Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, Е.Е. ЛАВРЕНТЬЕВА, К.Н. СТЕХИНА

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Учебное пособие**

**для практических занятий по алгебре и геометрии**

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, Е.Е. ЛАВРЕНТЬЕВА, К.Н. СТЕХИНА

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

для практических занятий по алгебре и геометрии

КАЗАНЬ

2018

**УДК 514**

**ББК 22.151**

**К27**

*Печатается по рекомендации*

*Редакционно-издательского совета*

*ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»;*

*Учебно-методической комиссии*

*Института вычислительной математики и информационных технологий*

*(протокол № 6 от 11 января 2018 г.);*

*кафедры прикладной математики*

*(протокол № 4 от 20 декабря 2017 г.)*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор,

главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «КНИТУ» **В.С. Желтухин;**

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры прикладной математики КФУ **И.Е. Филиппов**

**Карчевский Е.М.**

**К27 Аналитическая геометрия:** учеб. пособие для практических занятий по алгебре и геометрии / Е.М. Карчевский, Е.Е. Лаврентьева, К.Н. Стехина. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. — 82 с.

**ISBN 978-5-00019-952-7**

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по алгебре и геометрии со студентами первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

**УДК 514**

**ББК 22.151**

**ISBN 978-5-00019-952-7**

# Оглавление

# Предисловие

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по алгебре и геометрии со студентами первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

Последовательность разделов, обозначения, определения и формулировки использованных теоретических результатов отвечают лекциям [3]. Перед выполнением упражнений следует изучить соответствующий параграф лекций. Все упражнения сопровождаются ответами, указаниями, или решениями. В книге принята локальная нумерация рисунков и упражнений.

Настоящее пособие ни в коей мере не претендует на роль задачника. В конце книги читатель найдет список задачников, материал которых был использован при ее составлении.

Глава 1

# Векторы

## § 1. Алгебраические операции над векторами

*Векторами* называются направленные отрезки. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, считаются *равными*. С каждой точкой $x$ трехмерного евклидова пространства с декартовой системой координат взаимнооднозначно связан вектор, соединяющий ее с началом координат (см. рис. 1). Концом этого вектора считается точка $x$. Координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ будем называть *декартовыми координатами вектора* $x$. *Модуль* (длину) вектора обозначим $|x|$. Для любого вектора $x$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Заметим, что только один вектор имеет длину нуль — это нулевой вектор, конец которого совпадает с началом координат.

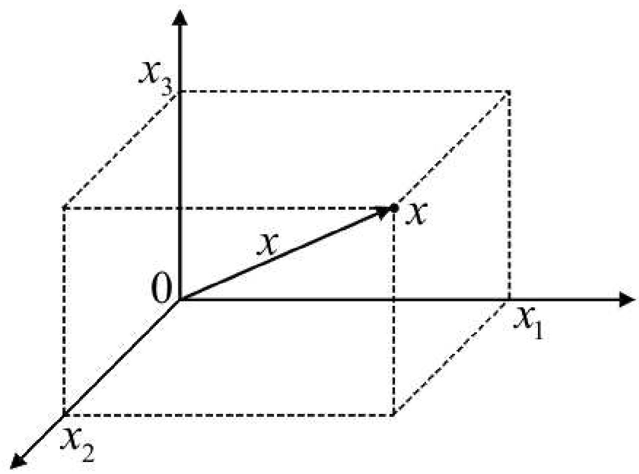



Рис. 1. Декартовы координаты точки $x$ и вектор $x$ в пространстве

Пример. Найдем длину вектора $x$ с декартовыми координатами $(3, 4, 5)$:

$$|x| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Над векторами определены алгебраические операции.

1. *Умножение вектора на число.* Вектор $y$ называется произведением вещественного числа $\alpha$ и вектора $x$ (пишется $y = \alpha x$), если $|y| = |\alpha||x|$, а направление $y$ совпадает с направлением вектора $x$ при положительном $\alpha$ и противоположно направлению $x$ при отрицательном $\alpha$ (см. рис. 2).

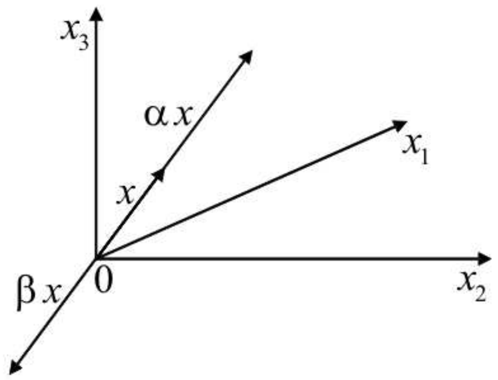



Рис. 2. Умножение вектора на число, $\alpha > 0$, $\beta < 0$

2. *Сложение векторов.* Вектор $z$ называется суммой векторов $x$ и $y$ (пишется $z = x + y$), если он образует диагональ параллелограмма построенного на векторах $x$, $y$. Иногда удобнее описывать тоже самое правило сложения векторов иначе: от конца вектора $x$ откладывается вектор $y$, вектор $z$ замыкает треугольник (см. рис. 3).

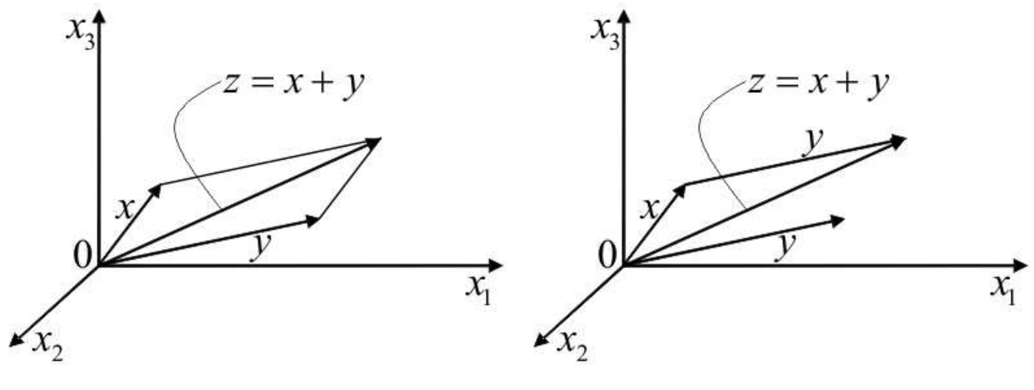



Рис. 3. Правило параллелограмма (слева) и — треугольника (справа)

Вектор $z$ называется *разностью* векторов $x$ и $y$, если $x = z + y$. Понятно, что $z = x + (-1)y = x + (-y)$. Операция сложения векторов является коммутативной, т. е.

$$x + y = y + x,$$

и ассоциативной, т. е.

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Справедливы свойства *дистрибутивности*, связывающие операции сложения векторов и умножения вектора на число (см. рис. 4):

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

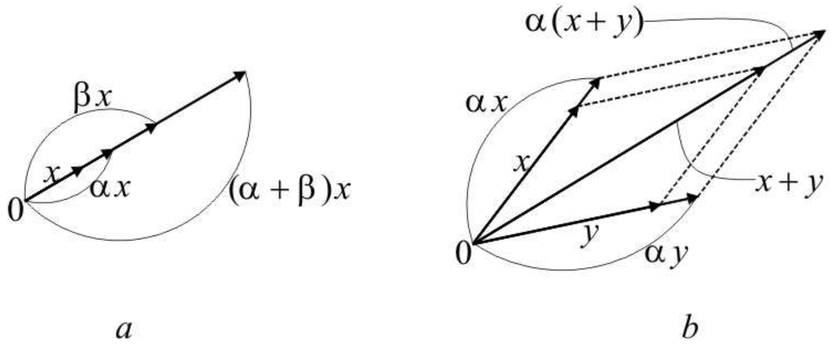



Рис. 4. К свойствам дистрибутивности

Векторы $x$, $y$, $z$ *линейно зависимы*, если существуют такие числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, среди которых хотя бы одно не нуль, что

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Векторы, лежащие на одной прямой, называют *коллинеарными*. Для любого вещественного числа $\alpha$ и вектора $x$, справедливо утверждение: $y = \alpha x$ и $x$ коллинеарны. Наоборот, если векторы $x$, $y$ коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например, $x$), то найдется такое число $\alpha$, что $y = \alpha x$.

Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем произвольным образом три некомпланарных вектора. Обозначим их через $e^1$, $e^2$, $e^3$. Любой вектор $x$ можно представить в виде

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1, x_2, x_3)$. Говорят, что векторы $e^1$, $e^2$, $e^3$ образуют *базис* пространства. Числа $x_1$, $x_2$, $x_3$ называют *координатами вектора* в этом базисе (см. рис. 5).

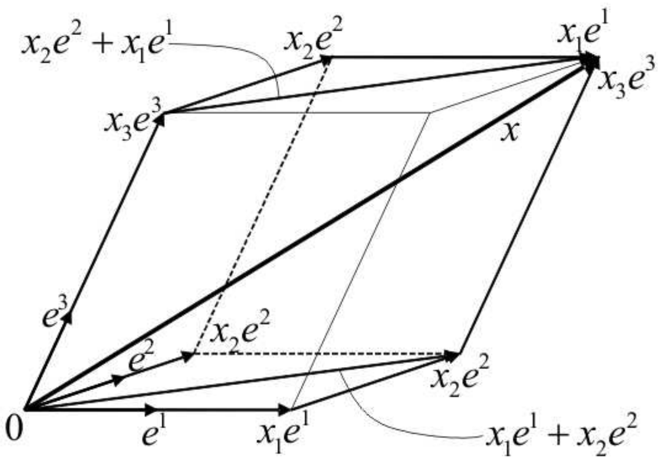



Рис. 5. Разложение вектора по базису, $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$

Базис, составленный из трех попарно ортогональных векторов единичной длины, называют *декартовым базисом.* Его обозначают через $i^1$, $i^2$, $i^3$. Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число, при сложении векторов их компоненты складываются, и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Пример. Найдем вектор, равный произведению числа 5 на вектор $x = (3, -4, 5)$:

$$y = 5(3, -4, 5) = (15, -20, 25).$$

Пример. Найдем вектор

$$u = 2x + 3y - z,$$

где $x = (1, 2, 3)$, $y = (2, -2, 0)$, $z = (0, 1, -1)$ :

$$u = 2(1, 2, 3) + 3(2, -2, 0) + (-1)(0, 1, -1) =$$

$$= (2, 4, 6) + (6, -6, 0) + (0, -1, 1) = (8, -3, 7).$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $x$, $y$, $z$ является равенство нулю определителя, составленного из их координат относительно любого базиса:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Проверим, что векторы

$$e^1 = (1, 2, 3), \quad e^2 = (1, 1, 1), \quad e^3 = (1, 0, 1)$$

образуют базис. Для этого вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Он не равен нулю, следовательно, векторы $e^1$, $e^2$, $e^3$ образуют базис. Найдем координаты вектора $x = (4, 8, 10)$ в этом базисе. Для этого получим по формулам Крамера решение системы трех линейных уравнений (по какому правилу она составлена?):

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 8, \\ 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Имеем

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Теперь ясно, что

$$(4, 8, 10) = 3(1, 2, 3) + 2(1, 1, 1) - 1(1, 0, 1),$$

и числа 3, 2, $-1$ — координаты вектора $x$ в базисе $e^1$, $e^2$, $e^3$.

## Упражнения

**1.** Найти значение $x - 3y + 5z$, если:
*a*) $x = (2, 4, 9)$, $y = (2, 4, 9)$, $z = (2, 4, 9)$;
*b*) $x = (-3, 7, 9)$, $y = (2, -1, -3)$, $z = (1, 4, -7)$.

**2.** Доказать, что для любых векторов $x$, $y$, $z$ и чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ векторы $\alpha x - \beta y$, $\gamma y - \alpha z$, $\beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

**3.** Пусть дано некоторое число $a \neq 0$. Проверить, образуют ли базис векторы $e^1$, $e^2$, $e^3$:
*a*) $e^1 = (0, 0, a)$, $e^2 = (0, a, a)$, $e^3 = (a, a, a)$;
*b*) $e^1 = (2a, 0, -8a)$, $e^2 = (0, a, 0)$, $e^3 = (-a, 0, 4a)$.

**4.** Проверить что векторы

$$x = (4, 1, -1), \quad y = (1, 2, -5), \quad z = (-1, 1, 1)$$

образуют базис. Найти координаты векторов

$$m = (4, 4, -5), \quad l = (2, 4, -10), \quad k = (0, 3, -4)$$

в этом базисе.

**5.** При каких условиях векторы $p + q$ и $p - q$ коллинеарны?

**6.** Дан треугольник, построенный на векторах $p$ и $q$. Выразить все медианы треугольника через векторы $p$ и $q$.

**7.** Построить на произвольных ненулевых векторах $x$ и $y$ параллелограмм и проверить тождества:
*a*) $(x + y) + (x - y) = 2x$;
*b*) $\dfrac{x - y}{2} + y = \dfrac{x + y}{2}$.

**8.** Сформулируйте условие, при котором справедливо утверждение $|a + b| = |a - b|$.

**9.** Какие из следующих векторов коллинеарны, одинаково направлены, параллельны координатным осям, параллельны координатным плоскостям:
*a*) $a^1 = (2, 4, -6)$, $a^2 = (-1, -2, 3)$, $a^3 = (4, 8, -12)$;
*b*) $a^4 = (6, 0, 0)$, $a^5 = (0, -5, 0)$, $a^6 = (0, 0, 2)$;
*c*) $a^7 = (0, 1, 3)$, $a^8 = (2, 0, -1)$, $a^9 = (3, -4, 0)$?

**10.** Найти значение $2(x - 3y) + 5(y - z)$, если:
*a*) $x = (-3, 3, 2)$, $y = (12, -11, -8)$, $z = (6, -5, -4)$;
*b*) $x = (-1, 4, -2)$, $y = (2, -2, 2)$, $z = (3, -6, 4)$.

**11.** Найти координаты векторов $l$, $m$ в базисе $e^1$, $e^2$, $e^3$:
*a*) $e^1 = (3, 0, 5)$, $e^2 = (2, 2, 0)$, $e^3 = (1, 7, 2)$,
$l = (-5, -1, 0)$, $m = (6, 0, 4)$;
*b*) $e^1 = (4, -1, 4)$, $e^2 = (1, -1, -3)$, $e^3 = (0, 9, 0)$,
$l = (0, 9, 4)$, $m = (1, 0, 2)$.

**12.** Даны четыре вектора

$$x = (4, 1, -1), \quad y = (3, -1, 0), \quad z = (-1, 1, 1), \quad k = (-1, 3, 4).$$

Найти такие числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, что $\alpha x + \beta y + \gamma z + k = 0$.

**13.** Упростить выражение

$$\frac{4a - 2b + 5c}{2} - \frac{4a - 4b - 3c}{6} + \frac{2a - 20b + 3c}{3}.$$

**14.** Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $a = (8, 0, 7)$, $b = (10, 2, 8)$, $c = (10, -2, 8)$.

**15.** Построить на произвольных ненулевых векторах $x$ и $y$ параллелограмм и проверить тождества:
*a*) $(x + y) - (x - y) = 2y$;
*b*) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{x + y}{2}$.

**16.** Какими должны обладать векторы $x$ и $y$, чтобы имело место соотношение $|x + y| = |x| - |y|$?

**17.** Какими должны обладать векторы $a$ и $b$, чтобы имело место соотношение $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{b}{|b|}$?

**18.** *a*) Единичный вектор $a$ образует равные тупые углы с векторами $i^1$, $i^2$, $i^3$ декартова базиса. Найти координаты вектора $a$. *b*) Единичный вектор $a$ образует с вектором $i^1$ угол $30^0$, а с ортами $i^2$ и $i^3$ — равные острые углы. Вычислить сумму координат вектора $a$.

**19.** Интерпретируйте правило параллелограмма и правило треугольника сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны.

## Ответы, указания и решения

**1.** *a*) $(6, 12, 27)$, *b*) $(-4, 30, -17)$.

**2.** Указание. Рассмотреть линейную комбинацию этих векторов, подобрав соответствующим образом коэффициенты.

**3.** *a*) Да, так как векторы некомпланарны (используйте критерий компланарности векторов). *b*) Нет.

**4.** Векторы образуют базис, так как они некомпланарны. Координаты векторов $m$, $l$, $k$ в этом базисе соответственно $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$, и $(0, 1, 1)$.

**5.** Векторы $p + q$ и $p - q$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $p$ и $q$ коллинеарны. Сделайте рисунок.

**6.** Медианы равны $\frac{1}{2}(p + q)$, $\frac{1}{2}q - p$, $\frac{1}{2}p - q$. Указание. Достроить треугольник до параллелограмма и найти медиану треугольника как половину диагонали параллелограмма.

**7.** Указание. Сделать рисунок: построить параллелограмм на векторах $x$ и $y$ и добавить все необходимые векторы.

**8.** Векторы $a$ и $b$ перпендикулярны. Указание. Построим параллелограмм на векторах $a$ и $b$. Тогда $a + b$ и $a - b$ — диагонали параллелограмма.

**9.** $a$) Так как координаты векторов $a^1$ и $a^2$ пропорциональны, то эти векторы коллинеарны. Поскольку $a^2 = -\frac{1}{2}a^1$, то векторы $a^1$ и $a^2$ противоположно направлены. Векторы $a^1$ и $a^3$ также коллинеарны. Векторы $a^1$ и $a^3$ одного направления, так как $a^3 = 2a^1$.

$b$) Сравнивая координаты векторов $a^4$, $a^5$, $a^6$ с координатами векторов $i^1$, $i^2$, $i^3$, заключаем, что вектор $a^4$ параллелен оси $x_1$, вектор $a^5$ — оси $x_2$, вектор $a^6$ — оси $x_3$.

$c$) Поскольку у вектора $a^7$ координата $x_1 = 0$, т. е. его проекция на ось $x_1$ равна нулю, то вектор $a^7$ перпендикулярен оси $x_1$ и, следовательно, параллелен плоскости $x_2x_3$. Аналогичным образом заключаем, что вектор $a^8$ параллелен плоскости $x_1x_3$, а вектор $a^9$ — плоскости $x_1x_2$.

Из решения данной задачи можно сделать следующие выводы. 1. Если одна из координат вектора равна нулю, то вектор ортогонален соответствующей координатной оси. 2. Если вектор имеет только одну отличную от нуля координату, то он параллелен соответствующей координатной оси.

**10.** $a$) $(-48, 42, 32)$, $b$) $(-19, 40, -26)$.

**11.** $a$) $(-2/9, -22/9, 5/9)$, $(1, 7/4, -1/2)$,

$b$) $(1/4, -1, 11/12)$, $(5/16, -1/4, 1/144)$.

**12.** $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$. Указание. Составьте и решите соответствующую систему линейных алгебраических уравнений.

**13.** $2a - 7b + 4c$.

**14.** 10. Указание. Найти координаты векторов, образующих стороны треугольника, и затем вычислить длины этих векторов.

**15.** Указание. Сделать рисунок: построить параллелограмм на векторах $x$ и $y$ и добавить все необходимые векторы.

**16.** $x$ и $y$ коллинеарны, имеют противоположные направления, кроме того, $|x| \geqslant |y|$.

**17.** Векторы $a$ и $b$ имеют одинаковое направление, так как равны единичные векторы их направлений.

**18.** $a$) $a = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. $b$) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/2$. Указание. Координаты вектора $a$ можно представить в виде $a = |a|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы между вектором $a$ и векторами $i^1$, $i^2$, $i^3$ соответственно. Вычислим длину вектора $a$: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Отсюда, пользуясь условием задачи, получим ответ.

**19.** Указание. Сформулируйте правило параллелограмма и правило треугольника сложения векторов. Сделайте рисунки, иллюстрирующие эти правила. Угол между векторами обозначьте $\alpha$. Устремите $\alpha$ к нулю. Сделайте новые рисунки при $\alpha = 0$. Сформулируйте правило треугольника в этом предельном случае. Попробуйте сформулировать правило параллелограмма при $\alpha = 0$. Теперь устремите $\alpha$ к $\pi$ и проведите те же рассуждения.

## § 2. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

*Скалярным произведением векторов* $x$ и $y$ называется число

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y). \tag{1}$$

При этом вычисляется косинус того угла между векторами $x$ и $y$, который не превосходит $\pi$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов $x$, $y$ — *симметрия*,

2) $(\alpha x, y) = \alpha(y, x)$ для любых векторов $x$, $y$ и для любого вещественного числа $\alpha$ — *однородность*,

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для любых векторов $x$, $y$, $z$ — *аддитивность*,

4) $(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора $x$, и если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ — *положительная определенность*.

Из свойств 2), 3) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых векторов $x$, $y$, $z$ и для любых вещественных чисел $\alpha$, $\beta$. Это свойство называют свойством *линейности* скалярного произведения векторов по первому аргументу.

Для любых $x$, $y$ справедливо *неравенство Коши*

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|,$$

и *неравенство треугольника*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Скалярное произведение через декартовы координаты векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ вычисляется по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Косинус угла между этими векторами можно найти по формуле

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}. \qquad (2)$$

Пример. Найдем скалярное произведение векторов

$$x = (1, 3, 5), \quad y = (6, 4, 2),$$

а также косинус угла между ними:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 28,$$

$$\cos(x, y) = \frac{28}{\sqrt{35}\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{490}}{35}.$$

Введем понятие ориентации тройки некомпланарных векторов. Векторы $x$, $y$, $z$ имеют *правую ориентацию* (говорят: *правая тройка*), если с конца $z$ кратчайший поворот от $x$ к $y$ совершается против часовой стрелки. В ином случае, тройка — *левая*. Легко заметить, что если два первых вектора поменять местами, то ориентация изменится на противоположную. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что базис пространства имеет левую ориентацию.

*Векторным произведением* $x$ и $y$ (пишется $[x, y]$) называется вектор $z$, удовлетворяющий следующим условиям.

1) $|z| = |x||y| \sin(x, y)$. Угол выбирается так же, как и при скалярном произведении. При этом $|z|$ — площадь параллелограмма построенного на векторах $x$, $y$.

2) Вектор $z$ ортогонален каждому из векторов $x$ и $y$.

3) Тройка векторов $x$, $y$, $z$ ориентирована так же, как базис пространства (левая тройка).

Свойства векторного произведения:

1) $[x, y] = -[y, x]$ для любых векторов $x$, $y$ — *антисимметричность*,

2) $[\alpha x, y] = \alpha[y, x]$ для любых векторов $x$, $y$ и вещественного числа $\alpha$ — *однородность по первому аргументу*,

3) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$ для любых векторов $x$, $y$ — *аддитивность по первому аргументу.*

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $x$ и $y$ является равенство нулю их векторного произведения:

$$[x,y]=0.$$

Если векторы $x$ и $y$ ортогональны, то $|[x,y]|=|x||y|$.

Пример. Вычислим скалярные произведения векторов $i^1$, $i^2$, $i^3$:
$(i^1,i^1)=1;\quad (i^1,i^2)=0;\quad (i^1,i^3)=0;$
$(i^2,i^1)=0;\quad (i^2,i^2)=1;\quad (i^2,i^3)=0;$
$(i^3,i^1)=0;\quad (i^3,i^2)=0;\quad (i^3,i^3)=1.$
Вычислим векторные произведения векторов $i^1$, $i^2$, $i^3$:
$[i^1,i^1]=0;\qquad [i^1,i^2]=i^3;\qquad [i^1,i^3]=-i^2;$
$[i^2,i^1]=-i^3;\quad [i^2,i^2]=0;\qquad [i^2,i^3]=i^1;$
$[i^3,i^1]=i^2;\qquad [i^3,i^2]=-i^1;\quad [i^3,i^3]=0.$

Векторное произведение через декартовы координаты векторов $x = (x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ вычисляется по формуле

$$[x,y]=\begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

где $i^1$, $i^2$, $i^3$ — векторы декартова базиса. Символ определителя в правой части равенства надо понимать в том смысле, что следует провести вычисления, формально разлагая определитель по первой строке, и получить линейную комбинацию векторов $i^1$, $i^2$, $i^3$.

*Смешанным произведением* трех векторов $x$, $y$ и $z$ называется число $(x,y,z)=([x,y],z)$. Предварительно вычисляется векторное произведение, затем — скалярное. Модуль этого числа — объем параллелепипеда построенного на векторах $x$, $y$, $z$. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов есть равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

При перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например, $(x, y, z) = -(y, x, z) = -(x, z, y)$. Справедливо равенство $([x, y], z) = (x, [y, z])$. Через декартовы координаты смешанное произведение можно выразить следующим образом:

$$v = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Даны декартовы координаты трех векторов:

$$x = (3, 0, 0), \quad y = (0, 1, 2), \quad z = (1, 0, 1).$$

Найдем их смешанное произведение. Решение можно получить двумя способами. Первый способ. Сначала найдем векторное произведение $[x, y]$:

$$[x, y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i^1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - i^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + i^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 0i^1 - 6i^2 + 3i^3 = (0, -6, 3) = k.$$

Теперь сосчитаем скалярное произведение векторов $k$ и $z$:

$$(k, z) = 0 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3.$$

Второй способ. Сразу получим смешанное произведение:

$$v = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

## Упражнения

**1.** Даны декартовы координаты двух векторов $a = (1, -2, 4)$ и $b = (3, 1, -5)$. Найти вектор $x$, зная, что он перпендикулярен оси $x_2$ и удовлетворяет следующим условиям: $(x, a) = -3$, $(x, b) = 8$.

**2.** *a*) Пусть $a$ и $b$ — единичные векторы и $|a - b| = \sqrt{3}$. Найти скалярное произведение векторов $(3a - 4b, a + b)$.
*b*) Пусть $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{3}$, $|a + b| = 3$. Найти скалярное произведение векторов $(a + 2b, a - b)$.

**3.** Вычислить скалярное произведение $(a, b)$, если $a = 3p - 2q$ и $b = p + 4q$, где $p$ и $q$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

**4.** Пусть $x, y, z$ — взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить длину вектора $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

**5.** Покажите, что векторы $p = x(y, z) - y(x, z)$ и $z$ перпендикулярны для любых $x$, $y$, $z$.

**6.** Найти векторное произведение векторов $a$, $b$:
$a)$ $a = 2i^1 - 3i^2 + 5i^3$, $b = 4i^1 + 2i^2 - 6i^3$,
$b)$ $a = i^1 - 3i^2 + 2i^3$, $b = 6i^1 + 5i^2 - 4i^3$.

**7.** Треугольник $abc$ задан декартовыми координатами вершин $a = (4, -14, 8)$, $b = (2, -18, 12)$, $c = (12, -8, 12)$. Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины $c$ на противоположную сторону.

**8.** Пусть $x$ и $y$ — неколлинеарные векторы. При каком значении вещественного числа $\alpha$ векторы $p = \alpha x + 5y$ и $q = 3x - y$ будут коллинеарны?

**9.** Проверить, компланарны ли следующие векторы:
$a)$ $p = a - 2b + c$, $\quad q = 3a + b - 2c$, $\quad r = 7a + 14b - 13c$, где $a$, $b$, $c$ — попарно перпендикулярные орты;
$b)$ $a = (2, 3, -1)$, $\quad b = (1, -1, 3)$, $\quad c = (1, 9, -11)$,
$c)$ $p = 2a + b - 3c$, $\quad q = a - 4b + c$, $\quad r = 3a - 2b + 2c$, где $a$, $b$, $c$ — попарно перпендикулярные орты;
$d)$ $a = (3, -2, 1)$, $\quad b = (2, 1, 2)$, $\quad c = (3, -1, -2)$.

**10.** Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = p - 3q + r$, $b = 2p + q - 3r$ и $c = p + 2q + r$, где $p$, $q$ и $r$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

**11.** Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $p = x + y + z$, $q = x + y - z$, $k = x - y + z$.

**12.** Пусть вектор $x$ коллинеарен вектору $a = (1, 2, -3)$. Найти его координаты, если известно, что $(x, a) = 28$.

**13.** Пусть $x$, $y$, $z$ — ортогональные векторы единичной длины. Даны векторы $p = 3x + y - 5z$ и $q = x - 4y - 5z$. Вычислить $(p, q)$.

**14.** Найти длину вектора $a = 3m - 4n$, зная, что $m$ и $n$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы.

**15.** Пусть $p$ и $q$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить угол между векторами $x = 3p + 2q$ и $y = p + 5q$.

**16.** Пусть $x$ и $y$ — два неколлинеарных вектора. Проверить, что $[(x + y), (x - y)] = 2[y, x]$ и дать геометрическое толкование полученному результату.

**17.** Пусть $x$, $y$, $z$ — левый ортонормированный базис. Разложить по этим векторам вектор $p = [3x + y - 2z, x - y + 5z]$.

**18.** Даны декартовы координаты двух векторов $a = (-4, -8, 8)$ и $b = (4, 3, 2)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

**19.** Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = 3m + 5n$, $b = m - 2n$ и $c = 2m + 7n$, где $|m| = 1/2$, $|n| = 3$, угол между векторами $m$ и $n$ равен $3\pi/4$.

**20.** Проверить, что точки $a$, $b$, $c$, $d$ лежат в одной плоскости:
*a*) $a = (5, -1, -1)$, $b = (4, 2, 2)$, $c = (5, 3, 1)$, $d = (8, 0, -5)$;
*b*) $a = (3, -4, 1)$, $b = (2, -3, 7)$, $c = (1, -4, 3)$, $d = (4, -3, 5)$.

**21.** Пусть векторы $e^1$, $e^2$, $e^3$ некомпланарны. Проверить справедливость равенства

$$\begin{gathered}(x, y, z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3],\\ z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3) =\\ = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1\}(e^1, e^2, e^3).\end{gathered}$$

**22.** Пусть векторы $e^1$, $e^2$, $e^3$ некомпланарны. Положим

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2].$$

где $Q = (e^1, e^2, e^3)$. Показать, что векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ некомпланарны, причем $(e_k, e^l) = \delta_{kl}$.

**23.** Говорят, что векторы $e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3]$, $e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3]$ и $e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2]$, где $Q = (e^1, e^2, e^3)$, образуют *взаимный базис*. Базис $e^1, e^2, e^3$ называют при этом *основным*. Вычислить скалярное произведение $(x, y)$, разлагая вектор $x$ по основному базису, а $y$ — по взаимному.

**24.** На плоскости, отнесенной к декартовой системе координат $x_1, x_2$, рассмотрим треугольник с вершинами

$$x = (x_1, x_1), \quad y = (y_1, y_2), \quad z = (z_1, z_2).$$

С точностью до знака площадь этого треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Часто используют более симметричную форму записи:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Показать, что эти определители совпадают.

**25.** Для любых векторов $x, y$ положим

$$G(x, y) = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что $G(x, y) = S^2$, где $S$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $x, y$.

## Ответы, указания и решения

**1.** $x = (1, 0, -1)$. Указание. Так как $x = (x_1, x_2, x_3)$ перпендикулярен оси $x_2$, то $x_2 = 0$. Из двух условий $(x, a) = -3$ и $(x, b) = 8$, найти остальные координаты вектора $x$.

**2.** *а*) $-1/2$. Указание. Воспользоваться соотношением

$$|a - b|^2 = (a - b, a - b) = |a|^2 - 2(a, b) + |b|^2 = 3,$$

откуда найти $(a,b) = -1/2$. Затем упростить искомое скалярное произведение $(3a-4b, a+b)$ и получить ответ. $b)$ $-4$.

**3.** $(a,b) = -5$.

**4.** $|p| = \sqrt{\alpha^2|x|^2 + \beta^2|y|^2 + \gamma^2|z|^2}$.

**5.** Указание. Вычислить скалярное произведение векторов $p$ и $z$, убедиться, что оно равно нулю.

**6.** $a)$ $8i^1 + 32i^2 + 16i^3$; $b)$ $2i^1 + 16i^2 + 23i^3$.

**7.** Указание. Вычислить координаты векторов $a-c$ и $b-c$, а затем — их векторное произведение. Теперь можно найти площадь треугольника $S = \frac{1}{2}|[a-c, b-c]| = 30$ и его высоту $\frac{2S}{|b-a|} = 10$.

**8.** $\alpha = -15$.

**9.** Указание. Воспользоваться критерием компланарности векторов. $a)$ Векторы компланарны. $b)$ Векторы компланарны. $c)$ Векторы некомпланарны. $d)$ Векторы некомпланарны.

**10.** 25.

**11.** $4|(x,y,z)|$.

**12.** $x = (2,4,-6)$. Указание. Так как векторы $x$ и $(1,2,-3)$ коллинеарны, то координаты этих векторов пропорциональны:

$$x = \lambda(1,2,-3),$$

где $\lambda$ — произвольное ненулевое вещественное число. Найти $\lambda$, вычислив скалярное произведение векторов $(x,a)$.

**13.** $(p,q) = 24$.

**14.** $|a| = 5$. Решение: $a = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{(3m-4n, 3m-4n)} =$
$= \sqrt{9(m,m) - 24(m,n) + 16(n,n)} = \sqrt{9+16} = 5$.

**15.** $\cos(x,y) = 1/\sqrt{2}$.

**16.** Площадь параллелограмма, построенного на диагоналях исходного параллелограмма, вдвое больше площади исходного параллелограмма.

**17.** $p = 3x - 17y - 4z$.

**18.** $[a,b] = -40i^1 + 40i^2 + 20i^3,\ S = 60,\ \sin(a,b) = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

**19.** 0. Из разложения векторов $a$, $b$ и $c$ видно, что они компланарны.

**20.** $a$) Точки лежат в одной плоскости. Указание. Вычислить координаты векторов $b-a$, $c-a$ и $d-a$, а затем вычислить их смешанное произведение. Если смешанное произведение равно нулю, то точки лежат в одной плоскости. $b$) Точки лежат в одной плоскости.

**21.** Указание. Раскрыть скобки, использовать линейность и симметрию скалярного произведения, правило изменения знака смешанного произведения, а также то, что если два сомножителя в смешанном произведении совпадают, то оно равно нулю.

**22.** Решение. Заметим, что вектор $e_3$ одновременно ортогонален векторам $e^1$ и $e^2$, вектор $e_2$ ортогонален векторам $e^1$ и $e^3$, вектор $e_1$ ортогонален векторам $e^2$ и $e^3$. Следовательно, векторы $e_1$, $e_2$ и $e_3$ некомпланарны, а их скалярные произведения с векторами основного базиса, с несовпадающими номерами, равны нулю. Вычислим оставшиеся скалярные произведения:

$$(e_1, e^1) = \frac{(e^2, e^3, e^1)}{(e^1, e^2, e^3)} = \frac{(e^1, e^2, e^3)}{(e^1, e^2, e^3)} = 1,$$

$$(e_2, e^2) = -\frac{(e^1, e^3, e^2)}{(e^1, e^2, e^3)} = \frac{(e^1, e^2, e^3)}{(e^1, e^2, e^3)} = 1, \quad (e_3, e^3) = \frac{(e^1, e^2, e^3)}{(e^1, e^2, e^3)} = 1.$$

**23.** Решение. Пусть $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда

$$(x,y) = (x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, y_1[e^2,e^3] - y_2[e^1,e^3] + y_3[e^1,e^2])Q^{-1} =$$
$$= (x_1y_1(e^1,e^2,e^3) - x_2y_2(e^2,e^1,e^3) + x_3y_3(e^3,e^1,e^2))Q^{-1} =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

**24.** Указание. Преобразовать определитель третьего порядка и разложить его по третьему столбцу.

**25.** Решение. Вычислим определитель:

$$G(x,y) = |x|^2|y|^2 - (x,y)^2 = |x|^2|y|^2 - \cos^2(x,y)|x|^2|y|^2 =$$
$$= |x|^2|y|^2(1 - \cos^2(x,y)) = |x|^2|y|^2\sin^2(x,y) = S^2,$$

где $S$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $x, y$.

Глава 2

# Прямые и плоскости

## § 1. Различные формы уравнения прямой на плоскости

Прямая $l$, проходящая через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ параллельно вектору $e = (e_1, e_2)$, задается уравнением (см. рис. 1)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{1}$$

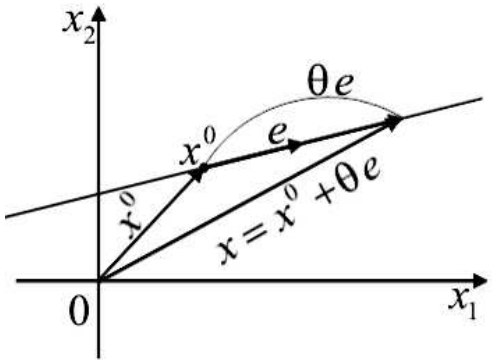



Рис. 1. Прямая, проходящая через точку $x_0$ и параллельно вектору $e$

Уравнение прямой можно записать также в одной из форм:

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0), \tag{2}$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{3}$$

$$x_2 = kx_1 + b, \tag{4}$$

где $k$ — тангенс угла наклона прямой к оси $x_1$.

Пусть даны две прямые $l_1$ и $l_2$, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то система уравнений (5) имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ при любых $b_1, b_2$. Точка $x = (x_1, x_2)$ — точка пересечения прямых $l_1$ и $l_2$. Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если определитель $\Delta$ равен нулю, но определитель $\Delta_1$, а следовательно, и определитель $\Delta_2$ отличны от нуля, то система (5) не имеет решений, т. е. прямые $l_1$, $l_2$ параллельны.

Если все три определителя $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ — нули, то система (5) имеет бесконечное множество решений, т. е. прямые $l_1$, $l_2$ совпадают.

Пример. Исследуем взаимное расположение двух прямых (сделайте рисунок!)

$$3x_1 - x_2 = 1,$$
$$x_1 - 7x_2 = 7.$$

Вычислим определитель матрицы этой системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данные две прямые пересекаются. Найдем точку $x^0$ пересечения этих прямых. Для этого вычислим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20.$$

Вычислим координаты точки пересечения:

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1.$$

## Упражнения

**1.** Показать, что прямая, проходящая через точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ и $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, задается уравнением

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1}, \tag{6}$$

а тангенс угла наклона данной прямой вычисляется по формуле

$$k = \frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}.$$

**2.** Какую ординату имеет точка $x^0$, лежащая на одной прямой с точками $x^1 = (-8; -6)$ и $x^2 = (-3; -1)$ и имеющая абсциссу $x_1^0 = 5$?

**3.** Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $x^1 = (2, -8)$ и $x^2 = (-1, 7)$.

**4.** Угол $\varphi$ между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (4), определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{7}$$

Показать, что если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны; если $k_1 k_2 + 1 = 0$, то прямые перпендикулярны.

**5.** Вычислить угол между двумя прямыми

$$x_2 = 3x_1,$$
$$x_2 = -2x_1 + 5.$$

**6.** Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и

$a$) параллельна прямой $x_2 = 4x_1 - 3$,

$b$) перпендикулярна прямой $x_2 = 1/2x_1 + 1$.

**7.** Написать уравнение прямой, по которой должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами $(3, 8)$, чтобы кратчайшим путем дойти до прямой $x_2 = 1/2x_1 - 1$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь?

**8.** Даны вершины треугольника

$$x^1 = (3, 1), \quad x^2 = (3, -1), \quad x^3 = (0, 4).$$

Написать уравнения прямых, проходящих через каждую из них параллельно противоположной стороне.

**9.** Проверить, лежат ли на одной прямой три точки $(1, 3)$, $(5, 7)$ и $(10, 12)$.

**10.** Сила $P$ приложена к началу координат, и составляющие ее по осям соответственно равны 5 и $-2$. Найти уравнение прямой, по которой направлена сила.

**11.** Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой, данной уравнением:
$a$) $2x_1 - x_2 + 3 = 0$,
$b$) $5x_1 + 2x_2 - 8 = 0$,
$c$) $3x_1 + 8x_2 + 16 = 0$.

**12.** Вычислить угол между двумя прямыми

$$x_2 = 4x_1 - 7,$$
$$x_2 = -1/4x_1 + 2.$$

**13.** Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и
$a$) образует угол $\dfrac{\pi}{4}$ с прямой $x_2 = 2x_1 + 5$,
$b$) наклонена под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к прямой $x_2 = x_1 - 1$.

**14.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2, -1)$ и составляющей с осью $x_1$ угол, вдвое больший угла, составляемого с той же осью прямой $x_2 = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} + \dfrac{4}{3}$.

**15.** Даны вершины треугольника: $x^1 = (4, 6)$, $x^2 = (-4, 0)$ и $x^3 = (-1, -4)$. Составить уравнения прямых, на которых лежат его стороны.

**16.** Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (1).

## Ответы, указания и решения

**1.** Указание. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $x^1$ в форме (2). Подставить в это уравнение координаты точки $x^2$ и вычислить угловой коэффициент $k$. Подставить значение $k$ в исходное уравнение прямой.

**2.** $x_2^0 = 7$. Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $x^1$ и $x^2$, воспользовавшись формулой (6). Получим

$$\frac{x_1 + 8}{-3 + 8} = \frac{x_2 + 6}{-1 + 6}.$$

Подставим координаты точки $x^0$ в получившееся уравнение прямой:

$$\frac{5 + 8}{-3 + 8} = \frac{x_2^0 + 6}{-1 + 6}.$$

Из последнего уравнения найдем вторую координату точки $x^0$. Получается $x_2^0 = 7$.

**3.** $x_2 = -5x_1 + 2$. Указание. Воспользоваться уравнением (6) прямой, проходящей через две точки, и привести его к виду $x_2 = kx_1 + b$.

**4.** Указание. Воспользоваться определением тангенса и рассмотреть случаи, когда $\sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 0$.

**5.** $\pi/4$. Указание. Воспользоваться формулой (7).

**6.** $a)$ $x_2 = 4x_1$; $b)$ $x_2 = -2x_1$.

**7.** $x_2 = -2x_1 + 14$, $x^0 = (6, 2)$, $s = 3\sqrt{5}$.

**8.** $x_1 = 0$, $x_2 = -5/3x_1 + 6$, $x_2 = -x_1 + 2$.

**9.** Точки лежат на одной прямой.

**10.** $x_2 = -2/5x_1$.

**11.** $a)$ $k = 2, b = 3$; $b)$ $k = -5/2, b = 4$; $c)$ $k = -3/8, b = -2$.

**12.** $\pi/2$. Воспользоваться упражнением 4.

**13.** $a)$ $x_2 = -3x_1$ или $x_2 = 1/3x_1$;

$b)$ $x_2 = -(2 - \sqrt{3})x_1$ или $x_2 = -(2 + \sqrt{3})x_1$. Сделайте рисунки.

**14.** $x_2 = 1/\sqrt{3}x_1 - 1 - 2\sqrt{3}$. Сделайте рисунок.

**15.** $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, $4x_1 + 3x_2 + 16 = 0$, $2x_1 - x_2 - 2 = 0$.

**16.** $\cos\varphi = \dfrac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}$. Указание. Используйте формулу (2), с. 15.

## § 2. Нормальная форма уравнения прямой

Один из способов описания прямой следующий: это множество всех векторов, ортогональных данному вектору $p$ (прямая, проходящая через начало координат), сдвинутое параллельно $p$ на расстояние $d$ от начала координат (см. рис. 1), т. е. для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0, \tag{1}$$

где $p = (p_1, p_2)$ — заданный вектор единичной длины, $d$ — проекция $x$ на направление $p$. Знак $d$ показывает, в какую сторону (по отношению к $p$) выполняется сдвиг (см. рис. 1: $d > 0$, угол $\alpha$ между векторами $p$ и $x$ острый ($a$); $d < 0$, угол $\alpha$ между векторами $p$ и $x$ тупой ($b$)). Уравнение (1) называют *нормальной формой* уравнения прямой. Напомним, что

$$(x, p) = p_1 x_1 + p_2 x_2.$$

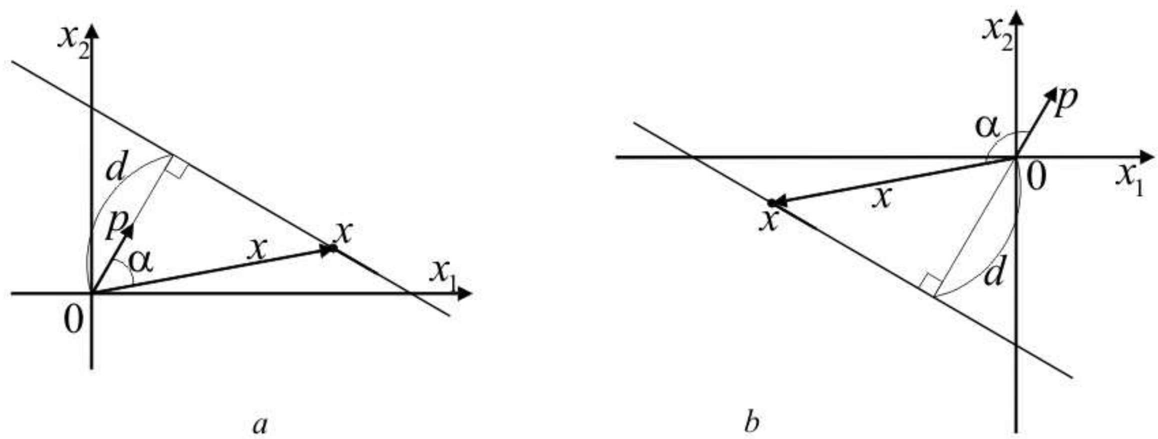



Рис. 1. К нормальному уравнению прямой

Из уравнения прямой в общем виде $ax_1 + bx_2 + c = 0$ получим нормальную форму уравнения прямой. Для этого вычислим модуль вектора с координатами $a$ и $b$: $\sqrt{a^2 + b^2}$. Разделим на это число обе части общего уравнения прямой и положим

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Теперь можно записать уравнение прямой в форме (1). Поскольку $p_1^2 + p_2^2 = 1$, то полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

Пусть дана точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$. Расстояние от точки до прямой, заданной уравнением (1), вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0, p) - d|.$$

Пример. Найдем расстояние от точки $x^0 = (5, 5)$ до прямой (сделайте рисунок!)

$$4x_1 - 3x_2 + 10 = 0.$$

Перейдем к нормальному виду уравнения прямой. Разделим обе части общего уравнения прямой на

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Теперь вычислим координаты вектора $p$ и величину $d$ сдвига прямой от начала координат:

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{4}{5}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{3}{5}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{10}{5}.$$

Таким образом, получили нормальный вид уравнения этой прямой:

$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + 2 = 0.$$

Расстояние до прямой от точки $x^0$ вычисляется следующим образом:

$$|\delta| = \left|\frac{4}{5}x_1^0 - \frac{3}{5}x_2^0 + 2\right| = \left|\frac{4\cdot 5}{5} - \frac{3\cdot 5}{5}x_2 + 2\right| = 3.$$

## Упражнения

**1.** Привести к нормальному виду уравнение $5x_1 + 12x_2 - 39 = 0$.

**2.** Найти расстояние прямой $9x_1 - 12x_2 + 10 = 0$ от начала координат.

**3.** Проверить, что прямые

$$2x_1 + \sqrt{5}x_2 - 15 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{11}x_1 - 5x_2 + 30 = 0$$

касаются одного и того же круга с центром в начале координат, и вычислить радиус этого круга.

**4.** Вычислить длину перпендикуляра, опущенного на прямую $12x_1 - 5x_2 - 27 = 0$ из точки $x^0 = (4, -1)$.

**5.** Написать уравнения прямых (в нормальной форме), на которых лежат стороны квадрата, диагонали которого лежат на осях координат. Длина стороны квадрата равна $a$.

**6.** Из начала координат в первой и третьей четвертях провести прямую, проходящую на расстоянии трех от точки $x^0 = (2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$.

**7.** Привести к нормальному виду уравнение $6x_1 + 8x_2 - 15 = 0$.

**8.** Через точку $x^0 = (5, 0)$ провести касательные к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

**9.** Диагонали ромба, длиной в 30 и 16 единиц, лежат на осях координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.

**10.** Дана прямая $12x_1 + 5x_2 - 52 = 0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на расстоянии $s = 2$.

**11.** Написать уравнения сторон равнобочной трапеции, зная, что основания ее соответственно равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол в $\pi/3$. Большее основание и ось симметрии трапеции лежат на осях координат.

**12.** Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (1).

## Ответы, указания и решения

**1.** $5/13x_1 + 12/13x_2 - 3 = 0$.

**2.** $2/3$. Сделайте рисунок.

**3.** $r = 5$. Указание. Сделайте рисунок. Приведите уравнения прямых к нормальной форме и убедитесь, что расстояние от начала координат до каждой прямой равно пяти. Все касательные отстоят от центра круга на расстоянии, равном радиусу, и проходят перпендикулярно радиусу. Данные прямые касаются круга с центром в начале координат, т. к. они должны находиться на одинаковом расстоянии от начала координат.

**4.** $|\delta| = 2$. Указание. Сделайте рисунок и воспользуйтесь формулой расстояния от точки до прямой.

**5.** $\pm 1/\sqrt{2}\, x_1 \pm 1/\sqrt{2}\, x_2 - a/2 = 0$. Указание. Сделайте рисунок и найдите координаты векторов $p$ для каждой из сторон квадрата. Расстояние $d$ для всех сторон будет одним и тем же (каким?).

**6.** $x_1 = x_2$. Указание. Сделайте рисунок. Воспользуйтесь формулой вычисления расстояния от точки до прямой, заданной в нормальном виде. Получится уравнение для $p_1$ и $p_2$: $|2\sqrt{2}p_1 + 5\sqrt{2}p_2| = 3$. Еще одно уравнение для $p_1$ и $p_2$ есть $p_1^2 + p_2^2 = 1$.

**7.** $3/5x_1 + 4/5x_2 - 3/2 = 0$.

**8.** Решение. Сделайте рисунок. Центр окружности совпадает с началом координат, а ее радиус $r = 3$. Следовательно, искомая касательная находится от начала координат на расстоянии $d = 3$. Будем искать нормальное уравнение этой прямой; параметр $d$ уже известен, и уравнение имеет вид $x_1p_1 + x_2p_2 - 3 = 0$. Вектор $p = (p_1, p_2)$ определяем из того условия, что $p_1^2 + p_2^2 = 1$ и из условия, что прямая проходит через точку $x^0 = (5, 0)$, и, следовательно, координаты точки удовлетворяют уравнению прямой. Подставляя эти координаты, получим $5p_1 - 3 = 0$, откуда $p_1 = 3/5$. Тогда

$$p_2 = \pm\sqrt{1 - p_1^2} = \pm\sqrt{1 - (3/5)^2} = \pm 4/5.$$

Таким образом, задача имеет два решения: $3/5x_1 + 4/5x_2 - 3 = 0$ и $3/5x_1 - 4/5x_2 - 3 = 0$. Действительно, из внешней точки можно провести две касательные к окружности.

**9.** $s = \dfrac{15 \cdot 16}{17}$. Указание. Нарисуйте ромб. Искомое расстояние равно удвоенному расстоянию от начала координат до одной из его сторон. Напишите уравнение прямой, которой принадлежит эта сторона, и приведите его к нормальной форме.

**10.** $12x_1 + 5x_2 - 26 = 0$, $12x_1 + 5x_2 - 78 = 0$. Сделайте рисунок.

**11.** $x_2 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}x_1 + 5\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}x_1 + 5\sqrt{3}$. Сделайте рисунок.

**12.** $\cos\varphi = (p^1, p^2)$. Указание. Используйте формулу (2), с. 15.

## § 3. Различные формы уравнения плоскости

Плоскость $\pi$, которая проходит через точку $x^0$ и натянута на два неколлинеарных вектора $e^1$ и $e^2$, задается уравнением (см. рис. 1)

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty. \tag{1}$$

Учитывая, что векторы $x - x^0$, $e^1$ и $e^2$ являются компланарными, уравнение плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Раскроем определитель (например, по первому столбцу) в левой части этого равенства и получим уравнение плоскости $\pi$ в форме

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \tag{3}$$

Здесь числа $a, b, c, d$ выражаются через координаты векторов $e^1, e^2, x^0$. Вектор $n = (a, b, c)$ является *нормальным* к данной плоскости. Уравнение вида (3) называют *общим уравнением плоскости.*

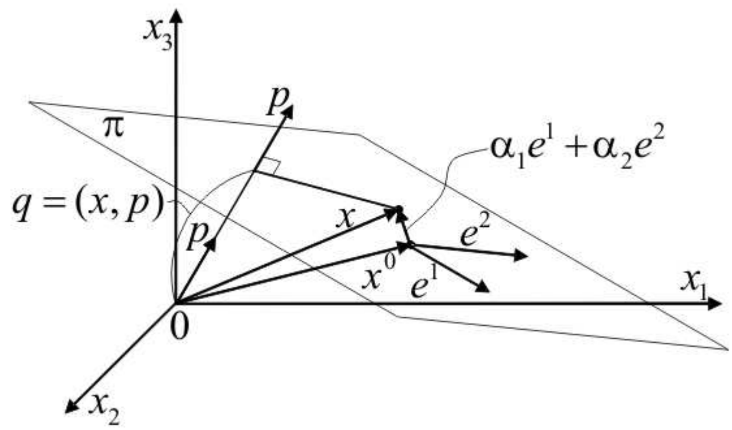



Рис. 1. К уравнению плоскости, проходящей через точку $x^0$, натянутой на векторы $e^1$ и $e^2$; а также к нормальному уравнению плоскости $(x, p) - q = 0$

Уравнение плоскости, ортогональной вектору $p$ единичной длины и отстоящей от начала координат на расстояние $q$, имеет вид (см. рис. 1)

$$(x, p) - q = 0. \tag{4}$$

Знак $q$ определяет направление сдвига плоскости по отношению к направлению вектора $p$. Уравнение (4) называют *нормальным уравнением плоскости.*

*Направляющие косинусы вектора* — это косинусы углов, которые вектор образует с положительными направлениями осей координат. Если длина вектора равна единице, направляющие косинусы вектора совпадают с его декартовыми координатами. Так как $|p| = 1$, то координаты вектора $p$ называют *направляющими косинусами плоскости.*

## Упражнения

**1.** Используя уравнение (2), показать, что уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $x^0$, $x^1$ и $x^2$ можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & x_1^2 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 \\ x_3 - x_3^0 & x_3^1 - x_3^0 & x_3^2 - x_3^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Проанализировать случай, когда точки $x^0$, $x^1$ и $x^2$ лежат на одной прямой.

**2.** Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $x^0 = (2, 1, 3)$, $x^1 = (-1, 2, 5)$, $x^2 = (3, 0, 1)$.

**3.** Показать, анализируя общее уравнение плоскости, что:
если $a = 0$, $b = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости $x_1x_2$;
если $a = 0$, то плоскость параллельна оси $x_1$;
если $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

**4.** Показать, что $\alpha = -d/a$, $\beta = -d/b$, $\gamma = -d/c$ — координаты точек пересечения плоскости с осями $x_1, x_2, x_3$ (см. рис. 2), проанализировать случаи, когда соответствующие знаменатели — нули.

**5.** Используя нормальное уравнение плоскости (4), найти отклонение данной точки $x^0$ от плоскости.

**6.** Преобразовать общее уравнение плоскости (3) к нормальному виду.

**7.** Найти расстояние от точки $x^0 = (2, 4, -3)$ до плоскости

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0.$$

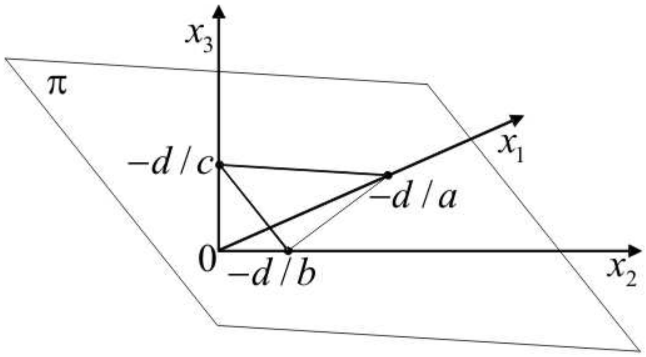



Рис. 2. Точки пересечения плоскости с осями координат

**8.** Найти расстояние от точки $x^0 = (3, 1, -1)$ до плоскости

$$22x_1 + 4x_2 - 20x_3 - 45 = 0.$$

**9.** Даны две точки $x^1 = (1, 3, -2)$ и $x^2 = (7, -4, 4)$. Через точку $x^2$ провести плоскость, перпендикулярную вектору $x^2 - x^1$.

**10.** Через точку $x^0 = (7, -5, 1)$ провести плоскость, которая отсекает на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

**11.** Найти точку, симметричную с началом координат относительно плоскости $6x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 121 = 0$.

**12.** Найти плоскость, зная, что точка $x^0 = (3, -6, 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат.

**13.** Найти расстояние от точки $x^0 = (4, 3, -2)$ до плоскости

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 + 1 = 0.$$

**14.** Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

*a*) $2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$;

*b*) $3x_1 - 5x_3 + 1 = 0$;

*c*) $9x_2 - 2 = 0$.

**15.** Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $x^0 = (1, -1, 3)$, $x^1 = (2, 3, 4)$, $x^2 = (-1, 1, 2)$.

**16.** Вычислить координаты точек пересечения с осями координат плоскости $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 12 = 0$.

**17.** Написать уравнение плоскости, которая параллельна плоскости $x_1x_3$ и проходит через точку $(2, -5, 3)$.

**18.** Показать, что косинус угла $\varphi$ между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

## Ответы, указания и решения

**1.** Решение. Пусть даны три точки $x^0$, $x^1$, $x^2$, не лежащие на одной прямой. Обозначим произвольную точку плоскости через $x$. Построим векторы $x - x^0$, $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$ (сделайте рисунок!). Уравнение плоскости, проходящей через точки $x^0$, $x^1$ и $x^2$, можно записать теперь, используя компланарность векторов $x - x^0$, $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & x_1^2 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 \\ x_3 - x_3^0 & x_3^1 - x_3^0 & x_3^2 - x_3^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если точки $x^0$, $x^1$, $x^2$ лежат на одной прямой, то векторы $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$ коллинеарны. Следовательно, второй и третий столбцы этого определителя пропорциональны, и при любом $x$ он равен нулю. Это означает, что любая точка пространства удовлетворяет полученному уравнению.

**2.** $2x_2 - x_3 + 1 = 0$.

**3.** Указание. Сначала рассмотрите случай $a = 0$, $b = 0$. Общее уравнение плоскости принимает вид $cx_3 + d = 0$. Этому уравнению удовлетворяют точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ с координатой $x_3 = -d/c$ и любыми $x_1$, $x_2$. Иными словами, ему удовлетворяют точки плоскости, проходящей параллельно координатной плоскости $x_1x_2$. Координата точки пересечения этой плоскости с осью $x_3$ есть $x_3 = -d/c$. Сделайте рисунок этой плоскости. Остальные два случая рассмотрите аналогично.

**4.** Указание. Для того, чтобы найти точку пересечения плоскости с осью $x_1$, в общем уравнении плоскости надо положить $x_2$, $x_3 = 0$. Случаи, когда $a = 0$, $b = 0$ или $c = 0$, рассматриваются аналогично предыдущей задаче.

**5.** Решение. Используя нормальное уравнение плоскости, можно определить по какую сторону от нее находится точка $x^0$ и найти отклонение точки от плоскости. Поскольку $|p| = 1$, то $(x^0, p)$ — величина проекции вектора $x^0$ на прямую, параллельную $p$, следовательно, величина $\delta = (x^0, p) - d$ есть отклонение точки $x^0$ от плоскости (сделайте рисунок!). Причем знак $\delta$ показывает, по какую сторону от плоскости расположена точка $x^0$. Говорят, что точка $x^0$ находится в *положительном полупространстве* относительно плоскости, если $\delta > 0$. Для точек, расположенных по другую сторону от плоскости (в *отрицательном полупространстве*), справедливо неравенство $\delta < 0$. Расстояние от точки до плоскости, заданной нормальным уравнением, вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0, p) - d|.$$

**6.** Решение. Для того, чтобы привести общее уравнение плоскости к уравнению в нормальной форме, нужно поделить обе части общего уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Тогда $p$ и $q$ запишутся в виде

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

В этом случае длина вектора $p$ будет равна единице.

**7.** Решение. Сначала запишем уравнение плоскости в нормальной форме. Поделим уравнение

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

на $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. Получим

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 1 = 0.$$

Вычислим расстояние от точки до плоскости:

$$|\delta| = \left|\frac{2}{3}x_1^0 - \frac{1}{3}x_2^0 + \frac{2}{3}x_3^0 - 1\right| = \left|\frac{2 \cdot 2}{3} - \frac{1 \cdot 4}{3} - \frac{2 \cdot 3}{3} - 1\right| = 3.$$

**8.** $|\delta| = 3/2$.

**9.** $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 94 = 0$. Указание. Запишите нормальное уравнение плоскости. Сначала вычислите вектор $p = (x^2 - x^1)/|x^2 - x^1|$. Затем, используя то, что точка $x^2$ принадлежит плоскости, найдите $q$.

**10.** $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$.

**11.** $(-12, -4, 18)$. Указание. Привести уравнение плоскости к нормальному виду. Учесть, что если $q < 0$, то плоскость сдвигается от начала координат в направлении противоположном относительно вектора $p$. По условию задачи искомый вектор $x^0$ должен быть направлен противоположно вектору $p$ и $|x^0| = 2|q|$.

**12.** $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 49 = 0$.

**13.** $|\delta| = 0$.

**14.** $a$) Плоскость проходит через начало координат; $b$) плоскость перпендикулярна плоскости $x_1x_3$, параллельна оси $x_2$; $c$) плоскость параллельна плоскости $x_1x_3$.

**15.** $6x_1 + x_2 - 10x_3 + 25 = 0$.

**16.** $\alpha = -6$, $\beta = 4$, $\gamma = 12$.

**17.** $x_2 + 5 = 0$.

**18.** Указание. Используйте геометрический смысл векторов

$$n^1 = (a_1, b_1, c_1), \quad n^2 = (a_2, b_2, c_2)$$

и формулу (2), с. 15, косинуса угла между векторами.

## § 4. Уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через точку $x^0$ параллельно вектору $e$, имеет вид (см. рис. 1)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{1}$$

Запишем это уравнение в координатной форме и исключим параметр $\theta$, получим *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \tag{2}$$

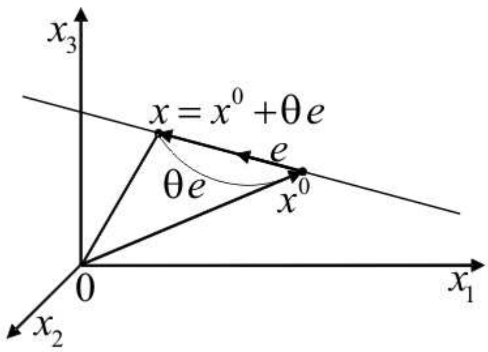



Рис. 1. Прямая в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $x^1$ и $x^2$, можно записать в векторной форме

$$x = x^1 + \theta(x^2 - x^1), \quad -\infty < \theta < \infty, \tag{3}$$

и в координатной форме

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1} = \frac{x_3 - x_3^1}{x_3^2 - x_3^1}. \tag{4}$$

Прямую можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Для того, чтобы преобразовать уравнения прямой (5) к каноническим уравнениям, нужно найти точку $x^0$, через которую проходит прямая и ее направляющий вектор $e$. В качестве точки $x^0$ можно взять любую точку, координаты которой удовлетворяют уравнению (5). Направляющий вектор прямой будет перпендикулярен нормальным векторам плоскостей $n^1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $n^2 = (a_2, b_2, c_2)$, поэтому его можно задать как их векторное произведение

$$e = [(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)].$$

Пример. Найдем уравнение прямой $l$, по которой пересекаются плоскости

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0.$$

Предположим, что прямая пересекает плоскость $x_1x_2$, т. е. $x_3 = 0$. Подставим $x_3 = 0$ в систему и найдем остальные координаты точки

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8 = 0.$$

Решение этой системы: $x_1 = -1/5$, $x_2 = -17/5$, т. е. точка

$$x^0 = (-1/5, -17/5, 0)$$

принадлежит прямой $l$. Направляющий вектор $e$ прямой $l$ определим по формуле

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3, \tag{6}$$

или $e = (-1, 18, 10)$. Запишем канонические уравнения прямой:

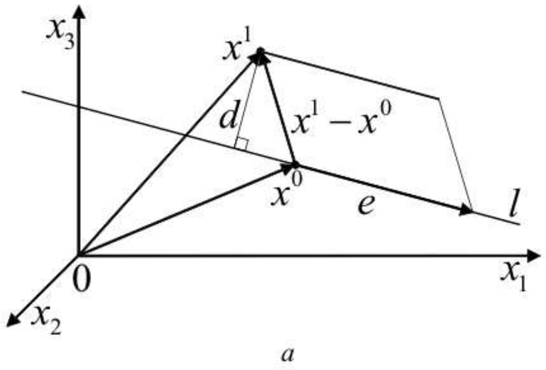
$$\frac{x_1 + 1/5}{-1} = \frac{x_2 + 17/5}{18} = \frac{x_3}{10}.$$

Расстояние $d$ от прямой $l$, проходящей через точку $x^0$ параллельно вектору $e$, до точки $x^1$ вычисляется по формуле (см. рис. 2, $a$)

$$d = \frac{|[e, x^1 - x^0]|}{|e|}.$$

Пусть прямые $l_1$ и $l_2$ заданы уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$



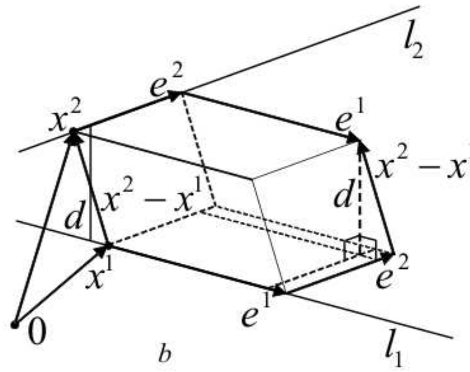




Рис. 2. Вычисление расстояния от точки до прямой ($a$) и между прямыми ($b$)

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Формула, по которой можно вычислить расстояние $d$ между прямыми $l_1$ и $l_2$, имеет следующий вид (см. рис. 2, $b$):

$$d = |(e^1, e^2, x^2 - x^1)|/|[e^1, e^2]|.$$

Углы между прямыми и плоскостями вычисляются как углы между соответствующими направляющими (для прямых) и нормальными векторами (для плоскостей). Например, косинус угла $\varphi$ между двумя прямыми с направляющими векторами $e^1$ и $e^2$ можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}.$$

Условия ортогональности и параллельности прямых и плоскостей записываются через условия ортогональности и параллельности соответствующих направляющих векторов $e$ и нормальных векторов $n$. Так, если прямая и плоскость ортогональны, то векторы $e$ и $n$ коллинеарны; условие параллельности прямой и плоскости следующее:

$$(e, n) = 0.$$

## Упражнения

**1.** Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в уравнении прямой (2) обращается в нуль.

**2.** Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 9 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

**3.** Из точки $(3, -2, 4)$ опустить перпендикуляр на плоскость

$$5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 1 = 0.$$

**4.** Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $x^1 = (3, 1 - 2)$ и через прямую

$$\frac{x_1 - 4}{5} = \frac{x_2 + 3}{2} = \frac{x_3}{1}.$$

**5.** Положение зеркала определяется уравнением

$$2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 42 = 0.$$

С какой точкой должно совпадать зеркальное изображение точки $x^0 = (3, -7, 5)$?

**6.** Определить косинус угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 6x_3 - 2 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

**7.** При каком значении коэффициента $\alpha$ плоскость

$$\alpha x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 1 = 0$$

будет параллельна прямой $\dfrac{x_1 - 1}{4} = \dfrac{x_2 + 2}{3} = \dfrac{x_3}{1}$?

**8.** Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x_1 - 1}{2} = \dfrac{x_2 + 3}{-1} = \dfrac{x_3 + 2}{5}$ на плоскости $4x_1 + 3x_2 - x_3 + 3 = 0$.

**9.** Проверить, что прямые $\dfrac{x_1 - 3}{5} = \dfrac{x_2 + 1}{2} = \dfrac{x_3 - 2}{4}$ и $\dfrac{x_1 - 8}{3} = \dfrac{x_2 - 1}{1} = \dfrac{x_3 - 6}{-2}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.

**10.** Можно ли через прямую $\dfrac{x_1 - 7}{4} = \dfrac{x_2 - 5}{3} = \dfrac{x_3 - 1}{6}$ провести плоскость параллельно плоскости $2x_1 + x_2 - 7x_3 + 1 = 0$?

**11.** Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$.

**12.** Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x_1-1}{4}=\dfrac{x_2}{7}=\dfrac{x_3-2}{3}$ на плоскости $5x_1-8x_2-2x_3-1=0$.

**13.** Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $x^0=(2,3,1)$ на прямую $\dfrac{x_1+1}{2}=\dfrac{x_2}{-1}=\dfrac{x_3-2}{3}$.

**14.** Вычислить направляющие косинусы прямой

$$\begin{cases} 5x_1-6x_2+2x_3+21=0, \\ x_1-x_3+3=0. \end{cases}$$

**15.** Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой $\dfrac{x_1+2}{4}=\dfrac{x_2-3}{5}=\dfrac{x_3-1}{-2}$.

**16.** Через прямую $\dfrac{x_1-2}{5}=\dfrac{x_2-3}{1}=\dfrac{x_3+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x_1+4x_2-3x_3+7=0$.

**17.** Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми:

$$\frac{x_1-9}{4}=\frac{x_2+2}{-3}=\frac{x_3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x_1}{-2}=\frac{x_2+7}{9}=\frac{x_3-2}{2}.$$

## Ответы, указания и решения

**1.** Решение. Если какая-то из координат вектора $e$ равна 0, например $e_3=0$, то канонические уравнения принимают вид

$$\frac{x_1-x_1^0}{e_1}=\frac{x_2-x_2^0}{e_2}, \quad x_3-x_3^0=0.$$

В этом случае направляющий вектор прямой $e=(e_1,e_2,0)$, а сама прямая лежит в плоскости, перпендикулярной оси $x_3$ и пересекающей ее в точке с координатой $x_3=x_3^0$.

**2.** $\dfrac{x_1}{9}=\dfrac{x_2}{5}=\dfrac{x_3+3}{1}$. Указание. При составлении уравнений воспользоваться точкой $x^0=(0,0,-3)$.

**3.** $\dfrac{x_1-3}{5}=\dfrac{x_2+2}{3}=\dfrac{x_3-4}{-7}$.

**4.** $8x_1 - 9x_2 - 22x_3 - 59 = 0$. Указание. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $x^0$, натянутой на векторы $e^1$ и $e^2$. Заданное в формулировке упражнения уравнение прямой определяет точку $x^0$ и вектор $e^1$. Вектор $e^2$ может быть найден в виде $e^2 = x^1 - x^0$, где $x^1$ есть заданная точка.

**5.** $(9/7, -13/7, 17/7)$. Указание. Приведите уравнение плоскости к нормальному виду, найдите вектор $p$ и вычислите расстояние от точки $x^0$ до плоскости. По условию задачи это расстояние должно быть в два раза меньше расстояния от точки $x^0$ до искомой точки $x^1$. Как должен быть направлен вектор $x^0 - x^1$ относительно вектора $p$? Сделайте рисунок.

**6.** $\cos\varphi = 98/195$.

**7.** $\alpha = -1$.

**8.** Прямая лежит на плоскости.

**9.** $8x_1 - 22x_2 + x_3 - 48 = 0$. Указание. Вычислите расстояние между прямыми и убедитесь, что оно равно нулю. Напишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и натянутой на два неколлинеарных вектора.

**10.** Нельзя. Указание. Вычислите скалярное произведение направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости. Оно не равно нулю. Следовательно, данная прямая пересекает плоскость, а потому и всякая плоскость, проходящая через нее, пересечет данную плоскость.

**11.** $\dfrac{x_1}{x_1^0} = \dfrac{x_2}{x_2^0} = \dfrac{x_3}{x_3^0}$.

**12.** Прямая не лежит на плоскости.

**13.** $\dfrac{x_1 - 2}{3} = \dfrac{x_2 - 3}{3} = \dfrac{x_3 - 1}{-1}$. Решение. В формулировке задачи дана прямая $l_1$, проходящая через точку $x^1 = (-1, 0, 2)$ в направлении вектора $e^1 = (2, -1, 3)$. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $x^0 = (2, 3, 1)$ перпендикулярно $l_1$, имеют вид

$$\frac{x_1 - 2}{e_1} = \frac{x_2 - 3}{e_2} = \frac{x_3 - 1}{e_3}.$$

Необходимо найти координаты направляющего вектора $e = (e_1, e_2, e_3)$ этой прямой. Сначала найдем плоскость $\pi$, в которой лежит искомый перпендикуляр. Построим уравнение плоскости $\pi$, проходящей через точку $x^0$ и натянутой на векторы $e^1$ и $e^2 = x^0 - x^1 = (3, 3, -1)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & 2 & 3 \\ x_2 - 3 & -1 & 3 \\ x_3 - 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим этот определитель и получим общее уравнение плоскости $\pi$:

$$-8x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 58 = 0.$$

Вектор $e$ должен быть ортогонален нормальному к этой плоскости вектору $n = (-8, 11, 9)$:

$$(e, n) = -8e_1 + 11e_2 + 9e_3 = 0.$$

Кроме того, вектор $e$ должен быть ортогонален направляющему вектору $e^1$ прямой $l_1$:

$$(e, e^1) = 2e_1 - e_2 + 3e_1 = 0.$$

Итак, получили два уравнения для определения трех неизвестных. Ясно, что искомый вектор определяется с точностью до множителя, поэтому мы можем зафиксировать любую его координату. Положим, например, $e_3 = -1$ и найдем $e_1 = e_2 = 3$.

**14.** $\dfrac{e}{|e|} = \left(\dfrac{6}{11}, \dfrac{7}{11}, \dfrac{6}{11}\right)$.

**15.** $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0$.

**16.** $11x_1 - 17x_2 - 19x_3 + 10 = 0$. Решение. По условию задачи должны быть компланарны следующие векторы: $x - x^0$, где $x$ — произвольная точка искомой плоскости $\pi$, $x^0 = (2, 3, -1)$ — точка, через которую проходит заданная прямая $l$; $e = (5, 1, 2)$ — направляющий вектор прямой $l$; $n = (1, 4, -3)$ — вектор, нормальный к заданной плоскости. Условие компланарности этих трех векторов определяет уравнение плоскости $\pi$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & 5 & 1 \\ x_2 - 3 & 1 & 4 \\ x_3 + 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим этот определитель и получим общее уравнение плоскости $\pi$.

**17.** $d = 7$.

Глава 3

# Квадратичные формы. Кривые и поверхности второго порядка

## § 1. Квадратичные формы

*Квадратичной формой* называют вещественную функцию $F$ от $n$ вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{1}$$

Заданные вещественные числа $a_{ij}$ называют *коэффициентами* квадратичной формы. Предполагается, что они удовлетворяют условиям симметрии: $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, а в записи (1) наряду со слагаемыми $a_{ij}x_ix_j$ содержатся слагаемые $a_{ji}x_jx_i$.

Запишем квадратичную форму в более компактном виде. Пусть $A$ — симметричная матрица с элементами $a_{ij}$, $i$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем считать элементом пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $F(x) = (Ax, x)$, где скобки означают стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

*Каноническим* называют специальный вид квадратичной формы, в котором матрица $A$ диагональна: $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

Пусть в квадратичной форме выполнена *линейная замена переменных*, т. е. введены новые переменные $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, связанные со старыми переменными $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соотношением $x = Qy$, где $Q$ — невырожденная матрица, называемая *матрицей преобразования переменных.* Получим

$$F = (AQy, Qy) = (Q^TAQy, y) = (By, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_iy_j,$$

где через $B$ обозначена матрица $Q^TAQ$.

Всякую квадратичную форму невырожденным ортогональным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду. Действительно, существует ортогональная матрица $Q$ такая, что (см. [3], с. 254)

$$Q^T A Q = \Lambda,$$

где $\Lambda$ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены все собственные числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ матрицы $A$. Тогда

$$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2. \qquad (2)$$

Каждой симметричной матрице $A$ соответствует три целых числа: $n_0(A)$ — количество нулевых характеристических чисел матрицы $A$, $n_+(A)$ — количество положительных характеристических чисел, $n_-(A)$ — количество отрицательных характеристических чисел (характеристические числа подсчитываются с учетом их кратности). Тройка чисел $n_0(A), n_+(A), n_-(A)$ называется *инерцией матрицы* $A$, или *инерцией* соответствующей ей *квадратичной формы.*

Количества положительных и отрицательных слагаемых в (2) определяются инерцией матрицы $A$, соответствующей квадратичной форме (1), и не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы (1) к каноническому виду. Поэтому две квадратичные формы переводятся друг в друга невырожденным преобразованием тогда и только тогда, когда инерции их матриц совпадают.

Квадратичная форма (1) называется *положительно определенной*, если соответствующая ей матрица $A$ положительно определена, т. е. $(Ax, x) > 0$ для всех не равных нулю $x \in \mathbb{R}^n$.

Чтобы матрица $A$ была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительны.

*Критерий Сильвестра.* Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $A$ были положительны.

## Упражнения

**1.** Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

вычислив собственные числа ее матрицы.

**2.** Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

вычислив собственные числа ее матрицы.

**3.** Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

методом Лагранжа. Найти невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к этому виду.

**4.** Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

методом Лагранжа и невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к этому виду.

**5.** Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$$

методом Лагранжа и невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к этому виду.

**6.** Проверить, существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$F = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

в форму

$$G = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3,$$

вычислив инерции этих квадратичных форм.

**7.** Проверить, существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

в форму

$$G = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3,$$

вычислив инерции этих квадратичных форм.

**8.** Найти все значения параметра $\lambda$, при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$F = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

**9.** Найти все значения параметра $\lambda$, при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$F = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

**10.** Найти канонический вид квадратичных форм, вычислив собственные числа их матриц:

$a)$ $F = x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$

$b)$ $F = 9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 2x_2x_3.$

**11.** Найти канонический вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду каждую из следующих квадратичных форм методом Лагранжа:

$a)$ $F = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3,$

$b)$ $F = 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

**12.** Найти все значения параметра $\lambda$, при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

## Ответы, указания и решения

**1.** Решение. Квадратичной форме

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический полином:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2+\lambda & -\lambda-1/2 & 0 \\ 1/2+\lambda & 0 & -1/2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + 1/2)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1/2)^2 (-\lambda + 1/2 + 1/2) =$$

$$= (\lambda + 1/2)^2 (1 - \lambda).$$

Корнями этого полинома являются числа

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1/2,$$

следовательно, существует такое невырожденное ортогональное преобразование переменных $x = Qy$, что в новых переменных $y$ квадратичная форма имеет следующий канонический вид:

$$F = y_1^2 - \frac{1}{2}\,y_2^2 - \frac{1}{2}\,y_3^2.$$

**2.** $F = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

**3.** Решение. Опишем *метод Лагранжа*, или *метод выделения полных квадратов*, приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пусть в квадратичной форме (1) коэффициент при квадрате какой-либо переменной отличен от нуля, предположим для определенности, что $a_{11} \neq 0$. Выполним замену переменных

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \quad y_2 = x_2, \ \ldots, \quad y_n = x_n. \tag{3}$$

Если в квадратичной форме коэффициенты при квадратах всех переменных нули, и, например, $a_{12} \neq 0$, предварительно выполним замену

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_3 = z_3, \ \ldots, \quad x_n = z_n.$$

Затем выполним замену переменных (3). Выполняя эти преобразования переменных, приведем квадратичную форму (1) к виду

$$F = \alpha y_1^2 + G(y_2, \ldots, y_n),$$

где $G$ — квадратичная форма от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Продолжая аналогичные преобразования переменных для формы $G$ и далее, в конце концов приведем квадратичную форму к каноническому виду.

Найдем канонический вид и преобразование перменных, приводящее к этому виду квадратичную форму

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Это та же квадратичная форма, что и в предыдущем упражнении. Сейчас будем применять метод Лагранжа, поэтому канонический вид формы может получиться иным. Поскольку в этой форме отсутствуют квадраты переменных, выполним следующее преобразование переменных:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Матрица преобразования $x = Q_1y$ имеет вид

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$F = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 =$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1(\underline{y_1 + y_3}) + y_3y_1 - y_2^2.$$

Переменные сгруппированы так, чтобы легче было выписать следующее преобразование метода Лагранжа. Теперь положим

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3,$$

т. е.

$$y_1 = z_1 - z_3, \quad y_2 = z_2, \quad y_3 = z_3.$$

В переменных $z$ квадратичная форма принимает канонический вид (обратите внимание, что подчеркнутые слагаемые сокращаются):

$$F = (z_1 - \underline{z_3)z_1} + \underline{z_3(z_1} - z_3) - z_2^2 =$$

$$= z_1^2 - \underline{z_1 z_3} + \underline{z_1 z_3} - z_3^2 - z_2^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Запишем матрицу преобразования переменных $y = Q_2 z$:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу преобразования переменных $x = Qz$. Имеем

$$x = Q_1 y = Q_1 Q_2 z,$$

следовательно,

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем преобразование переменных $x = Qz$ в координатной форме:

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3,$$

$$x_2 = z_1 + z_2 - z_3,$$

$$x_3 = z_3.$$

**4.** Решение. Запишем исходную квадратичную форму, сгруппировав переменные так, чтобы удобнее было найти первую замену переменных метода Лагранжа:

$$F = \underline{2x_1^2} + 3x_2^2 + 4x_3^2 - \underline{2x_1 x_2} + \underline{4x_1 x_3} - 3x_2 x_3 =$$

$$= 2x_1 \left(\underline{x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3}\right) - \underline{x_2 x_1} + \underline{2x_3 x_1} + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2 x_3.$$

Обратите внимание на наличие в этой записи слагаемых $-x_2x_1$ и $2x_3x_1$. Положим

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3,$$

т. е.

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Следовательно (подчеркнутые слагаемые взаимно сокращаются),

$$F = 2y_1\left(y_1 + \underline{\frac{1}{2}y_2} - \underline{\underline{y_3}}\right) - y_2\left(\underline{y_1} + \frac{1}{2}y_2 - y_3\right) +$$

$$+2y_3\left(\underline{\underline{y_1}} + \frac{1}{2}y_2 - y_3\right) + 3y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_2y_3 =$$

$$= 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - y_2y_3 - 2y_3^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2.$$

Сгруппируем слагаемые для следующей замены переменных:

$$F = 2y_1^2 + \underline{\frac{5}{2}y_2^2} - \underline{y_2y_3} + 2y_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 + 5y_2\left(\underline{\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{10}y_3}\right) - \underline{\frac{1}{2}y_3y_2} + 2y_3^2.$$

Сделаем вторую замену переменных:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{10}y_3, \quad z_3 = y_3,$$

т. е.

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = 2z_2 + \frac{1}{5}z_3, \quad y_3 = z_3.$$

Теперь квадратичная форма имеет канонический вид:

$$F = 2z_1^2 + 5z_2\left(2z_2 + \underline{\frac{1}{5}z_3}\right) - \frac{1}{2}z_3\left(\underline{2z_2} + \frac{1}{5}z_3\right) + 2z_3^2 =$$

$$= 2z_1^2 + 10z_2^2 - \frac{1}{10}z_3^2 + 2z_3^2 = 2z_1^2 + 10z_2^2 + \frac{19}{10}z_3^2.$$

Приведем эту квадратичную форму к более удобному и красивому каноническому виду с целыми коэффициентами. Сделаем еще одну замену переменных:

$$z_1 = t_1, \quad z_2 = t_2, \quad z_3 = 10t_3.$$

Окончательно имеем

$$F = 2t_1^2 + 10t_2^2 + 190t_3^2.$$

Осталось найти выражение неизвестных $x$ через $t$:

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 = z_1 + z_2 + \frac{1}{10}z_3 - z_3 = t_1 + t_2 + t_3 - 10t_3 = t_1 + t_2 - 9t_3,$$

$$x_2 = y_2 = 2z_2 + \frac{1}{5}z_3 = 2t_2 + 2t_3,$$

$$x_3 = y_3 = z_3 = 10t_3.$$

**5.** $F = 2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $x_1 = z_1 - 2z_2 - 9z_3$, $x_2 = z_2 + 4z_3$, $x_3 = z_3$.

**6.** Решение. Квадратичные формы переводятся друг в друга невырожденным преобразованием тогда и только тогда, когда инерции их матриц совпадают. Найдем инерции матриц заданных квадратичных форм. Форме

$$F = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем корни характеристического полинома методом выделения линейных множителей:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 9-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ 0 & -7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1-2\lambda \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda[(1+\lambda)(1-\lambda) - 7(1-2\lambda)] = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 6).$$

Ясно, что первое собственное число равно нулю, два других — решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 14\lambda + 6 = 0.$$

Имеем

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 7 + \sqrt{43} > 0, \quad \lambda_3 = 7 - \sqrt{43} > 0.$$

Матрица квадратичной формы

$$G(y) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа:

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2\lambda & \lambda \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(7-\lambda)(2-\lambda) - 2(1+\lambda)] = -\lambda(\lambda^2 - 11\lambda + 12),$$

и

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{11 + \sqrt{73}}{2} > 0, \quad \lambda_3 = \frac{11 - \sqrt{73}}{2} > 0.$$

Итак, инерции матриц $A$ и $B$ совпадают:

$$n_0(A) = n_0(B) = 1, \quad n_+(A) = n_+(B) = 2, \quad n_-(A) = n_-(B) = 0.$$

Следовательно, существует преобразование переводящее квадратичную форму $F$ в форму $G$.

**7.** $n_0(A) = n_0(B) = 1$, $n_+(A) = n_+(B) = 2$, $n_-(A) = n_-(B) = 0$, следовательно, искомое преобразование существует.

**8.** Найдем все значения параметра $\lambda$, при которых положительно определена квадратичная форма

$$F = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы $A$:

$$M_1 = 5 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$M_3 = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

Воспользуемся критерием Сильвестра. Главные миноры первого и второго порядка не зависят от $\lambda$ и положительны. Для того, чтобы эта квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно чтобы и главный минор третьего порядка был положительным: $\lambda - 2 > 0$. Таким образом, данная квадратичная форма положительно определена при $\lambda > 2$.

**9.** *a*) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$.

**10.** *a*) $F = -2y_2^2 + 4y_3^2$, *b*) $F = y_1^2 - 3y_2^2 + 15y_3^2$.

**11.** *a*) $F = z_1^2$, $x_1 = \dfrac{1}{3}z_1 + \dfrac{2}{3}z_2 + \dfrac{1}{3}z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$;

*b*) $F = 8z_1^2 + \dfrac{1}{2}z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - \dfrac{1}{4}z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$.

**12.** $-0,8 < \lambda < 0$.

## § 2. Эллипс, гипербола и парабола

В этом параграфе будем изучать геометрические свойства кривых второго порядка на плоскости, отнесенной к декартовой системе координат $x$, $y$, предполагая, что эти кривые задаются уравнениями *канонического вида.*

*Эллипсом* называют кривую, которая описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для всех точек эллипса справедливы неравенства: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике (см. рис. 1).

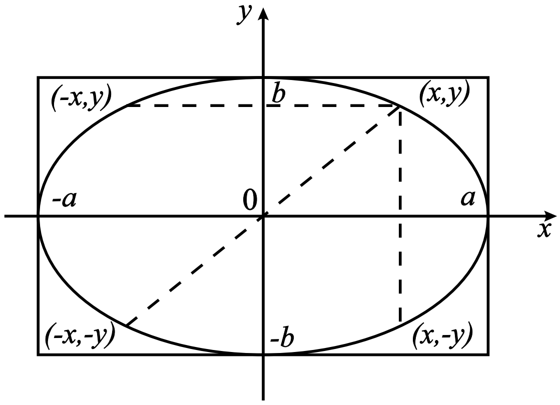



Рис. 1. К описанию геометрических свойств эллипса

Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Они называются *вершинами* эллипса. Оси координат — *оси симметрии* эллипса, так как если точка $(x, y)$ принадлежит эллипсу, то точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ также лежат на эллипсе. Начало координат — *центр симметрии* эллипса, так как, если точка $(x, y)$ принадлежит эллипсу, то и точка $(-x, -y)$ лежит на эллипсе.

Числа $a$, $b$ называют длинами *полуосей* эллипса. Будем для определенности считать, что $a \geqslant b$. Понятно, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность (радиуса $a$).

Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0, 1)$ характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется *эксцентриситетом* эллипса.

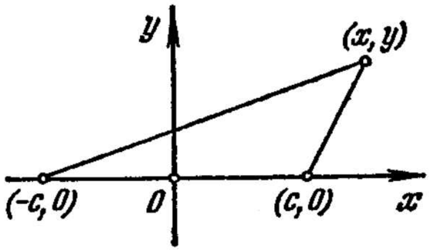



Рис. 2. К определению эллипса и гиперболы

Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами* эллипса. Пусть $(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это равенство означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса (см. рис. 2). Указанное свойство эллипса можно было бы принять за его определение.

*Гиперболой* называют кривую, описываемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если точка $(x, y)$ лежит на гиперболе, то $x^2 \geqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2x^2/x^2$, т. е. гипербола лежит вне полосы $|x| < a$ и внутри соответствующих углов, образованных прямыми $y = \pm(b/a)x$ (см. рис. 3).

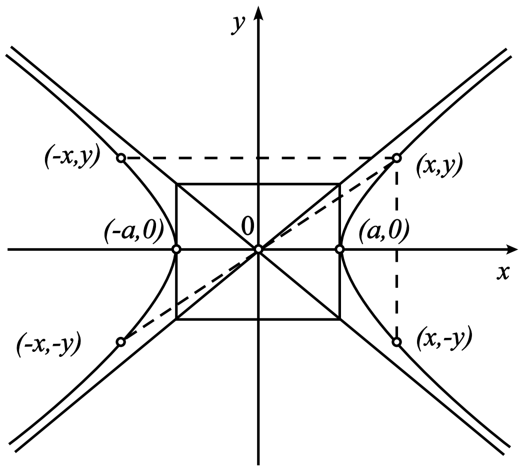



Рис. 3. К описанию геометрических свойств гиперболы

Кривая симметрична относительно осей координат. Начало координат — *центр симметрии* кривой. Точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$ пересечения с осью $x$ называются *вершинами* гиперболы. Прямые $y = \pm(b/a)x$ — *асимптоты* соответствующих ветвей гиперболы (см. рис. 3).

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы. Для любой точки $(x, y)$, лежащей на гиперболе,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен (см. рис. 2). Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

*Параболой* называют кривую, описываемую уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Будем считать, что $p > 0$. Парабола расположена в правой полуплоскости (рис. 4, $a$), симметрична относительно оси $x$. Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот.

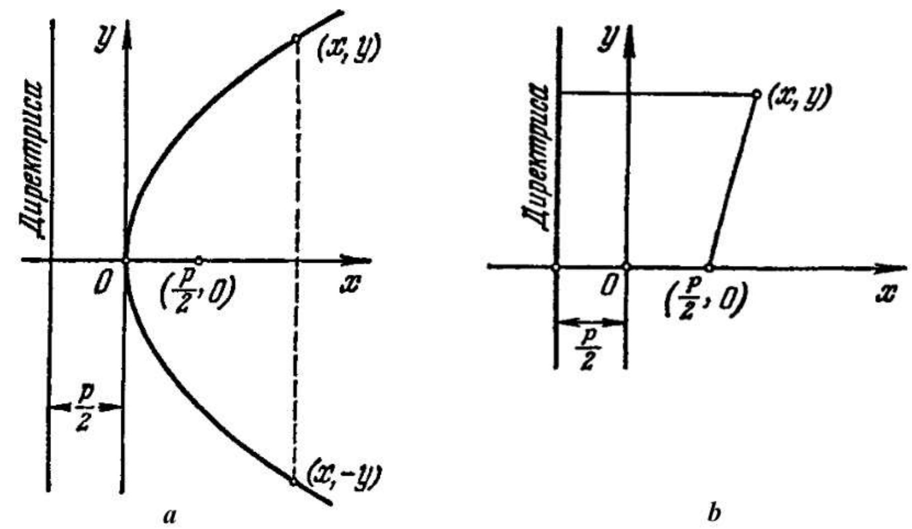



Рис. 4. К описанию геометрических свойств ($a$) и определению параболы ($b$)

Точка $(p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы. Прямая $x = -p/2$ называется *директрисой* параболы (см. рис. 4, $a$). Для любой точки $(x, y)$, принадлежащей параболе,

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2,$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы (см. рис. 4, $b$). Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

### Упражнения

**1.** Построить уравнение эллипса, проходящего через две точки: $(\sqrt{3}, -2)$ и $(-2\sqrt{3}, 1)$.

**2.** Найти длины полуосей, фокусы и эксцентриситеты эллипсов:
$a)\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad b)\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

**3.** Найти точки эллипса $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$, находящиеся на расстоянии пяти единиц от его малой оси.

**4.** В эллипс $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9} = 1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

**5.** Написать уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен $8/10$, а длина большой полуоси больше длины малой на две единицы.

**6.** В эллипс $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

**7.** Написать уравнение эллипса, сумма длин полуосей которого равна 8, и расстояние между фокусами равно 8.

**8.** Построить уравнение гиперболы, проходящей через точку $(-5,\ 3)$ и имеющей общие фокусы с гиперболой $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

**9.** Найти вершины, фокусы и асимптоты следующих гипербол:
$a)\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1, \quad b)\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

**10.** Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(\sqrt{40}, 2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{3}x$.

**11.** Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ и имеющий фокусы в вершинах этого эллипса.

**12.** Построить уравнение параболы, зная что она проходит через точку $(1, -4)$.

**13.** Написать уравнение параболы, зная, что расстояние от фокуса до вершины равно 3.

**14.** На параболе $y^2 = 4{,}5x$ выбрана точка, находящаяся от директрисы на расстоянии $d = 9{,}125$. Вычислить расстояние $l$ от вершины параболы до этой точки.

**15.** Найти окружность, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанной параболой $y^2 = 2x$.

**16.** Найти общие точки параболы $y^2 = x$ и окружности, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси $x$ и радиус, равный 5.

**17.** Найти параметр $p$ параболы $y^2 = 2px$, если известно, что парабола проходит через точку пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 = 9$.

**18.** Построить уравнение эллипса, который проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой) и имеет эксцентриситет, равный $6/10$.

## Ответы, указания и решения

**1.** Решение. Найдем $a^2$ и $b^2$ — квадраты длин большой и малой полуосей эллипса, проходящего через точки $(\sqrt{3}, -2)$ и $(-2\sqrt{3}, 1)$. Их координаты удовлетворяют искомому уравнению, поэтому имеем два уравнения для определения параметров $a^2$ и $b^2$:

$$\frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \quad \frac{12}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

Выразим из второго уравнения $1/b^2$:

$$\frac{1}{b^2} = 1 - \frac{12}{a^2}.$$

Подставим найденное выражение в первое уравнение:

$$\frac{3}{a^2} + 4 - \frac{48}{a^2} = 1, \quad -\frac{45}{a^2} = -3, \quad a^2 = 15.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b^2} = 1 - \frac{12}{15}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{5}, \quad b^2 = 5.$$

Теперь запишем уравнение эллипса (сделайте рисунок):

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

**2.** *a*) $a = 4$, $b = 2$, $(-2\sqrt{3}, 0)$, $(2\sqrt{3}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
*b*) $a = 5$, $b = 2$, $(-\sqrt{21}, 0)$, $(\sqrt{21}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. Сделайте рисунки.

**3.** $(\pm 5, \pm 2)$. Сделайте рисунок.

**4.** $\left(\dfrac{6}{7}, \pm\dfrac{12\sqrt{3}}{7}\right)$. Указание. Сделайте рисунок. Искомый треугольник расположен симметрично относительно большой оси эллипса, и одна из его вершин совпадает с ее правой вершиной. Пусть $h$ — высота треугольника, $\pm y$ — ординаты искомых вершин треугольника, где $y > 0$. Треугольник равносторонний, следовательно, $h^2 + y^2 = 4y^2$. Абсциссы искомых вершин совпадают и равны $x = 6 - h$. Выразите $x$ через $y$. Подставьте найденное для $x$ выражение в уравнение эллипса. Найдите $y$ из полученного уравнения. Вычислите $x$, используя построенное ранее представление $x$.

**5.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

**6.** $S = 480/7$. Сделайте рисунок.

**7.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

**8.** Решение. Искомая гипербола имеет общие фокусы с гиперболой $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$. Имеем $a^2 = b^2 = 8$, следовательно, $c^2 = a^2 + b^2 = 16$. Гипербола проходит через точку $(-5,\ 3)$, координаты этой точки удовлетворяют ее уравнению:

$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1.$$

Подставим в это уравнение $b^2 = 16 - a^2$ и найдем уравнение для $a^2$:

$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{16 - a^2} = 1, \quad \frac{25}{a^2} - 1 = \frac{9}{16 - a^2}, \quad \frac{25 - a^2}{a^2} = \frac{9}{16 - a^2},$$

$$(25-a^2)(16-a^2)=9a^2, \quad a^4-50a^2+400=0.$$

Решим полученное квадратное (относительно $a^2$) уравнение:

$$D=25^2-400=225, \quad a^2=25\pm 15, \quad a_1^2=40, \quad a_2^2=10.$$

Если $a^2=40$, то $b^2=16-40=-24$, чего не может быть, и эта пара значений нам не подходит. Если $a^2=10$, то $b^2=16-10=6$. Таким образом, искомое уравнение:

$$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1.$$

Сделайте рисунок двух гипербол и точки, через которую проходит найденная гипербола.

**9.** *a*) Вершины $(\pm 2,0)$, фокусы $(\pm 2\sqrt{5},0)$, асимптоты $y=\pm 2x$; *b*) вершины $(\pm 3,0)$, фокусы $(\pm\sqrt{13},0)$, асимптоты $y=\pm\dfrac{2}{3}x$. Сделайте рисунки.

**10.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4/9}=1$. Сделайте рисунок.

**11.** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{144}=1$. Сделайте рисунок.

**12.** Решение. Уравнение параболы имеет вид $y^2=2p\,x$. Найдем $p$. Точка $(1,-4)$ принадлежит параболе: $(-4)^2=2p\cdot 1$, следовательно, $p=8$. Искомое уравнение: $y^2=16x$. Сделайте рисунок.

**13.** $y^2=12x$. Сделайте рисунок.

**14.** $l=10$. Указание. Сделайте рисунок. Найдите $p$. Абсциссу упомянутой точки вычислите по формуле $x=d-p/2$ (проверьте, что она справедлива), ординату — из уравнения параболы, искомое расстояние — по теореме Пифагора.

**15.** Решение. Нарисуйте параболу, прямую и искомую окружность. Окружность радиуса $R$ с центром в точке $(x_0,y_0)$ задается следующим уравнением (см. [3], гл. 4, §5):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Найдем центр окружности и ее радиус. Ординаты точек пересечения прямой $x+y=4$ и параболы $y^2=2x$ удовлетворяют квадратному уравнению $y^2+2y-$

$8 = 0$: $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. Абсциссы этих точек найдем из уравнения прямой: $x_1 = 4 - y_1 = 8$, $x_2 = 4 - y_2 = 2$. Диаметр окружности равен расстоянию между этими точками:

$$2R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \quad R^2 = 18.$$

Центр окружности совпадает с серединой отрезка, концами которого служат найденные точки. Вычислим его координаты:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8 + 2}{2} = 5,$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1.$$

Запишем уравнение искомой окружности:

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 18.$$

**16.** Три общих точки: $(0, 0)$, $(9, \pm 3)$. Указание. Сделайте рисунок. Напишите уравнение окружности. Замените в этом уравнении $y^2$ на $x$ (почему это надо сделать?). Координаты $x$ искомых точек найдите, решив получившееся квадратное уравнение. Ординаты точек найдите из уравнения параболы.

**17.** $p = 3/(2\sqrt{2})$. Сделайте рисунок.

**18.** $\dfrac{x^2}{29/4} + \dfrac{y^2}{116/25} = 1.$

## § 3. Поворот координатных осей и перенос начала системы координат

В этом параграфе предлагаются упражнения на приведение к простейшему виду уравнения кривой второго порядка. Будем рассматривать плоскость, отнесенную к декартовой системе координат $x$, $y$. Множество всех точек плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{1}$$

называют *кривой второго порядка*. Здесь $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $a_1$, $a_2$, $a_0$ — вещественные числа, называемые *коэффициентами уравнения*.

Упрощение этого уравнения (или, как говорят, приведение его к *каноническому виду*) будем выполнять с помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

где $T$ — ортогональная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Геометрически эта замена переменных может быть интерпретирована как поворот координатных осей против часовой стрелки на угол $\varphi$, если считать при этом, что исходная декартова система координат правая, т. е. поворот от оси $x$ к оси $y$ — поворот против часовой стрелки, и последующий перенос начала системы координат в точку $(x_0, y_0)$.

Выбирая соответствующим образом начало новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу $T$, уравнение (1) можно преобразовать к уравнению эллипса, гиперболы, или параболы. Кривая может выродится в точку, совпасть с одной из координатных осей, распасться на две прямые. Кроме того, уравнение может быть приведено к одному из видов, не имеющих вещественных решений. Приведем сводку уравнений и названий кривых второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b > 0$, — эллипс,

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс,

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых,

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола,

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых,

6) $y^2 = 2px$, $p > 0$, — парабола,

7) $y^2 = a^2$, $a > 0$, — пара параллельных прямых,

8) $y^2 = -a^2$, $a > 0$, — пара мнимых параллельных прямых,

9) $y^2 = 0$ — пара прямых, совпадающих с осью $x$.

Если в уравнении (1) $a_{12} = 0$, то достаточно выполнить только перенос начала системы координат: $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$. При этом $T = I$. Начнем с этого более простого случая.

## Упражнения

Используя перенос начала системы координат, привести следующие уравнения к каноническому виду и выяснить расположение кривых по отношению к исходной системе координат.

**1.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$.

**2.** $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

**3.** $2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$.

**4.** $9x^2 - y^2 - 18x - 20y - 316 = 0$.

**5.** $6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$.

**6.** $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.

**7.** $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.

**8.** $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$.

**9.** $2x^2 + 9y^2 - 12x - 6y + 19 = 0.$

**10.** $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0.$

**11.** $x^2 + x - 6 = 0.$

**12.** $y^2 - 5y + 11 = 0.$

**13.** $25x^2 - 30x + 9 = 0.$

**14.** $4y^2 - \sqrt{2}x - \dfrac{8}{\sqrt{2}}y + 1 = 0.$

Используя поворот координатных осей и перенос начала системы координат, привести следующие уравнения к каноническому виду и выяснить расположение кривых по отношению к исходной системе координат.

**15.** $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 1 = 0.$

**16.** $xy + x + y = 0.$

**17.** $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$

## Ответы, указания и решения

**1.** Решение. Сгруппируем переменные так, чтобы легче было найти замену переменных:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0,$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) - 5 = 0,$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 - 5 = 0,$$

$$(\underline{x-1})^2 + (\underline{y+3})^2 - 15 = 0.$$

Выполним замену переменных

$$x_1 = \underline{x-1}, \quad y_1 = \underline{y+3}.$$

Эта замена переменных переносит начало системы координат $x_1$, $y_1$ в точку $(1, -3)$ на плоскости $x$, $y$. Сделайте рисунок. В новых переменных уравнение имеет канонический вид:

$$x_1^2 + y_1^2 = 15, \quad \frac{x_1^2}{15} + \frac{y_1^2}{15} = 1.$$

Это уравнение эллипса с равными полуосями — окружности радиуса $R = \sqrt{15}$. Центр окружности совпадает с началом новой системы координат, т. е. находится в точке $(1, -3)$. Нарисуйте эту окружность.

**2.** $\dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1$. Эллипс, длины полуосей которого равны $a = 4$ и $b = 2$, центр симметрии находится в точке $(-2, 1)$, большая полуось параллельна оси $x$. Сделайте рисунок.

**3.** $\dfrac{x_1^2}{6} + \dfrac{y_1^2}{3} = 1$. Эллипс, длины полуосей которого $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, центр симметрии находится в точке $(1, -2)$, большая полуось параллельна оси $y$. Сделайте рисунок.

**4.** $\dfrac{x_1^2}{25} - \dfrac{y_1^2}{225} = 1$. Гипербола с центром симметрии в точке $(1, -10)$. Продольная ось симметрии гиперболы (на которой лежат ее вершины) параллельна оси $x$; $a = 5$, $b = 15$. Сделайте рисунок.

**5.** $\dfrac{x_1^2}{6} - \dfrac{y_1^2}{5} = 1$. Гипербола с центром симметрии в точке $(-1, -1)$. Продольная ось симметрии гиперболы (на которой лежат ее вершины) параллельна оси $y$; $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$. Сделайте рисунок.

**6.** Решение. Последовательно будем группировать переменные так, чтобы легче было найти их замену:

$$y^2 - 10x - 2y - 19 = 0,$$

$$(y^2 - 2y) - 10x - 19 = 0,$$

$$(y-1)^2 - 1 - 10x - 19 = 0,$$

$$(y-1)^2 - 10(x+2) = 0.$$

Выполним замену переменных

$$x_1 = x + 2, \quad y_1 = y - 1.$$

Эта замена переменных переносит начало системы координат $x_1$, $y_1$ в точку $(-2, 1)$ на плоскости $x$, $y$. Сделайте рисунок. В новых переменных уравнение имеет канонический вид:

$$y_1^2 = 10x_1.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $(-2, 1)$, направление оси ее симметрии совпадает с положительным направлением оси $x$; $p = 5$. Нарисуйте эту параболу.

**7.** $y_1^2 = 4x_1$. Парабола с вершиной в точке $(3, 5)$, направление оси ее симметрии совпадает с положительным направлением оси $y$; $p = 2$. Сделайте рисунок.

**8.** $\dfrac{x_1^2}{1/(6\cdot 8)} + \dfrac{y_1^2}{1/8^2} = -1$. Мнимый эллипс.

**9.** $\dfrac{x_1^2}{1/2} + \dfrac{y_1^2}{1/9} = 0$. Пара мнимых пересекающихся прямых.

**10.** $\dfrac{x_1^2}{1/3} - \dfrac{y_1^2}{1/2} = 0$. Пара прямых $y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,(x+1)+1$, пересекающихся в точке $(-1, 1)$. Сделайте рисунок.

**11.** $y_1^2 = \dfrac{25}{4}$. Две параллельные прямые: $x = 2$, $x = -3$. Сделайте рисунок.

**12.** $y_1^2 = -\dfrac{19}{4}$. Пара мнимых параллельных прямых.

**13.** $y_1^2 = 0$. Пара совпадающих прямых $5x - 3 = 0$. Сделайте рисунок.

**14.** Решение. Последовательно будем группировать переменные так, чтобы легче было найти их замену:

$$4y^2 - \sqrt{2}x - \frac{8}{\sqrt{2}}y + 1 = 0,$$

$$4\left(y^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y\right) - \sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$4\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{2} - \sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$4\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Выполним замену переменных

$$x_1 = x + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = y - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эта замена переменных переносит начало системы координат $x_1$, $y_1$ в точку $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ на плоскости $x$, $y$. Сделайте рисунок. В новых переменных уравнение имеет канонический вид:

$$y_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} x_1.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, направление оси ее симметрии совпадает с положительным направлением оси $x$; $p = \sqrt{2}/8$. Нарисуйте эту параболу.

**15.** Решение. Из старших коэффициентов уравнения

$$\underline{2x^2 - 4xy + 2y^2} + 3x - 5y + 1 = 0$$

составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это матрица квадратичной формы, подчеркнутой в исходном уравнении. Наша ближайшая цель — привести эту квадратичную форму к каноническому виду невырожденным ортогональным преобразованием переменных, которое определяется матрицей вращения $T$. Вычислим собственные числа матрицы $A$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda + 2) = -\lambda(4 - \lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4.$$

Два возможных угла поворота координатных осей определяются по следующей формуле (см. [3], с. 274):

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \quad k = 1, 2.$$

Найдем их:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2-0}{-2} = 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{2-4}{-2} = -1.$$

Выберем первый угол и обозначим его $\varphi$. Имеем

$$\varphi = \varphi_1 = \pi/4.$$

Квадратичная форма в новых переменных принимает следующий канонический вид:

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = \underline{4y_1^2}.$$

Отметим, что если бы мы выбрали второй угол, то надо было бы изменить нумерацию собственных чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Тогда квадратичная форма приняла бы вид $4x_1^2$.

Теперь необходимо выяснить, как изменятся младшие слагаемые исходного уравнения в результате выбранной нами замены переменных. Выпишем ее подробнее:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\pi/4 - y_1 \sin\pi/4 \\ x_1 \sin\pi/4 + y_1 \cos\pi/4 \end{pmatrix},$$

$$x = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1}}, \quad y = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1}}.$$

В переменных $x_1$ и $y_1$ уравнение принимает следующий вид:

$$\underline{4y_1^2} + \underline{\underline{3\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)}} - \underline{\underline{5\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)}} + 1 = 0,$$

$$4y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}y_1 + 1 = 0.$$

Это уравнение с точностью до обозначения переменных совпадает с уравнением упражнения 14. Выполним замену переменных

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Получим уравнение параболы:

$$y_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x_2.$$

Выясним расположение этой параболы по отношению к исходной системе координат. Вершина параболы совпадет с началом системы координат $x_2$, $y_2$. Найдем эту точку на плоскости $x$, $y$:

$$x_2 = 0 \implies x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = 0 \implies y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = -1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = 0.$$

Итак, вершина параболы лежит в точке $(-1, 0)$. Первая сделанная нами замена переменных интерпретируется как поворот координатных осей против часовой стрелки (от $x$ к $y$) на угол $\pi/4$. Следовательно, ось параболы лежит на прямой, проходящей через точку $(-1, 0)$ под углом $\pi/4$ к оси $x$. Это прямая $y = x + 1$. Ветви параболы направлены в первую четверть плоскости $x$, $y$. Сделайте рисунок.

**16.** $\dfrac{x_2^2}{2} - \dfrac{y_2^2}{2} = 1$. Гипербола с центром симметрии в точке $(-1, -1)$, асимптоты параллельны осям координат, одна вершина лежит в точке $(0, 0)$, вторая — в точке $(-2, -2)$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Сделайте рисунок.

**17.** $\dfrac{x_2^2}{9} + \dfrac{y_2^2}{1} = 1$. Эллипс с центром симметрии в точке $(1, 1)$, длины полуосей $a = 3$, $b = 1$. Большая полуось лежит на прямой $y = 2 - x$. Сделайте рисунок.

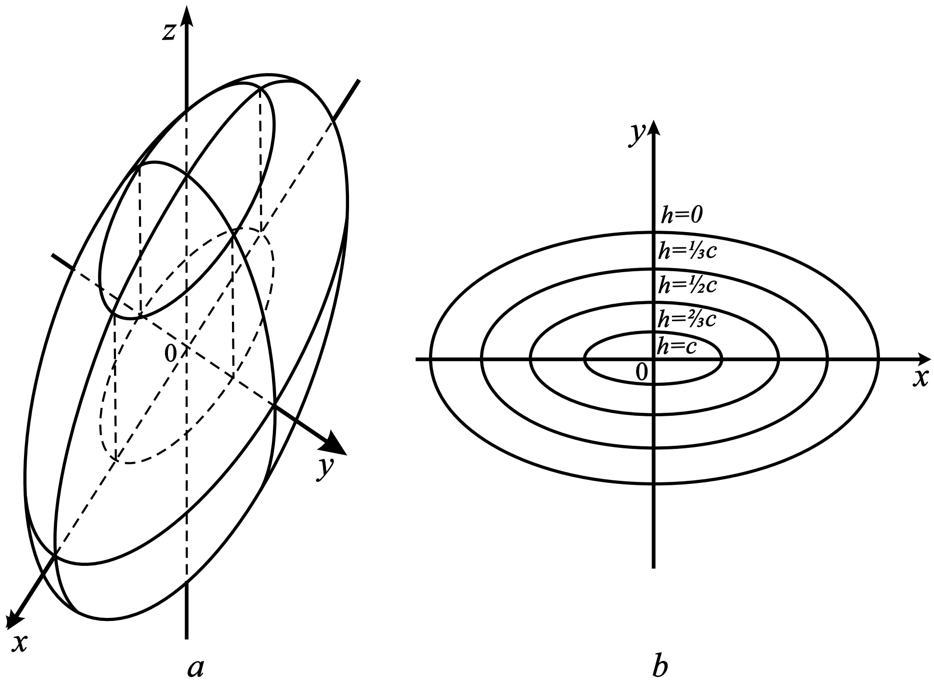



Рис. 1. Эллипсоид (a), сечения эллипсоида плоскостями $z = h$ ($b$)

## § 4. Метод инвариантов

Общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \tag{1}$$

невырожденной заменой переменных может быть преобразовано к уравнению в одной из следующих *приведенных форм*:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \frac{\det(B)}{\det(A)} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{2}$$

$$\lambda_2 y_1^2 + 2\widehat{a}_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_2 y_1^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 = 0. \tag{4}$$

Здесь $\lambda_1$, $\lambda_2$ — характеристические числа матрицы $A$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{a}_1 = \sqrt{-\det(B)/\operatorname{tr}(A)},$$

$$\widehat{a}_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{\operatorname{tr}(A)}, \quad \operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

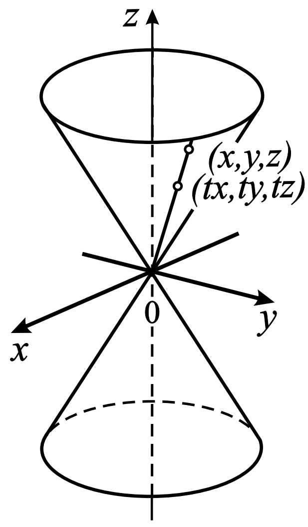



Рис. 2. Эллиптический конус

Уравнение в приведенной форме легко преобразовать к каноническому виду. В этом параграфе мы не будем интересоваться, какой именно заменой переменных общее уравнение приводится к каноническому виду. Наша задача — записать уравнение в каноническом виде непосредственно с использованием указанных формул. Этот метод называется *методом инвариантов*.

Метод инвариантов можно применять и при исследовании поверхностей второго порядка. Опишем его применительно к случаю трех переменных.

Отнесем трехмерное евклидово пространство к декартовой системе координат $x$, $y$, $z$. *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+ \tag{5}$$

$$+2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Составим из коэффициентов этого уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ — характеристические числа матрицы $A$. С помощью некоторой невырожденной замены переменных уравнение (5) можно преобразовать к одной из *приведенных форм*:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \neq 0, \tag{6}$$

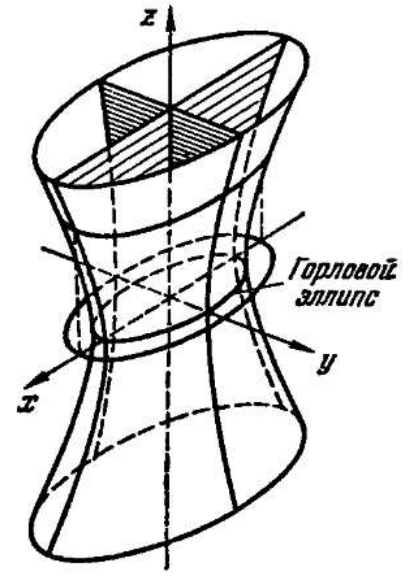



Рис. 3. Однополостный гиперболоид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2\widehat{a}_3 z_1 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0, \tag{7}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \widehat{a}_{0,1} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\widehat{a}_2 y_1 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2,\ \lambda_3 = 0, \tag{9}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \widehat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2,\ \lambda_3 = 0. \tag{10}$$

Если оставить в стороне вопрос о преобразовании системы координат, то аналогично случаю кривых второго порядка коэффициенты уравнений (6)–(10) могут быть однозначно выражены через коэффициенты исходного уравнения (5) с помощью метода инвариантов:

$$\widehat{a}_0 = \det(B)/\det(A), \quad \widehat{a}_3 = \sqrt{-\det(B)/\mathcal{I}_2(A)}$$

$$\widehat{a}_{0,1} = \mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_2(A), \quad \widehat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\operatorname{tr}(A)}, \quad \widehat{a}_{0,2} = \mathcal{I}_2(B)/\operatorname{tr}(A).$$

Здесь

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

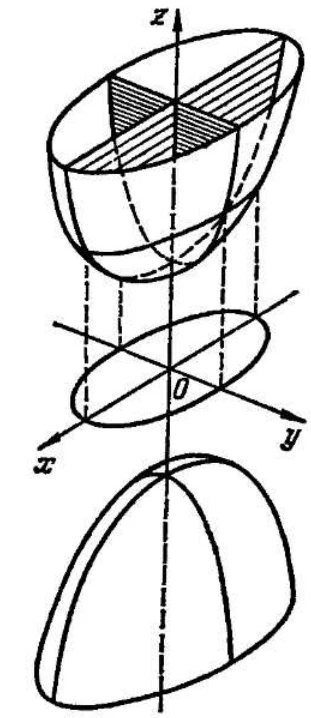



Рис. 4. Двуполостный гиперболоид

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение в приведенной форме может быть легко преобразовано к уравнению в одном из *канонических видов*. Приведем в сводку этих уравнений и названий поверхностей второго порядка (кроме указанных ниже возможны случаи вырождения, аналогичные возникающим при рассмотрении кривых второго порядка):

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид (см. рис. 1),

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — эллиптический конус (см. рис. 2),

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид (см. рис. 3),

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид (см. рис. 4),

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ — эллиптический параболоид (см. рис. 5),

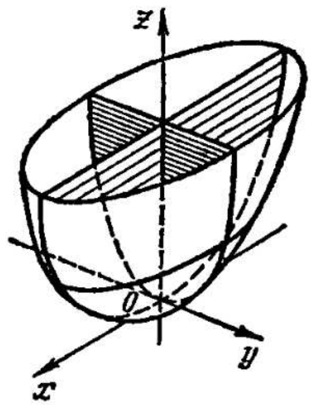



Рис. 5. Эллиптический параболоид

6) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ — гиперболический параболоид (см. рис. 6),

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр (см. рис. 7),

8) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр (см. рис. 7),

9) $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр (см. рис. 7).

## Упражнения

Используя метод инвариантов, найти приведенную форму и преобразовать следующие уравнения кривых второго порядка к каноническому виду. Определить, к какому типу относится каждая кривая.

**1.** $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$

**2.** $xy + x + y = 0.$

**3.** $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$

**4.** $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0.$

**5.** $2x^2 + 9y^2 - 12x - 6y + 19 = 0.$

**6.** $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0.$

**7.** $x^2 + x - 6 = 0.$

**8.** $y^2 - 5y + 11 = 0.$

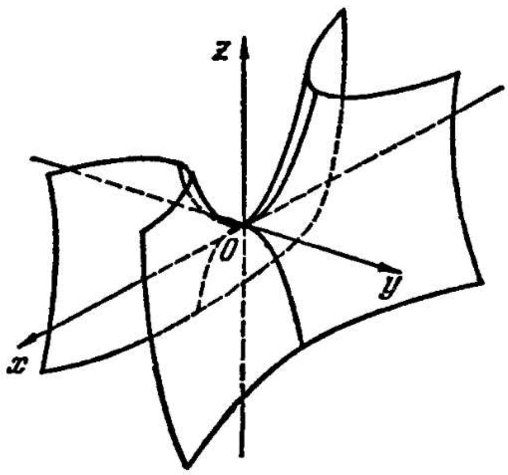



Рис. 6. Гиперболический параболоид

**9.** $25x^2 - 30x + 9 = 0.$

С помощью метода инвариантов найти приведенную форму и преобразовать следующие уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду. Определить, к какому типу относится каждая поверхность.

**10.** $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0.$

**11.** $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0.$

**12.** $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 1 = 0.$

**13.** $-z^2 + 3x + 4y = 0.$

**14.** $z = xy.$

## Ответы, указания и решения

**1.** Решение. Запишем матрицы $A$ и $B$, составленные из коэффициентов уравнения

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристические числа и определитель матрицы $A$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 9-\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

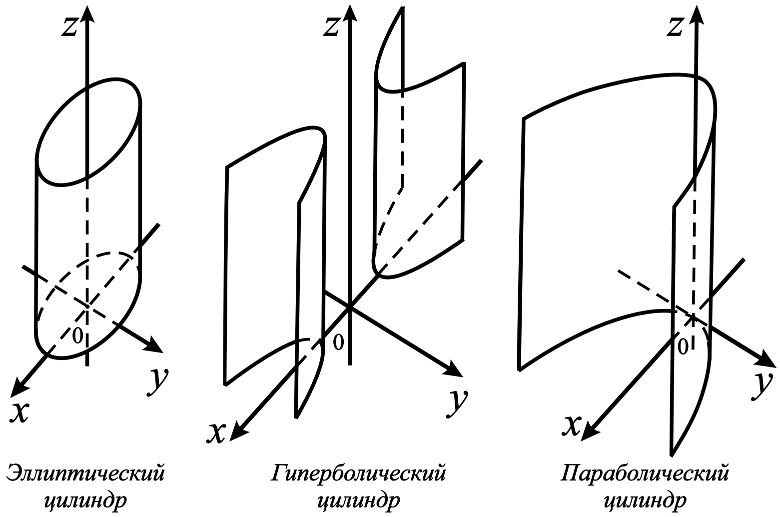



Рис. 7. Цилиндры

$$= (9-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)(5-\lambda-4) = (9-\lambda)(1-\lambda),$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9, \quad |A| = \lambda_1\lambda_2 = 9.$$

Вычислим определитель матрицы $B$:

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9(16-25) = -9^2.$$

Определитель матрицы $A$ не равен нулю, следовательно, исходное уравнение имеет приведенную форму (2), т. е. $1x_1^2 + 9y_1^2 - 9 = 0$. Отсюда легко находится канонический вид уравнения:

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{1} = 1.$$

Это уравнение эллипса (сравните с упр. 17, с. 66).

**2.** Гипербола $\dfrac{x_1^2}{2} - \dfrac{y_1^2}{2} = 1$, приведенная форма $\dfrac{1}{2}x_1^2 - \dfrac{1}{2}y_1^2 - 1 = 0$.

**3.** Решение. Запишем матрицы $A$ и $B$, составленные из коэффициентов уравнения

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристические числа матрицы $A$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda),$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.$$

Вычислим определитель матрицы $B$:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -8^2.$$

Только одно характеристическое число матрицы $A$ не равно нулю, следовательно, исходное уравнение имеет либо приведенную форму (3), либо (4). Определитель матрицы $B$ отличен от нуля, по этому уравнение имеет форму (3). Вычислим коэффициент

$$\widehat{a}_1 = \sqrt{-\det(B)/\operatorname{tr}(A)} = \sqrt{8^2/2} = 4\sqrt{2}.$$

Запишем приведенную форму уравнения: $2y_1^2 + 2 \cdot 4\sqrt{2}x_1 = 0$. Ясно, какая замена переменных приводит приведенную форму уравнения к его каноническому виду:

$$y_2^2 = 4\sqrt{2}x_2.$$

Это уравнение параболы.

**4.** Мнимый эллипс $\dfrac{x_1^2}{1/(6\cdot 8)} + \dfrac{y_1^2}{8^2} = -1$. Уравнение в приведенной форме: $6x_1^2 + 8y_1^2 + \dfrac{1}{8} = 0$. Сравните с упр. 8, с. 65.

**5.** Пара мнимых пересекающихся прямых $\dfrac{x_1^2}{1/2} + \dfrac{y_1^2}{1/9} = 0$. Приведенная форма уравнения: $2x_1^2 + 9y_1^2 = 0$. Сравните с упр. 9, с. 66.

**6.** Пара пересекающихся прямых $\dfrac{x_1^2}{1/3} - \dfrac{y_1^2}{1/2} = 0$. Приведенная форма уравнения: $3x_1^2 - 2y_1^2 = 0$. Сравните с упр. 10, с. 66.

**7.** Решение. Одно из собственных чисел матрицы $A$ уравнения

$$x^2 + x - 6 = 0$$

равно нулю, второе — единице. Обозначим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Для того, чтобы решить, какую приведенную форму имеет это уравнение — (3) или (4), вычислим определитель матрицы $B$:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, уравнение приводится к виду (4). Имеем

$$\widehat{a}_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{\mathrm{tr}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}}{1+0} =$$

$$= -6 - \frac{1}{4} = -\frac{25}{4}.$$

Запишем уравнение в приведенной форме и каноническом виде:

$$y_1^2 - \frac{25}{4} = 0, \quad y_1^2 = \frac{25}{4}.$$

Этому уравнению удовлетворяют две параллельные прямые (см. упр. 11, с. 66.)

**8.** Пара мнимых параллельных прямых $y_1^2 = -\dfrac{19}{4}$. Приведенная форма уравнения: $y_1^2 + \dfrac{19}{4} = 0$. Сравните с упр. 12, с. 66.

**9.** Пара совпадающих прямых $y_1^2 = 0$. Приведенная форма уравнения: $25y_1^2 = 0$. Сравните с упр. 13, с. 66.

**10.** Решение. Вычислим характеристические числа матрицы $A$, составленной из старших коэффициентов уравнения

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0.$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\lambda & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)^2\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2(2-\lambda), \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 6.$$

Следовательно, $\det(A) = 72$. Вычислим определитель матрицы $B$:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 72.$$

Оба определителя отличны от нуля, следовательно, приведенная форма уравнения записывается следующим образом:

$$2x_1^2 + 6y_1^2 + 6z_1^2 = 1.$$

Это эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{1/2} + \frac{y_1^2}{1/6} + \frac{z_1^2}{1/6} = 1.$$

**11.** Гиперболический параболоид $\dfrac{x_1^2}{3} - \dfrac{y_1^2}{3} = z_1$. Уравнение в приведенной форме: $-2x_1^2 + 2y_1^2 + 6z_1 = 0$.

**12.** Гиперболический цилиндр $\dfrac{x_1^2}{1} - \dfrac{y_1^2}{1/2} = 1$. Уравнение в приведенной форме: $-1x_1^2 + 2y_1^2 + 1 = 0$.

**13.** Параболический цилиндр $y_2^2 = \sqrt{13}x_2$. Уравнение в приведенной форме: $-x_1^2 + \sqrt{13}y_1 = 0$.

**14.** Гиперболический параболоид $x_1^2 - y_1^2 = z_1$.

## Литература


1. Беклимишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 496 с.

2. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975. 320 с.

3. Карчевский Е.М., Карчевский М.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. 352 с.

4. Карчевский Е.М., Рунг Е.В., Фролов А.Г. Семинары по линейной алгебре и аналитической геометрии. Часть 1: учебное пособие. Казань, 2013. 152 с.

5. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том I. М.: Планета знаний, 2007. 469 с.

6. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том II, часть 1. М.: ИКДМ «Зерцало–М», 2003. 170 с.

7. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том II, часть 2. М.: ИКДМ «Зерцало–М», 2003. 251 с.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Изд-во Лань, 2010. 480 с.

9. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Изд-во Лань, 2008. 288 с.

10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Изд-во Лань, 2005. 336 с.

*Учебное издание*

**Карчевский** Евгений Михайлович
**Лаврентьева** Елена Евгеньевна
**Стехина** Кристина Николаевна

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Учебное пособие**

**для практических занятий по алгебре и геометрии**

Подписано в печать 16.01.2018 г.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 4,76.
Тираж 100 экз. Заказ 68/1.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28