nu(t) dt = \mu(x), \quad a < x < b, \quad (8.12)$$

имеет более сложные свойства.

Теорема 8.2. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (8.12) дифференцируемы, $\mu(a) = 0$ и хотя бы один из коэффициентов $c_j(\cdot)$, $j = 1..n$, и функция

$$(b(x), c(x)) = \sum_{j=1}^n b_j(x) c_j(x) \quad (8.13)$$

отличны от нуля всюду на $[a, b]$. Тогда единственное решение уравнения (8.12) имеет вид

$$\nu(x) = A_0(x)\mu'(x) + A_1(x)\mu(x) + \sum_{j=1}^{n-1} B_j(x) \int_a^x C_j(t)\mu(t) dt, \quad (8.14)$$

где $A_0(\cdot)$, $A_1(\cdot)$, $B_j(\cdot)$, $C_j(\cdot)$, $j = 1..n - 1$, – некоторые функции.

Доказательство. Преобразуем уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\sum_{j=1}^n b_j(x) \int_a^x c_j(t) \nu(t) dt = \mu(x) \quad (8.15)$$

к уравнению 2-го рода. Пусть для определенности $c_n(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$. Введем функцию

$$N(x) = \int_a^x c_n(t) \nu(t) dt. \quad (8.16)$$

Тогда

$$\nu(x) = N'(x)/c_n(x) \quad (8.17)$$

и

$$b_n(x)N(x) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x) \int_a^x \frac{c_j(t)}{c_n(t)} N'(t) dt = \mu(x). \quad (8.18)$$

Проинтегрируем по частям и получим для функции $N(\cdot)$ уравнение Вольтерра с вырожденным ядром

$$N(x)(b(x), c(x)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x) \int_a^x \left[\frac{c_j(t)}{c_n(t)} \right]' N(t) dt = \mu(x). \quad (8.19)$$

Так как $(b(x), c(x)) \neq 0$ всюду на $[a, b]$, то структура решения этого уравнения определена формулой (8.2),

$$N(x) = \tilde{A}(x)\mu(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{B}_j(x) \int_a^x \tilde{C}_j(t)\mu(t) dt, \quad (8.20)$$

где $\tilde{A}(x) = c_n(x)/(b(x), c(x))$, а функции $\tilde{B}_j(\cdot)$, $\tilde{C}_j(\cdot)$, $j = 1..n-1$, находятся по функциям $\tilde{b}_j(x) = b_j(x)$, $\tilde{c}_j(x) = -(c_j(x)/c_n(x))'$, $j = 1..n-1$, точно так же, как выше по функциям $b_j(\cdot)$, $c_j(\cdot)$, $j = 1..n$, строились функции $B_j(\cdot)$, $C_j(\cdot)$, $j = 1..n$. При этом $N(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(a) = 0$. В силу предположения о дифференцируемости коэффициентов и правой части уравнения (8.12) найденная функция $N(\cdot)$ будет дифференцируемой. Подставим производную $N'(\cdot)$ в (8.17), получим решение уравнения (8.1) при $a(x) \equiv 0$ вида (8.2). При этом, легко видеть,

$$A_0(x) = \frac{1}{(b(x), c(x))}, \quad A_1(x) = -\frac{(b'(x), c(x))}{(b(x), c(x))^2} \bullet \quad (8.21)$$

Замечание 1. Если $(b(x), c(x)) \equiv 0$ на $[a, b]$, то уравнение (8.19) снова будет уравнением Вольтерра 1-го рода. При соответствующих предположениях о его коэффициентах можно снова применять теорему 8.2 для определения структуры его решения.

Замечание 2. Если каждый из коэффициентов $c_j(\cdot)$, $j = 1..n$, хотя бы в одной точке обращается в нуль, то решение уравнения (8.12) при $a(\cdot) \equiv 0$ не будет единственным. Кроме того, это решение будет существовать только в случае, когда правая часть $\mu(\cdot)$ уравнения удовлетворяет дополнительным условиям разрешимости.

Поясним сказанное на примере. Из уравнения

$$\int_a^x c(t)\nu(t) dt = \mu(x), \quad (8.22)$$

следует, что $c(x)\nu(x) = \mu'(x)$ (если $\mu(\cdot)$ – дифференцируемая функция). Если $c(x_0) = 0$, $x_0 \in [a, b]$, то значение $\nu(x_0)$ остается произвольным. При этом $\mu'(x_0) = 0$.

8.3. Общий случай

ИУ с вырожденным ядром более общего вида

$$a(x)\nu(x) + \sum_{j=1}^{n_0} b_j(x) \int_a^x c_j(t)\nu(t) dt - \sum_{j=n_0+1}^n b_j(x) \int_x^b c_j(t)\nu(t) dt = \mu(x) \quad (8.23)$$

представляет собой уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, имеющим разрыв на диагонали. Это уравнение приводится к уравнению вида (8.1), если ввести дополнительно неизвестные постоянные

$$d_j = \int_a^b c_j(t)\nu(t) dt, \quad j = n_0 + 1..n. \quad (8.24)$$

Тогда уравнение (8.23) можно записать в виде

$$a(x)\nu(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \int_a^x c_j(t)\nu(t) dt = \mu_1(x), \quad (8.25)$$

где

$$\mu_1(x) = \mu(x) + \sum_{j=n_0+1}^n d_j b_j(x). \quad (8.26)$$

Теперь требуется найти функцию $\nu(\cdot)$ и постоянные d_j , $j = n_0 + 1..n$, удовлетворяющие уравнениям (8.25) и (8.24).

Пусть $a(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$. Тогда единственное решение уравнения (8.25), как следует из теоремы 8.1,

$$\begin{aligned} \nu(x) = & A(x)\mu(x) + \sum_{j=1}^n B_j(x) \int_a^x C_j(t)\mu(t) dt + \\ & + \sum_{j=n_0+1}^n d_j \left(A(x)b_j(x) + \sum_{k=1}^n B_k(x) \int_a^x C_k(t)b_j(t) dt \right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Потребуем, чтобы были выполнены условия (8.24). Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных d_j , $j = n_0 + 1..n$,

$$d_k = \sum_{j=n_0+1}^n p_{kj}d_j + q_k, \quad k = n_0 + 1..n, \quad (8.28)$$

где

$$\begin{aligned}
 p_{kj} &= \int_a^b c_k(t) \left[A(t)b_j(t) + \sum_{l=1}^n B_l(t) \int_a^t C_l(\tau)b_j(\tau) d\tau \right] dt, \\
 q_k &= \int_a^b c_k(t) \left[A(t)\mu(t) + \sum_{l=1}^n B_l(t) \int_a^t C_l(\tau)\mu(\tau) d\tau \right] dt.
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Заметим, что стоящие в квадратных скобках выражения представляют собой решения уравнения (8.25) с правыми частями $b_j(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ соответственно. Этим доказана

Теорема 8.3. *При $a(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$ единственное решение интегрального уравнения (8.23) имеет вид (8.27), если определитель системы линейных алгебраических уравнений (8.28) отличен от нуля. Если ранг r матрицы коэффициентов системы меньше, чем $n - n_0$, то решение уравнения (8.23) той же структуры (8.27) существует тогда и только тогда, когда правая часть уравнения удовлетворяет $n - n_0 - r$ условиям разрешимости, при этом столько же постоянных d_j в решении остаются произвольными.*

Проведем аналогичные рассуждения при $a(\cdot) \equiv 0$ на $[a, b]$ и получим следующее утверждение.

Теорема 8.4. *При $a(\cdot) \equiv 0$ на $[a, b]$ решение интегрального уравнения (8.23) имеет вид*

$$\begin{aligned}
 v(x) &= A_0(x)\mu'(x) + A_1(x)\mu(x) + \sum_{j=1}^{n-1} B_j(x) \int_a^x C_j(t)\mu(t) dt + \\
 &+ \sum_{j=n_0+1}^n d_j \left(A_0(x)b'_j(x) + A_1(x)b_j(x) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(x) \int_a^x C_k(t)b_j(t) dt \right),
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

постоянные d_j , $j = n_0 + 1..n$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений вида (8.28), где

$$\begin{aligned}
 p_{kj} &= \int_a^b c_k(t) \left[A_0(t)b'_j(t) + A_1(t)b_j(t) + \sum_{l=1}^{n-1} B_l(t) \int_a^t C_l(\tau)b_j(\tau) d\tau \right] dt, \\
 q_k &= \int_a^b c_k(t) \left[A_0(t)\mu'(t) + A_1(t)\mu(t) + \sum_{l=1}^{n-1} B_l(t) \int_a^t C_l(\tau)\mu(\tau) d\tau \right] dt, \quad j, k = n_0 + 1..n.
 \end{aligned}$$

Замечание. Формулы (8.27) и (8.30), дающие решение уравнения (8.23) в различных случаях, легко преобразовать так, чтобы в их правых частях были суммы как интегралов от a до x , так и интегралов от x до b .

Глава 9.

Уравнения с полярной и логарифмическими или степенными особенностями в ядре

Метод построения новых СИУ со сложной особенностью в ядре, эквивалентных характеристическому СИУ с ядром Коши, легко распространяется на случай, когда в качестве порождающего интегрального уравнения рассматривается линейное интегральное уравнение общего вида.

9.1. Общая схема

Рассмотрим пару интегральных уравнений: характеристическое СИУ с ядром Коши

$$A(x)\mu(x) + B(x) \int_{ab} \frac{\mu(t) dt}{t-x} = f(x), \quad x \in (ab), \quad (9.1)$$

и интегральное уравнение

$$a(x)\nu(x) + \int_{ab} \nu(\xi)k(\xi, x) d\xi = \mu(x), \quad (9.2)$$

ядро которого имеет не более чем слабые особенности, допуская при этом разрыв на диагонали. Подставим левую часть (9.2) в (9.1) вместо $\mu(\cdot)$ и получим

$$A(x)a(x)\nu(x) + \int_{ab} \nu(\xi)K(\xi, x) d\xi = f(x), \quad x \in (ab), \quad (9.3)$$

$$K(\xi, x) = A(x)k(\xi, x) + \frac{a(\xi)B(x)}{\xi-x} + B(x) \int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t-x}.$$

Интегральное уравнение (9.3) по построению такое, что его решение может быть получено в результате последовательного обращения двух других интегральных уравнений, а именно (9.1) и (9.2). Ядро уравнения (9.3) имеет одновременно сильную и слабую особенности, содержащиеся в разных слагаемых.

Ответ на вопрос, любое ли СИУ с сильной и слабой особенностями в ядре можно записать в виде (9.3), дает

Теорема 9.1. *Сингулярное интегральное уравнение*

$$c(x)\nu(x) + \int_{ab} \nu(\xi)K(\xi, x) d\xi = f(x), \quad x \in (ab), \quad (9.4)$$

эквивалентно уравнениям (9.1) и (9.2) тогда и только тогда, когда

1) $A(x)a(x) = c(x)$ и

2) функция $k(\xi, x)$ является решением уравнения

$$A(x)k(\xi, x) + B(x) \int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t - x} = K(\xi, x) - \frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x}, \quad x \in (a\xi) \cup (\xi b). \quad (9.5)$$

Замечание 1. Интегральное уравнение (9.5) представляет собой характеристическое СИУ с ядром Коши, заданное на кусочно-гладкой линии, состоящей из двух гладких разомкнутых дуг $a\xi$ и ξb . Переменная $\xi \in (ab)$ при этом рассматривается как параметр. Можно указывать в качестве линии, по которой ведется интегрирование, по-прежнему дугу ab . Но при этом нужно помнить, что интеграл по ab определен как сумма интегралов по $a\xi$ и ξb .

Замечание 2. Если задано СИУ вида (9.4), то коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $a(\cdot)$ выбираются следующим образом. Прежде всего, из ядра $K(\xi, x)$ выделяется слагаемое с полярной особенностью вида $a(\xi)B(x)/(\xi - x)$. Затем из условия 1) теоремы 9.1 определяется $A(\cdot)$.

Пусть ядро интегрального уравнения (9.2) имеет разрыв 1-го рода на диагонали прямоугольника $(ab) \times (ab)$ и $k(\xi, x) = \{k_1(\xi, x), \xi \in (ax); k_2(\xi, x), \xi \in (xb)\}$. Запишем уравнение (9.2) в виде

$$a(x)\nu(x) + \int_{ax} \nu(\xi)k_1(\xi, x) d\xi + \int_{xb} \nu(\xi)k_2(\xi, x) d\xi = \mu(x). \quad (9.6)$$

Подставим левую часть ((9.6) в характеристическое СИУ (9.1) и получим интегральное уравнение

$$A(x)[a(x)\nu(x) + \int_{ax} \nu(\xi)k_1(\xi, x) d\xi + \int_{xb} \nu(\xi)k_2(\xi, x) d\xi] + B(x) \int_{ab} \nu(\xi) \left[\frac{a(\xi)}{\xi - x} + \int_{\xi b} \frac{k_1(\xi, \tau) d\tau}{\tau - x} + \int_{a\xi} \frac{k_2(\xi, \tau) d\tau}{\tau - x} \right] d\xi = f(x). \quad (9.7)$$

Теорема 9.2. *Интегральное уравнение (9.7) эквивалентно характеристическому СИУ с ядром Коши (9.1), при этом соответствие между их решениями устанавливает равенство (9.6).*

Будем называть *обобщенным логарифмическим ядром*

$$L(\xi, x) = \int_{\xi b} \frac{k_1(\xi, \tau) d\tau}{\tau - x} + \int_{a\xi} \frac{k_2(\xi, \tau) d\tau}{\tau - x},$$

где функции $k_1(\xi, \tau)$ и $k_2(\xi, \tau)$ определены и удовлетворяют условию Гельдера (хотя бы по переменной τ) в треугольниках $(ab) \times (\xi b)$ и $(ab) \times (a\xi)$ соответственно, причем $k_1(\xi, \xi) \neq k_2(\xi, \xi)$.

9.2. Уравнение с логарифмическими особенностями в ядре

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{ab} \nu(\xi) K(\xi, x) d\xi = f(x), \quad x \in (a\xi) \cup (\xi b), \quad (9.8)$$

$$K(\xi, x) = a(\xi, x) \ln(x - a) + b(\xi, x) \ln(b - x) + c(\xi, x) + d(\xi, x) \ln |\xi - x|.$$

В этом случае условие (9.5) примет вид

$$\int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t - x} = K(\xi, x), \quad x \in (a\xi) \cup (\xi b). \quad (9.9)$$

Таким образом, вычисление ядра интегрального уравнения (9.2) сводится к обращению сингулярного интеграла с ядром Коши на кусочно-гладкой линии, состоящей из двух гладких разомкнутых дуг, имеющих общий узел ξ . Легко видеть, что этот узел особенный. Если каноническую функцию (2.31) построить в классе функций, ограниченных во всех узлах,

$$Z(x) = \left(\frac{x - \xi}{x - a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b - x}{x - \xi}\right)^{\frac{1}{2}} (x - a) \quad (x \in (\xi b)),$$

то индекс $\varkappa = -1$ и решение уравнения (9.9) существует тогда и только тогда, когда выполняется условие разрешимости

$$\int_{ab} \frac{K(\xi, \tau) d\tau}{Z(\tau)} = 0 \quad \forall \xi \in (ab). \quad (9.10)$$

Рассмотрим видоизменение задачи обращения сингулярного интеграла ([60], §§87, 88)

$$\int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t - x} = K(\xi, x) + e(\xi), \quad \xi \in ab, \quad x \in (a\xi) \cup (\xi b),$$

где $e(\xi)$ – дополнительная неизвестная функция. Но напомним, что переменная ξ в нашем случае является параметром. Поэтому дополнительное слагаемое в правой части (9.10) следует рассматривать как постоянную (полином нулевой степени). Заметим, что хотя линия $(a\xi) \cup (\xi b)$ состоит из двух гладких дуг, достаточно использовать только одну дополнительную постоянную, так как общий узел ξ – особенный.

Для определения функции $e(\xi)$ получим из условия разрешимости вида (9.10) уравнение

$$\int_{ab} \frac{K(\xi, \tau) d\tau}{Z(\tau)} + e(\xi) \int_{ab} \frac{d\tau}{Z(\tau)} = 0, \quad \xi \in (ab).$$

При этом

$$k(\xi, x) = -\frac{1}{\pi^2} Z(x) \int_{ab} \frac{K(\xi, \tau) + e(\xi)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - x},$$

а исходное уравнение (9.8) можно будет записать в виде

$$\int_{ab} \nu(\xi) \left[\int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t-x} - e(\xi) \right] d\xi = f(x), \quad x \in (ab),$$

или

$$\int_{ab} \left(\int_{ab} \nu(\xi) k(\xi, t) d\xi \right) \frac{dt}{t-x} = f(x) + N, \quad N = \int_{ab} \nu(\xi) e(\xi) d\xi.$$

Для новой искомой функции

$$\mu(t) = \int_{ab} \nu(\xi) k(\xi, t) d\xi$$

опять получили видоизмененную задачу обращения сингулярного интеграла. Тогда

$$\int_{ab} \nu(\xi) k(\xi, t) d\xi = -\frac{1}{\pi^2} Z(t) \int_{ab} \frac{f(\tau) + N}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t},$$

где постоянная N определяется из уравнения

$$\int_{ab} \frac{f(t) dt}{Z(t)} + N \int_{ab} \frac{dt}{Z(t)} = 0.$$

В общем случае индекс \varkappa характеристического СИУ (9.1) зависит от выбора коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Если коэффициенты таковы, что $\varkappa < 0$, то используем вместо уравнения (9.5) его видоизменение

$$A(x)k(\xi, x) + B(x) \int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t-x} = K(\xi, x) - \frac{a(\xi)B(x)}{\xi-x} + \sum_{k=1}^{-\varkappa} c_k(\xi)\omega_k(x), \quad x \in (a\xi) \cup (\xi b).$$

где $c_k(\cdot)$, $k = 1..-\varkappa$, – дополнительные неизвестные функции, а функции $\omega_k(\cdot)$, $k = 1..-\varkappa$, – некоторые заданные функции. Первые из них должны определиться из системы линейных алгебраических уравнений, представляющих собой условия разрешимости характеристического СИУ, а вторые должны быть подобраны так, чтобы определитель этой СЛАУ был отличен от нуля. В большинстве случаев можно взять $\omega_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1..-\varkappa$. Тогда вместо уравнения (9.1) будем иметь также видоизмененное (нагруженное) характеристическое уравнение

$$A(x)\mu(x) + B(x) \int_{ab} \frac{\mu(t) dt}{t-x} = f(x) + \sum_{k=1}^{-\varkappa} N_k \omega_k(x), \quad x \in (ab), \quad (9.12)$$

где неопределенные постоянные также определяются из условий разрешимости характеристического СИУ, но они должны быть связаны с искомой функцией равенствами

$$N_k = \int_{ab} \nu(\xi) c_k(\xi) d\xi, \quad k = 1..-\varkappa. \quad (9.13)$$

9.3. Уравнения с квазивырожденным логарифмическим ядром

Пусть ядра $k_1(\xi, x)$ и $k_2(\xi, x)$, порождающие обобщенное логарифмическое ядро, являются вырожденными,

$$k_1(\xi, x) = \sum_{j=1}^{n_0} b_j(x)c_j(\xi), \quad k_2(\xi, x) = \sum_{j=n_0+1}^n b_j(x)c_j(\xi). \quad (9.14)$$

Назовем *квазивырожденным логарифмическим ядром*

$$L(\xi, x) = \sum_{j=1}^{n_0} c_j(\xi) \int_{\xi b} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} + \sum_{j=n_0+1}^n c_j(\xi) \int_{a\xi} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x}.$$

Теорема 9.3. *Условия разрешимости СИУ*

$$\begin{aligned} & A(x)a(x)\nu(x) + A(x) \sum_{j=1}^{n_0} b_j(x) \int_{ax} \nu(\xi)c_j(\xi) d\xi + \\ & + A(x) \sum_{j=n_0+1}^n b_j(x) \int_{xb} \nu(\xi)c_j(\xi) d\xi + \int_{ab} \nu(\xi) \left[\frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x} + B(x) \sum_{j=1}^{n_0} c_j(\xi) \int_{\xi b} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} + \right. \\ & \left. + B(x) \sum_{j=n_0+1}^n c_j(\xi) \int_{a\xi} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} \right] d\xi = f(x), \quad x \in (ab), \end{aligned} \quad (9.15)$$

состоят из двух групп:

- 1) из условий разрешимости характеристического СИУ (1) и
- 2) из условий разрешимости интегрального уравнения Вольтерра (8.23) с вырожденным ядром.

Замечания. 1. Если вместо характеристического СИУ (9.1) использовать его видоизменение (9.12) то условия разрешимости первой группы заменяются на равенства (9.13), в которые должно быть подставлено решение $\nu(\cdot)$ уравнения Вольтерра с вырожденным ядром.

2. Условия разрешимости уравнения Вольтерра (8.23) сформулированы для различных случаев в теоремах главы 8.

При аппроксимации ядер с логарифмическими особенностями квазивырожденными логарифмическими ядрами возможны два подхода. Во-первых, вычислив ядра $k_1(\xi, x)$ и $k_2(\xi, x)$, можно аппроксимировать их суммами вида (9.14). В справочнике [9], с.175 отмечается, что при решении интегральных уравнений "недостаточное распространение метода вырожденных ядер ... объясняется, по-видимому, отсутствием эффективных способов приближения ядер вырожденными". Наиболее эффективен на практике комбинированный вариационно-итерационный метод, изложенный в [9], раздел 3.3.

Во-вторых, целесообразно аппроксимировать все ядро $K(\xi, x)$ исходного СИУ (9.4) выражением, совпадающим с ядром уравнения (9.15). Функции $b_j(\cdot), c_j(\cdot), j = 1..n$, могут быть найдены как решение экстремальной задачи

$$\begin{aligned} & \int_{ab} \left\{ \int_{a\xi} \left[K(\xi, x) - \frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x} - B(x) \sum_{j=1}^{n_0} c_j(\xi) \int_{\xi b} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} - \right. \right. \\ & - B(x) \sum_{j=n_0+1}^n c_j(\xi) \int_{a\xi} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} - A(x) \sum_{j=1}^{n_0} b_j(x) c_j(\xi) \left. \right]^2 dx + \\ & + \int_{\xi b} \left[K(\xi, x) - \frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x} - B(x) \sum_{j=1}^{n_0} c_j(\xi) \int_{\xi b} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} - \right. \\ & \left. - B(x) \sum_{j=n_0+1}^n c_j(\xi) \int_{a\xi} \frac{b_j(\tau) d\tau}{\tau - x} - A(x) \sum_{j=n_0+1}^n b_j(x) c_j(\xi) \right]^2 dx \left. \right\} d\xi \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (9.16)$$

9.4. Уравнения с квазивырожденным степенным ядром

Наиболее просто получить СИУ с ядром, содержащим слагаемые с полярной и степенной особенностями, если в качестве порождающего интегрального уравнения рассмотреть уравнение Вольтерра 2-го рода со степенной особенностью в ядре.

Вернемся к общей схеме построения СИУ, эквивалентных характеристическому уравнению с ядром Коши (раздел 9.1). Пусть на гладкой разомкнутой дуге

$$k(\xi, t) = \{\sin \pi \varphi(t) P_{a,\varphi,0}(t, \xi), \quad t \in a\xi; \quad 0, \quad t \in \xi b\}.$$

Из тождества (5.5) следует, что

$$A(x)k(\xi, x) + B(x) \int_{ab} \frac{k(\xi, t) dt}{t - x} = c(\xi, x)P_{a,\varphi,0}(x, \xi),$$

$$c(\xi, x) = \{\sin \pi \varphi(x) A(x) - \pi \cos \pi \varphi(x) B(x), \quad x \in a\xi; \quad -\pi B(x), \quad x \in \xi b\}.$$

Тогда порождающее интегральное уравнение имеет вид

$$a(x)\nu(x) + \sin \pi \varphi(x) \int_{xb} \nu(\xi) P_{a,\varphi,0}(x, \xi) d\xi = \mu(x) \quad (9.17)$$

или, в операторной форме,

$$a(\cdot)\nu(\cdot) + (J_{xb}^{a,\varphi,0}\nu)(\cdot) = \mu(\cdot),$$

а уравнение

$$A(x)a(x)\nu(x) + \int_{ab} \nu(\xi) \left[\frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x} + c(\xi, x)P_{a,\varphi,0}(x, \xi) \right] d\xi = f(x), \quad x \in (ab) \quad (9.18)$$

, будет эквивалентным характеристическому СИУ (9.1). Если же

$$k(\xi, t) = \{0, t \in a\xi; \sin \pi\varphi(t) P_{b,\varphi,0}(t, \xi), t \in \xi b\},$$

то получим с помощью тождества (5.7) вместо уравнений (9.17) и (9.18)

$$a(x)\nu(x) + \sin \pi\varphi(x) \int_{ax} \nu(\xi) P_{b,\varphi,0}(x, \xi) d\xi = \mu(x), \quad (9.19)$$

$$A(x)a(x)\nu(x) + \int_{ab} \nu(\xi) \left[\frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x} + d(\xi, x) P_{b,\varphi,0}(x, \xi) \right] d\xi = f(x), \quad x \in (ab), \quad (9.20)$$

где

$$d(\xi, x) = \{\pi B(x), x \in a\xi; \sin \pi\varphi(x) A(x) + \pi \cos \pi\varphi(x) B(x), x \in \xi b\}.$$

В более общем случае справедлива

Теорема 9.4. *Сингулярное интегральное уравнение*

$$A(x)a(x)\nu(x) + \int_{ab} \nu(\xi) \left[\frac{a(\xi)B(x)}{\xi - x} + \sum_{j=1}^{n_0} d_j(\xi, x) P_{b,\varphi_j,0}(x, \xi) + \right. \quad (9.21)$$

$$\left. + \sum_{j=n_0+1}^n d_j(\xi, x) P_{a,\varphi_j,0}(x, \xi) \right] d\xi = f(x), \quad x \in (ab),$$

где при $j = 0..n_0$

$$d_j(\xi, x) = \{[A(x) \sin \pi\varphi_j(x) + B(x) \pi \cos \pi\varphi_j(x)] c_j(\xi), \xi \in (ax); B(x) \pi c_j(\xi), \xi \in (xb)\}$$

и при $j = n_0 + 1..n$

$$d_j(\xi, x) = \{-B(x) \pi c_j(\xi), \xi \in (ax); [A(x) \sin \pi\varphi_j(x) - B(x) \pi \cos \pi\varphi_j(x)] c_j(\xi), \xi \in (xb)\}.$$

и характеристическое СИУ с ядром Коши (9.1) эквивалентны в том смысле, что их решения связаны равенством

$$a(x)\nu(x) + \sum_{j=1}^{n_0} \sin \pi\varphi_j(x) \int_{ax} \nu(\xi) c_j(\xi) P_{b,\varphi_j,0}(x, \xi) d\xi + \quad (9.22)$$

$$+ \sum_{j=n_0+1}^n \sin \pi\varphi_j(x) \int_{xb} \nu(\xi) c_j(\xi) P_{a,\varphi_j,0}(x, \xi) d\xi = \mu(x).$$

Доказательство. Рассмотрим вместо (9.22) равенство более общего вида

$$a(x)\nu(x) + \sum_{j=1}^{n_0} \sin \pi\varphi_j(x) b_j(x) \int_{ax} \nu(\xi) c_j(\xi) P_{b,\varphi_j,0}(x, \xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{j=n_0+1}^n \sin \pi \varphi_j(x) b_j(x) \int_{xb} \nu(\xi) c_j(\xi) P_{a, \varphi_j, 0}(x, \xi) d\xi = \mu(x)$$

и подставим его левую часть в уравнение (9.1) вместо функции $\mu(\cdot)$. Изменим порядок интегрирования и получим интеграл от функции $\nu(\cdot)$ с ядром

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_0} c_j(\xi) \int_{\xi b} \sin \pi \varphi_j(t) b_j(t) P_{b, \varphi_j, 0}(t, \xi) \frac{dt}{t-x} + \\ & + \sum_{j=n_0+1}^n c_j(\xi) \int_{a\xi} \sin \pi \varphi_j(t) b_j(t) P_{a, \varphi_j, 0}(t, \xi) \frac{dt}{t-x}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

В частном случае, когда $b_j(\cdot) \equiv 1$, $j = 1..n$, интегралы в (9.23) вычисляются по формулам (5.5) и (5.7).

Замечание. Ядро со степенными особенностями (9.23) и отдельные его слагаемые представляют особый интерес. Напомним, что в главе 3 логарифмические ядра были определены как интегралы типа Коши с переменными пределами, а в главе 5 обобщенные степенные ядра были построены как показательные функции от логарифмических ядер. Из тождеств (5.5) и (5.7) следует, что обобщенные степенные ядра могут быть также записаны как интегралы типа Коши с переменным пределом, плотность которых имеет степенную особенность. Ядра вида (9.23) можно рассматривать как обобщенные степенные ядра *второго поколения*. Действительно, в (9.23) использованы интегралы типа Коши с переменными пределами, плотности которых имеют степенные особенности в форме обобщенных степенных ядер. Присутствие функций $b_j(\cdot)$ расширяет классы функций со степенными особенностями, которые можно представить в виде (9.23).

Назовем ядро вида (9.23) или, как частный случай, функцию

$$P(\xi, x) = \sum_{j=1}^{n_0} d_j(\xi, x) P_{b, \varphi_j, 0}(x, \xi) + \sum_{j=n_0+1}^n d_j(\xi, x) P_{a, \varphi_j, 0}(x, \xi)$$

квазивырожденным степенным ядром. При аппроксимации квазивырожденным степенным ядром заданной функции $K(\xi, x)$ со степенными особенностями целесообразно (по аналогии с разделом 9.3) выбирать не только функции $c_j(\cdot)$, но и в общем случае плотности интегралов $\varphi_j(\cdot)$ из условия (для вещественнозначных функций)

$$\int_{ab} \int_{ab} [K(\xi, x) - P(\xi, x)]^2 d\xi dx \rightarrow \min.$$

На подробностях мы не останавливаемся.

В случае, когда функции $\varphi_j(\cdot)$ постоянны, интеграл с квазивырожденным степенным ядром представляет собой сумму интегралов дробного интегрирования разных

порядков. Например, уравнение (9.18) при $\varphi(\cdot) \equiv \lambda$ на отрезке вещественной оси имеет вид

$$A(x)a(x)\nu(x) + B(x) \int_a^b \frac{a(\xi)\nu(\xi) d\xi}{\xi - x} - \pi B(x)(x - a)^{\lambda-1} \int_a^x \frac{\nu(\xi) d\xi}{(x - \xi)^\lambda} + \\ + (x - a)^{\lambda-1} [\sin \pi \lambda A(x) - \pi \cos \pi \lambda B(x)] \int_x^b \frac{\nu(\xi) d\xi}{(\xi - x)^\lambda} = f(x),$$

а соответствующее ему уравнение (9.17) –

$$a(x)\nu(x) + \sin \pi \lambda (x - a)^{\lambda-1} \int_x^b \frac{\nu(\xi) d\xi}{(\xi - x)^\lambda} = \mu(x). \quad (9.24)$$

Если уравнение (9.24) продифференцировать, то получим линейное дифференциальное уравнение дробного порядка [130], §42.

9.5. Дополнительные замечания и литературные указания

В работах Ф.Д. Гахова [17] и К.Д. Сакалюка [120] (см. также [19], §55) методом аналитического продолжения было найдено в замкнутой форме решение СИУ, в ядре которого содержатся одновременно сильная (полярная, типа ядра Коши) и логарифмическая особенности. А.А. Килбас [40] исследовал более общие уравнения и построил их решения, при этом был использован метод интегральных тождеств. Укажем также работы Л.А. Галина, А.А. Шматковой [16], [151], [152] и С.Т. Грибняка, Г.Я. Попова [22], в которых в связи с приложениями в теории упругости рассмотрены СИУ, ядра которых имеют полярную и логарифмическую особенности.

Ясно, что всегда можно сконструировать новый сингулярный оператор в виде композиции некоторого обратимого (слева) оператора и характеристического сингулярного оператора. При этом ядро нового оператора может иметь достаточно сложную структуру.

Обратимый оператор, используемый в качестве *порождающего* новое СИУ, в общем случае может быть задан и *неявно*. Например, оператор, действующий из множества функций M в множество функций N , может быть задан равенством $N\nu = M\mu$, где M и N – операторы, действующие из M и N в некоторое третье множество. Если операторы M и N имеют левые обратные, то из (1) следует, что $\nu = N^{-1}M\mu$ и $\mu = M^{-1}N\nu$. Последние два равенства и определяют пару обращающих друг друга операторов. В главе 7 был рассмотрен случай, когда M и N – дифференциальные операторы (с дополнительными равенствами).

Уравнения Вольтерра с вырожденным ядром встречаются в литературе достаточно редко (в отличие от уравнений Фредгольма). В справочнике [9] рассмотрены

системы дифференциальных уравнений, которые вместе с начальными условиями эквивалентны интегральным уравнениям Вольтерра 1-го или 2-го рода. В работе Ю. Чера [155] найдена резольвента для векторного уравнения Вольтерра 2-го рода с вырожденным матричным ядром. Исследование уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами (глава 8) было проведено автором совместно с Р.Р. Тагировым [85].

Как известно, интегральные уравнения 1-го рода со слабой особенностью в ядре не являются нормально разрешимыми в обычном смысле. Например, интегральный оператор

$$(M\varphi)(x) := \int_a^b \frac{c(t, x)}{|t - x|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad \varphi(\cdot) \in L_p(a, b),$$

не является оператором Нетера, действующим из некоторого пространства в то же пространство (см. [130], §31). С.Г. Самко [124] предложил исправить ситуацию следующим образом: если оператор M , действующий из X в X , не является нетеровым, то нужно построить такое пространство $Y \subset X$, чтобы оператор M был нетеровым как оператор, действующий из X в Y . В [124] было выбрано $X = L_p(\rho)$, а в качестве пространства Y рассматривалось множество функций, представимых в виде интеграла дробного порядка. Такая постановка нормальной разрешимости оператора M основана прежде всего на точном описании образа $M(X)$ пространства X .

В [125], [126] построена теория Нетера обобщенного уравнения Абеля на прямой, в работах С.Г. Самко и Б.С. Рубина исследован на нетеровость оператор типа Абеля на конечном отрезке (результаты изложены также в [130], §31, п. 3⁰, там же даны подробные указания на литературу). В работах [106], [108] показано, что при исследовании дробных интегралов и, следовательно, обобщенного уравнения Абеля, удобно использовать классы функций, удовлетворяющих условию Гельдера с весом.

Операторы со степенно-логарифмическим ядром вида

$$\int_a^b \frac{c(t, x)}{|t - x|^{1-\alpha}} \ln^m \frac{\gamma}{|t - x|} \varphi(t) dt, \quad \varphi(\cdot) \in L_p(a, b),$$

и интегральные операторы более общего вида исследовали Б.С. Рубин [110], [111] и А.А. Килбас [41]–[44].

В дальнейшем при изучении интегральных уравнений 1-го рода проводились исследования систем таких уравнений и многомерных интегральных уравнений со слабой особенностью в ядре, при этом были использованы некоторые результаты теории одномерных уравнений. Этим занимались С.Г. Самко, Б.С. Рубин, А.А. Килбас, И.Л. Васильев, И.Н. Забелло, В.А. Ногин, А.В. Скориков, С.И. Василец и другие авторы.

Глава 10.

Алгоритмы численного решения СИУ с ядром Коши

Даже в тех немногих случаях, когда СИУ, в том числе со сложной особенностью в ядре, может быть решено в замкнутой форме, вычисление значений его решения остается серьезной проблемой в связи с трудностями, возникающими при вычислении сингулярных интегралов. В работе [24], например, дан отрицательный ответ на вопрос, "достаточен ли разработанный аппарат приближенного вычисления с.и. для доведения до числа решений с.и.у., представленных в замкнутой форме".

В монографиях Б.Г. Габдулхаева [12], [13], В.В. Иванова [31], С.М. Белоцерковского, И.К. Лифанова [6], И.К. Лифанова [51], С.Г. Михлина и З. Пресдорфа [157], а также в обзорных работах [30] и [11] изложены основные методы численного решения СИУ, построено их теоретическое обоснование и дан обзор многочисленных публикаций в этом направлении.

В следующих двух главах рассматриваются квадратурные методы численного решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений *на разомкнутых дугах*. Известно (см., например, [150]), что в случае, когда линией интегрирования является разомкнутый контур, непосредственное применение прямых методов численного решения СИУ является невозможным или малоэффективным.

В главе 10 рассматриваются алгоритмы численного решения СИУ с ядром Коши в гильбертовых классах функций, основанные на *глобальном выделении особенностей* в левой и правой частях уравнения. При этом значения искомой функции на концах отрезка или находятся из асимптотических формул, или к системе уравнений, приближающих точное уравнение, добавляются асимптотические равенства, содержащие эти значения. В тех случаях, когда решение СИУ с ядром Коши имеет особенности на концах разомкнутой дуги, предлагается *выделять из искомой функции слагаемые с особенностями* степенно-логарифмического, степенного или логарифмического типа. Тогда часть искомой функции, не содержащая особенностей, будет решением СИУ с теми же коэффициентами, но с другой правой частью. В конце главы приведены примеры и описаны некоторые эффекты, обнаруженные при вычислительных экспериментах.

10.1. Решение без особенностей

Рассмотрим алгоритмы численного решения полного СИУ с ядром Коши на гладкой разомкнутой дуге

$$A(t)\mu(t) + B(t) \int_{ab} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{ab} \mu(\tau)k(\tau, t) d\tau = f(t), \quad t \in (ab), \quad (10.1)$$

основанные на сравнении поведения его правой и левой частей вблизи концов дуги.

Теорема 10.1. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in C(ab), k(\cdot, \cdot) \in C(ab \times ab)$. Если $\mu(\cdot) \in H_\lambda(ab)$ – решение уравнения (10.1), то существуют конечные пределы

$$l_a = \lim_{t \rightarrow a} \left[f(t) / \ln \frac{b-t}{t-a} \right], \quad l_b = \lim_{t \rightarrow b} \left[f(t) / \ln \frac{b-t}{t-a} \right] \quad (10.2)$$

и

$$B(a)\mu(a) = l_a, \quad B(b)\mu(b) = l_b. \quad (10.3)$$

Если $B(a) = 0$, то $l_a = 0$ и

$$A(a)\mu(a) + \int_{ab} \mu(\tau)k(\tau, a) d\tau = f(a). \quad (10.4)$$

Если $B(b) = 0$, то $l_b = 0$ и

$$A(b)\mu(b) + \int_{ab} \mu(\tau)k(\tau, b) d\tau = f(b). \quad (10.5)$$

Доказательство. Пусть $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (10.1). Поделим обе части (10.1) на $\ln((b-t)/(t-a))$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow a$. В силу теоремы 2.3 существует конечный предел левой части равенства. Тогда существует конечный предел и правой части, при этом $B(a)\mu(a) = l_a$. Если же в левой и правой частях равенства (10.1) нет логарифмической особенности в точке a , то перейдем к пределу при $t \rightarrow a$ и получим (10.4).

Рассуждения для точки b аналогичны •

Следствие 10.1. При $B(a) = 0, l_a \neq 0$ или (и) $B(b) = 0, l_b \neq 0$ уравнение (10.1) не может иметь решений класса $H_\lambda(ab)$.

Рассмотрим квадратурный метод численного решения СИУ с ядром Коши на отрезке вещественной оси

$$A(x)\mu(x) + B(x) \int_a^b \frac{\mu(t) dt}{t-x} + \int_a^b \mu(t)k(t, x) dt = f(x), \quad a < x < b, \quad (10.6)$$

при сделанных предположениях. Отметим, что СИУ на гладкой дуге всегда приводится к уравнению, заданному на отрезке вещественной оси. Пусть $a = t_0 < t_1 <$

... < $t_n < t_{n+1} = b$ – система узлов на отрезке $[a, b]$. Уравнению (10.6) поставим в соответствие систему, состоящую из уравнений

$$A(t_k)\mu(t_k) + B(t_k)\mu(t_k) \ln \frac{b-t_k}{t_k-a} + B(t_k) \int_a^b \frac{\mu(t) - \mu(t_k)}{t-t_k} dt + \int_a^b \mu(t)k(t, t_k) dt = f(t_k), \quad k = 1..n \quad (10.7)$$

и уравнений (10.3) или (10.4), (10.5) в зависимости от того, какие значения принимает в точках a и b коэффициент $B(\cdot)$ уравнения. Заменим интегралы в (10.7) и, если нужно, в (10.4), (10.5) квадратурными суммами. Пренебрегая погрешностями квадратурных формул, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно значений $\mu_j = \mu(t_j)$, $j = 0..n+1$. Заметим, что в случае, когда используются уравнения (10.3), значения $\mu_a = \mu(a)$ и (или) $\mu_b = \mu(b)$ определяются точно. Поэтому слагаемые со значениями μ_a и (или) μ_b удобно перенести в правые части линейных уравнений.

Дискретные аналоги уравнений (10.7), (10.4) и (10.5) могут быть записаны, например, в виде

$$A(t_k)\mu_k + B(t_k)\mu_k \ln \frac{b-t_k}{t_k-a} + B(t_k) \left[\left(\sum_{j=0}^{k-2} + \sum_{j=k+1}^n \right) \left(\frac{\mu_j - \mu_k}{t_j - t_k} + \frac{\mu_{j+1} - \mu_k}{t_{j+1} - t_k} \right) \frac{t_{j+1} - t_j}{2} + \left(\frac{\mu_{k-1} - \mu_k}{t_{k-1} - t_k} + \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{t_{k+1} - t_k} \right) \frac{t_{k+1} - t_{k-1}}{2} \right] + \sum_{j=0}^n \left(\mu_j k(t_j, t_k) + \mu_{j+1} k(t_{j+1}, t_k) \right) \frac{t_{j+1} - t_j}{2} = f(t_k), \quad k = 1..n, \quad (10.8)$$

$$A(a)\mu_a + \sum_{j=0}^n \left(\mu_j k(t_j, a) + \mu_{j+1} k(t_{j+1}, a) \right) \frac{t_{j+1} - t_j}{2} = f(a), \quad (10.9)$$

$$A(b)\mu_b + \sum_{j=0}^n \left(\mu_j k(t_j, b) + \mu_{j+1} k(t_{j+1}, b) \right) \frac{t_{j+1} - t_j}{2} = f(b). \quad (10.10)$$

Здесь использована формула трапеций, причем при аппроксимации интеграла

$$\int_a^b \frac{\mu(t) - \mu(t_k)}{t-t_k} dt$$

узел t_k не используется.

Замечание. Регулярная часть ядра СИУ (10.6) $k(\cdot, \cdot)$ может иметь особенности интегрируемого порядка в точках a, b или при $t = x$. Утверждение теоремы 10.1 при этом сохраняется, а при аппроксимации интеграла с ядром $k(\cdot, \cdot)$ нужно использовать специальные квадратурные формулы. К этому мы вернемся в главе 11.

10.2. Решение имеет особенности

Пусть теперь искомая функция $\mu(\cdot)$ имеет в точках a и (или) b особенности логарифмического, степенного или степенно-логарифмического типа.

Теорема 10.2. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in C(ab)$, $k(\cdot, \cdot) \in C(ab \times ab)$, $\mu(\cdot) \in H_\lambda^l(ab)$, то есть

$$\mu(t) = \mu_l(t) \ln \frac{b-t}{t-a} + \mu_0(t), \quad \mu_l(\cdot), \mu_0(\cdot) \in H_\lambda(ab),$$

причем $|\mu_l(a)| + |\mu_l(b)| \neq 0$. Если $\mu(\cdot)$ – решение уравнения (10.1), то существуют конечные пределы

$$l_{a,2} = \lim_{t \rightarrow a} \left[f(x) \left/ \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 \right], \quad l_{b,2} = \lim_{t \rightarrow b} \left[f(x) \left/ \left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 \right] \quad (10.11)$$

и

$$\frac{1}{2}B(a)\mu_l(a) = l_{a,2}, \quad \frac{1}{2}B(b)\mu_l(b) = l_{b,2}. \quad (10.12)$$

При этом

$$\mu(t) = \tilde{\mu}_l(t) \ln \frac{b-t}{t-a} + \hat{\mu}(t), \quad (10.13)$$

где

$$\tilde{\mu}_l(t) = \mu_l(a) \frac{b-t}{b-a} + \mu_l(b) \frac{t-a}{b-a},$$

и функция $\hat{\mu}(\cdot)$ – решение СИУ (10.1) с правой частью

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) = f(t) - A(t)\tilde{\mu}_l(t) \ln \frac{b-t}{t-a} - B(t)\tilde{\mu}_l(t) \frac{1}{2} \left[\left(\ln \frac{b-t}{t-a} \right)^2 - \pi^2 \right] - \\ - B(t) \frac{\mu_l(b) - \mu_l(a)}{b-a} \int_{ab} \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} d\tau - \int_{ab} \tilde{\mu}(\tau) \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} k(\tau, t) d\tau. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Доказательство. Подставим функцию (10.13) в уравнение (10.1) :

$$\begin{aligned} A(t)\tilde{\mu}_l(t) \ln \frac{b-t}{t-a} + A(t)\hat{\mu}(t) + B(t) \int_{ab} \tilde{\mu}(\tau) \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} \frac{d\tau}{\tau-t} + \\ + B(t) \int_{ab} \frac{\hat{\mu}(\tau) d\tau}{\tau-t} + \int_{ab} \tilde{\mu}(\tau) \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} k(\tau, t) d\tau + \int_{ab} \hat{\mu}(\tau) k(\tau, t) d\tau = f(t). \end{aligned}$$

Поделим обе части этого равенства на $(\ln((b-t)/(t-a)))^2$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow a$ и при $t \rightarrow b$. Из теоремы 2.4 следует, что пределы (10.11) существуют и выполняются равенства (10.12). Чтобы закончить доказательство, достаточно перенести слагаемые, содержащие $\tilde{\mu}(\cdot)$ в правую часть •

Следствие 10.2. При $B(a) = 0$, $l_{a,2} \neq 0$ или (и) $B(b) = 0$, $l_{b,2} \neq 0$ уравнение (10.1) не может иметь решений класса $H_\lambda^l(ab)$.

Замечания.

1. Аналогичное утверждение имеет место в случае, когда $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{l,m}(ab)$,
 $m = 2, 3, \dots$

2. Если $B(a) = 0$, то $l_{a,2} = 0$, существует конечный предел l_a (10.2) и $A(a)\mu_l(a) + B(a)\mu_0(a) = l_a$. Если $B(b) = 0$, то $l_{b,2} = 0$, существует конечный предел l_b (10.2) и $A(b)\mu_l(b) + B(b)\mu_0(b) = l_b$. Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу при $t \rightarrow a$ или $t \rightarrow b$ в уравнении (10.1), поделенном на $\ln((b-t)/(t-a))$.

Теорема 10.3. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in C(ab)$, $k(\cdot, \cdot) \in C(ab \times ab)$.

A. Если

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\lambda_a} \mu_0(t), \quad \lambda_a \neq 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_a < 1, \\ \mu_0(\cdot) &\in H_\lambda(ab), \quad \mu_0(a) \neq 0, \end{aligned} \quad (10.15)$$

– решение уравнения (10.1), то существует конечный предел

$$p_a = \lim_{t \rightarrow a} \left[f(t) / \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\lambda_a} \right], \quad (10.16)$$

при этом

$$[A(a) + \pi \operatorname{ctg} \lambda_a \pi B(a)] \mu_0(a) = p_a \quad (10.17)$$

и

$$\mu(t) = \mu_0(a) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\lambda_a} + \hat{\mu}(t), \quad (10.18)$$

где функция $\hat{\mu}(\cdot)$ – решение СИУ (10.1) с правой частью

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= f(t) - A(t)\mu_0(a) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\lambda_a} - \\ &- B(t)\mu_0(a) \frac{\pi}{\sin \lambda_a \pi} \left[\cos \lambda_a \pi \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\lambda_a} - 1 \right] - \mu_0(a) \int_{ab} \left(\frac{b-\tau}{\tau-a}\right)^{\lambda_a} k(\tau, t) d\tau. \end{aligned} \quad (10.19)$$

B. Если

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\lambda_b} \mu_0(t), \quad \lambda_b \neq 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_b < 1, \\ \mu_0(\cdot) &\in H_\lambda(ab), \quad \mu_0(b) \neq 0, \end{aligned} \quad (10.20)$$

– решение уравнения (10.1), то существует конечный предел

$$p_b = \lim_{t \rightarrow b} \left[f(t) / \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\lambda_b} \right], \quad (10.21)$$

при этом

$$[A(b) - \pi \operatorname{ctg} \lambda_b \pi B(b)] \mu_0(b) = p_b \quad (10.22)$$

и

$$\mu(t) = \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\lambda_b} \mu_0(b) + \hat{\mu}(t), \quad (10.23)$$

где функция $\hat{\mu}(\cdot)$ – решение СИУ (10.1) с правой частью

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) = & f(t) - A(t)\mu_0(b)\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\lambda_b} - \\ & - B(t)\mu_0(b)\frac{\pi}{\sin \lambda_b\pi}\left[1 - \cos \lambda_b\pi\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\lambda_b}\right] - \mu_0(b)\int_{ab}\left(\frac{\tau-a}{b-\tau}\right)^{\lambda_b}k(\tau,t)d\tau. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Доказательство. Чтобы получить первое утверждение, нужно подставить функцию (10.18) в уравнение (10.1),

$$\begin{aligned} & A(t)\mu_0(a)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\lambda_a} + A(t)\hat{\mu}(t) + B(t)\mu_0(a)\int_{ab}\left(\frac{b-\tau}{\tau-a}\right)^{\lambda_a}\frac{d\tau}{\tau-t} + \\ & + B(t)\int_{ab}\frac{\hat{\mu}(\tau)d\tau}{\tau-t} + \mu_0(a)\int_{ab}\left(\frac{b-\tau}{\tau-a}\right)^{\lambda_a}k(\tau,t)d\tau + \int_{ab}\hat{\mu}(\tau)k(\tau,t)d\tau = f(t), \end{aligned}$$

поделить обе его части на $((b-t)/(t-a))^{\lambda_a}$, применить формулу (2.8) и перейти к пределу при $t \rightarrow a$.

Второе утверждение доказывается аналогично •

Следствие 10.3. При $A(a) + \pi ctg\lambda_a\pi B(a) = 0$, $p_a \neq 0$ или при $A(b) - \pi ctg\lambda_b\pi B(b) = 0$, $p_b \neq 0$ уравнение (10.1) не может иметь решений вида (10.15) или (10.20).

Следствие 10.4. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in C([a, b])$, $k(\cdot, \cdot) \in C([a, b] \times [a, b])$. Если

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(x)}{(x-a)^{\lambda_a}(b-x)^{\lambda_b}}, \quad \lambda_a \neq 0, \quad \lambda_b \neq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \lambda_a, \operatorname{Re} \lambda_b < 1, \quad (10.25)$$

$$\mu_0(\cdot) \in H_\lambda([a, b]), \quad \mu_0(a) \neq 0, \quad \mu_0(b) \neq 0,$$

– решение уравнения (10.6), то

$$[A(a) + \pi ctg\lambda_a\pi B(a)]\mu_0(a) = (b-a)^{\lambda_a+\lambda_b} \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \left/ \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\lambda_a} \right], \quad (10.26)$$

$$[A(b) - \pi ctg\lambda_b\pi B(b)]\mu_0(b) = (b-a)^{\lambda_a+\lambda_b} \lim_{x \rightarrow b} \left[f(x) \left/ \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{\lambda_b} \right], \quad (10.26)$$

и

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(a)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\lambda_a} + \frac{\mu_0(b)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{\lambda_b} + \hat{\mu}(x), \quad (10.28)$$

где функция $\hat{\mu}(\cdot)$ – решение СИУ (10.6) с правой частью

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) = & f(x) - \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\lambda_a} \frac{\mu_0(a)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} [A(x) + \pi ctg\lambda_a\pi B(x)] - \\ & - \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{\lambda_b} \frac{\mu_0(b)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} [A(x) - \pi ctg\lambda_b\pi B(x)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi B(x)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} \left[\frac{\mu_0(a)}{\sin \lambda_a \pi} - \frac{\mu_0(b)}{\sin \lambda_b \pi} \right] - \\
& - \int_a^b \left[\frac{\mu_0(a)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} + \frac{\mu_0(b)}{(b-a)^{\lambda_a+\lambda_b}} \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{\lambda_b} \right] k(t, x) dt.
\end{aligned} \tag{10.29}$$

Теорема 10.4. Пусть $A(\cdot), B(\cdot) \in C(ab)$, $k(\cdot, \cdot) \in C(ab \times ab)$. Если

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} \ln \frac{b-t}{t-a} \mu_0(t), \quad \lambda_a \neq 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_a < 1, \\
\mu_0(\cdot) &\in H_\lambda(ab), \quad \mu_0(a) \neq 0,
\end{aligned}$$

– решение уравнения (10.1), то существует конечный предел

$$pl_a = \lim_{t \rightarrow a} \left[f(t) \left/ \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} \ln \frac{b-t}{t-a} \right]. \tag{10.20}$$

При этом

$$[A(a) + \pi ctg \lambda_a \pi B(a)] \mu_0(a) = pl_a \tag{10.31}$$

и

$$\mu(t) = \mu_0(a) \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} \ln \frac{b-t}{t-a} + \hat{\mu}(t), \tag{10.32}$$

где функция $\hat{\mu}(\cdot)$ – решение СИУ (1) с правой частью

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t) &= f(t) - A(t) \mu_0(a) \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} \ln \frac{b-t}{t-a} - \\
& - B(t) \mu_0(a) \frac{\pi}{\sin \lambda_a \pi} \left[\cos \lambda_a \pi \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} \ln \frac{b-t}{t-a} - \frac{\pi}{\sin \lambda_a \pi} \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\lambda_a} + \pi ctg \lambda_a \pi \right] \\
& - \mu_0(a) \int_{ab} \left(\frac{b-\tau}{\tau-a} \right)^{\lambda_a} \ln \frac{b-\tau}{\tau-a} k(\tau, t) d\tau.
\end{aligned} \tag{10.33}$$

Аналогичное утверждение имеет место, если вместо точки a взять точку b .

Доказательство проводится точно так же, как и в случае теоремы 10.3, только вместо равенства (2.8) используется равенство (2.10) •

Следствие 10.5. При $A(a) + \pi ctg \lambda_a \pi B(a) = 0$, $pl_a \neq 0$ или при $A(b) - \pi ctg \lambda_b \pi B(b) = 0$, $pl_b \neq 0$ уравнение (10.1) не может иметь решений со степенно-логарифмической особенностью.

10.3. Общий алгоритм

Рассмотрим общий алгоритм численного решения СИУ с ядром Коши на дуге ab в классе H^* , основанный на глобальном выделении особенностей в левой и правой частях уравнения.

Пусть задано СИУ (10.1).

Шаг 1. Ищем решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda(ab)$. Пробуем вычислить конечные пределы (10.2). Если хотя бы одно из значений l_a, l_b не определяется, то переходим к шагу 4.

Шаг 2. Если $B(a) = 0$, $l_a \neq 0$ или $B(b) = 0$, $l_b \neq 0$, то уравнение (10.1) не может иметь решения.

Шаг 3. Составим из уравнений (10.8), (10.9) и (10.10) СЛАУ с неизвестными μ_0, \dots, μ_{n+1} , решив которую получим приближенные значения искомой функции $\mu(\cdot)$ в узлах t_0, \dots, t_{n+1} . Если $B(a) \neq 0$, то $\mu_0 = l_a/B(a)$ и уравнение (10.9) не включается в СЛАУ. Если $B(b) \neq 0$, то $\mu_{n+1} = l_b/B(b)$ и уравнение (10.10) не включается в СЛАУ.

Шаг 4. Ищем решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda^l(ab)$. Пробуем вычислить конечные пределы (10.11). Если хотя бы одно из значений $l_{a,2}, l_{b,2}$ не определяется, то переходим к шагу 7.

Шаг 5. Если $B(a) = 0$, $l_{a,2} \neq 0$ или $B(b) = 0$, $l_{b,2} \neq 0$, то уравнение (10.1) не может иметь решения.

Если $B(a) = 0$, $l_{a,2} = 0$ или $B(b) = 0$, $l_{b,2} = 0$, то численное решение СИУ (10.1) не может быть найдено. Требуется дополнительное исследование.

Шаг 6. Если $B(a) \neq 0$ и $B(b) \neq 0$, то вычисляем значения $\mu_l(a), \mu_l(b)$ из уравнений (10.12), запоминаем эти значения и заменяем правую часть уравнения (10.1) на функцию (10.14). Возвращаемся к шагу 1.

Шаг 7. Ищем решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda^p(ab)$. Пробуем найти такое число $\lambda_a \neq 0$, $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_a < 1$, что существует конечный предел $p_a \neq 0$ (10.16). Если λ_a не определяется, то переходим к шагу 11.

Шаг 8. Если

$$A(a) + \pi B(a) \operatorname{ctg} \lambda_a \pi = 0, \quad (10.34)$$

то уравнение (10.1) не может иметь решений.

Если существует такое $\lambda_a \neq 0$, $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_a < 1$, что условие (10.34) выполнено и при этом существует предел $p_a = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Шаг 9. Вычисляем значение $\mu_0(a)$ из уравнения (10.17), запоминаем его и заменяем правую часть уравнения (10.1) на функцию (10.19).

Шаг 10. Повторяем шаги 7–9 до тех пор, пока в правой части уравнения и в его решении не будут выделены все слагаемые, содержащие особенности степенного типа в точке a .

Шаги 11–14. Для точки b выполняем аналогичные действия до тех пор, пока не будут выделены все слагаемые в правой части уравнения и в его решении, содержащие особенности степенного типа в точке b . Вместо условия (10.34) здесь проверяется

условие

$$A(b) - \pi B(b) \operatorname{ctg} \lambda_b \pi = 0. \quad (10.35)$$

Возвращаемся к шагу 4.

Шаг 15. Ищем решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda^{pl}(ab)$. Пробуем найти такое число $\lambda_a \neq 0$, $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_a < 1$, что существует конечный предел $pl_a \neq 0$ (10.30). Если λ_a не определяется, то переходим к шагу 19.

Шаг 16. Если выполняется равенство (10.34), то уравнение (10.1) не может иметь решений.

Если существует такое $\lambda_a \neq 0$, $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_a < 1$, что условие (10.34) выполнено и при этом существует предел $pl_a = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Шаг 17. Вычисляем значение $\mu_0(a)$ из уравнения (10.31), запоминаем его и заменяем правую часть уравнения (10.1) на функцию (10.33).

Шаг 18. Повторяем шаги 15–17 до тех пор, пока в правой части уравнения и в его решении не будут выделены все слагаемые, содержащие особенности степенно-логарифмического типа в точке a .

Шаги 19–22. Для точки b выполняем аналогичные действия до тех пор, пока не будут выделены все слагаемые в правой части уравнения и в его решении, содержащие особенности степенно-логарифмического типа в точке b . Возвращаемся к шагу 7.

Замечания.

1. В алгоритме предусмотрены ситуации, когда обнаруживается, что исходное интегральное уравнение не может иметь решений. Это дает возможность проводить вычислительный эксперимент раньше, чем будет исследован вопрос о существовании и единственности решения СИУ. В тех случаях, когда доказано, что решение уравнения (10.1) существует, но на одном из шагов алгоритма этот факт не подтверждается, рекомендуется искать ошибки при вычислении значений пределов.

2. В алгоритме предусмотрены ситуации, когда требуется дополнительное исследование. Это значит, что или правая часть СИУ имеет особенности, не предусмотренные выше, например, логарифмические функции содержатся в дробных степенях, или решение уравнения (10.1) не единственно.

3. Если правая часть $f(\cdot)$ СИУ задана аналитически, то, как правило, значения пределов на соответствующих шагах алгоритма могут быть найдены точно с помощью асимптотических формул. Если же функция $f(\cdot)$ задана таблично, или, что предпочтительнее, имеется подпрограмма, вычисляющая ее значения при любых значениях аргумента, достаточно близких к концам дуги, то для приближенного вычисления пределов можно использовать методы типа метода наименьших квадратов. Такой подход удобен при разработке интеллектуальных программных комплексов

для численного решения СИУ, ориентированных на пользователей, не владеющих асимптотическими методами или не желающих ими пользоваться. Отметим, что при этом необходимо провести специальное исследование алгоритма на устойчивость по отношению к возмущениям значений коэффициентов в слагаемых, содержащих особенности.

4. Допустим, что правая часть уравнения (10.1) содержит ряды из функций с особенностями степенно-логарифмического, степенного или логарифмического типа. В этом случае в процессе выделения особенностей при аналитическом вычислении асимптотических коэффициентов из правой части вычитаются также бесконечные суммы функций с особенностями. Вряд ли следует ожидать, что такая ситуация возникнет при решении уравнений, правая часть которых задана приближенно. При численном вычислении коэффициентов можно ограничиться конечным числом шагов.

5. Легко видеть, что выражение правой части $f(\cdot)$, полученное после полного выделения всех слагаемых с особенностями различных типов, не зависит от того, с какого конца дуги начинался анализ поведения левой и правой частей СИУ.

10.4. Примеры

Рассмотрим несколько СИУ на отрезке вещественной оси.

Пример 1.

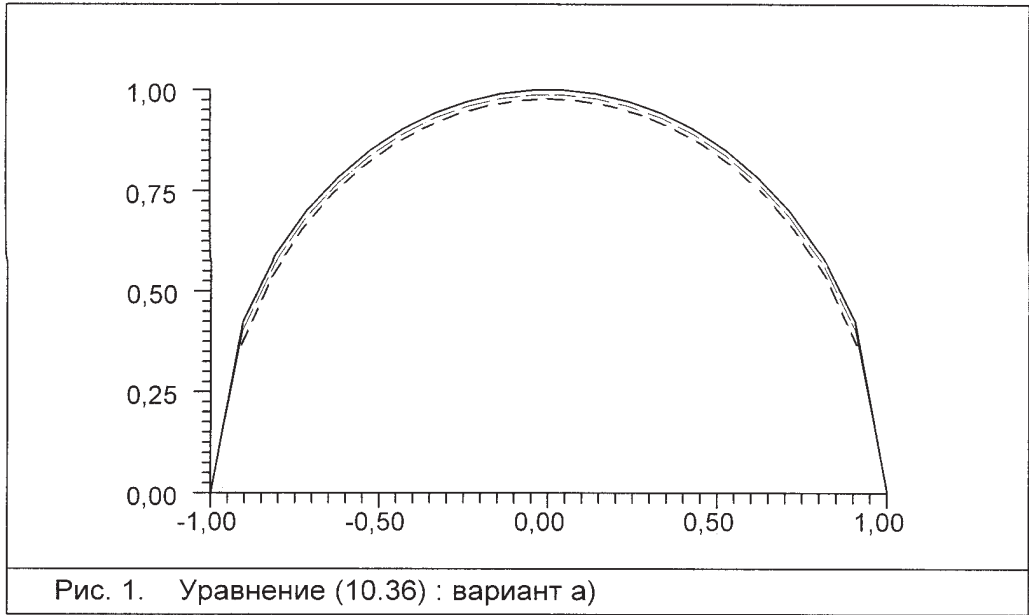
$$\int_{-1}^1 \frac{\mu(t)dt}{t-x} = f(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (10.36)$$

В [6] гл.5, §5 на этом примере показаны возможности метода дискретных вихрей.

а) Пусть $f(x) = -\pi x$. Ищем решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda([-1, 1])$. В этом случае $l_a = 0$, $l_b = 0$, $\mu(a) = 0$, $\mu(b) = 0$, и СЛАУ, являющаяся дискретным аналогом СИУ (10.36), состоит только из уравнений вида (10.8).

На рис. 1 приведен график приближенного решения СИУ (10.36) (пунктирная линия, длинные штрихи) построенный по решению СЛАУ. Здесь и далее расчеты проводились при числе узлов интерполяции $n = 21$, графики решений построены на рисунках как ломаные (точки с вычисленными координатами соединены отрезками прямых). Для сравнения показаны графики приближенного решения уравнения, полученного методом дискретных вихрей при том же значении n (пунктирная линия, короткие штрихи), и график точного решения $\mu(x) = \sqrt{1-x^2}$ (сплошная линия) этого уравнения в классе H_λ .

б) Пусть $f(x) = \pi$. Ищем решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda([-1, 1])$. При этом, как и в случае а), $l_a = 0$, $l_b = 0$, и СЛАУ состоит только из уравнений вида (10.8). Вычислитель-



ный эксперимент показывает, что по решению аппроксимирующей СЛАУ не может быть восстановлено приближенное решение уравнения. Это следствие того, что СИУ (10.36) при данной правой части не имеет решений класса H_λ . Действительно,

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi^2}{2} \neq 0.$$

Заметим, что это не противоречит общей теории приближенных методов: из того, что точное уравнение решений не имеет, вовсе не следует, что не должны иметь решений уравнения, аппроксимирующие точное.

Будем искать решение $\mu(\cdot) \in H_\lambda^p([-1, 1])$. Правая часть особенностей не имеет, но уравнения (10.34) и (10.35) имеют решения $\lambda_a = 1/2$ и $\lambda_b = 1/2$. Поэтому

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(-1)}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + \frac{\mu_0(1)}{2} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + \hat{\mu}(x),$$

где функция $\hat{\mu}(\cdot)$ – решение уравнения (10.36) с правой частью

$$f(x) = \pi \left(1 + \frac{\mu_0(-1)}{2} - \frac{\mu_0(1)}{2} \right).$$

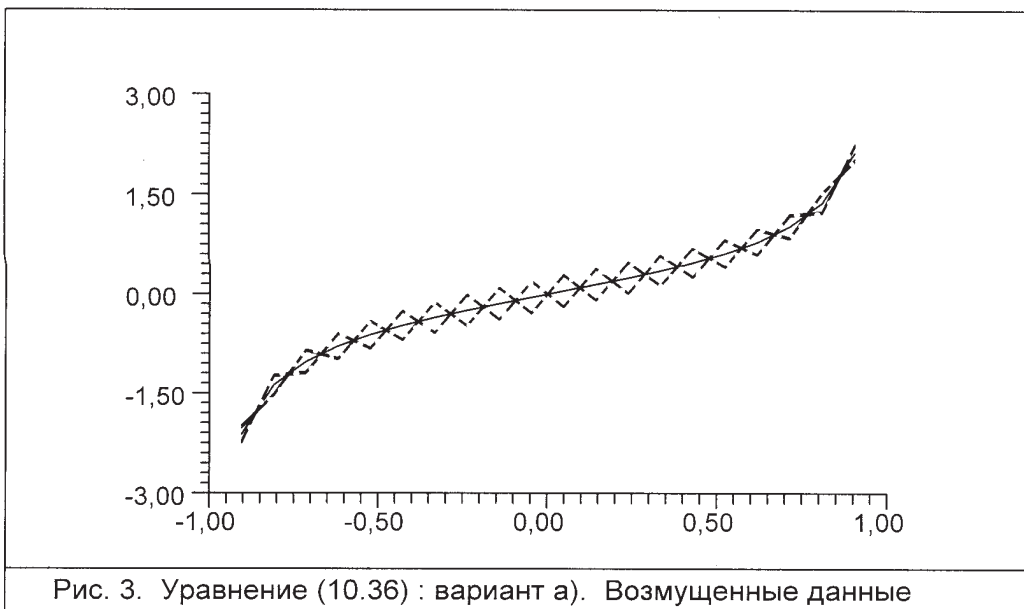
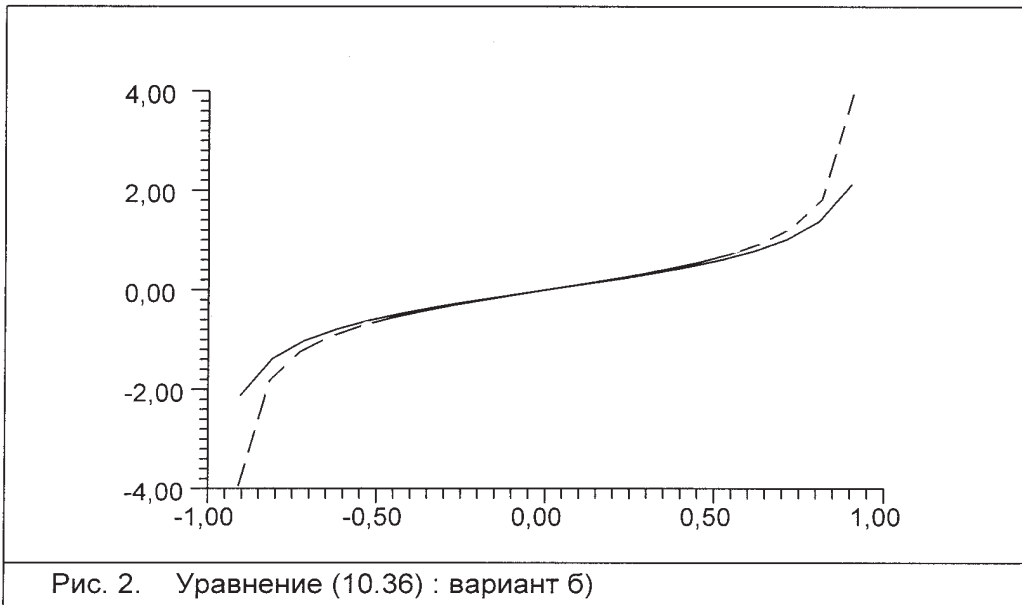
При этом значения $\mu_0(-1)$, $\mu_0(1)$ не определяются из уравнений (10.17) и (10.22).

Зададим $\mu_0(-1) = -1$, $\mu_0(1) = 1$. Тогда $\hat{f}(\cdot) \equiv 0$, точное решение уравнения с такой правой частью $\hat{\mu}(\cdot) \equiv 0$ и

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При решении аппроксимирующей СЛАУ методом Гаусса с выделением ведущего элемента получим, как и следует ожидать, нулевой вектор. На рис. 2 показаны графики

приближенных решений уравнения (10.36) с правой частью $f(\cdot) \equiv \pi$, полученных рассматриваемым методом (сплошная линия) и методом дискретных вихрей (пунктир).

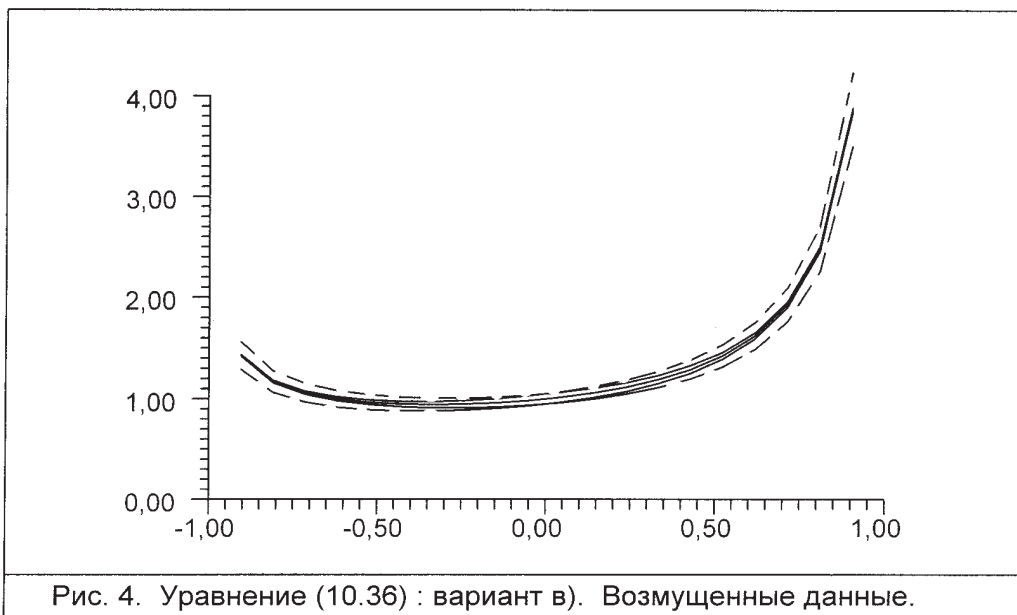


На рис. 3 показаны графики приближенных решений того же уравнения, полученных при возмущенных значениях $\mu_0(-1)$, $\mu_0(1)$. Невозмущенное приближенное решение показано сплошной линией, а несколько возмущенных – пунктирными, при этом допускалась погрешность в задании $\mu_0(-1)$, $\mu_0(1)$ до 20%.

в) Пусть

$$f(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left[\left(\frac{1-x}{x+1} \right)^{1/3} + \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{2/3} \right].$$

Здесь $\lambda_a = 1/3$, $\lambda_b = 2/3$ и из уравнений (10.17) и (10.22) следует, что $\mu_0(-1) = 1$, $\mu_0(1) = 1$. Тогда $\hat{f}(\cdot) \equiv 0$ и $\hat{\mu}(\cdot) \equiv 0$. На рис. 4 показаны графики приближенных решений уравнения (10.36), полученных при возмущенных значениях $\mu_0(-1), \mu_0(1)$. Здесь, как и на рис. 3, невозмущенное приближенное решение показано сплошной линией, а возмущенные (порядок возмущения 10%) – пунктиром.



Пример 2.

Рассмотрим интегральное уравнение

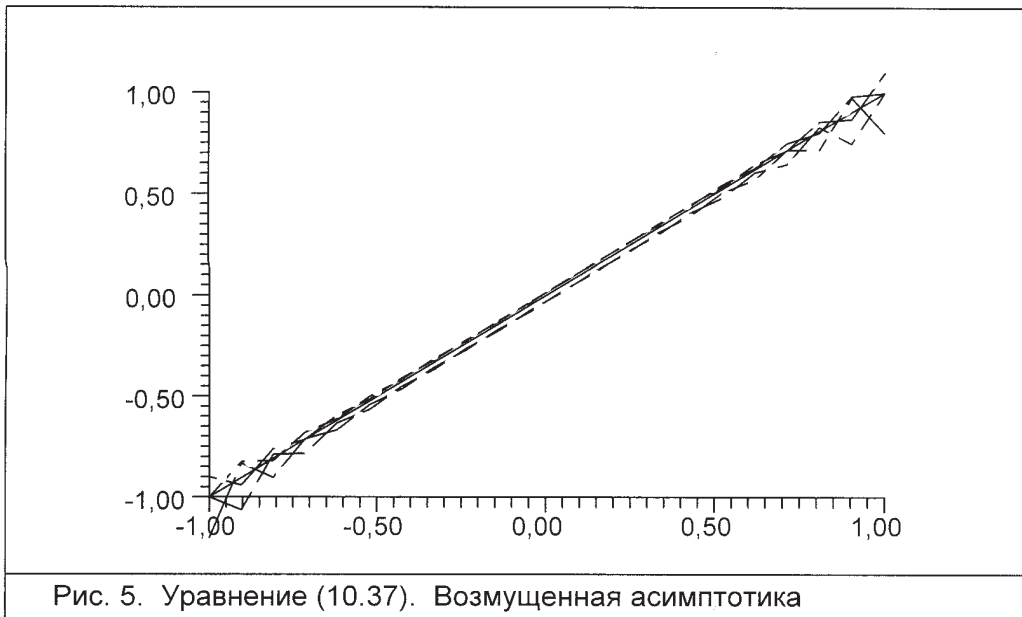
$$x\mu(x) + \int_{-1}^1 \frac{\mu(t)dt}{t-x} = x^2 + 2 + x \ln \frac{1-x}{x+1}, \quad x \in (-1, 1). \quad (10.37)$$

Будем искать решения в классе $H_\lambda([-1, 1])$. Так как правая часть задана аналитически, то легко вычислить, что коэффициенты $l_a = -1$, $l_b = 1$. Укажем простой метод вычисления значений l_a и l_b . Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(x) = P(x) \ln \frac{1-x}{x+1} + Q(x), \quad P(\cdot), Q(\cdot) - \text{полиномы,}$$

которая аппроксимирует правую часть уравнения (10.37). Коэффициенты полиномов можно найти численно методом наименьших квадратов, при этом рекомендуется для определения коэффициентов $P(\cdot)$ рассматривать среднее квадратическое отклонение функций по точкам, лежащим вблизи концов отрезка $[-1, 1]$, а для определения коэффициентов $Q(\cdot)$ – по точкам, лежащим ближе к центру отрезка. Тогда можно

взять $l_a = P(-1)$, $l_b = P(1)$. Эксперимент показал, что асимптотические коэффициенты могут быть вычислены таким методом с хорошей точностью для различных функций, имеющих логарифмические особенности. Установлено также, что рассматриваемый алгоритм численного решения устойчив по отношению к возмущениям этих коэффициентов.



На рис. 5 построены графики нескольких приближенных решений уравнения (10.37), полученных при точных и возмущенных значениях l_a и l_b . Сплошная линия соответствует точному решению уравнения $\mu(x) = x$, а пунктирные – возмущенным (чем сильнее возмущение, тем короче штрихи пунктира).

10.5. СИУ с автоморфными аналогами ядра Коши

Рассмотрим теперь СИУ с ядрами, автоморфными относительно некоторых групп дробно-линейных преобразований. Такие уравнения интересны тем, что их решение может быть построено в замкнутой форме методом аналитического продолжения ([19] гл.VII, [138]). Как и в случае СИУ с ядром Коши, формулы обращения уравнений с автоморфными ядрами удобны при теоретическом исследовании свойств их решений, но не используются при численных расчетах в связи с трудностями, возникающими при вычислении сингулярных интегралов.

Опишем некоторые эффекты, обнаруженные при численном решении СИУ с автоморфными ядрами квадратурными методами.

Пусть $\sigma_0(\cdot) \equiv z$, $\sigma_j(\cdot)$, $j = 1..m - 1$, – конечная группа из m дробно-линейных

преобразований. Автоморфный аналог ядра Коши в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{t-x} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{t-\sigma_j(x)} - \frac{1}{t-\sigma_j(\infty)} \right) = \frac{F'(t)}{F(t)-F(x)}, \quad (10.38)$$

где $F(\cdot)$ – основной инвариант группы ([138] §18). Если единственный простой полюс основного инварианта находится в бесконечно удаленной точке и группа не содержит целых преобразований, то

$$F(z) = z + \sum_{j=1}^{m-1} [\sigma_j(z) - \sigma_j(\infty)]. \quad (10.39)$$

Рассмотрим СИУ с автоморфным ядром

$$a(x)\mu(x) + b(x) \int_L \mu(t) \left[\frac{1}{t-x} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{t-\sigma_j(x)} - \frac{1}{t-\sigma_j(\infty)} \right) \right] dt = f(x), \quad x \in L. \quad (10.40)$$

Пусть коэффициенты уравнения $a(\cdot), b(\cdot) \in H_\lambda(L)$, причем $a^2(x) - \pi^2 b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in L$, а линия L расположена внутри одной из фундаментальных областей группы.

По картине разрешимости уравнение (10.40) является аналогом характеристического СИУ с ядром Коши, но его можно рассматривать также как полное СИУ с ядром Коши с регулярной частью ядра

$$b(x) \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{t-\sigma_j(x)} - \frac{1}{t-\sigma_j(\infty)} \right).$$

Если же группа дробно-линейных преобразований имеет подгруппу $\sigma_j(\cdot)$, $j = 0..m_1 - 1$, то в ядре уравнения (10.40) можно выделить в качестве характеристической части построенный по подгруппе автоморфный аналог ядра Коши

$$\frac{1}{t-x} + \sum_{j=1}^{m_1-1} \left(\frac{1}{t-\sigma_j(x)} - \frac{1}{t-\sigma_j(\infty)} \right),$$

а все остальные слагаемые рассматривать как регулярную часть.

При исследовании условий разрешимости СИУ (10.40) не так существенно, какая часть ядра остается в характеристической части, хотя наиболее естественно все ядро уравнения рассматривать как автоморфный аналог ядра Коши. Интересно выяснить, насколько целесообразно учитывать свойство автоморфности ядра уравнения при численном его решении.

Рассмотрим СИУ вида (10.40) на отрезке вещественной оси

$$\mu(x) + \int_a^b \mu(t) \left[\frac{1}{t-x} + \sum_{j=1}^5 \left(\frac{1}{t-\sigma_j(x)} - \frac{1}{t-\sigma_j(\infty)} \right) \right] dt = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (10.41)$$

в случае группы дробно-линейных преобразований

$$z, \frac{2z-1}{3z-2}, \frac{z}{5z-1}, \frac{3z-1}{7z-2}, \frac{2z-1}{7z-3}, \frac{3z-1}{8z-3},$$

эквивалентной группе ангармонических отношений. Фундаментальная область группы симметрична относительно вещественной оси, поэтому можно ограничиться случаем вещественнозначных функций. Пусть

$$f(x) = 1 + \ln \frac{F(b) - F(x)}{F(x) - F(a)},$$

при этом точное решение уравнения $\mu(\cdot) \equiv 1$. При численном решении уравнение (10.41) можно интерпретировать по-разному: а) как полное СИУ с ядром Коши; б) и в) как полное СИУ с автоморфным аналогом ядра Коши, построенным по подгруппам z , $(2z-1)/(3z-2)$ и z , $z/(5z-1)$ соответственно, и, наконец, г) как характеристическое СИУ с автоморфным относительно всей группы ядром.

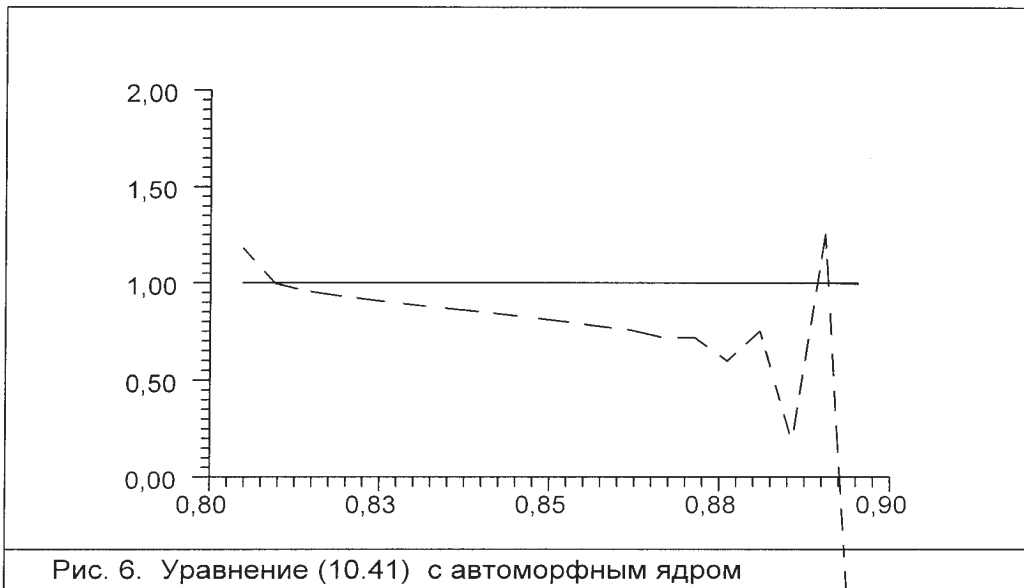
При аппроксимации сингулярного интеграла с автоморфным аналогом ядра Коши можно использовать квадратурную формулу

$$\int_a^b \frac{F'(t)}{F(t) - F(t_k)} \mu(t) dt \approx \mu(t_k) \ln \frac{F(b) - F(t_k)}{F(t_k) - F(a)} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} + \sum_{j=k+1}^n \right) \left(\frac{\mu(t_j) - \mu(t_k)}{F(t_j) - F(t_k)} + \frac{\mu(t_{j+1}) - \mu(t_k)}{F(t_{j+1}) - F(t_k)} \right) \frac{F(t_{j+1}) - F(t_j)}{2}, \quad k = 1..n.$$

Легко видеть, что при расчетах можно использовать те же алгоритмы, что и в случае СИУ с ядром Коши. Нужно только предварительно заменить узлы t_j , $j = 0..n+1$, на значения основного инварианта в узлах.

Вычислительный эксперимент показал, что вариант г) всегда дает наилучший (в данном примере "абсолютно точный") результат, а погрешность трех других вариантов зависит от длины и расположения на вещественной оси отрезка $[a, b]$. Вариант а) по точности ближе к худшему из вариантов б) и в).

В [86] приведена зависимость погрешности приближенного решения уравнения (10.41), построенного по методам б) и в), при перемещении отрезка $[a, b]$ фиксированной длины вдоль вещественной оси. При этом отрезок не пересекал изометрических окружностей и не содержал точек, конгруэнтных бесконечно удаленной точке. На рис. 6 показаны графики приближенных решений уравнения (10.41) на отрезке $[0.8, 0.9]$, полученные различными методами. Точному решению $\mu(\cdot) \equiv 1$ соответствует сплошная линия, вариант б) дает решение, практически совпадающее с точным (на рисунке это даже не заметно), а вариант в) дает "разболтанное" решение, "график" которого показан пунктиром.



Установлено, что если отрезок $[a, b]$ расположен в окрестности точек 0 или $1/5$, то вариант в) дает погрешность на несколько порядков меньшую, чем вариант б), причем точка $1/5$ вообще не является критической для варианта в). В окрестности точки $1/3$ метод б) работает лучше. Аналогично, метод б) дает явное преимущество в окрестности точек $2/3$ и 1, а метод в) – в окрестности точки $2/5$.

Это объясняется тем, что в окрестности неподвижной точки группы периода m разность $|F(x') - F(x'')|$ имеет значения порядка $|x' - x''|$. При этом погрешность квадратурной формулы уменьшается. В рассматриваемом случае точка 0 является неподвижной точкой подгруппы z , $z/(5z - 1)$ периода 2, а точка 1 – неподвижной точкой подгруппы z , $(2z - 1)/(3z - 2)$ того же периода.

Таким образом, при численном решении СИУ методом механических квадратур целесообразно сохранять в характеристической части уравнения сингулярные интегралы с автоморфным аналогом ядра Коши, построенным по группе дробно-линейных преобразований, если линия интегрирования расположена в окрестности неподвижной точки группы.

10.6. Теоретическое обоснование численных методов

При теоретическом обосновании приближенного (численного) метода решения интегрального уравнения в первую очередь требуется найти условия, при которых из существования и единственности решения точного уравнения следует разрешимость аппроксимирующего уравнения и, наоборот, из разрешимости аппроксимирующего уравнения следует разрешимость точного. Необходимо также оценить близость реше-

ний этих двух уравнений. Как правило, соответствующие утверждения могут быть получены как частный случай общих утверждений, доказанных при исследовании некоторого абстрактного операторного уравнения методами функционального анализа.

В абстрактной теории приближенных методов можно выделить два основных направления. В общей теории приближенных методов Л.В.Канторовича [37], [38] и ее модификации, предложенной Б.Г.Габдулхаевым [12], основное внимание уделяется условиями, при которых разрешимость аппроксимирующего уравнения следует из разрешимости точного уравнения. Такой подход наиболее естественен при теоретическом обосновании численных методов решения интегральных уравнений, в том числе и сингулярных. Другое направление основано на понятии устойчивости последовательности операторов, аппроксимирующих заданный оператор. Такой подход использовал, например, А.С. Ильинский [33] при обосновании численного метода решения интегрального уравнения с логарифмическим ядром. В рамках абстрактной приближенной схемы В.А. Треногина [131], гл. VII, теория разностных схем, приближенные методы типа Галеркина и некоторые другие задачи рассматриваются с единой точки зрения. Устойчивость последовательности аппроксимирующих операторов используется как основа общей теории численных методов в книге Э. Пресдорфа и Б. Зильберманна [162].

В работе [89] построена абстрактная теория приближенных методов решения линейных уравнений, позволяющая на единой основе получить основные утверждения общей теории приближенных методов и теории абстрактных приближенных схем. Используемые обозначения и терминология наиболее близки к принятым в книге [131]. Условия, при которых из разрешимости точного уравнения следует разрешимость аппроксимирующего уравнения, в определенном смысле дополняют известные результаты Б.Г. Габдулхаева [12].

Глава 11.

Алгоритмы численного решения СИУ со сложной особенностью в ядре

В этой главе обсуждаются алгоритмы численного решения СИУ с логарифмическими и степенными ядрами, а также со сложной особенностью в ядре, при разработке которых использована принятая в книге методика: решение СИУ со сложной особенностью в ядре сводится к последовательному решению двух других уравнений, одно из которых – сингулярное уравнение с ядром Коши. Численные методы решения СИУ с ядром Коши уже обсуждались в главе 10, поэтому сейчас будут рассмотрены методы решения уравнений, устанавливающих соответствие между решениями исходного СИУ и эквивалентного ему уравнения с ядром Коши.

11.1. СИУ с логарифмическими и степенными ядрами

Сингулярное интегральное уравнение с логарифмическим ядром

$$a(x) \int_a^x \nu(t) dt + b(x) \int_a^b \nu(t) \ln \frac{b-x}{|t-x|} dt = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (11.1)$$

эквивалентно характеристическому СИУ

$$a(x)\mu(x) + b(x) \int_a^b \frac{\mu(t) dt}{t-x} = f(x), \quad (11.2)$$

при этом связь между решениями уравнений (11.1) и (11.2) задается равенством

$$\mu(x) = \int_a^x \nu(t) dt. \quad (11.3)$$

Чтобы получить решение СИУ (11.1), нужно сначала найти решение СИУ (11.2) в классе ограниченных на концах отрезка функций, а затем решить интегральное уравнение (11.3). Алгоритм численного решения уравнения (11.3) сводится, легко видеть, к численному дифференцированию.

Рассмотрим уравнение Карлемана с логарифмическим ядром

$$\int_a^b \nu(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x). \quad (11.4)$$

Перейдем к эквивалентному уравнению

$$\int_a^b \frac{\mu(t) dt}{t-x} = f(x) + \mu(b) \ln(b-x). \quad (11.5)$$

Здесь, как и раньше, равенство (11.3) устанавливает связь между решениями уравнений (11.4) и (11.5), причем необходимо $\mu(a) = 0$. Асимптотические равенства в точках a и b выполняются автоматически. При $b - a \neq 4$ значение

$$\mu(b) = \int_a^b \nu(t) dt$$

определяется из условия разрешимости

$$\pi \ln \frac{b-a}{4} \mu(b) = - \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}.$$

Из формул (10.8) получим СЛАУ для определения значений искомой функции в остальных узлах

$$\begin{aligned} & \mu_k \ln \frac{b-t_k}{t_k-a} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} + \sum_{j=k+1}^n \right) \left(\frac{\mu_j - \mu_k}{t_j - t_k} + \frac{\mu_{j+1} - \mu_k}{t_{j+1} - t_k} \right) \frac{t_{j+1} - t_j}{2} + \\ & + \left(\frac{\mu_{k-1} - \mu_k}{t_{k-1} - t_k} + \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{t_{k+1} - t_k} \right) \frac{t_{k+1} - t_{k-1}}{2} = f(t_k) + \mu(b) \ln(b - t_k), \quad k = 1..n. \end{aligned} \quad (11.6)$$

При численном решении уравнения (11.4) и близких к нему часто используется метод саморегуляризации [28]. В книге Б.Г. Габдулхаева [13] рассмотрены другие возможные в данном случае прямые методы.

СИУ со степенным ядром на отрезке вещественной оси

$$A(x) \int_a^x \frac{\nu(t) dt}{(x-t)^\lambda} + B(x) \int_x^b \frac{\nu(t) dt}{(t-x)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1, \quad x \in (a, b), \quad (11.7)$$

эквивалентно уравнению с ядром Коши

$$[A(x) - B(x) \cos \lambda\pi] \mu(x) + \frac{\sin \lambda\pi}{\pi} B(x) \int_a^b \frac{\mu(t) dt}{t-x} = (b-x)^{\lambda-1} f(x). \quad (11.8)$$

После того, как решено уравнение (11.8), остается найти искомую функцию как решение уравнения Абеля

$$\int_a^x \frac{\nu(t) dt}{(x-t)^\lambda} = (b-x)^{1-\lambda} \mu(x), \quad x \in (a, b). \quad (11.9)$$

Эффективный при численной реализации метод предложил А.В. Майстер [56], [57]. Аналогичный подход может быть использован при разработке алгоритмов численного решения интегральных уравнений с обобщенным степенным ядром (раздел 6.3). Краткий обзор работ, посвященных численным методам решения уравнения Абеля, имеется в [130], с.77.

11.2. Достаточно решить только СИУ с ядром Коши!

Как показано в разделе 11.1, рассматриваемые алгоритмы численного решения СИУ с логарифмическими и степенными ядрами состоят из двух частей. В первую очередь нужно получить решение эквивалентного СИУ с ядром Коши. Из результатов главы 10 следует, что эта задача не представляет особой проблемы при численной реализации. Вторая часть алгоритма сводится к численному дифференцированию найденного численного решения СИУ с ядром Коши в случае уравнений с логарифмическими ядрами или к численному обращению оператора Абеля или оператора с обобщенным степенным ядром в случае уравнений со степенной особенностью в ядре. Именно второй этап является наиболее сложным, поскольку приходится иметь дело с некорректной задачей.

Но в прикладных задачах "как правило, представляет интерес не само решение интегрального уравнения, а те или иные интегралы от него или производные от интегралов" ([69], с.101). Действительно, если найденное решение интегрального уравнения должно быть подставлено в дальнейшем под знак интеграла, то этот интеграл может быть так преобразован интегрированием по частям, что вместо рассматриваемой функции всюду будет стоять ее первообразная. Такой подход следует считать вполне естественным при решении методом интегральных уравнений граничных задач для уравнений с частными производными.

Рассмотрим в качестве примера задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Эта задача была впервые поставлена и решена А.В.Бицадзе [7].

Пусть D – односвязная смешанная область в плоскости xy , ограниченная простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ вещественной оси, целиком расположенной в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0. \quad (11.10)$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами (задача Трикоми):

- 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (11.10) в D при $y \neq 0$;
- 2) $u(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 3) производная $u_y(x, y)$ удовлетворяет условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \nu(x) \quad \text{на } AB,$$

где $\nu(x)$ – непрерывная функция, допускающая в точках $x = 0$ и $x = 1$ обращение в бесконечность интегрируемого порядка;

4) $u(x, y)$ на σ и на AC принимает заданные значения

$$u = \varphi(s) \quad \text{на } \sigma, \quad u = \psi(x) \quad \text{на } AC.$$

В гиперболической части D_2 смешанной области решение задачи Трикоми может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \int_0^{x+y} \nu(t) dt + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi(0) \quad ((11))$$

как решение задачи Коши-Гурса

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad u(x, y) = \psi(x) \quad \text{на } AC.$$

В эллиптической части D_1 смешанной области

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \varphi(s) \frac{\partial G[\xi(s), \eta(s); x, y]}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \nu(t) G(t, 0; x, y) dt \quad (11.12)$$

как решение задачи N

$$u = \varphi(s) \quad \text{на } \sigma, \quad u_y(x, 0) = \nu(x) \quad \text{на } AB,$$

где $G[\xi, \eta; x, y]$ – функция Грина. Приравняем на AB предельные значения при $y \rightarrow 0$ правых частей формул (11.11) и (11.12), получим интегральное уравнение с логарифмическим ядром

$$\int_0^x \nu(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \nu(t) [\ln |t-x| - g(t, x)] dt = \varphi_*(x) - 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi(0), \quad (11.13)$$

где

$$\varphi_*(x) = - \int_{\sigma} \varphi(s) \frac{\partial G[\xi(s), \eta(s); x, 0]}{\partial n} ds,$$

$g(t, x)$ – "регулярная" часть предельного значения функции Грина. Если σ – нормальная кривая для уравнения (11.10), то $g(t, x) = \ln(t+x-2tx)$. В этом случае СИУ (11.13) эквивалентно уравнению

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu(t) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{2x-1}{2tx-t-x} \right) dt = \varphi_*(x) - 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi(0)$$

относительно функции

$$\mu(x) = \int_0^x \nu(t) dt,$$

решение которого может быть получено в замкнутой форме (см. [79], §20). В общем случае уравнение (11.13) также сводится к полному СИУ с ядром Коши относительно функции $\mu(\cdot)$.

Если эта функция найдена, то решение задачи Трикоми в области D_2 сразу определяется по формуле (11.11). Чтобы получить искомое решение в D_1 , нужно переписать формулу (11.12) в виде

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \varphi(s) \frac{\partial G[\xi(s), \eta(s); x, y]}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\int_0^t \nu(\tau) d\tau \right] \frac{d}{dt} G[t, 0; x, y] dt.$$

Аналогично дело обстоит в случае задачи Трикоми для обобщенного уравнения Трикоми

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0,$$

но только вместо первообразной функции $\nu(\cdot)$ из уравнения с ядром Коши определяется ее дробный интеграл (см. [79], §21).

11.3. СИУ со сложной особенностью в ядре

При численном решении СИУ со сложной особенностью в ядре, теоретическое исследование которых проведено в главе 9, наиболее сложная часть алгоритмов – численное обращение уравнений вида (9.2)

$$a(x)\nu(x) + \int_a^b \nu(\xi)k(\xi, x) d\xi = \mu(x), \quad x \in (a, b), \quad (11.14)$$

ядро $k(\xi, x)$ которых имеет в общем случае сложную структуру. Напомним, что у функции $k(\xi, x)$ допускаются особенности логарифмического, степенного и степенно-логарифмического типов на диагонали (при $\xi = x$) и на границах ($\xi, x = a, b$) области определения. Кроме того, слагаемые с особенностями перечисленных типов содержат, как правило, еще и функции с разрывом 1-го рода при $\xi = x$. Поэтому при разработке алгоритмов численного решения в каждом конкретном случае требуется провести дополнительное исследование ядра уравнения (11.14) и, возможно, выделить в виде отдельных слагаемых функции, содержащие особенности.

Заметим, что ядро интегрального уравнения (11.14) может быть найдено численно (из уравнения (9.5), например). Если для этого использовать алгоритмы, изложенные в главе 10, то в дальнейшем нет необходимости дополнительно исследовать свойства функции $k(\xi, x)$. Дело в том, что в этом случае решение уравнения с ядром Коши на системе отрезков будет найдено в виде суммы отдельных слагаемых, содержащих особенности. Разумеется, вычисление значений функции двух переменных требует существенно больших вычислительных ресурсов.

Вычислительный эксперимент показал, что при аппроксимации интегралов с особенностями различных типов в ядре удобно использовать квадратурные формулы с весовыми функциями [154]

$$\int_a^b g(t)f(t) dt = \sum_{j=0}^n w_j f(t_j),$$

где

$$w_0 = \frac{g_2(t_1) - g_2(t_0)}{t_1 - t_0} - g_1(t_0),$$

$$w_j = \frac{g_2(t_{j+1}) - g_2(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{g_2(t_j) - g_2(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \quad j = 1..n - 1,$$

$$w_n = g_1(t_n) - \frac{g_2(t_n) - g_2(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}},$$

где $g_1(\cdot)$ – первообразная функции $g(\cdot)$, а $g_2(\cdot)$ – первообразная функции $g_1(\cdot)$. В работе [154] проведено исследование сходимости численных методов решения уравнений Фредгольма 2-го рода со слабой особенностью в ядре.

Квадратурные формулы с весовыми коэффициентами могут быть также рекомендованы при аппроксимации регулярной части полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши при наличии в ней слагаемых со слабой особенностью. При этом можно рассматривать функции с особенностями логарифмического, степенного, степенно-логарифмического и любого другого типа, лишь бы только можно было получить явные выражения первообразных этих функций.

Глава 12.

Интегральные уравнения плоских контактных задач теории упругости

В контактных задачах теории упругости обычно требуется определить напряжения, возникающие вдоль линии (или вдоль поверхности) соприкосновения двух тел, хотя бы одно из которых является упругим. Линия контакта может быть задана, но в общем случае она также должна быть найдена. Обычно предполагается, что заданы силы, сжимающие соприкасающиеся тела.

Если контактная задача поставлена в узком смысле ([104], с.281), то исследуются напряжения и перемещения только граничных точек упругих тел. При этом в качестве модели упругой среды вместо системы дифференциальных уравнений с частными производными вместе с граничными условиями выбираются существенно более простые соотношения, связывающие напряжения и перемещения.

Одно из контактируемых тел (большее по размерам) принято называть основанием. При этом задача о контакте двух тел интерпретируется как задача о вдавливании тела (штампа) в основание. В большинстве случаев достаточно считать, что основанием является упругая полуплоскость (или полупространство в пространственных задачах). Ограничимся ниже случаем *линейно-деформируемого основания* (ЛДО) (см. [99], [101], а также [104], гл. 4): пусть перемещения граничных точек линейно зависят от значений распределенной вдоль границы силы. Тогда в плоском общем случае при формализации контактной задачи достаточно знать ядро основания – две пары функций, описывающих перемещения в направлении осей координат точки x под действием пары единичных сил, приложенных в точке t .

В главе 12 рассматриваются интегральные уравнения плоских контактных задач теории упругости, которые могут быть получены при различных гипотезах о свойствах линейного деформируемого основания, в том числе с учетом ползучести и сил трения. На примере известных уравнений с логарифмическим и степенным ядром показаны особенности применения изложенной ранее теории СИУ со сложной особенностью в ядре. В рамках концепции линейно-деформируемого основания (ЛДО), развитой в работах Г.Я. Попова ([99], [100], [101] и др.), предложены новые формы записи ядер основания в виде квазивырожденных логарифмических и степенных ядер, которые можно использовать при аппроксимации более сложных ядер.

12.1. Классические ядра оснований

Пусть в точке t границы упругой полуплоскости приложена нормальная сосредоточенная единичная сила, и точка x границы смещается по нормали к границе на

расстояние $V(t, x)$ (функция $V(t, x)$ – *ядро основания*). Пусть под действием силы P в основание вдавливаются штамп, участок границы которого, вступающий в контакт с основанием, описывается функцией $f(\cdot)$. Пусть $p(\cdot)$ – нагрузка, распределенная вдоль участка контакта L штампа с основанием. Тогда

$$\int_L p(t)V(t, x) dt = h - f(x), \quad x \in L, \quad (12.1)$$

где постоянная h определяет поступательное перемещение штампа (максимум перемещений его граничных точек). Значение h может быть задано, но обычно оно определяется в процессе решения уравнения (12.1). Из условия равновесия штампа величина сжимающей силы

$$P = \int_L p(t) dt. \quad (12.2)$$

Одна из первых моделей ЛДО (*классическое основание*) основана на предположении о том, что

$$V(t, x) = \frac{\theta}{\pi} \ln \frac{1}{|t - x|},$$

где $\theta = 2(1 - \mu^2)/E$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона. Тогда интегральное уравнение контактной задачи записывается в виде уравнения (3.24)

$$\frac{\theta}{\pi} \int_L p(t) \ln \frac{1}{|t - x|} dt = f(x) - h, \quad x \in L. \quad (12.3)$$

Пусть $L = (a, b)$ – интервал вещественной оси. В соответствии с изложенным в главе 3 методом, новая искомая функция

$$q(t) = \int_a^t p(\xi) d\xi, \quad t \in (a, b),$$

является решением СИУ с ядром Коши

$$\frac{\theta}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{t - x} = f(x) - h + P \ln(b - x), \quad x \in (a, b). \quad (12.4)$$

Условие разрешимости этого уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} - h + P \ln \frac{b - a}{4} = 0 \quad (12.5)$$

позволяет определить перемещение штампа h при заданной сжимающей силе P или, наоборот, определить P при заданном h (поскольку линия контакта относительно

мала, описанная в конце главы 3 "патология" не имеет места). Решение уравнения (12.4) в классе функций, ограниченных на концах интервала, имеет вид

$$\frac{\theta}{\pi}q(t) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{(b-t)(t-a)}\int_a^b \frac{f(x) - h + P \ln(b-x)}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \frac{dx}{x-t}$$

и тогда

$$\frac{\theta}{\pi}p(t) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{(b-x)(x-a)}}\int_a^b \frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}f'(t)}{t-x} dt + \frac{P}{\pi\sqrt{(b-x)(x-a)}}. \quad (12.6)$$

В рамках общей теории ЛДО [100], [101] в качестве характерных частных случаев рассматриваются также *квазиклассическое ядро основания*

$$V(t, x) = \frac{\theta_\nu}{\nu|t-x|^\nu}, \quad 0 < \nu < 1,$$

где θ_ν – некоторая заданная постоянная (причем такая, что $\theta_\nu \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow 0$), *винклеровское основание*

$$V(t, x) = k\delta(t-x),$$

где $\delta(\cdot)$ – δ -функция Дирака и *комбинированное основание*

$$V(t, x) = k\delta(t-x) + \frac{\theta}{\pi} \ln \frac{1}{|t-x|},$$

соответствующее случаю упругого однородного полупространства, покрытого винклеровским слоем.

В случае квазиклассического основания СИУ (12.1) принимает вид

$$\frac{\theta_\nu}{\nu} \int_a^b \frac{p(t) dt}{|t-x|^\nu} = f(x) - h, \quad x \in (a, b). \quad (12.7)$$

В соответствии с изложенным в конце главы 6, новая искомая функция

$$q(x) = \int_a^x p(t) \left(\frac{b-x}{x-t}\right)^\nu dt, \quad x \in (a, b) \quad (12.8)$$

является решением СИУ с ядром Коши

$$(1 - \cos \pi\nu)q(x) + \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_a^b \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{\nu}{\theta_\nu} \{(b-x)^\nu [f(x) - h] - P\}, \quad x \in (a, b). \quad (12.9)$$

Чтобы записать в явном виде решение исходного уравнения, нужно построить решение характеристического уравнения (12.9) и применить известную формулу обращения интегрального уравнения Абеля (12.8). Различные варианты записи явного решения уравнения (12.7) можно найти в [130], §30.

При численных расчетах удобнее использовать предложенные в главах 10 и 11 алгоритмы, а не применять формулы, дающие явные решения интегральных уравнений. Рассмотрим некоторые особенности алгоритмов, связанные с наличием в правых частях уравнений постоянной h . Для простоты будем считать, что $\theta = \theta_\nu = \pi$.

Начнем с интегрального уравнения со степенным ядром

$$\int_a^b \frac{p(t) dt}{|t-x|^\nu} = \nu f(x) - \nu h, \quad x \in (a, b). \quad (12.10)$$

Решение этого уравнения с единичной правой частью известно (см., например, [130], с. 457)

$$p_1(x) = \frac{\pi \cos \frac{\nu\pi}{2}}{(x-a)^{(1-\nu)/2}(b-x)^{(1-\nu)/2}}.$$

Поэтому будем искать решение исходного уравнения в виде $p(x) = p_0(x) - \nu h p_1(x)$, где $p_0(x)$ – решение уравнения

$$\int_a^b \frac{p(t) dt}{|t-x|^\nu} = \nu f(x), \quad x \in (a, b). \quad (12.11)$$

Из условия (12.2) следует, что

$$\frac{\nu h}{\pi} \cos \frac{\nu\pi}{2} \int_a^b \frac{dt}{(x-a)^{(1-\nu)/2}(b-x)^{(1-\nu)/2}} = \int_a^b p_0(t) dt - P.$$

Отсюда, после того, как будет решено уравнение (12.11), определится величина сдвига штампа h .

Умножим обе части уравнения (12.11) на $(b-x)^{1-\nu}$. Для новой искомой функции $q(\cdot)$ такой, что

$$\int_a^x \frac{p_0(t) dt}{(x-t)^\nu} = (b-x)^{1-\nu} q(x),$$

получим с помощью частного случая тождества (5.14)

$$\begin{aligned} \int_x^b p(t) \frac{1}{b-x} \left(\frac{b-x}{t-x}\right)^\nu dt &= -\cos \pi\nu \int_a^x p(t) \frac{1}{b-x} \left(\frac{b-x}{x-t}\right)^\nu dt + \\ &+ \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_a^b \left[\int_a^\xi p(t) \frac{1}{b-\xi} \left(\frac{b-\xi}{\xi-t}\right)^\nu dt \right] \frac{d\xi}{\xi-x} \end{aligned}$$

СИУ с ядром Коши

$$(1 - \cos \pi\nu)q(x) + \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_a^b \frac{q(\xi) d\xi}{\xi-x} = \frac{\nu f(x)}{(b-x)^{1-\nu}}, \quad x \in (a, b).$$

Поскольку его правая часть имеет степенную особенность в точке b , в соответствии с теоремой 10.3

$$q(x) = \frac{\nu f(b)}{(b-a)^{1-\nu}} \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1-\nu} + q_0(x),$$

где $q_0(\cdot)$ – решение уравнения

$$(1 - \cos \pi\nu)q_0(x) + \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_a^b \frac{q_0(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{\nu f(x)}{(b-x)^{1-\nu}} - \frac{\nu f(b)}{(b-a)^{1-\nu}} \left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1-\nu} + 1\right]$$

на (a, b) , причем из асимптотических формул $q_0(a) = 0$, $q_0(b) = 0$.

Для уравнения с логарифмическим ядром

$$\int_a^b p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x) - h, \quad x \in (a, b), \quad (12.12)$$

также известно решение при единичной правой части, оно имеет вид (если только $b-a \neq 4$!)

$$p_1(x) = -\frac{1}{\pi \ln \frac{b-a}{4}} \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}.$$

Тогда $p(x) = p_0(x) - hp_1(x)$, где $p_0(\cdot)$ – решение уравнения

$$\int_a^b p_0(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Поэтому $p_0(x) = q'(x)$, где $q(\cdot)$ – решение уравнения

$$\int_a^b \frac{q(t) dt}{t-x} = f(x) + q(b) \ln(b-x), \quad x \in (a, b),$$

причем $q(a) = 0$ и, как следует из условия разрешимости уравнения,

$$q(b) = -\frac{1}{\pi \ln \frac{b-a}{4}} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}.$$

Тогда из условия (12.2) равновесия штампа

$$h = [P - q(b)] \ln \frac{b-a}{4} = P \ln \frac{b-a}{4} + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}},$$

что полностью соответствует формуле (12.5).

На рис. 7 показан сплошной линией график рассчитанного распределения давления вдоль линии контакта жесткого прямоугольного штампа с классическим ЛДО. Пунктирная линия соответствует решению СИУ, вычисленному по точной формуле (12.6). Заметим, что ограниченность численного решения в окрестностях точек a и b

– следствие ухудшения точности работы алгоритма численного дифференцирования на границе области определения функции.

На рис. 8 приведены графики распределения давления для жесткого параболического штампа, граница которого задана функцией $f(x) = mx^2$ при разных значениях коэффициента m .

На рис. 9 даны распределения давления вдоль границы прямоугольного штампа, вдавливаемого с одной и той же силой в квазиклассическое основание, при разных значениях параметра ν .

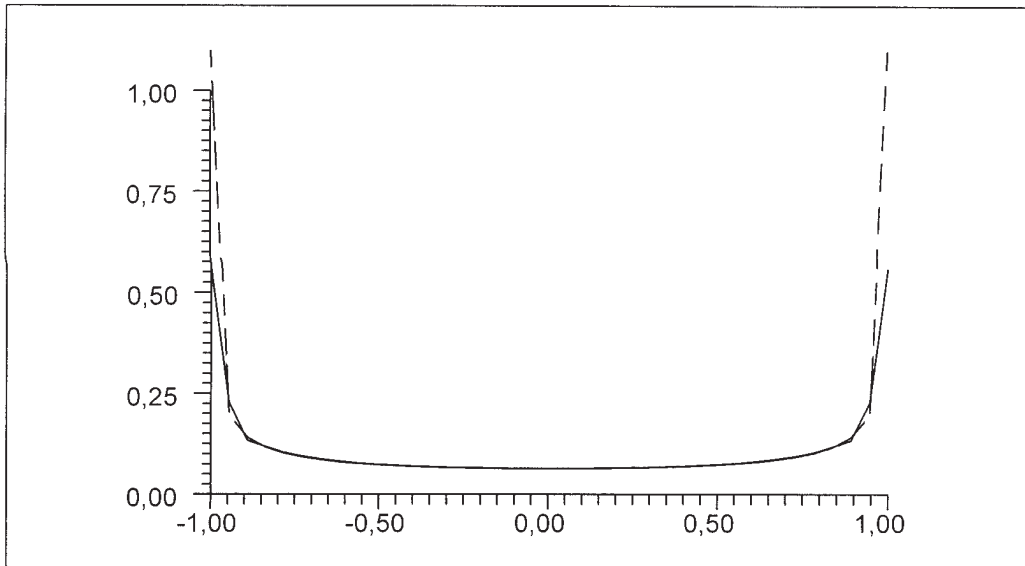


Рис. 7. Классическое основание. Прямоугольный штамп.

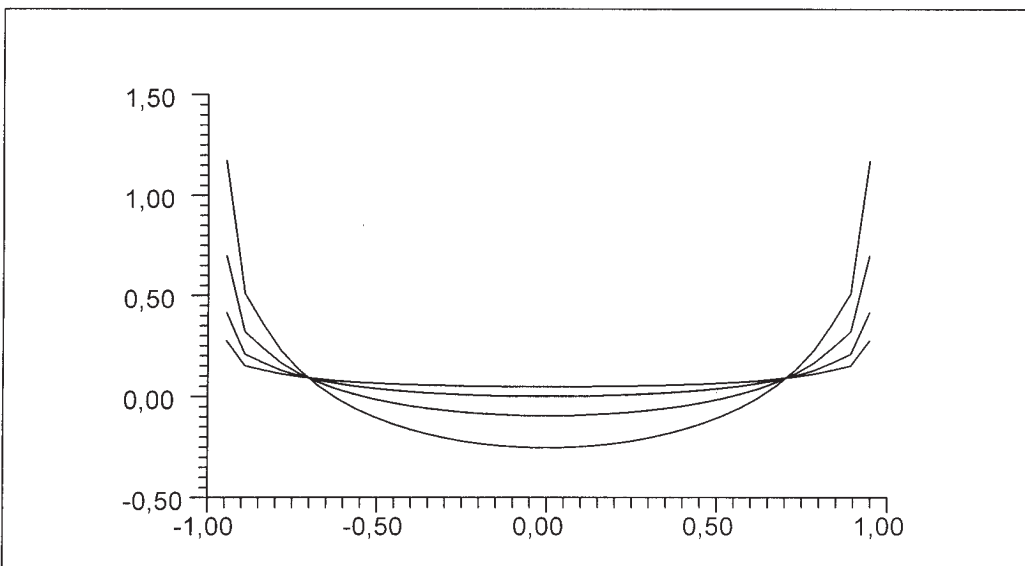


Рис. 8. Классическое основание. Параболический штамп.

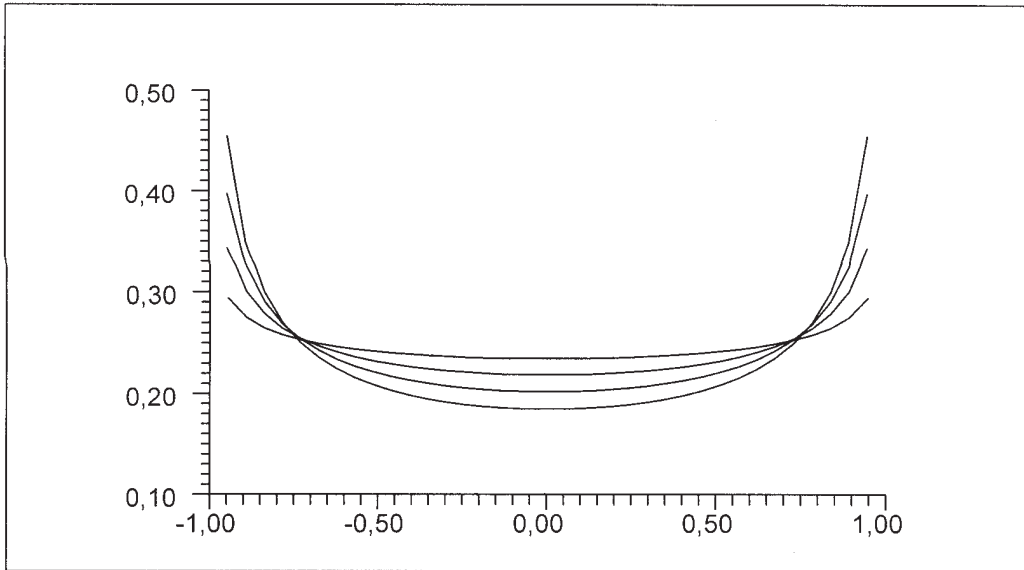


Рис. 9. Квазиклассическое основание. Прямоугольный штамп.

12.2. Квазивырожденное логарифмическое ядро основания

Рассмотрим в качестве ядра основания квазивырожденное логарифмическое ядро (раздел 9.3), ограничившись случаем, когда в каждой сумме содержится только одно слагаемое

$$V(t, x) = -c_1(t) \int_A^t \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau - x} + c_2(t) \int_t^B \frac{b_2(\tau) d\tau}{\tau - x}, \quad t, x \in [A, B], \quad (12.13)$$

здесь $[A, B]$ – отрезок вещественной оси. Предположим, что функции $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$, $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[A, B]$ и $b_1(A) = 0$, $b_2(B) = 0$ (при этом ядро (13) не имеет логарифмических особенностей на границе квадрата $[A, B] \times [A, B]$). В простейшем случае

$$c_1(\cdot) \equiv 1, \quad c_2(\cdot) \equiv 1, \quad b_1(t) = \frac{t - A}{B - A}, \quad b_2(t) = \frac{B - t}{B - A},$$

и тогда

$$V(t, x) = \frac{x - A}{B - A} \ln \frac{x - A}{|t - x|} + \frac{B - x}{B - A} \ln \frac{B - x}{|t - x|} - 1, \quad t, x \in [A, B]. \quad (12.14)$$

Заметим, что ядро (12.13) отличается от ядра классического основания прежде всего тем, что обращается в нуль при $|x| \rightarrow \infty$.

Пусть в основание с ядром (12.13) вдавливается жесткий штамп, причем проекция на ось абсцисс линии его контакта с основанием $[\alpha, \beta]$ не выходит за пределы интервала (A, B) . Рассмотрим два способа решения СИУ контактной задачи

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(t) \left[-c_1(t) \int_A^t \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau - x} + c_2(t) \int_t^B \frac{b_2(\tau) d\tau}{\tau - x} \right] dt = f(x) - h, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (12.15)$$

где $f(\cdot)$ – профиль нижней части штампа и h – перемещение штампа.

Перепишем ядро уравнения (12.15) так:

$$-c_1(t) \int_{\alpha}^t \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau - x} - c_1(t)I_1(x) + c_2(t) \int_t^{\beta} \frac{b_2(\tau) d\tau}{\tau - x} + c_2(t)I_2(x),$$

$$I_1(x) = \int_A^{\alpha} \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau - x}, \quad I_2(x) = \int_{\beta}^B \frac{b_2(\tau) d\tau}{\tau - x}.$$

Переставим интегралы и получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{q(\tau) d\tau}{\tau - x} = f(x) - h + C_1 I_1(x) - C_2 I_2(x), \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (12.16)$$

где

$$q(\tau) = -b_1(\tau) \int_{\tau}^{\beta} p(t) c_1(t) dt + b_2(\tau) \int_{\alpha}^{\tau} p(t) c_2(t) dt, \quad (12.17)$$

$$C_1 = \int_{\alpha}^{\beta} p(t) c_1(t) dt, \quad C_2 = \int_{\alpha}^{\beta} p(t) c_2(t) dt.$$

Будем искать решение уравнения (12.16) в классе ограниченных функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Запишем необходимое и достаточное условие его разрешимости

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x) - h + C_1 I_1(x) - C_2 I_2(x)}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} dx = 0$$

и учтем, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} = \pi, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} \frac{dx}{x - \tau} = 0$$

(эти равенства можно получить как следствие формулы (2.6)). Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{I_1(x) dx}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} = 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{I_2(x) dx}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} = 0.$$

Действительно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{I_1(x) dx}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_A^{\alpha} \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau - x} \right) \frac{dx}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} =$$

$$= \int_A^{\alpha} b_1(\tau) \left(- \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} \frac{dx}{x - \tau} \right) d\tau = 0.$$

Второе равенство доказывается аналогично. Тогда

$$h = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x) dx}{\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}}. \quad (12.18)$$

Таким образом, из формулы (12.18) определяется поступательное движение штампа h , или, если h задано, определяются границы области контакта.

Сравним коэффициенты при логарифмических функциях справа и слева в уравнении (12.16) и получим равенства $q(\alpha) = -b_1(\alpha)C_1$, $q(\beta) = b_2(\beta)C_2$. В частном случае, когда $c_1(\cdot) \equiv 1$, $c_2(\cdot) \equiv 1$, имеем $C_1 = C_2 = P$. При этом определяются значения $q(\alpha), q(\beta)$ и тогда решение СИУ (12.16) может быть найдено аналитически или численно с помощью алгоритма, изложенного в главе 10. Из (12.17) следует, что

$$q(\tau) = [b_1(\tau) + b_2(\tau)] \int_{\alpha}^{\tau} p(t) dt - b_1(\tau)P$$

и

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{q(t) + b_1(t)P}{b_1(t) + b_2(t)} \right) \quad (b_1(t) + b_2(t) \neq 0). \quad (12.19)$$

В общем случае при построении решения интегрального уравнения Вольтерра с вырожденным ядром (12.17) можно воспользоваться теоремой 8.4. Но проще всего выполнить следующие действия. Продифференцируем уравнение (12.17)

$$q'(\tau) = -b_1'(\tau) \int_{\tau}^{\beta} p(t)c_1(t)dt + b_1(\tau)c_1(\tau)p(\tau) + b_2'(\tau) \int_{\alpha}^{\tau} p(t)c_2(t)dt + b_2(\tau)c_2(\tau)p(\tau) \quad (12.20)$$

и исключим из равенств (12.17) и (12.20) интеграл от τ до β . Получим на $\alpha, \beta]$

$$[b_1(\tau)c_1(\tau) + b_2(\tau)c_2(\tau)]p(\tau) + [b_2'(\tau) - \frac{b_1'(\tau)}{b_1(\tau)}b_2(\tau)] \int_{\alpha}^{\tau} p(t)c_2(t) dt = q'(\tau) - \frac{b_1'(\tau)}{b_1(\tau)}q(\tau).$$

Как показано в разделе 7.1, решение этого уравнения существует, единственно и может быть записано по формуле (7.7) при

$$a(\tau) = b_1(\tau)c_1(\tau) + b_2(\tau)c_2(\tau), \quad b(\tau) = b_2'(\tau) - \frac{b_1'(\tau)}{b_1(\tau)}b_2(\tau), \quad c(\tau) = c_2(\tau),$$

если только $a(\tau) \neq 0$.

Второй способ состоит в следующем. Построим функцию

$$F(x) = \{f_A(x), x \in [A, \alpha], \quad f(x) - h, x \in [\alpha, \beta], \quad f_B(x), x \in [\beta, B]\},$$

где $f_A(\cdot)$, $f_B(\cdot)$ – гладкие функции, сопрягающие линию контакта с границей основания. Тогда интегральное уравнение контактной задачи запишется в виде

$$\int_A^B p(t) \left[-c_1(t) \int_A^t \frac{b_1(\tau) d\tau}{\tau - x} + c_2(t) \int_t^B \frac{b_2(\tau) d\tau}{\tau - x} \right] dt = F(x), \quad x \in (A, B), \quad (12.21)$$

где $p(\cdot)$ – искомое распределение давления (область определения этой функции расширена до всего отрезка $[A, B]$).

Решение $p(\cdot)$ уравнения (12.21) должно быть таким, чтобы равнодействующие сил давления на отрезках $[A, \alpha]$ и $[\beta, B]$ имели значения, близкие к нулю. Это может быть обеспечено за счет такого выбора функций $f_A(\cdot)$ и $f_B(\cdot)$, чтобы соответствующие участки границы полуплоскости имели минимальную упругую энергию (в соответствии с принципом минимума потенциальной энергии)

В соответствии с изложенным в главе 9, СИУ (12.21) также эквивалентно уравнению с ядром Коши

$$\int_A^B \frac{q(\tau) d\tau}{\tau - x} = F(x), \quad x \in (A, B), \quad (12.22)$$

где

$$-b_1(\tau) \int_{\tau}^B c_1(t)p(t) dt + b_2(\tau) \int_A^{\tau} c_2(t)p(t) dt = q(\tau), \quad \tau \in [A, B]. \quad (12.23)$$

Если уравнение (12.22) имеет ограниченное решение, то $q(A) = 0$, $q(B) = 0$. Из условия разрешимости

$$\int_A^B \frac{F(x) dx}{\sqrt{(B-x)(x-A)}} = 0,$$

как и в предыдущем случае, определяется величина h .

В рассматриваемом частном случае искомое решение

$$p(\tau) = q'(\tau) + \frac{Q}{2}, \quad \tau \in (-1, 1), \quad Q = \int_A^B p(t) dt.$$

Эта величина не задается в условии контактной задачи, но легко видеть, что

$$Q = \frac{2}{\beta - \alpha} [P - q(\beta) + q(\alpha)].$$

При приближенных расчетах можно положить $Q = P$.

Сравним оба способа решения СИУ (12.15). Рассмотрим известный пример [153]. Пусть $f(x) = mx^2$, $m > 0$ (параболический в плане штамп) и область контакта симметрична относительно начала координат, т. е. $\alpha = -\beta$. Выберем квазилогарифмическое ядро основания вида (12.14). Будем считать для определенности, что $A = -1$, $B = 1$.

Так как

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

то из (12.18) сразу следует, что $h = m/2$. Тогда

$$I_1(x) = \frac{1-\beta}{2} + \frac{1+x}{2} \ln \frac{\beta+x}{1+x}, \quad I_2(x) = -\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-x}{2} \ln \frac{\beta-x}{1-x},$$

и первый способ приводит к СИУ

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{q(\tau) d\tau}{\tau-x} = m(x^2 - \frac{1}{2}) + P[\frac{1+x}{2} \ln \frac{\beta+x}{1+x} + \frac{1-x}{2} \ln \frac{\beta-x}{1-x} + 1 - \beta], \quad (12.24)$$

при этом необходимо $q(-\beta) = P(\beta-1)/2$, $q(\beta) = P(1-\beta)/2$. Чтобы в симметричном случае при четной правой части уравнения получить устойчивый расчетный алгоритм, применим следующий прием. При $x=0$ из (12.24) следует, что

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{q(\tau)}{\tau} d\tau = -\frac{m}{2} + P(\ln \beta + 1 - \beta).$$

Тогда

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{q(\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau-x} = mx + P[\frac{1+x}{2} \ln \frac{\beta+x}{1+x} + \frac{1-x}{2} \ln \frac{\beta-x}{1-x} - \ln \beta]/x.$$

По решению $q(\cdot)$ этого уравнения, как следует из формулы (12.19), вычисляется решение исходного уравнения

$$p(\tau) = q'(\tau) + \frac{P}{2}, \quad \tau \in (\alpha, \beta). \quad (12.25)$$

Второй способ состоит в следующем. Выберем функции

$$f_A(x) = k_1(1+x)^3 + k_2(1+x)^2, \quad f_B(x) = k_1(1-x)^3 + k_2(1-x)^2,$$

где из условий сопряжения линий в точках α и β

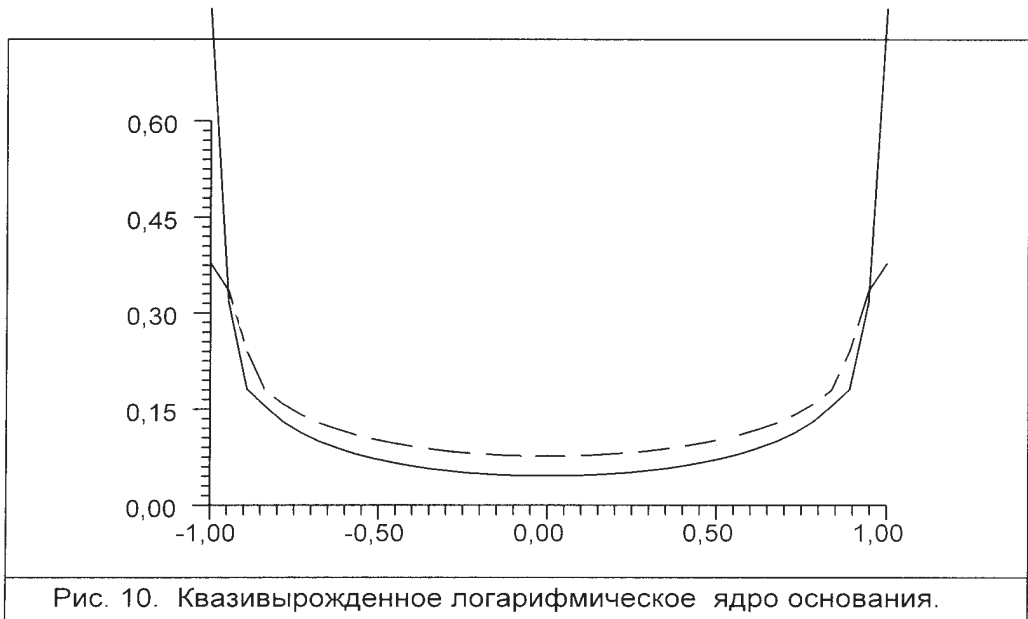
$$k_1 = \frac{2(h-m\beta)}{(1+\beta)^3}, \quad k_2 = \frac{m(m+2)\beta - 3h}{(1-\beta)^2}.$$

Из условия разрешимости уравнения (12.22) найдем значение h . Применим тот же прием, что и выше, и придем к СИУ

$$\int_{-1}^1 \frac{q(\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau-x} = G(x), \quad x \in (-1, 1),$$

где

$$G(x) = \begin{cases} (f_A(x) + h)/x, & x \in [-1, -\beta]; \\ mx, & x \in [-\beta, \beta]; \\ (f_B(x) + h)/x, & x \in [\beta, 1]. \end{cases}$$



На рис. 10 показаны графики функций $p(\cdot)$, значения которых были вычислены первым (сплошная линия) и вторым (пунктирная линия) способами.

12.3. Другие модели ядра основания

В разделе 12.2 рассматривался в основном частный случай (12.14) квазивырожденного логарифмического ядра основания (12.13). В общем случае функции $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$, $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ могут быть заданы так, чтобы ядро основания вида (12.13) соответствовало упругой полуплоскости с иными свойствами. За счет выбора этих функций можно задать закон изменения модуля упругости среды в направлении оси x (вдоль границы полуплоскости).

Покажем, что степенной закон изменения модуля упругости в направлении оси y также может быть учтен в рамках рассматриваемой модели. Действительно, пусть

$$b_1(\tau) = \left(\frac{t-\tau}{\tau-A}\right)^{-\nu}, \quad b_2(\tau) = \left(\frac{B-\tau}{\tau-t}\right)^{\nu}, \quad 0 < \nu < 1.$$

Тогда по формулам (2.8) и (2.9)

$$V(t, x) = \frac{\pi}{\sin \nu \pi} \times \begin{cases} c_1(t) \cos \nu \pi \left(\frac{x-A}{t-x}\right)^{\nu} + c_2(t) \left(\frac{B-x}{t-x}\right)^{\nu} - c_1(t) - c_2(t), & x \in (A, t), \\ c_1(t) \left(\frac{x-A}{x-t}\right)^{\nu} + c_2(t) \cos \nu \pi \left(\frac{B-x}{x-t}\right)^{\nu} - c_1(t) - c_2(t), & x \in (t, B). \end{cases}$$

Нормировка ядра основания обеспечивается за счет выбора функций $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$. В этом случае СИУ контактной задачи также эквивалентно двум интегральным уравнениям, одно из которых – СИУ с ядром Коши с дополнительными постоянными в

правой части, а другое

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(t)W(t, \tau) dt = q(\tau), \quad \tau \in (\alpha, \beta),$$

где

$$W(t, \tau) = \left\{ -c_1(t) \left(\frac{\tau - A}{t - \tau} \right)^{\nu}, \quad t \in (\tau, \beta), \quad c_2(t) \left(\frac{B - \tau}{\tau - t} \right)^{\nu}, \quad t \in (\alpha, \tau) \right\}.$$

Если показатель степени ν не является постоянной, а зависит от y , нужно взять в качестве ядра основания квазивырожденное степенное ядро. В самом общем случае, когда задана функция $V(t, x)$ сложной структуры, можно заменить ее сколь угодно близким квазивырожденным логарифмическим ядром, квазивырожденным степенным ядром или их суммой. Тогда процесс решения интегрального уравнения контактной задачи также будет сведен к двум этапам: обращению характеристического интегрального оператора с ядром Коши и решению интегрального уравнения типа Вольтерра с вырожденным ядром.

Рассмотрим ситуацию, когда в контактной задаче учитываются боковые (касательные) перемещения точек границы деформируемого основания. В общем случае свойства ЛДО могут быть заданы ядром основания в виде функциональной матрицы

$$\begin{Bmatrix} V_{xx}(t, x) & V_{xy}(t, x) \\ V_{yx}(t, x) & V_{yy}(t, x) \end{Bmatrix},$$

где первый индекс указывает на направление единичной силы, приложенной в точке t , а второй – направление перемещения точки x . Для изотропного полупространства с модулем упругости, изменяющимся по закону $E = E_0 y^{\nu}$, $0 < \nu < 1$ (квазиклассическое основание) матричное ядро построено в [101], п.9.3,

$$V_{xx}(t, x) = \frac{\theta_{\nu}^1}{\nu |t - x|^{\nu}}, \quad V_{yy}(t, x) = \frac{\theta_{\nu}}{\nu |t - x|^{\nu}}, \quad V_{xy}(t, x) = -V_{yx}(t, x) = \frac{\theta_{\nu}^0 \operatorname{sgn}(t - x)}{\nu |t - x|^{\nu}},$$

где θ_{ν} , θ_{ν}^0 , θ_{ν}^1 – связанные друг с другом заданные постоянные.

Пусть $p_y(\cdot)$ – вертикальная и $p_x(\cdot)$ – горизонтальная компоненты давления, распределенного вдоль линии контакта L . Тогда контактная задача сводится к системе интегральных уравнений

$$\int_L p_x(t) V_{xx}(t, x) dt + \int_L p_y(t) V_{yx}(t, x) dt = f_x(x) - h_x, \quad x \in L,$$

$$\int_L p_x(t) V_{xy}(t, x) dt + \int_L p_y(t) V_{yy}(t, x) dt = f_y(x) - h_y, \quad x \in L,$$

где $f_x(x)$ и $f_y(x)$ – перемещения граничной точки x в направлении осей x и y , а h_x и h_y – поступательные перемещения штампа в направлении осей x и y соответственно.

По аналогии со случаем плоской задачи о вдавливании сцепленного штампа, рассмотренным в [101], п.10.1, покажем, что эта система уравнений равносильна одному интегральному уравнению, но для комплекснозначных функций.

Действительно, сложим первое уравнение со вторым, умноженным на i , и получим

$$\int_L p(t)V_1(t, x) dt + \int_L \overline{p(t)}V_2(t, x) dt = f(x) - h, \quad x \in L,$$

где $p(\cdot) = p_x(\cdot) + ip_y(\cdot)$, $f(\cdot) = f_x(\cdot) + if_y(\cdot)$, $h = h_x + ih_y$ и

$$V_1(t, x) = \frac{1}{2} (V_{xx}(t, x) + iV_{xy}(t, x) - iV_{yx}(t, x) + V_{yy}(t, x)),$$

$$V_2(t, x) = \frac{1}{2} (V_{xx}(t, x) + iV_{xy}(t, x) + iV_{yx}(t, x) - V_{yy}(t, x))$$

– обобщенные ядра основания.

Каждая из функций $V_1(t, x)$ и $V_2(t, x)$ может быть задана как логарифмическое или степенное ядро в виде суммы двух криволинейных интегралов с переменными пределами

$$V_j(t, x) = \int_{At} \frac{k_{Aj}(\tau, t) d\tau}{\tau - x} + \int_{tB} \frac{k_{Bj}(\tau, t) d\tau}{\tau - x}, \quad t, x \in AB,$$

где AB – гладкая дуга, расположенная вдоль границы ЛДО. Такое представление удобно тем, что позволяет использовать общий подход как в случае основания-полуплоскости, так и в случае основания с произвольной границей. Заметим, что проблема выбора ядер основания $V_j(t, x)$ в случае произвольной границы основания, когда требуется учесть касательные перемещения ее точек, полностью пока не решена. За счет выбора ядер основания можно учесть и влияние сил трения при скольжении штампа.

Для иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть интегральное уравнение контактной задачи

$$\int_{ab} p(\tau)V(\tau, \xi) d\tau = f(\xi) - h, \quad \xi \in ab,$$

где

$$V(\tau, \xi) = - \int_{At} \frac{\tau - A}{B - A} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + \int_{tB} \frac{B - \tau}{B - A} \frac{d\tau}{\tau - \xi}, \quad \tau, \xi \in AB.$$

Повторим все рассуждения раздела 12.2 и сведем исходное уравнение к двум другим: СИУ с ядром Коши и интегральному уравнению типа Вольтерра.

Пусть ab – отрезок вещественной оси и $f(\xi) = n\xi + im\xi^2$, где n и m – заданные постоянные. Здесь первое слагаемое определяет боковое перемещение граничных точек упругого тела, моделируя текучесть, а второе задает форму штампа. Результаты расчетов приведены на рис. 11: верхняя линия – y -компонента давления, нижняя –

x -компонента. На рис. 12 для того же случая показаны нормальная (верхняя линия на рисунке) и касательная (нижняя линия) компоненты, пересчитанные с учетом формы штампа.

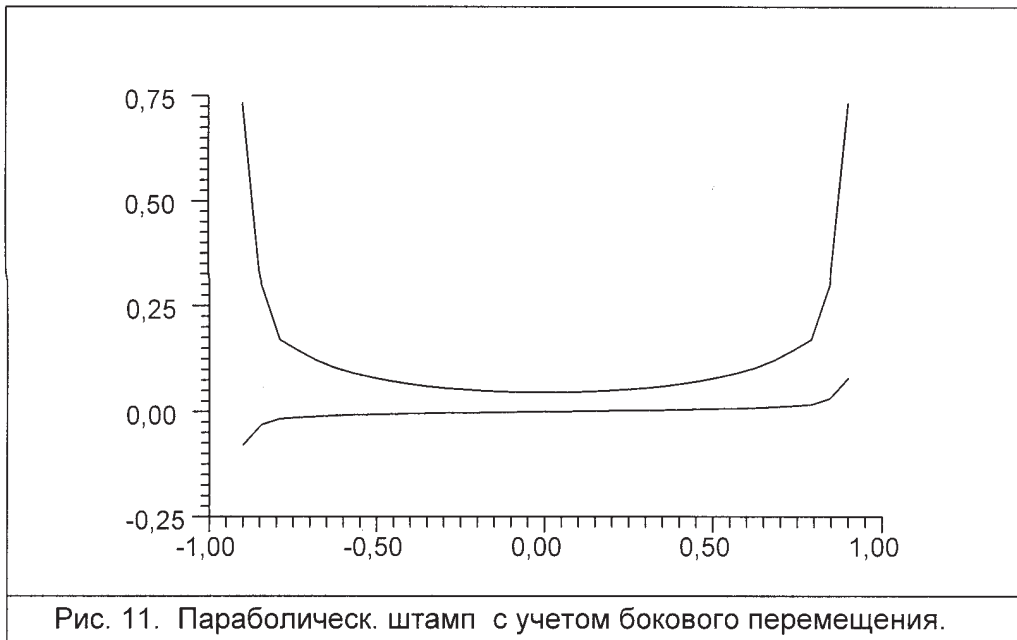


Рис. 11. Параболическ. штамп с учетом бокового перемещения.

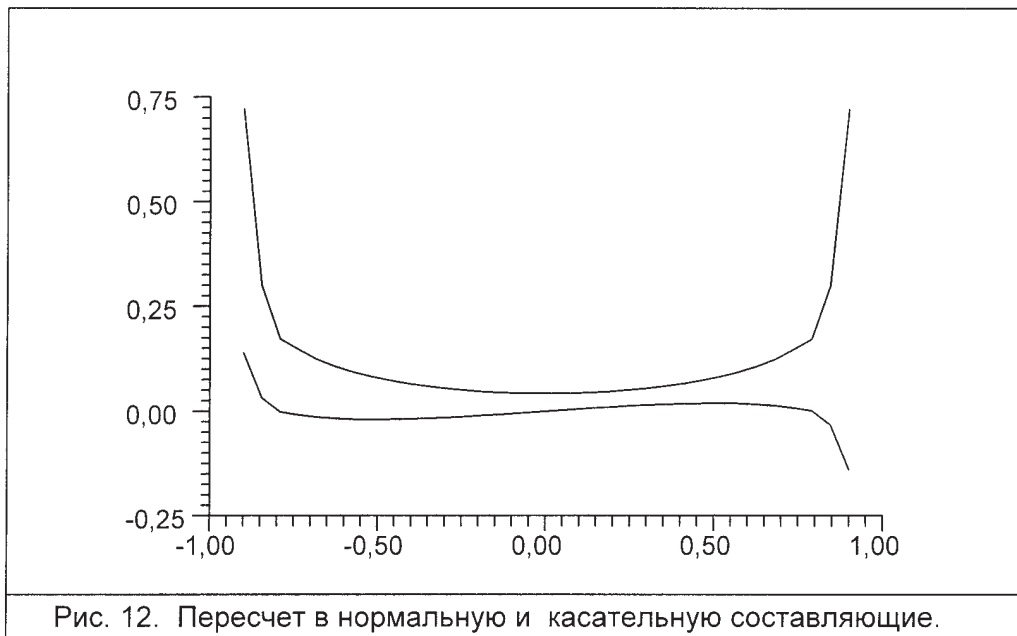
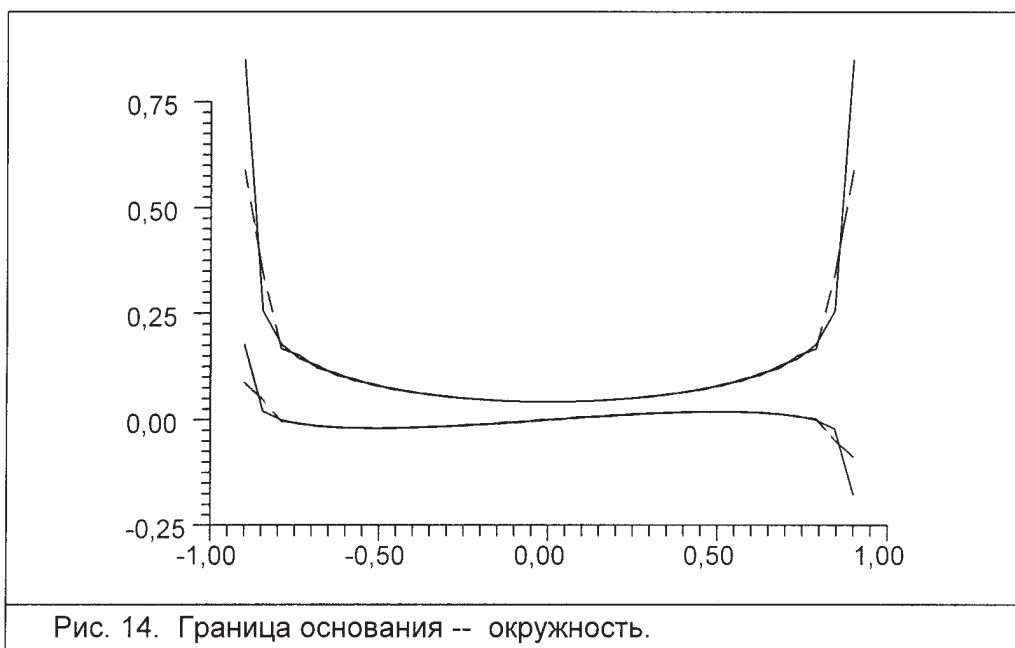
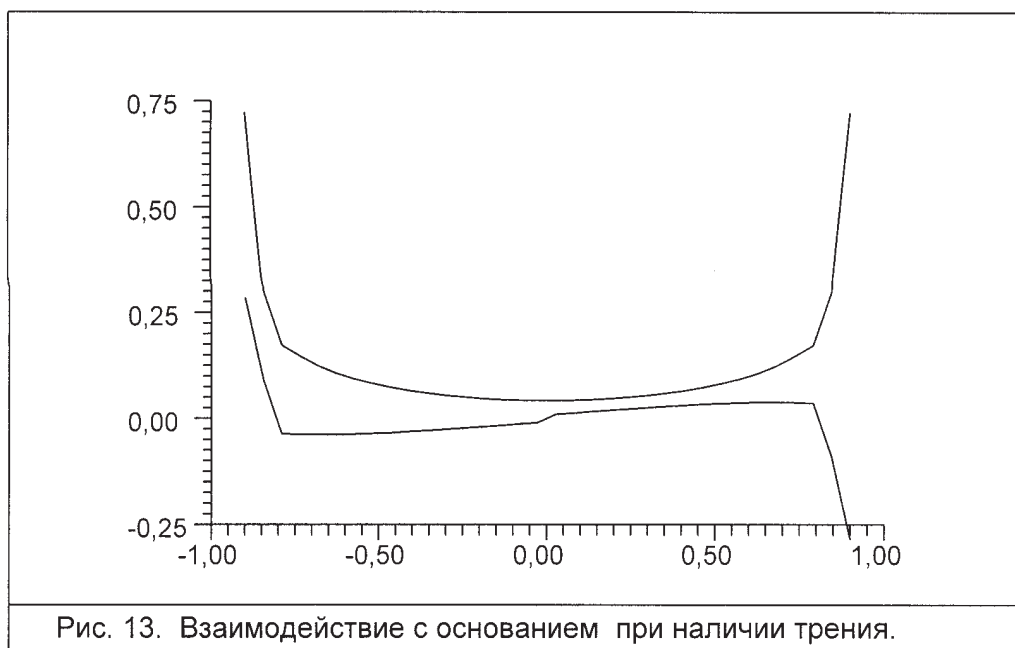


Рис. 12. Пересчет в нормальную и касательную составляющие.

Чтобы учесть трение, нужно задать связь между нормальной и касательной составляющими распределенной вдоль участка контакта силы в соответствии с заданными условиями контакта. На рис. 13 показаны нормальная и касательная составляющая давления в том же примере, но с учетом силы трения (выбран коэффициент трения 0.2).

Наконец, на рис. 14 даны графики компонент давления в случае, когда границей основания является окружность большого радиуса. В первом случае (сплошные линии) граница основания является выпуклой по отношению к штампу, во втором (пунктирные линии) – вогнутой.



По той же схеме может быть рассмотрен случай, когда штамп вращается вокруг фиксированной точки. При этом, кроме равнодействующей приложенных к штампу сил, должен быть задан главный момент, а в правой части интегрального уравнения появится еще одна неизвестная величина – угол поворота штампа. Контактная

задача в случае, когда линия контакта состоит из нескольких участков, рассматривается точно так же. Принципиальных трудностей при этом не возникает, только соответственно увеличиваются требуемые вычислительные ресурсы при проведении численных расчетов.

12.4. Дополнительные замечания и библиографические указания

Как отмечает Д.И. Шерман в очерке "О становлении методов интегральных уравнений в теории упругости" (предисловие к книге [69]), первые попытки применения метода интегральных уравнений при исследовании задач теории упругости были предприняты сразу после появления теории Фредгольма. Как и при решении многих других задач математической физики, метод интегральных уравнений основан на представлении искомых решений системы дифференциальных уравнений с частными производными в виде криволинейных интегралов, ядрами которых являются фундаментальные решения (функции влияния) или функции Грина некоторых вспомогательных задач. Опыт показывает, что даже в тех случаях, когда ядра интегральных уравнений могут быть записаны аналитически, остается проблема многократного вычисления их значений при реализации алгоритмов численного решения.

Первая плоская контактная задача (о давлении цилиндра на упругую почву) была поставлена и решена С.А. Чаплыгиным (1900 г.). Изложенные в книге И.Я. Штаермана "Контактная задача теории упругости" [153] постановки задач и методы решения соответствующих сингулярных интегральных уравнений сыграли важную роль в дальнейших исследованиях многих авторов. В книге [104] дан исчерпывающий обзор результатов исследований (до 1976 г.) контактных статических, динамических и температурных задач для упругих, вязкоупругих и пластических тел. Некоторые из ранних работ были перечислены во введении к главе 3. Ссылки на более поздние работы можно найти в книгах Л.А. Галина [14], [15] и Г.Я. Попова [99], [100]. Отметим особо работу В.Д. Купрадзе [50], где предложен метод решения контактных задач теории упругости, отличающийся простотой и универсальностью.

В общем случае решение задачи о действии сосредоточенной силы на границу упругой полуплоскости известно, оно может быть найдено методом преобразования Фурье (см., например, [2], §58). Но при попытке использовать это решение в качестве ядра основания возникают определенные трудности математического характера. В работе Н.А. Ростовцева [105] получено точное решение задачи о действии нормальной силы на полупространство со степенным законом изменения модуля упругости.

Легко видеть, что в большинстве случаев (например, $f(\cdot) \equiv const$) решение (12.6) уравнения (12.3) неограниченно возрастает при подходе к границам участка контак-

та. В [153], с. 115 это обстоятельство комментируется так: "В действительности реальный профиль упругого тела никогда не будет иметь угловых точек, так что клин или штамп, имеющий в сечении прямые углы, являются абстракциями, которые и приводят при решении контактной задачи и нереальному распределению давления в области контакта". В дальнейших исследованиях разных авторов были предприняты попытки устранить этот недостаток.

В [153] было предложено рассматривать штамп, профиль которого ограничен по краям участками парабол. При этом предполагается, что ширина области контакта неизвестна. Показано, что чем круче закраины, тем больше значения искомой функции в окрестности концевых точек. В книге [29] было впервые описано упругое комбинированное основание с той же целью – устранить недостаток классической модели. В более сложной модели (см. [14], гл. 1, §12) предполагается, что линия контакта состоит из трех частей, на одной из которых имеет место сцепление, а на двух других – трение.

Интегральное уравнение со степенным ядром

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} = [h-f(x)]^{\mu}, \quad x \in (-\alpha, \alpha),$$

было получено в работе [3] при решении плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала. К уравнению вида

$$\int_L \frac{[a_2 - \operatorname{sgn}(t-x)a_1]^{\mu} p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} = g(x), \quad x \in L,$$

правая часть которого также содержит неопределенную постоянную, в работе [5] сведена плоская контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. Все эти уравнения являются частными случаями СИУ (6.16). Другие интегральные уравнения со степенной особенностью в ядре, возникающие при исследовании различных контактных задач для линейно-вязкоупругих тел, приведены в [104].

При изучении контактных задач теории упругости СИУ с логарифмическими и степенными ядрами и, как правило, с постоянными коэффициентами исследовались в работах В.М. Александрова [1], Р.Х. Арутюняна и М.М. Манукяна [3], [4], [5], [58], С.М. Мхитаряна [62], [63] в основном асимптотическим методом М.Г. Крейна [48] и методом ортогональных многочленов в работах Г.Я. Попова [96]–[101]. В работе Б.С. Рубина [112] был использован метод интегральных тождеств.

Глава 13.

Упругая плоскость с дефектом вдоль гладкой дуги

Интегральные уравнения граничных задач плоской теории упругости выводятся, как правило, с помощью формул Колосова-Мусхелишвили, которые дают выражения всех искомым функций через две аналитические функции. Эти аналитические функции, в свою очередь, могут быть представлены в виде интегралов типа Коши или им аналогичных по границе области определения. Можно выделить два основных метода сведения двумерных задач теории упругости к сингулярным интегральным уравнениям (см. [69], гл.IV) : метод, приводящий к уравнениям Мусхелишвили, и метод, приводящий к уравнениям Шермана-Лауричеллы. В математической теории трещин, разработанной В.В. Панасюком, М.П. Савруком и их коллегами ([67], [114], [115] и др.), метод сведения граничных задач к интегральным уравнениям близок к используемому при выводе уравнений Шермана-Лауричеллы.

В главе 13 получены и исследованы сингулярные интегральные уравнения основных задач теории упругости в плоскости с разрезами или тонкими включениями. Такие неоднородности принято называть *дефектами упругой плоскости*. Одно из существенных отличий от методики, принятой в математической теории трещин, состоит в том, что вместо интегралов типа Коши при решении задач о скачке для вспомогательных функций используются интегралы с логарифмическими ядрами в виде интегралов типа Коши с переменным пределом. Поэтому и сингулярные уравнения в математических моделях плоскости с дефектом имеют в ядре только логарифмические особенности.

В плоской теории упругости для описания состояния напряженно-деформированного тела в декартовой системе координат используется пять вещественнозначных функций: нормальные σ_x, σ_y и касательная τ_{xy} компоненты тензора напряжения и перемещения u_x, u_y (по ним определяются и компоненты тензора деформации).

При отсутствии объемных сил (известно, что к этому случаю сводится общий случай) напряжения и перемещения выражаются через две аналитические функции $\varphi(z), \psi(z), z = x + iy$ по формулам Колосова-Мусхелишвили [61]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

$$2G(u_x + iu_y) = k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где $G = E/2(1 + \mu)$ – модуль сдвига, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $k = 3 - 4\mu$ в случае плоской деформации или $k = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния.

Любая задача плоской теории упругости может быть формализована так: найти две функции $\varphi(z), \psi(z)$, аналитические в заполненной упругим телом области D с

границей L и удовлетворяющие некоторым условиям на L и, может быть, в бесконечно удаленной точке. К основным граничным условиям на линии L относятся:

1) если на L заданы напряжения, то

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = i \int_0^s (X_n + iY_n) d\sigma + C, \quad t \in L,$$

где X_n, Y_n – компоненты напряжения, s и σ – дуговые абсциссы точек t и τ , C – некоторая постоянная;

2) если на L заданы перемещения, то

$$k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2Gg(t), \quad t \in L,$$

где $g(t)$ – заданное комплексное перемещение. Здесь подразумевается, что $\varphi(t), \psi(t)$ – предельные значения аналитических функций $\varphi(z), \psi(z)$ на линии L из области D . Заметим, что постоянная C в условии первой граничной задачи вовсе не произвольная, она отличается множителем $-i$ от напряжения, приложенного в точке границы с дуговой абсциссой 0 .

Если область D неограничена, то дополнительно предполагается, что функции $\varphi(z), \psi(z)$ обращаются в нуль на бесконечности, что равносильно требованию об отсутствии напряжения и вращения в бесконечно удаленной точке.

13.1. Вспомогательная задача

Рассмотрим упругую плоскость с дефектом вдоль гладкой дуги ab . Пусть вдоль ab разрывны компоненты напряжения и перемещения (деформации). Будем обозначать знаками \pm предельные значения аналитических в разрезанной по ab плоскости функций на левом и правом (по отношению к направлению движения от a к b) берегах разреза. Следуя принципам математической теории трещин [67], [114], [115], рассмотрим вспомогательную задачу: на дуге ab заданы скачок комплексного напряжения и скачок комплексного перемещения. Функции, определяющие значения скачков, должны обращаться в нуль в точках a и b . Поэтому зададим их в виде криволинейных интегралов с переменными пределами. Тогда граничные условия примут такой вид:

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ - [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \int_{at} \alpha(\tau) d\tau, \quad t \in ab, \quad (13.1)$$

$$[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ - [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \int_{at} \beta(\tau) d\tau, \quad t \in ab, \quad (13.2)$$

где $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие заданные на ab функции, что

$$\int_{ab} \alpha(\tau) d\tau = 0, \quad \int_{ab} \beta(\tau) d\tau = 0. \quad (13.3)$$

Сложим (13.1) и (13.2), получим

$$(k+1)\varphi^+(t) - (k+1)\varphi^-(t) = \int_{at} [\alpha(\tau) + \beta(\tau)] d\tau, \quad t \in ab.$$

Решение этой задачи о скачке запишем не интегралом типа Коши, а интегралом с логарифмическим ядром (см. главу 3)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau, \quad (13.3)$$

при этом, если учесть равенства (13.3),

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \varphi'^+(t) - \varphi'^-(t) = \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{k+1}.$$

Умножим равенство (13.1) на k и вычтем из него (13.2). Получим

$$(k+1)[t\overline{\varphi'^+(t)} + \overline{\psi^+(t)}] - (k+1)[t\overline{\varphi'^-(t)} + \overline{\psi^-(t)}] = \int_{at} [k\alpha(\tau) - \beta(\tau)] d\tau, \quad t \in ab.$$

Тогда

$$\overline{\psi^+(t)} - \overline{\psi^-(t)} = \int_{at} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} d\tau - t[\overline{\varphi'^+(t)} - \overline{\varphi'^-(t)}]$$

и

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{k\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \frac{\bar{\tau} d\tau}{\tau - z}. \quad (13.5)$$

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, используемые в теории трещин ([114], с.19), могут быть получены из формул (13.4) и (13.5) дифференцированием. При этом $\alpha(t) = 2q(t)$, $\beta(t) = i(k+1)g'(t)$ и $\alpha(t) + \beta(t) = i(k+1)Q(t)$. Граничные условия (I.66) и (I.67) из [114] могут быть получены из условий (13.1) и (13.2) также дифференцированием.

Из формул (13.4) и (13.5) следует, что

$$\begin{aligned} & [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\bar{\tau} \end{aligned} \quad (13.6)$$

и

$$\begin{aligned} & [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \\ & = \frac{k}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} d\tau + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\bar{\tau}. \quad (13.7)$$

В случае, когда ab – отрезок вещественной оси $[a, b]$, эти равенства существенно упрощаются

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{(1-k)\alpha(\tau) + 2\beta(\tau)}{k+1} \ln \frac{b-t}{|\tau-t|} d\tau, \quad (13.8)$$

$$[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{2k\alpha(\tau) + (k-1)\beta(\tau)}{k+1} \ln \frac{b-t}{|\tau-t|} d\tau, \quad (13.9)$$

здесь также учтены условия (13.3).

13.2. Основные граничные задачи

Рассмотрим первую и вторую основные граничные задачи для упругой плоскости с дефектом вдоль дуги ab .

Пусть на берегах разреза заданы напряжения (несамоуравновешенные усилия)

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^\pm = \int_{at} f^\pm(\tau) d\tau + C, \quad t \in ab. \quad (13.10)$$

Тогда функция $\alpha(t) = f^+(t) - f^-(t)$, а функцию $\beta(\cdot)$ следует искать из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\bar{\tau} = \int_{at} [f^+(\tau) + f^-(\tau)] d\tau + 2C, \quad t \in ab. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Пусть на берегах разреза заданы перемещения (в интегральной форме)

$$[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^\pm = \int_{at} g^\pm(\tau) d\tau + D, \quad t \in ab. \quad (13.12)$$

Тогда $\beta(t) = g^+(t) - g^-(t)$, а функция $\alpha(\cdot)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\bar{\tau} = \int_{at} [g^+(\tau) + g^-(\tau)] d\tau + 2D, \quad t \in ab. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Легко видеть, что интегральные уравнения (13.11) и (13.13) являются полными аналогами уравнений (I.78) и (I.81) из [114]. Существенное отличие состоит в том, что

ядра уравнений (I.78) и (I.81) содержат особенности 1-го порядка, а ядра уравнений (13.11) и (13.13) – особенности логарифмического типа.

Для отрезка $[a, b]$ вещественной оси уравнения (13.11) и (13.13) примут вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{(1-k)[f^+(\tau) - f^-(\tau)] + 2\beta(\tau)}{k+1} \ln \frac{b-t}{|\tau-t|} d\tau = \int_a^t [f^+(\tau) + f^-(\tau)] d\tau + 2C, \quad t \in (a, b)$$

и

$$\frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{2k\alpha(\tau) + (k-1)[g^+(\tau) - g^-(\tau)]}{k+1} \ln \frac{b-t}{|\tau-t|} d\tau = \int_a^t [g^+(\tau) + g^-(\tau)] d\tau + 2D, \quad t \in (a, b)$$

В соответствии с общей теорией СИУ с логарифмическими ядрами можно записать их решения в явном виде, если воспользоваться тождеством

$$\int_a^b \nu(\tau) \ln \frac{b-t}{|\tau-t|} d\tau = \int_a^b \left(\int_a^\xi \nu(\tau) d\tau \right) \frac{d\xi}{\xi-t}$$

и перейти к эквивалентному СИУ с ядром Коши. Эта эквивалентность позволяет использовать алгоритмы численного решения интегральных уравнений, рассмотренные выше.

Заметим, что первая основная граничная задача (13.10) сводится к случаю, когда $f^+(\cdot) = f^-(\cdot)$. Для доказательства используем прием, описанный в [69], §23. Действительно, введем новую искомую функцию

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} [f^+(\tau) - f^-(\tau)] \ln \frac{b-z}{\tau-z} d\tau.$$

Тогда

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi_1(t)}]^\pm = [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^\pm - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} [f^+(\tau) - f^-(\tau)] \ln \frac{b-t}{t-\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{at} [f^+(\tau) + f^-(\tau)] d\tau,$$

здесь выбрана та же ветвь многозначной логарифмической функции, что и в §1.2. Точно так же можно показать, что вторая граничная задача (13.12) сводится к случаю, когда $g^+(\cdot) = g^-(\cdot)$.

Рассмотрим еще один способ сведения основных граничных задач для плоскости с дефектом вдоль дуги к интегральным уравнениям. Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \gamma(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi-z} d\tau, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\delta(\tau) d\tau}{\tau-z},$$

где $\gamma(\cdot)$ и $\delta(\cdot)$ – некоторые функции. Тогда

$$\begin{aligned} [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^\pm &= \pm \frac{1}{2} \int_{at} \gamma(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \gamma(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} d\tau \pm \\ &\pm \frac{t}{2} \overline{\gamma(t)} - \frac{t}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\gamma(\tau)} d\overline{\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}} \pm \frac{1}{2} \overline{\delta(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\delta(\tau)} d\overline{\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}}, \\ [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^\pm &= \pm \frac{k}{2} \int_{at} \gamma(\tau) d\tau + \frac{k}{2\pi i} \int_{ab} \gamma(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} d\tau \mp \\ &\mp \frac{t}{2} \overline{\gamma(t)} + \frac{t}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\gamma(\tau)} d\overline{\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}} \mp \frac{1}{2} \overline{\delta(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\delta(\tau)} d\overline{\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ - [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- &= \int_{at} \gamma(\tau) d\tau + t\overline{\gamma(t)} + \overline{\delta(t)}, \\ [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ - [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- &= k \int_{at} \gamma(\tau) d\tau - t\overline{\gamma(t)} - \overline{\delta(t)}. \end{aligned}$$

Если заданы условия (13.10), причем $f^+(\cdot) = f^-(\cdot) = f(\cdot)$, то

$$\int_{at} \gamma(\tau) d\tau + t\overline{\gamma(t)} + \overline{\delta(t)} = 0.$$

Выразим отсюда функцию $\delta(\cdot)$ через функцию $\gamma(\cdot)$, тогда

$$\begin{aligned} &[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \gamma(\tau) \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} + \int_{\tau b} \frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi} - \overline{t}} \right] d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \overline{\gamma(\tau)} \frac{\tau - t}{\overline{\tau} - \overline{t}} d\overline{\tau} = 2 \int_{at} f(\tau) d\tau + 2C, \quad t \in ab. \end{aligned} \tag{13.14}$$

Если же заданы условия (13.12), причем $g^+(\cdot) = g^-(\cdot) = g(\cdot)$, то

$$k \int_{at} \gamma(\tau) d\tau - t\overline{\gamma(t)} - \overline{\delta(t)} = 0$$

и

$$\begin{aligned} &[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \\ &= \frac{k}{\pi i} \int_{ab} \gamma(\tau) \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} + \int_{\tau b} \frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi} - \overline{t}} \right] d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \overline{\gamma(\tau)} \frac{\tau - t}{\overline{\tau} - \overline{t}} d\overline{\tau} = 2 \int_{at} g(\tau) d\tau + 2D, \quad t \in ab. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Случай, когда упругая полуплоскость имеет дефект вдоль кусочно-гладкой линии (совокупности гладких разомкнутых дуг, не имеющих общих точек, кроме, может быть, концов) рассматривается аналогично.

Глава 14.

Трещины в полуплоскости и в круге

При решении серии задач теории упругости для тел с трещинами в [67], [114], [115] используются комплексные потенциалы в виде криволинейных интегралов, ядра которых имеют сильную особенность. Когда упругое тело не заполняет всю плоскость, выражения для потенциалов получены с помощью метода сопряжения Н.И. Мусхелишвили [61].

В данной главе при выводе СИУ с логарифмическими особенностями в ядре, описывающих деформированное состояние упругих полуплоскости и круга с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги, используются полученные в главе 13 комплексные потенциалы в виде криволинейных интегралов по дефекту и метод Н.И. Мусхелишвили сведения к задаче сопряжения (продолжения через границу).

14.1. Потенциалы для полуплоскости

Построим комплексные потенциалы в задаче для упругой полуплоскости $\text{Re } z < 0$ с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab , не имеющей общих точек с осью абсцисс. Будем обозначать D^+ , D^- и L_0 верхнюю полуплоскость, нижнюю полуплоскость и разделяющую их ось.

Пусть на дуге ab , как и в разделе 13.1, заданы скачки напряжений (13.1) и перемещений (13.2), причем выполняются условия (13.3). Не уменьшая общности рассуждений предположим, что на оси абсцисс – границе упругой полуплоскости – напряжение отсутствует, т.е. задано условие

$$\varphi^-(t) + t\overline{\varphi'^-(t)} + \overline{\psi^-(t)} = 0, \quad t \in L_0. \quad (14.1)$$

Используем комплексные потенциалы, полученные в предыдущем параграфе для случая, когда дуга ab расположена в полной плоскости,

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau, & \varphi'_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \frac{d\tau}{\tau - z}, \\ \psi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{k\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\overline{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \frac{\overline{\tau} d\tau}{\tau - z}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции $\varphi_0(z) = \varphi(z) - \varphi_1(z)$ и $\psi_0(z) = \psi(z) - \psi_1(z)$, для которых дуга ab уже не является особой линией. Построим вспомогательную функцию, аналитическую в D^+ и D^- и непрерывно продолжимую на L_0 слева и справа по отношению к направлению движения на L_0 (т.е. сверху и снизу),

$$F(z) = \{\varphi_0(z), \quad z \in D^-; \quad -z\overline{\varphi'_0(\overline{z})} - \overline{\psi_0(\overline{z})}, \quad z \in D^+\}.$$

Разность ее предельных значений на оси в силу условия (14.1)

$$F^-(t) - F^+(t) = \varphi_0^-(t) + t\overline{\varphi_0'^-(t)} + \overline{\psi_0^-(t)} = -f_1(t), \quad t \in L_0,$$

где

$$f_1(t) = \varphi_1^-(t) + t\overline{\varphi_1'^-(t)} + \overline{\psi_1^-(t)}, \quad t \in L_0.$$

Тогда, как решение задачи о скачке,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x) dx}{x - z} \quad (14.2)$$

и

$$\varphi_0(z) = F(z), \quad \psi_0(z) = -zF'(z) - \overline{F(\bar{z})}, \quad z \in D^-. \quad (14.3)$$

По функциям $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ вычислим

$$\begin{aligned} f_1(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \left[\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - x} - \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - x} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - x}{\bar{\tau} - x} d\bar{\tau}, \quad x \in L_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\xi - x)(x - z)} \right] d\xi d\tau - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\bar{\xi} - x)(x - z)} \right] d\bar{\xi} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau - x}{\bar{\tau} - x} \frac{dx}{x - z} \right] d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов, стоящих в квадратных скобках, используем метод вычетов (есть удобная формула в [59], с. 418, пример 1). Еще проще воспользоваться формулой из примера 26а к главе 1 из [19]. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\xi - x)(x - z)} &= \left\{ \frac{1}{\xi - z}, \quad z \in D^+; \quad 0, \quad z \in D^- \right\}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\bar{\xi} - x)(x - z)} &= \left\{ 0, \quad z \in D^+; \quad -\frac{1}{\bar{\xi} - z}, \quad z \in D^- \right\}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau - x}{\bar{\tau} - x} \frac{dx}{x - z} &= \left\{ \frac{1}{2}, \quad z \in D^+; \quad \frac{1}{2} - \frac{\tau - z}{\bar{\tau} - z}, \quad z \in D^- \right\}. \end{aligned}$$

Тогда получим, учитывая равенства (13.3),

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau, \quad z \in D^+, \quad (14.3)$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - z}{\bar{\tau} - z} d\bar{\tau}, \quad z \in D^-. \quad (14.4)$$

Осталось вычислить функции $\varphi_0(\cdot), \psi_0(\cdot)$ по формулам (14.3) и записать потенциалы $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z)$.

14.2. Трещина в полуплоскости

При решении основных или смешанных задач для полуплоскости с трещиной нужно будет подставлять выражения функций $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ в граничные условия. Рассмотрим первую граничную задачу. Вычислим сумму предельных значений напряжений на дуге ab для потенциалов $\varphi_0(\cdot), \psi_0(\cdot)$:

$$\begin{aligned} & [\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)}]^+ + [\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)}]^- = \\ & = 2[F(t) - F(\bar{t}) + (t - \bar{t})\overline{F'(t)}], \quad t \in ab, \end{aligned}$$

здесь в правой части стоят прямые значения функции $F(\cdot)$ на дуге. При этом

$$\begin{aligned} 2[F(t) - F(\bar{t}) + (t - \bar{t})\overline{F'(t)}] &= \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - t} d\tau - \\ &- \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - \bar{t}} d\tau - \\ &- \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \frac{t - \bar{t}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \frac{(t - \bar{t})(\tau - \bar{\tau})}{(\bar{\tau} - t)^2} d\tau. \end{aligned}$$

Сумма предельных значений напряжений для потенциалов $\varphi_1(\cdot), \psi_1(\cdot)$ содержится в правой части формулы (13.6). Поэтому окончательно

$$\begin{aligned} & [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \\ & \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} - \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - \bar{t}} + \frac{(t - \bar{t})(\tau - \bar{\tau})}{(\bar{\tau} - t)^2} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \left[\int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - t} - \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \left[\frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} - \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} \right] d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{t - \bar{t}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

Если на дуге ab задано условие (13.10), то $\alpha(t) = f^+(t) - f^-(t)$, и правая часть предыдущей формулы должна быть равна

$$\int_{at} [f^+(\tau) + f^-(\tau)] d\tau + 2C, \quad t \in ab.$$

При самоуравновешенной нагрузке $f^\pm(t) = f(t)$ функция $\alpha(\cdot) \equiv 0$, а интегральное уравнение для функции $\beta(\cdot)$ примет вид

$$\begin{aligned} \int_{ab} \frac{\beta(\tau)}{k+1} \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi-t} - \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi-\bar{t}} - \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}-t} + \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}-\bar{t}} + \frac{(t-\bar{t})(\tau-\bar{\tau})}{(\bar{\tau}-t)^2} \right] d\tau + \\ + \int_{ab} \frac{\overline{\beta(\tau)}}{k+1} \left[\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}} - \frac{\tau-t}{\bar{\tau}-t} + \frac{t-\bar{t}}{\tau-\bar{t}} \right] d\bar{\tau} = 2\pi i \int_{at} f(\tau) d\tau + 2\pi i C, \quad t \in ab. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда дуга ab расположена вдоль мнимой оси и имеет концами точки $-ia$ и $-ib$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi-t} = \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}-\bar{t}} = \int_t^b \frac{ds}{s-x} = \ln \frac{b-x}{|t-x|}, \\ \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi-\bar{t}} = \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}-t} = \int_t^b \frac{ds}{s+x} = \ln \frac{b+x}{t+x}, \end{aligned}$$

и при самоуравновешенной нагрузке уравнение (14.6) примет вид

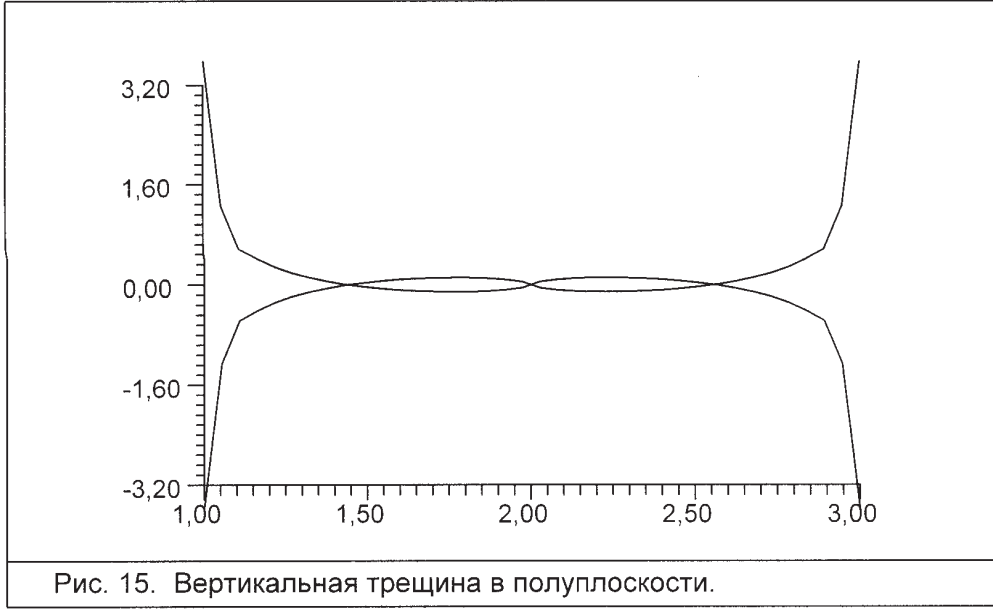
$$\int_a^b \frac{\beta(s)}{k+1} \left[\ln \frac{s+x}{|s-x|} - \frac{2sx}{(s+x)^2} \right] ds = \pi \int_a^x f(t) dt + \pi C, \quad x \in (a, b), \quad (14.7)$$

что совпадает с полученным в [114] уравнением (IV.21), выведенным при исследовании задачи о внутренней трещине в полуплоскости. Заметим, что постоянная C в правой части уравнения (14.7) не просто "постоянная интегрирования", а величина, имеющая вполне определенный физический смысл.

На рис. 15 показаны графики решений СИУ (14.7) в случае, когда заданы симметричные относительно центра отрезка самоуравновешенные нагрузки, сжимающие или растягивающие трещину в продольном направлении. Численные решения СИУ с логарифмическим ядром найдены в два этапа: сначала решено СИУ с ядром Коши

$$\int_a^b q(t) \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} + \frac{2x(x-t)}{(t+x)^3} \right] dt = F(x), \quad x \in (a, b),$$

а потом выполнено численное дифференцирование.



Для вывода СИУ в случае второй граничной задачи вычислим выражение

$$\begin{aligned}
 & [k\varphi_0(t) - t\overline{\varphi'_0(t)} - \overline{\psi_0(t)}]^+ + [k\varphi_0(t) - t\overline{\varphi'_0(t)} - \overline{\psi_0(t)}]^- = \\
 & = 2[kF(t) + F(\bar{t}) - (t - \bar{t})\overline{F'(t)}] = \frac{k}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - t} d\tau - \\
 & = -\frac{k}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} d\bar{\tau} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - \bar{t}} d\tau - \\
 & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{t - \bar{t}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \frac{(t - \bar{t})(\tau - \bar{\tau})}{(\bar{\tau} - t)^2} d\tau.
 \end{aligned}$$

Тогда, учитывая правую часть формулы (13.7),

$$\begin{aligned}
 & [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \\
 & \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \left[k \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} + \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - \bar{t}} - \frac{(t - \bar{t})(\tau - \bar{\tau})}{(\bar{\tau} - t)^2} \right] d\tau + \\
 & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \left[k \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - t} + \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} \right] d\tau - \\
 & - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \left[k \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} + \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} \right] d\bar{\tau} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{t - \bar{t}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau}.
 \end{aligned}$$

Если задано условие (13.12) на берегах разреза по дуге ab , то правая часть полученного выражения приравнивается к

$$\int_{at} [g^+(\tau) + g^-(\tau)] d\tau + 2D, \quad t \in ab.$$

14.3. Трещина в круге

Пусть теперь L_0 – окружность радиуса R , D^+ – открытый круг $|z| < R$ и D^- – внешность круга (плоскость с круговым вырезом). Пусть на окружности L_0 задано условие (14.1). Рассмотрим случай, когда внутри круга имеется особая линия – гладкая разомкнутая дуга ab .

Для функций $\varphi_0(z) = \varphi(z) - \varphi_1(z)$ и $\psi_0(z) = \psi(z) - \psi_1(z)$ дуга ab не является особой линией. Пусть

$$F(z) = \{\varphi_0(z), \quad z \in D^+; \quad -z\overline{\varphi_0'(R^2/\bar{z})} - \overline{\psi_0(R^2/\bar{z})}, \quad z \in D^-\}.$$

Разность предельных значений этой функции на окружности

$$F^+(t) - F^-(t) = \varphi_0^+(t) + t\overline{\varphi_0'^+(t)} + \overline{\psi_0^+(t)} = -f_1(t), \quad t \in L_0,$$

где

$$f_1(t) = \varphi_1^+(t) + t\overline{\varphi_1'^+(t)} + \overline{\psi_1^+(t)}, \quad t \in L_0.$$

Тогда

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f_1(x)dx}{x-z} \quad (14.7)$$

и вместо (14.3)

$$\varphi_0(z) = F(z), \quad \psi_0(z) = -\frac{R^2}{z}F'(z) - \overline{F\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}, \quad z \in D^+. \quad (14.8)$$

Выражение для $f_1(\cdot)$ точно такое же, что и в случае полуплоскости. В выражении для функции $F(\cdot)$ внутренние интегралы теперь берутся уже не по оси, а по окружности.

Вычислим их методом вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{dx}{(\xi-x)(x-z)} = \left\{ 0, \quad z \in D^+; \quad -\frac{1}{\xi-z}, \quad z \in D^- \right\},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{dx}{(\bar{\xi}-x)(x-z)} = \left\{ 0, \quad z \in D^+; \quad -\frac{1}{\bar{\xi}-z}, \quad z \in D^- \right\},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\tau-x}{\bar{\tau}-x} \frac{dx}{x-z} = \left\{ 1, \quad z \in D^+; \quad -\frac{\tau-z}{\bar{\tau}-z}, \quad z \in D^- \right\},$$

(теперь и ξ , и $\bar{\xi}$ лежат в D^+). Тогда

$$F(z) = 0, \quad z \in D^+,$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi-z} d\tau - \quad (14.9)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - z}{\bar{\tau} - z} d\bar{\tau}, \quad z \in D^-.$$

В случае первой краевой задачи

$$\begin{aligned} & [\varphi_0(t) + t\overline{\varphi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)}]^+ + [\varphi_0(t) + t\overline{\varphi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)}]^- = -2F\left(\frac{R^2}{t}\right) = \\ & -\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - R^2/\bar{t}} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - R^2/\bar{t}} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \frac{\tau - R^2/\bar{t}}{\bar{\tau} - R^2/\bar{t}} d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

Добавим в правую часть формулы (13.6) и получим окончательно

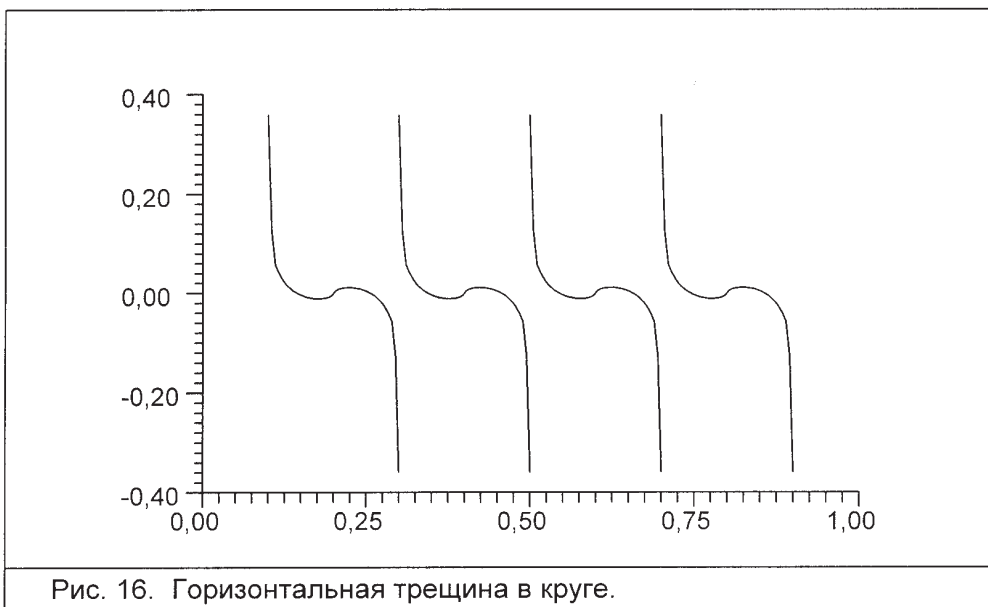
$$\begin{aligned} & [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \tag{14.10} \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} - \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - R^2/\bar{t}} \right] d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \left[\int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} - \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - R^2/\bar{t}} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \left[\frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} - \frac{\tau - R^2/\bar{t}}{\bar{\tau} - R^2/\bar{t}} \right] d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично в случае второй граничной задачи получим

$$\begin{aligned} & [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \tag{14.11} \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{k+1} \left[k \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} + \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - R^2/\bar{t}} \right] d\tau - \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{k\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{k+1} \left[\int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} - \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - R^2/\bar{t}} \right] d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}}{k+1} \left[\frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} - \frac{\tau - R^2/\bar{t}}{\bar{\tau} - R^2/\bar{t}} \right] d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример. Пусть на берегах разреза вдоль отрезка вещественной оси $[a, b]$ внутри упругого круга единичного радиуса заданы самоуравновешенные напряжения. Тогда $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и соответствующее интегральное уравнение запишется в виде

$$\int_a^b \frac{\beta(\tau)}{k+1} \left[\ln \frac{b-t}{|\tau-t|} - \ln \frac{1-bt}{1-\tau t} \right] d\tau = 2\pi i \int_a^t f(\tau) d\tau + 2\pi i C, \quad t \in (a, b). \tag{14.12}$$



На рис. 16 показаны графики решений уравнения (14.12), найденных численно с помощью предложенного выше алгоритма. Рассмотрены четыре варианта размещения трещины длиной 0.2 на вещественной полуоси упругого круга в случае самоуравновешенной нагрузки, симметричной относительно центра трещины.

14.4. Интегральные уравнения теории дифракции волн

К сингулярным интегральным уравнениям с логарифмическими ядрами приводятся многие задачи дифракции электромагнитных и упругих волн на неоднородностях различной природы. При выводе СИУ задач дифракции наиболее часто применяются методы теории потенциала, позволяющие в самом общем случае сводить граничные задачи для уравнений с частными производными к системам интегральных уравнений [46], [28], [68]. Конкретные примеры интегральных уравнений, эквивалентных задачам дифракции электромагнитных волн, можно найти, например, в работах А.С. Ильинского, Ю.В. Шестопалова, Е.В. Чернокожина, Ю.Г. Смирнова [23], [32]–[35], [136], [137].

При регуляризации СИУ методом полубращения используются явные решения интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Но регуляризованные уравнения получаются достаточно сложными, и их приближенные решения искать затруднительно. В последнее время многие исследователи предпочитают применять при решении интегральных уравнений задач дифракции волн метод Галеркина с полиномами Чебышева в качестве базисных функций. В монографии [36] можно найти более подробные сведения.

Список литературы

- [1] Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сил сцепления или трения // Прикл. мат. и мех. – 1970. – Т.34. – N2. – С.246-257.
- [2] Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. школа, 1976. – 272 с.
- [3] Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв. АН АрмССР. – 1959. – Т.12. – N2. – С.77-105.
- [4] Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории ползучести // Прикл. мат. и мех. – 1959. – Т.23. – N5. – С.901-924.
- [5] Арутюнян Н.Х., Манукян М.М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения // Прикл. мат. и мех. – 1963. – Т.27. – N5. – С.813-820.
- [6] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 253 с.
- [7] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
- [8] Вайникко Г., Педас А., Уба П. Методы решения слабосингулярных интегральных уравнений. – Тарту: Изд-во Тартусск. ун-та, 1984. – 96 с.
- [9] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
- [10] Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М: Наука, 1974. – 456 с.
- [11] Габдулхаев Б.Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мат. анализ. – 1980. – Т.18. – С.251-307.
- [12] Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
- [13] Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

- [14] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
- [15] Галин Л.А. Упруго-пластические задачи. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
- [16] Галин Л.А., Шматкова А.А. О движении жесткого штампа по границе вязкоупругой полуплоскости // Прикл. мат. и мех. – 1968. – Т.32.
- [17] Гахов Ф.Д. О новых типах интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1961. – С.102-114.
- [18] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 640 с.
- [19] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
- [20] Гестрина Г.Н. Дифракция плоской электромагнитной волны на металлической решетке // Радиотехника, вып. 10. – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.
- [21] Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
- [22] Грибняк С.Т., Попов Г.Я. Об одном обобщении уравнения Карлемана, разрешаемом в явном виде, и его приложении в теории изгиба пластин // Укр. мат. ж. – 1986. – Т.38. – №3. – С.315-320.
- [23] Гусейнов Э.А., Ильинский А.С. Исследование интегрального уравнения линейного вибратора // Методы вычисл. электродинам. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С.39-46.
- [24] Джуранкулов Р., Иванов В.В., Исраилов М.И. О доведении до числа решений сингулярных интегральных уравнений, представленных в замкнутой форме // Изв. вузов. Мат. – 1982. – №4. – С.28-32.
- [25] Дильман В.Л. Об одном интегральном уравнении с логарифмическим ядром // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1983. – С.42-51.
- [26] Дильман В.Л. Сингулярные интегралы в классах A_p , $p > 1$, и интегральные уравнения с логарифмическими особенностями на кусочно-гладких кривых // Казань, Казанск. гос. ун-т. –1984, 42 с. (Деп. в ВИНТИ 18.07.84, N5158-84 Деп).
- [27] Дильман В.Л., Чибрикова Л.И. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p , $p > 1$ // Изв. вузов. Мат. – 1986. – №4. – С.26-36.
- [28] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения краевых задач электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 167 с.
- [29] Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1947.

- [30] Иванов В.В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мат. анализ, 1963. – 1965. – С.125-177.
- [31] Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применения к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1968. – 288 с.
- [32] Ильинский А.С., Гусейнов Э.А. Прямой численный метод решения сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на открытом конце волновода // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. мат. и кибернет. – 1981. – N4. – С.9-15.
- [33] Ильинский А.С. Обоснование численного метода решения интегрального уравнения с логарифмической особенностью ядра // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. мат. и кибернет. – 1986. – N4. – С.12-15.
- [34] Ильинский А.С., Чернокожин Е.В. О регуляризации интегрального оператора с логарифмическими особенностями ядра // Дифференц. уравнения – 1988. – Т.24. – N8. – С.1433-1437.
- [35] Ильинский А.С., Шестопапов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 184 с.
- [36] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.
- [37] Канторович Л.В. К общей теории приближенных методов анализа // Докл. АН СССР. – 1948. – Т.60. – N6.
- [38] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
- [39] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 280 с.
- [40] Килбас А.А. Решение в замкнутой форме некоторых интегральных уравнений с полярными и логарифмическими ядрами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1975. – N3. – С.18-26.
- [41] Килбас А.А. Применение одного интегрального представления к исследованию нетеровости интегральных операторов с логарифмическими ядрами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1976. – N2. – С.24-33.
- [42] Килбас А.А. О нетеровости интегральных операторов с логарифмическими ядрами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1976. – N4. – С.35-39.
- [43] Килбас А.А. Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмическими ядрами произвольного порядка // Докл. АН БССР. – Т.21. – N12. – С.1078-1081.

- [44] Килбас А.А. Операторы типа потенциала с логарифмическими ядрами произвольных неотрицательных порядков // Изв. вузов. Мат. – 1979. – N1. – С.28-37.
- [45] Килбас А.А. Интегральные уравнения первого рода с логарифмическими ядрами // Науч. тр. Юбил. семинара по краевым задачам, посв. 75-летию со дня рожд. акад. АН БССР Ф.Д.Гахова. – Минск: Университетское, 1985. – С.57-64.
- [46] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
- [47] Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 500 с.
- [48] Крейн М.Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода // Докл. АН СССР. – 1955. – Т.100. – N3. – С.413-416.
- [49] Кузнецов С.П. Интегральное уравнение с обобщенным логарифмическим ядром на действительной оси // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи, вып. 4. – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1982. – С.27-30.
- [50] Купрадзе В.Д. О контактных задачах теории упругости // Дифференц. уравнения – 1980. – Т.16. – N2. – С.293-310.
- [51] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: ТОО "Янус 1995. – 520 с.
- [52] Майстер А.В. О разрешимости систем интегральных уравнений с обобщенными степенными ядрами // Казань, Казанск. гос. ун-т. – 1982, 12 с. (Деп. в ВИНТИ 23.11.82, N5781-82 Деп).
- [53] Майстер А.В. О разрешимости полных интегральных уравнений с обобщенными степенными ядрами // Казань, Казанск. гос. ун-т. – 1983, 13 с. (Деп. в ВИНТИ 01.07.83, N3567-83 Деп).
- [54] Майстер А.В. Об одном представлении решения обобщенного уравнения Абеля // Казань, Казанск. гос. ун-т. – 1983, 14 с. (Деп. в ВИНТИ 01.07.83, N3568-83 Деп).
- [55] Майстер А.В. Об интегральных операторах с логарифмическими ядрами и переменными пределами интегрирования // Ред. ж. Изв. вузов. Мат. – Казань, 1990. – 15 с. (Деп. в ВИНТИ 07.05.90, N2424-B90).
- [56] Майстер А.В. О приближении ломаными при решении уравнения Абеля // Исслед. по прикладной мат., вып. 19. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – С.76-81.

- [57] Майстер А.В. Численное обращение уравнения Абеля с неограниченной правой частью // Исслед. по прикладной матем., вып. 20. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – С.74-83.
- [58] Манукян М.П. Плоская контактная задача теории ползучести с учетом сил сцепления // Изв. АН АрмССР. Мех. – 1969. – Т.22. – №3. – С.52-62.
- [59] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т.1. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
- [60] Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
- [61] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
- [62] Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях // Изв. АН АрмССР. Мех. – 1968. – Т.21. – №5-6. – С.3-20.
- [63] Мхитарян С.М. Некоторые классы эффективно решаемых линейных интегральных уравнений первого рода и связанные с ними дифференциальные уравнения. Приложения к контактным задачам теории упругости. – Автореф. дис. ... к. ф.-м. н. Ереван, 1969.
- [64] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 400 с.
- [65] Ногин Н.В. К решению интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром // Мат. физ. (Киев). – 1982. – №31. – С.53-57.
- [66] Осипов Е.А., Плещинский Н.Б. Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 9. – С.76-82.
- [67] Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
- [68] Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.
- [69] Партон Б.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
- [70] Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. К решению задачи дифракции электромагнитных волн на периодической решетке методом интегральных уравнений // Исслед. по прикладной матем., вып. 11, ч.2. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1984. – С.61-78.

- [71] Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 2005. – Т.147, кн. 3. – С.4-32.
- [72] Плещинский И.Н., Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения задачи сопряжения полукрытых диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 5. – С.63-80.
- [73] Плещинский Н.Б. К решению граничных задач для обобщенного уравнения Трикоми методом интегральных уравнений // Тр. семинара по краевым задачам, вып. 16. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979. – С.112-125.
- [74] Плещинский Н.Б. Применение метода интегральных уравнений к решению задачи типа Геллерстедта // Тр. семинара по краевым задачам, вып. 18. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1982. – С.144-155.
- [75] Плещинский Н.Б. О сингулярных интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами // Неклассические задачи уравнений матем. физики. – Новосибирск, 1982. – С.132-134.
- [76] Плещинский Н.Б. Некоторые свойства обобщенных операторов Абея и сингулярные интегральные уравнения со степенными ядрами // Третий респ. симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям. Тезисы докладов. 1–3 июня 1982. – Одесса, 1982. – С.189-190.
- [77] Плещинский Н.Б. Некоторые тождества для интегральных операторов с обобщенным степенным ядром // Изв. вузов. Мат. – 1984. – N4. – С.47-51.
- [78] Плещинский Н.Б. О построении функций, удовлетворяющих условию Гельдера с заданным показателем // Изв. вузов. Мат. – 1984. – N8. – С.74-77.
- [79] Плещинский Н.Б. Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 160 с.
- [80] Плещинский Н.Б. Об одном классе интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме // Респ. науч. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения 22-24 сентября 1987. Тезисы докл. – Одесса, 1987. – С.61-62.
- [81] Плещинский Н.Б. О некоторых классах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме // Ред.ж. "Дифференц. уравнения". – Минск, 1988. – 13 с. (Деп. в ВИНТИ 25.05.1988, N4018-B88).
- [82] Плещинский Н.Б. Два интегральных уравнения с логарифмическими периодическими ядрами, разрешимые в замкнутой форме // Докл. расшир. засед.

семинара ин-та прикл. матем. им. И.Н.Векуа. – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1988. – Т.3. – N1. – С.154-157.

- [83] Плещинский Н.Б. О некоторых классах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме // Дифференц. уравнения – 1989. – Т.25. – N3. – С.533-534.
- [84] Плещинский Н.Б. Численные методы решения сингулярных интегральных уравнений, основанные на методах построения явных формул обращения // Линейные операторы в функциональных пространствах. Тезисы докл. Сев.-Кавказ. рег. конф. – Грозный, 1989.– С.121-122.
- [85] Плещинский Н.Б., Тагиров Р.Р. О структуре решений интегральных уравнений Вольтерра с вырожденным ядром // Исслед. по прикладной матем., вып. 19. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – С.101-110.
- [86] Плещинский Н.Б., Чумараев П.А. К решению сингулярных интегральных уравнений с автоморфными ядрами методом механических квадратур // Исслед. по прикладной матем., вып. 19. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – С.111-120.
- [87] Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения с логарифмической особенностью в ядре для граничных задач теории упругости для плоскости, полуплоскости и круга с дефектом вдоль гладкой дуги. – Препринт 97-1. Казанское матем. общество. – Казань, 1997. – 22 с.
- [88] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. О регуляризации уравнений задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.2. Казанск. матем. об-во. Матер. Всеросс. мол. шк.-конф. – Казань: УНИПРЕСС, 1999. – С.234-240.
- [89] Плещинский Н.Б. К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 2000. – №3. – С.39-47.
- [90] Гусенкова А.А., Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах граничных задач плоской теории упругости для областей с дефектом // Прикл. мат. мех. – 2000. – Т.64, Вып. 3. – С.454-461.
- [91] Плещинский Н.Б., Гусенкова А.А. Комплексные потенциалы с логарифмическими особенностями в ядрах для упругих тел с дефектом вдоль гладкой дуги // Изв. вузов. Матем. – 2000. – №10. – С.57-67.
- [92] Плещинский Н.Б. Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмической особенностью в ядре и методах их регуляризации // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2002. – С.90-120.

- [93] Плещинский Н.Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах. – Препринт ПМФ-03-02. Казань: Казанск. матем. об-во, 2003. – 30 с.
- [94] Плещинский Н.Б. Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши // Препринт ПМФ-04-01. Казанск. матем. об-во. – Казань, 2004. – 34 с.
- [95] Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики: учебное пособие. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. – 104 с.
- [96] Попов Г.Я. К решению плоской контактной задачи теории ползучести при наличии сил сцепления или трения // Изв. АН АрмССР. – 1963. – Т.16. – N2. – С.15-31.
- [97] Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактными задачам // Прикл. мат. и мех. – 1963. – Т.27. – N5. – С.821-832.
- [98] Попов Г.Я. Вдавливание штампа в линейно-деформируемое основание с учетом сил трения // Прикл. мат. и мех. – 1967. – Т.31. – N2. – С.337-343.
- [99] Попов Г.Я. Математические проблемы контактных задач. – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1976. – 115 с.
- [100] Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
- [101] Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – Киев-Одесса: Вища школа, 1982. – 167 с.
- [102] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 496 с.
- [103] Пресдорф З. Линейные интегральные уравнения. – Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. – 1988. – Т.27. – С.5-130.
- [104] Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
- [105] Ростовцев Н.А. К теории упругости неоднородной среды // Прикл. матем. и мех. – 1964. – Т.28. Вып. 4.
- [106] Рубин Б.С. О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. н. – 1972. – Т.7. – N5. – С.373-386.
- [107] Рубин Б.С. О нетеровости операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на отрезке вещественной оси // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. н. – 1973. – N4. – С.112-114.
- [108] Рубин Б.С. Дробные интегралы в пространстве Гельдера с весом и операторы типа потенциала // Изв. АН АрмССР. Мат. – 1974. – Т.9. – N4. – С.308-324.

- [109] Рубин Б.С. Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в случае неотрицательного показателя степени при логарифме // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. н. – 1976. – N3. – С.17-22.
- [110] Рубин Б.С. Общий метод исследования на нетеровость операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке // Изв. АН АрмССР. Мат. – 1977. – Т.12. – N6. – С.447-461.
- [111] Рубин Б.С. Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала. I, II // Изв. вузов. Мат. – 1982. – N1. – С.53-63. – N2. – С.49-59.
- [112] Рубин Б.С. Обобщенное уравнение Абеля и плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала с переменным коэффициентом трения // Изв. АН АрмССР. Мех. – 1983. – N2. – С.19-25.
- [113] Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
- [114] Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
- [115] Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
- [116] Сакалюк К.Д. Обобщенное уравнение Абеля // Докл. АН СССР. – 1960. – Т.131. – Т4. – С.748-751.
- [117] Сакалюк К.Д. Обобщение интегрального уравнения Абеля // Учен. зап. Кишиневск. ун-та. – 1962. – Вып.50. – С.95-102.
- [118] Сакалюк К.Д. Некоторые особые интегральные уравнения с полярными, степенными и логарифмическими ядрами // Учен. зап. Кишиневск. ун-та. – 1962. – Вып.50. – С.103-109.
- [119] Сакалюк К.Д. Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешимые в замкнутой форме. – Дис. . . канд. физ.-мат. н. Кишинев, 1963. – 94 с.
- [120] Сакалюк К.Д. Интегральные уравнения с логарифмическими и полярно-логарифмическими ядрами // Учен. зап. Кишиневск. ун-та. – 1964. – Вып. 70. – С.17-23.
- [121] Сакалюк К.Д. Обобщенное уравнение Абеля с внутренними коэффициентами // Учен. зап. Кишиневск. ун-та. – 1965. – Вып.82. – С.60-68.
- [122] Самко С.Г. Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши // Докл. АН СССР. – Т.176. – N5. – С.1019-1022.
- [123] Самко С.Г. Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования // Дифференц. уравнения – 1968. – Т.4. – N2. – С.298-314.

- [124] Самко С.Г. О теории Нетера для обобщенного интегрального уравнения Абеля // Дифференц. уравнения – 1968. – Т.4. – N2. – С.315-326.
- [125] Самко С.Г. Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала // Изв. вузов. Мат. – 1971. – N4. – С.78-86.
- [126] Самко С.Г. О пространстве $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала // Изв. АН АрмССР. Мат. – 1973. – Т.8. – N5. – С.359-383.
- [127] Самко С.Г. Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром // Методы отображений. – Грозный: Изд-во Чечено-Ингушск. ун-та, 1976. – С.41-69.
- [128] Самко С.Г. Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром, II // Мат. анализ и его приложения. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1978. – С.103-121.
- [129] Самко С.Г. Одномерные и многомерные интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью в ядре // Науч. тр. Юбил. семинара по краевым задачам, посв. 75-летию со дня рожд. акад. АН БССР Ф.Д.Гахова. – Минск: Университетское, 1985. – С.103-115.
- [130] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
- [131] Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
- [132] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. – М.: Наука, 1970. – 800 с.
- [133] Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН ГрузССР. – 1956. – Т.23. – С.3-158.
- [134] Хведелидзе Б.В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Совр. пробл. мат. – 1975. – Т.7. – С.5-162.
- [135] Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мат. анализ. – 1977. – Т.15. – С.131-198.
- [136] Чернокожин Е.В. Метод вычисления характеристических чисел оператор-функции специального вида // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. мат. и кибернет. – 1985. – N3. – С.76-77.
- [137] Чернокожин Е.В. Применение метода регуляризации к исследованию микрополосковых линий. – Автореф. дис... канд. физ.-мат. н. – М., 1985.
- [138] Чибрикова Л.И. Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 304 с.

- [139] Чибрикова Л.И., Плещинский Н.Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами // Изв. вузов. Мат. – 1976. – №6. – С.91-104. – 1977. – №10. – С.150-162. – 1978. – №6. – С.129-146. – 1979. – №9. – С.62-74. – 1979. – №10. – С.74-87.
- [140] Чибрикова Л.И., Плещинский Н.Б. Сингулярные интегральные уравнения с автоморфными и квазиавтоморфными логарифмическими и степенными ядрами, I // Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – С.210-247.
- [141] Чумаков Ф.В. Общая теория интегральных уравнений со степенным ядром // Дифференц. уравнения – 1966. – Т.2. – №4. – С.544-559.
- [142] Чумаков Ф.В. Характеристическое уравнение с логарифмическим ядром // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1967. – №3. – С.118-120.
- [143] Чумаков Ф.В. Интегральные уравнения с логарифмическим ядром // Дифференц. уравнения – 1968. – Т.4. – №2. – С.336-346.
- [144] Чумаков Ф.В. Уравнение типа Абеля на сложном контуре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1971. – №1. – С.55-61.
- [145] Чумаков Ф.В. Об одном обобщении уравнения Карлемана // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1972. – №4. – С.113-116.
- [146] Чумаков Ф.В. Обобщенное уравнение Карлемана с внутренними коэффициентами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1972. – №6. – С.104-106.
- [147] Чумаков Ф.В. Решение в замкнутой форме некоторых интегральных уравнений с логарифмическим ядром на сложном контуре // Вестн. Белорусск. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. – 1972. – №2. – С.5-9.
- [148] Чумаков Ф.В., Васильев И.Л. Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре // Вестн. Белорусск. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. – 1980. – №2. – С.40-44.
- [149] Шестоपालов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.
- [150] Шешко М.А. О методах приближенного решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) // Докл. АН БССР. – 1977. – Т.21. – №12. – С.1067-1069.
- [151] Шматкова А.А. О движении нормальной нагрузки по границе вязкоупругой полосы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – №4.
- [152] Шматкова А.А. Качение жесткого цилиндра по вязкоупругой полуплоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – №2.

- [153] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
- [154] Bechlars J. Glattheit und numerische Berechnung der Lösung linearer Integralgleichungen 2. Art mit schwachsingulären Kernen // Ber. Hahn-Meitner-Inst. Kernforsch. Berlin. – 1978. – N283. – 100 S.
- [155] Cerha J. A note on Volterra integral equations with degenerate kernel // Comment. Math. Univ. Carol. – 1972. – V.13. – N4. – P.659-672.
- [156] Chibrikova L.I., Pleshchinskii N.B. Integral equation with generalized power kernel and its application to the theory of boundary value problems for the generalized Tricomi equation // Mixed type equations / edit. by John M. Rassias. (Teubner-Texte zur Mathematik; 90) – Leipzig: BSB Teubner, 1986. – S.84-104.
- [157] Mikhlin S.G., Prössdorf S. Singular integral operators. – Berlin: Akademie Verlag, 1986. – 528 S.
- [158] Peters A.S. Some integral equations related to Abel's equation and the Hilbert transform // Comm. Pure and Appl. Math. – 1969. – V.22. – N4. – P.539-560.
- [159] Pleshchinskii N.B. Some classes of singular integral equations solvable in the closed form with a weak singularity in kernel // 5th conference on Complex Analysis. Abstracts. Dec. 12-17 1988. Halle, 1988. – S.67.
- [160] Pleshchinskii N.B. Some classes of singular integral equations solvable in a closed form and their applications // Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical. – V.256. – P.246-256.
- [161] Pleshchinskii N.B. Singular integral equations with compound singularity in the kernel // Международная конф. Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление, посв. 90-летию со дня рожд. акад. Ф.Д.Гахова. – Минск, Беларусь, 16-20 февр. 1996 г. – с.153.
- [162] Prössdorf S., Silbermann B. Numerical analysis for integral and related operator equations. – Berlin: Akademie Verlag, 1991.
- [163] Thomas J. Über ein Integralgleichungssystem aus der Theorie des logarithmischen Potentials // J. reine und angew. Math. – 1966. – N223. – S.1-15.
- [164] Wolfersdorf L. von. Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung // Math. Nachr. – 1965. – B.27. – S.161-178.