Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, Е.Е. ЛАВРЕНТЬЕВА, И.Л. АЛЕКСАНДРОВА

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

для практических занятий по алгебре и геометрии

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, Е.Е. ЛАВРЕНТЬЕВА И.Л. АЛЕКСАНДРОВА

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

для практических занятий по алгебре и геометрии

КАЗАНЬ

2018

УДК 512

ББК 22.14

К27

Печатается по рекомендации
Редакционно-издательского совета
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»;
Учебно-методической комиссии
Института вычислительной математики и информационных технологий
(протокол № 6 от 11 января 2018 г.);
кафедры прикладной математики
(протокол № 4 от 20 декабря 2017 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «КНИТУ» **В.С. Желтухин;**
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики КФУ **И.Е. Филиппов**

Карчевский Е.М.

К27 Линейные операторы в конечномерных пространствах: учеб. пособие для практических занятий по алгебре и геометрии / Е.М. Карчевский, Е.Е. Лаврентьева, И.Л. Александрова. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. — 116 с.

ISBN 978-5-00019-951-0

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по алгебре и геометрии со студентами первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 978-5-00019-951-0

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие является продолжением [4] и предназначено для проведения практических занятий по алгебре и геометрии со студентами первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

Последовательность разделов, обозначения, определения и формулировки использованных теоретических результатов отвечают лекциям [3]. Перед выполнением упражнений следует изучить соответствующий параграф лекций. Все упражнения сопровождаются ответами, указаниями, или решениями. В книге принята локальная нумерация рисунков и упражнений.

Настоящее пособие ни в коей мере не претендует на роль задачника. В конце книги читатель найдет список задачников, материал которых был использован при ее составлении.

Глава 1

Евклидовы пространства

§ 1. Определение евклидова пространства

Говорят, что на вещественном линейном пространстве $\boldsymbol{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие вещественное число (x, y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

1) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \boldsymbol{X}$, равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in \boldsymbol{X}$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых x, y, $z \in \boldsymbol{X}$ и любых чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Если на вещественном линейном пространстве $\boldsymbol{X}$ введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством.*

Говорят, что на комплексном линейном пространстве $\boldsymbol{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие комплексное число (x, y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

1) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \boldsymbol{X}$, равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in \boldsymbol{X}$, напомним, что черта означает переход к комплексно сопряженному числу, и отметим, что скалярное произведение на комплексном пространстве некоммутативно;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых x, y, $z \in \boldsymbol{X}$ и любых чисел α, $\beta \in \mathbb{C}$.

Если на комплексном линейном пространстве $\boldsymbol{X}$ введено скалярное произведение, его называют *комплексным евклидовым* (*унитарным*) *пространством.*

Упражнения

1. Пространство $\mathbb{C}^n$ превращается в комплексное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{C}^n$, например, по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{y}_k, \tag{1}$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — заданные положительные числа. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

2. Множество $\boldsymbol{V}_3$ всех векторов (направленных отрезков) трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением (см. [3], гл. 4, §2)

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y)$$

есть один из важных примеров вещественного евклидова пространства. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

3. Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a, b) вещественной оси вещественная функция. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов f и g пространства $C[a, b]$ по формуле

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

4. Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

элементов пространства $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n с комплексными коэффициентами определим скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j a_j \overline{b}_j,$$

где ρ_0, ρ_1, $\ldots$, ρ_n — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство $\mathbf{Q}_n$ становится комплексным евклидовым пространством. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

5. Может ли скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^3$ задаваться следующим образом:

$$(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2?$$

6. Может ли скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^2$ задаваться следующим образом:

a) $3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,

b) $x_1y_1 + x_2$?

7. Сопоставим произвольной паре векторов x, y из геометрического пространства $\boldsymbol{V}_3$ число $|x||y|$. Можно ли принять его за скалярное произведение?

8. Доказать, что выражение

$$(X, Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{j,k} y_{j,k}$$

определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ вещественных матриц размера $m \times n$.

9. *Следом* квадратной матрицы A порядка m называется число

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{m} a_{j,j}.$$

Доказать, что равенство

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(XY^T)$$

определят скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ вещественных матриц размера $m \times n$.

10. Рассматривается пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n, и каждой паре матриц сопоставлено число $\det(XY)$. Можно ли так определить скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$?

11. Доказать, что для любой пары $P_n(z)$, $Q_n(z)$ элементов пространства $\mathbf{Q}_n$ можно определить скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} P_n(z_j)\overline{Q_n}(z_j),$$

где z_0, z_1, ..., z_n — попарно различные числа.

12. Может ли скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^n$ задаваться следующим образом:
a) $x_1y_1 + x_2y_3$, если $n = 3$;
b) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, если $n = 2$?

13. Пусть a — фиксированный ненулевой вектор в геометрическом пространстве $\boldsymbol{V}_3$. Сопоставим каждой паре векторов x, $y \in \boldsymbol{V}_3$:
a) смешанное произведение (a, x, y);
b) скалярное произведение $(x + a, y + a)$.
Можно ли так определить скалярное произведение на $\boldsymbol{V}_3$?

14. Пусть на вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$. Доказать, что для любых чисел $\lambda \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$, не равных одновременно нулю, равенство

$$(x, y) = \lambda(x, y)_1 + \mu(x, y)_2$$

определяет скалярное произведение на этом пространстве.

15. Рассматривается пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n, и каждой паре матриц сопоставлено число $\operatorname{tr} X \operatorname{tr} Y$. Можно ли так определить скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$?

Ответы, указания и решения

1. Решение. Убедимся, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

1) Ясно, что

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_k |x_k|^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in \mathbb{C}^n$, а равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны.

2) Вторая аксиома также справедлива. Действительно,

$$\overline{(y, x)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k \overline{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \overline{y_k \overline{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{y}_k$$

для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$.

3) Проверим справедливость третьей аксиомы:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k (\alpha x_k + \beta y_k) \overline{z}_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{z}_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k \overline{z}_k = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых x, y, $z \in \mathbb{C}^n$ и любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

2. Указание. Воспользуйтесь свойствами скалярного произведения векторов пространства $\boldsymbol{V}_3$ (см. [3], гл. 4, §2).

3. Решение. При проверке аксиом скалярного произведения будем использовать известные из курса математического анализа свойства определенного интеграла. Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a, b) вещественной оси вещественная функция.

1) Известно, что

$$(f, f) = \int_a^b p(x) f^2(x) dx \geqslant 0$$

для любой функции $f \in C[a, b]$, кроме того, из равенства

$$(f, f) = \int_a^b p(x) f^2(x) dx = 0$$

следует, что $f = 0$, и наоборот;

2) Ясно, что

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx = \int_a^b p(x) g(x) f(x) dx = (g, f)$$

для любых f, $g \in C[a,b]$;

3) Известно, что операция интегрирования линейная, т. е.

$$(\alpha f + \beta g, h) = \int\limits_a^b p(x)(\alpha f(x) + \beta g(x))h(x)dx =$$

$$= \alpha \int\limits_a^b p(x)f(x)h(x)dx + \beta \int\limits_a^b p(x)g(x)h(x)dx = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$$

для любых f, g, $h \in C[a,b]$ и любых α, $\beta \in \mathbb{R}$.

4. Указание. Фактически, в этом упражнении скалярное произведение на пространстве полиномов $\boldsymbol{Q}_n$ вводится так же, как скалярное произведение (1) на пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$.

5. Решение. Имеем $(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 \geqslant 0$. Левая часть последнего неравенства равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 0$. Если $x \in \mathbb{R}^3$, то при этом x_3 может быть любым вещественным числом. Следовательно, $(x,x) = 0$, когда $x = (0,0,x_3) \neq 0$. Итак, первая аксиома скалярного произведения не выполняется, и определенное таким образом число не является скалярным произведением на пространстве $\mathbb{R}^3$.

6. *a*) Нет, *b*) нет.

7. Нет. Указание. Для ответа на поставленный вопрос надо обратить внимание на то, что $|\alpha x + \beta y| \neq \alpha|x| + \beta|y|$.

8. Указание. Заметить, что указанное число в точности соответствует определению скалярного произведения на пространстве $\mathbb{R}^{mn}$ векторов длины mn.

9. Решение. Пусть X, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда транспонированная матрица $Y^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а произведение $XY^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Вычислим диагональные элементы матрицы XY^T:

$$(XY^T)_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{j,k}y^T_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{j,k}y_{j,k}, \quad j = 1,\, 2\, \ldots,\; m.$$

Следовательно,

$$\mathrm{tr}(XY^T) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{j,k}y_{j,k},$$

что в точности соответствует определению скалярного произведения из предыдущего упражнения.

10. Нет.

11. Указание. При проверке первой аксиомы использовать то, что если полином степени n в $n+1$ различных точках равен нулю, то все его коэффициенты нули.

12. a) Нет; b) нет.

13. a) Нет; b) нет.

14. Указание. Проверить аксиомы скалярного произведения, опираясь на то что для скалярных произведений $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$ аксиомы выполнены.

15. Нет.

§ 2. Ортогональные системы векторов. Матрица Грама

Два вектора x и y евклидова пространства $\boldsymbol{X}$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Величина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора x.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m \subset \boldsymbol{X}$ называется *ортогональной*, если все векторы a^i, $i = 1, 2, \ldots, m$, не нули и $(a^i, a^k) = 0$ при $i \neq k$.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортонормированной*, если $(a^i, a^k) = \delta_{ik}$ для $i, k = 1, 2, \ldots, m$. Все векторы ортонормированной системы имеют длину, равную единице.

Матрица

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) & \ldots & (a^m, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) & \ldots & (a^m, a^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a^1, a^m) & (a^2, a^m) & \ldots & (a^m, a^m) \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Грама* системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ евклидова пространства $\boldsymbol{X}$.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ее матрица Грама невырождена. Матрица Грама ортогональной системы — диагональная невырожденная матрица. Матрица Грама ортонормированной системы — единичная матрица.

Упражнения

1. Доказать, что в унитарном пространстве из условия $(x, y) = 0$ следует *тождество Пифагора*

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2, \tag{1}$$

а из равенства (1) вытекает, что $\mathrm{Re}(x, y) = 0$.

2. Доказать, что в евклидовом пространстве $\boldsymbol{X}$ нулевой вектор — единственный ортогональный ко всем векторам пространства.

3. Доказать, что если векторы a, b принадлежат евклидову пространству $\boldsymbol{X}$ и для любого вектора $x \in \boldsymbol{X}$ выполняется равенство $(a, x) = (b, x)$, то $a = b$.

4. Доказать, что если $\{a^i\}_{i=1}^m$ — ортогональная система векторов, то для любых ненулевых чисел $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, система векторов $\{x_i a^i\}_{i=1}^m$ также будет ортогональной.

5. Доказать, что если вектор b ортогонален к каждому из векторов системы $\{a^i\}_{i=1}^m$, то он ортогонален и к любой линейной комбинации этих векторов.

6. Доказать, что в вещественном евклидовом пространстве

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2\right).$$

Справедливо ли это равенство в унитарном пространстве?

7. Пусть на вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$, и любой вектор имеет одинаковые длины в каждом из них: $(x, x)_1 = (x, x)_2$. Доказать, что скалярные произведения совпадают.

8. Доказать, что любая ортогональная система векторов линейно независима.

9. Вычислить определитель матрицы Грама системы векторов

$$a^1 = (1, 2, 3), \quad a^2 = (3, 6, 7),$$

используя стандартное скалярное в $\mathbb{R}^3$. Что можно сказать о линейной независимости этих векторов?

10. Выяснить, являются ли линейно независимыми следующие системы векторов. Вычислить матрицы Грама этих систем векторов, используя стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.
a) $a^1 = (4, -2, 6)$, $a^2 = (6, -3, 9)$;
b) $a^1 = (2, -3, 1)$, $a^2 = (3, -1, 5)$, $a^3 = (1, -4, 3)$.

11. Даны полиномы $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменной x. Найти матрицу Грама этой системы векторов, если скалярное произведение в пространстве полиномов задается формулой

$$(P, Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(x) Q(x) dx. \tag{2}$$

12. Выяснить, являются ли линейно независимыми следующие системы векторов. Вычислить матрицы Грама этих систем векторов, используя стандартное скалярное произведение.
a) $a^1 = (5,4,3)$, $a^2 = (3,3,2)$, $a^3 = (8,1,3)$;
b) $a^1 = (1,0,0,2,5)$, $a^2 = (0,1,0,3,4)$, $a^3 = (0,0,1,4,7)$,
$a^4 = (2,-3,4,11,12)$?

13. Пусть $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$, $Q_3(x) = x^3$ — полиномы вещественной переменной x. Найти матрицу Грама этой системы векторов, если скалярное произведение в пространстве полиномов задается формулой

$$(P,Q) = \int\limits_0^1 P(x)Q(x)dx. \tag{3}$$

14. Доказать, что в вещественном евклидовом пространстве

$$(x,y) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2).$$

Справедливо ли это равенство в унитарном пространстве?

Ответы, указания и решения

1. Решение. Справедливы равенства

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + (x,y) + (y,x) =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + (x,y) + \overline{(x,y)} = |x|^2 + |y|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y).$$

Отсюда следует доказываемое утверждение.

2. Указание. Воспользоваться тем, что из равенства $(x,x) = 0$ следует, что $x = 0$.

3. Указания. Использовать результат предыдущего упражнения.

4. Указание. Воспользоваться определением ортогональной системы векторов.

5. Указание. Записать линейную комбинацию векторов системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ с произвольными коэффициентами x_i, $i = 1, \ldots, m$; показать, что скалярное произведение вектора b и этой линейной комбинации равно нулю.

6. В унитарном пространстве равенство не имеет места. Указание. Запишите $|x+y|^2$ и $|x-y|^2$ и используйте коммутативность скалярного произведения в вещественном евклидовом пространстве.

7. Указание. Использовать результат предыдущего упражнения.

8. Указание. Использовать то, что если матрица Грама системы векторов невырождена, то эта система линейно независима.

9. Решение. Ясно, что векторы $a^1 = (1, 2, 3)$, $a^2 = (3, 6, 7)$ не пропорциональны, т. е. система линейно независима. Вычислим определитель матрицы Грама этой системы, используя стандартное скалярное произведение:

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 94 \end{pmatrix},$$

$$\det(G) = \begin{vmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 94 \end{vmatrix} = 14 \cdot 94 - 36 \cdot 36 = 20.$$

Матрица Грама невырождена.

10. *a*) Линейно зависимая система. Указание. Проверьте, пропорциональны ли векторы. Кроме того, вычислите определитель матрицы Грама этой системы векторов, используя стандартное скалярное произведение.

b) Линейно независимая система. Указание. Вычислите определитель матрицы, столбцами которой являются данные векторы. Кроме того, вычислите определитель матрицы Грама этой системы векторов, используя стандартное скалярное произведение.

11. Решение. Вычислим элементы матрицы Грама. Интеграл от единицы равен длине отрезка интегрирования:

$$(Q_0, Q_0) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2.$$

Интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку равен нулю, поэтому два интеграла обращаются в нуль:

$$(Q_0, Q_1) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \int\limits_{-1}^{1} x \, dx = 0,$$

$$(Q_1, Q_2) = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x^3\, dx = 0.$$

Вычислим еще три интеграла:

$$(Q_0, Q_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

$$(Q_1, Q_1) = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot x\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3},$$

$$(Q_2, Q_2) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

Теперь можно записать матрицу Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

12. *a*) Линейно зависима, *b*) линейно независима.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$

14. В унитарном пространстве равенство не имеет места. Указание. Запишите $|x + y|^2$ через скалярное произведение и используйте коммутативность скалярного произведения в вещественном евклидовом пространстве.

§ 3. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

Опишем *процесс ортогонализации Грама — Шмидта.* По всякой линейно независимой системе $\{a^i\}_{i=1}^m$ можно построить ортогональную систему векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$ следующим образом:

$$h^1 = a^1,$$

$$h^2 = \alpha_{2,1}h^1 + a^2, \quad \alpha_{2,1} = -\frac{(a^2, h^1)}{(h^1, h^1)},$$

$$h^3 = \alpha_{3,1}h^1 + \alpha_{3,2}h^2 + a^3, \quad \alpha_{3,1} = -\frac{(a^3, h^1)}{(h^1, h^1)},\ \alpha_{3,2} = -\frac{(a^3, h^2)}{(h^2, h^2)},$$

$$\dots$$

$$h^m = \alpha_{m,1}h^1 + \alpha_{m,2}h^2 + \dots + \alpha_{m,m-1}h^{m-1} + a^m, \quad \alpha_{m,j} = -\frac{(a^m, h^j)}{(h^j, h^j)},$$

где $j = 1,\ 2,\ \dots,\ m-1$. Далее по ортогональной системе $\{h^i\}_{i=1}^m$ можно построить ортонормированную систему $\{b^i\}_{i=1}^m$, полагая

$$b^i = \frac{h^i}{|h^i|}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m.$$

Упражнения

1. С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта, используя стандартное скалярное произведение, ортонормировать систему векторов

$$a^1 = (1, 2, 2, -1), \quad a^2 = (1, 1, -5, 3), \quad a^3 = (3, 2, 8, -7).$$

2. С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта ортонормировать следующие системы векторов, используя стандартное скалярное произведение:

a) $a^1 = (1, 3, -2)$, $a^2 = (3, 7, -2)$,
b) $a^1 = (1, 3, 1)$, $a^2 = (5, 1, 3)$, $a^3 = (1, 6, -8)$,
c) $a^1 = (1, 2, 3)$, $a^2 = (2, 1, 1)$, $a^3 = (6, -7, -2)$,
d) $a^1 = (2, 1, 3, -1)$, $a^2 = (7, 4, 3, -3)$, $a^3 = (1, 1, -6, 0)$, $a^4 = (5, 7, 7, 8)$.

3. Пусть $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = 1 + x$, $Q_2(x) = 1 + x + x^2$ — полиномы вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k, \tag{1}$$

где $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

4. Даны полиномы $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(P, Q) = \sum_{j=0}^{2} P(x_j) Q(x_j), \tag{2}$$

где $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5. Даны полиномы $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения (2), с. 13.

6. С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта ортонормировать следующие системы векторов, используя стандартное скалярное произведение:
a) $a^1 = (2, 1, 0, -1)$, $a^2 = (3, 6, 2, 6)$;
b) $a^1 = (2, 1, 2)$, $a^2 = (6, 2, 2)$, $a^3 = (1, 4, -3)$;
c) $a^1 = (1, 2, 1, 2)$, $a^2 = (4, 0, 4, 1)$, $a^3 = (1, 13, -1, -3)$;
d) $a^1 = (1, 1, -1, -2)$, $a^2 = (5, 8, -2, -3)$, $a^3 = (3, 9, 3, 8)$;
e) $a^1 = (1, -1, -1, 1)$, $a^2 = (2, 3, 3, 2)$, $a^3 = (4, 4, 0, 2)$,
$a^4 = (1, -5, -5, -1)$.

7. Пусть $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x - 1$, $Q_2(x) = x^2 - x + 1$ — полиномы вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой (1), с. 18.

8. Пусть $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = x + 1$, $Q_2(x) = x^2 - x + 1$ — полиномы вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить ортонормированные полиномы в смысле скалярного произведения, определяемого формулой (2), с. 18.

9. Доказать, что определитель матрицы Грама не изменится при применении к линейно независимой системе двух векторов a^1 и a^2 процесса ортогонализации Грама — Шмидта без нормировки векторов.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Построим ортонормированную систему векторов по векторам $a^1 = (1, 2, 2, -1)$, $a^2 = (1, 1, -5, 3)$, $a^3 = (3, 2, 8, -7)$. Положим $h^1 = a^1$. Найдем h^2. Вычислим коэффициент

$$\alpha_{2,1} = -\frac{(a^2, h^1)}{(h^1, h^1)} = -\frac{1 + 2 - 10 - 3}{1 + 4 + 4 + 1} = 1.$$

Получим

$$h^2 = \alpha_{2,1} h^1 + a^2 =$$

$$= (1, 2, 2, -1) + (1, 1, -5, 3) = (2, 3, -3, 2).$$

Далее,

$$\alpha_{3,1} = -\frac{(a^3, h^1)}{(h^1, h^1)} = -\frac{30}{10} = -3, \quad \alpha_{3,2} = -\frac{(a^3, h^2)}{(h^2, h^2)} = -\frac{-26}{26} = 1.$$

Тогда

$$h^3 = \alpha_{3,1} h^1 + \alpha_{3,2} h^2 + a^3 =$$

$$= -3(1, 2, 2, -1) + (2, 3, -3, 2) + (3, 2, 8, -7) = (2, -1, -1, -2).$$

Построим по ортогональной системе векторов h^1, h^2, h^3 ортонормированную систему b^1, b^2, b^3, разделив каждый вектор на его длину:

$$b^1 = \frac{h^1}{|h^1|} = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 2, 2, -1),$$
$$b^2 = \frac{h^2}{|h^2|} = \frac{1}{\sqrt{26}} (2, 3, -3, 2),$$
$$b^3 = \frac{h^3}{|h^3|} = \frac{1}{\sqrt{10}} (2, -1, -1, -2).$$

2. *a*) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$;
b) $\dfrac{1}{\sqrt{11}}(1,3,1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{66}}(4,1,-7)$;
c) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,0,-1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{35}}(1,-5,3)$;
d) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3,-1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{23}}(3,2,-3,-1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{127}}(1,5,1,10)$.

3. Решение. Построим по полиномам

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = 1 + x, \quad Q_2(x) = 1 + x + x^2$$

полиномы $\tilde{P}_0(x)$, $\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$, ортогональные в смысле скалярного произведения (1), с. 18. Положим

$$\tilde{P}_0(x) = Q_0(x) = 1.$$

Найдем $\tilde{P}_1(x) = \alpha_{1,0}\tilde{P}_0(x) + Q_1(x)$, где

$$\alpha_{1,0} = -\frac{(Q_1, \tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0, \tilde{P}_0)} = -\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = -1.$$

Получим

$$\tilde{P}_1(x) = -\tilde{P}_0(x) + Q_1(x) = x.$$

Вычислим $\tilde{P}_2(x) = \alpha_{2,0}\tilde{P}_0(x) + \alpha_{2,1}\tilde{P}_1(x) + Q_2(x)$, где

$$\alpha_{2,0} = -\frac{(Q_2, \tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0, \tilde{P}_0)} = -\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = -1,$$
$$\alpha_{2,1} = -\frac{(Q_2, \tilde{P}_1)}{(\tilde{P}_1, \tilde{P}_1)} = -\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = -1.$$

Тогда

$$\tilde{P}_2(x) = -\tilde{P}_0(x) - \tilde{P}_1(x) + Q_2(x) = x^2.$$

Построим по найденным многочленам ортонормированную систему векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$:

$$P_0(x) = \frac{\tilde{P}_0(x)}{(\tilde{P}_0, \tilde{P}_0)^{1/2}} = \frac{1}{(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0)^{1/2}} = 1,$$

$$P_1(x) = \frac{\tilde{P}_1(x)}{(\tilde{P}_1, \tilde{P}_1)^{1/2}} = \frac{x}{(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0)^{1/2}} = x,$$

$$P_2(x)=\frac{\tilde P_2(x)}{(\tilde P_2,\tilde P_2)^{1/2}}=\frac{x^2}{(0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1)^{1/2}}=x^2.$$

4. Решение. Построим по полиномам

$$Q_0(x)=1,\quad Q_1(x)=x,\quad Q_2(x)=x^2$$

полиномы $\tilde P_0(x)$, $\tilde P_1(x)$, $\tilde P_2(x)$, ортогональные в смысле скалярного произведения (2), с. 18. Положим

$$\tilde P_0(x)=Q_0(x)=1.$$

Найдем $\tilde P_1(x)=\alpha_{1,0}\tilde P_0(x)+Q_1(x)$, где

$$\alpha_{1,0}=-\frac{(Q_1,\tilde P_0)}{(\tilde P_0,\tilde P_0)}=-\frac{-1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}=0.$$

Получим

$$\tilde P_1(x)=Q_1(x)=x.$$

Вычислим $\tilde P_2(x)=\alpha_{2,0}\tilde P_0(x)+\alpha_{2,1}\tilde P_1(x)+Q_2(x)$, где

$$\alpha_{2,0}=-\frac{(Q_2,\tilde P_0)}{(\tilde P_0,\tilde P_0)}=-\frac{1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}=-\frac{2}{3},$$
$$\alpha_{2,1}=-\frac{(Q_2,\tilde P_1)}{(\tilde P_1,\tilde P_1)}=-\frac{1\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1}{(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1}=0.$$

Тогда

$$\tilde P_2(x)=-\frac{2}{3}\tilde P_0(x)+Q_2(x)=-\frac{2}{3}+x^2.$$

Построим по найденным многочленам ортонормированную систему векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$:

$$P_0(x)=\frac{\tilde P_0(x)}{(\tilde P_0,\tilde P_0)^{1/2}}=\frac{1}{(1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$P_1(x)=\frac{\tilde P_1(x)}{(\tilde P_1,\tilde P_1)^{1/2}}=\frac{x}{((-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1)^{1/2}}=\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$P_2(x)=\frac{\tilde P_2(x)}{(\tilde P_2,\tilde P_2)^{1/2}}=$$

$$=\frac{-2/3+x^2}{((1/3)\cdot(1/3)+(2/3)\cdot(2/3)+(1/3)\cdot(1/3))^{1/2}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}x^2.$$

5. Решение. Построим по полиномам

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x^2$$

полиномы $\tilde{P}_0(x)$, $\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$, ортогональные в смысле скалярного произведения (2), с. 13. Положим

$$\tilde{P}_0(x) = Q_0(x) = 1.$$

Найдем

$$\tilde{P}_1(x) = \alpha_{1,0}\tilde{P}_0(x) + Q_1(x),$$

где

$$\alpha_{1,0} = -\frac{(Q_1, \tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0, \tilde{P}_0)}.$$

Имеем

$$(Q_1, \tilde{P}_0) = \int\limits_{-1}^{1} Q_1(x)\tilde{P}_0\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot 1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx = 0,$$

$$(\tilde{P}_0, \tilde{P}_0) = \int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} 1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2,$$

следовательно,

$$\tilde{P}_1(x) = Q_1(x) = x.$$

Вычислим

$$\tilde{P}_2(x) = \alpha_{2,0}\tilde{P}_0(x) + \alpha_{2,1}\tilde{P}_1(x) + Q_2(x),$$

где

$$\alpha_{2,0} = -\frac{(Q_2, \tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0, \tilde{P}_0)}, \quad \alpha_{2,1} = -\frac{(Q_2, \tilde{P}_1)}{(\tilde{P}_1, \tilde{P}_1)}.$$

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(Q_2, \tilde{P}_0) = \int\limits_{-1}^{1} Q_2(x)\tilde{P}_0\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

$$(Q_2, \tilde{P}_1) = \int\limits_{-1}^{1} Q_2(x)\tilde{P}_1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot x\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx = 0,$$

$$(\tilde{P}_1, \tilde{P}_1) = \int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_1^2\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

Тогда

$$\tilde{P}_2(x) = -\frac{1}{3}\tilde{P}_0(x) + Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Построим по найденным многочленам ортонормированную систему векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$. Имеем

$$P_0(x) = \tilde{P}_0(x)\left(\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_0^2(x)\,dx\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$P_1(x) = \tilde{P}_1(x)\left(\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_1^2(x)\,dx\right)^{-1/2} = x\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Для того, чтобы найти $P_2(x)$, вычислим предварительно

$$\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_2^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{9}x\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{9}2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{5\cdot 9}.$$

Окончательно получаем

$$P_2(x) = \tilde{P}_2(x)\left(\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_2^2(x)\,dx\right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5\cdot 9}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2 - 1\right).$$

6. *а*) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{79}}(1, 5, 2, 7)$;

b) $\frac{1}{3}(2,1,2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,4,-1)$;

c) $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2)$, $\frac{1}{\sqrt{23}}(3,-2,3,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{117}}(2,7,0,-8)$;

d) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,-1,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{39}}(2,5,1,3)$;

e) $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,1,-2)$.

7. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2$.

8. $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $P_1(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $P_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x^2$.

9. Решение. Покажем, что если в результате ортогонализации (без окончательной нормировки векторов) линейно независимые векторы a^1, a^2 перейдут в векторы h^1, h^2, то определитель матрицы Грама системы векторов a^1, a^2 совпадет с определителем матрицы Грама системы векторов h^1, h^2. Определитель матрицы Грама G_1 системы векторов a^1, a^2 вычисляется по формуле

$$\det(G_1) = \begin{vmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2). \end{vmatrix}$$

Построим ортогональные векторы h_1, h_2:

$$h^1 = a^1,$$
$$h^2 = \alpha h^1 + a^2.$$

Вычислим определитель матрицы Грама G_2 системы векторов h^1, h^2:

$$\det(G_2) = \begin{vmatrix} (h^1, h^1) & (h^2, h^1) \\ (h^1, h^2) & (h^2, h^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a^1, a^1) & (\alpha a^1 + a^2, a^1) \\ (a^1, \alpha a^1 + a^2) & (\alpha a^1 + a^2, \alpha a^1 + a^2) \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся свойствами скалярного произведения и свойствами определителя. Упростим определитель матрицы G_2 — вычтем первую строку определителя, умноженную на α, из второй строки, получим

$$\det(G_2) = \begin{vmatrix} (a^1, a^1) & \alpha(a^1, a^1) + (a^2, a^1) \\ (a^1, a^2) & \alpha(a^1, a^2) + (a^2, a^2) \end{vmatrix}.$$

Вычтем первый столбец, умноженный на α из второго столбца:

$$\det(G_2) = \begin{vmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) \end{vmatrix} = \det(G_1).$$

Напомним, что, если рассматривается пространство $\boldsymbol{V}_3$, то определитель матрицы G_1 равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах a^1, a^2, а $\det(G_2)$ — квадрату площади прямоугольника, построенного на векторах h^1 и h^2. Таким образом, в результате ортогонализации Грама — Шмидта (без окончательной нормировки векторов) эта площадь остается неизменной.

§ 4. Подпространства

Множество L векторов комплексного линейного пространства $\boldsymbol{X}$ называется *подпространством*, если из того, что векторы x и y принадлежат L, вытекает, что вектор $\alpha x + \beta y$ при любых комплексных числах α, β также принадлежит множеству L.

Тривиальные примеры подпространств: все пространство $\boldsymbol{X}$ является подпространством; множество $\{0\}$, состоящее только из одного вектора, равного нулю, является подпространством.

Поскольку по определению наряду с вектором x подпространству должен принадлежать и вектор $0x$, то всякое подпространство содержит нулевой вектор.

Пусть L_1, L_2 — подпространства пространства $\boldsymbol{X}$. *Пересечением подпространств* L_1 и L_2 называется множество всех векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2. Используют обозначение: $L = L_1 \cap L_2$.

Множество L всех векторов вида $x^1 + x^2$, где $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ называется *суммой подпространств* L_1 и L_2 и обозначается следующим образом: $L = L_1 + L_2$.

Сумма подпространств L_1 и L_2 называется *прямой*, если для любого вектора $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ составляющие $x^1 \in L_1$ и $x^2 \in L_2$ определяются однозначно. Прямая сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается следующим образом: $L = L_1 \dot{+} L_2$.

Справедливы следующие критерии того, что сумма двух подпространств является прямой.

Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $x^1 + x^2 = 0$ для $x^1 \in L_1$ и $x^2 \in L_2$ вытекало, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$.

Для того, чтобы сумма двух подпространств L_1 и L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Говорят, что подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства *ортогональны* (пишут $L_1 \perp L_2$), если $(x, y) = 0$ для всех $x \in L_1$, $y \in L_2$. Сумму ортогональных подпространств будем называть *ортогональной* и обозна-

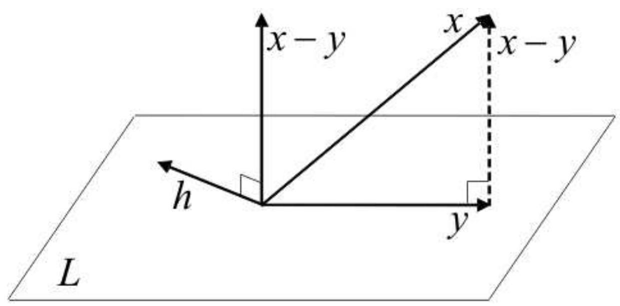

Рис. 1. Ортогональная проекция y вектора x и перпендикуляр $x - y$

чать через $L_1 \oplus L_2$. Ортогональная сумма двух подпространств является прямой.

Пусть L — подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{X}$. Вектор y, удовлетворяющий условию

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L,$$

называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L, вектор $z = x - y$ — *перпендикуляром*, опущенным из точки x на подпространство L (см. рис. 1).

Если подпространство L конечномерно, а $\{e^k\}_{k=1}^m$ — его базис, то компоненты η_1, η_2, $\ldots$, η_m разложения вектора $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i e^i$ по базису $\mathcal{E}_m$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i (e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Матрица этой системы — матрица Грама базиса $\{e^k\}_{k=1}^m$.

Упражнения

1. Описать всевозможные подпространства пространства $\boldsymbol{V}_3$.

2. Описать суммы и пересечения всевозможных подпространств пространства $\boldsymbol{V}_3$.

3. Пусть a^1, a^2, $\ldots$, a^m, $m \geqslant 1$, — произвольным образом фиксированные векторы комплексного линейного пространства $\boldsymbol{X}$. Докажите, что множество L всех линейных комбинаций

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m, \quad x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m \in \mathbb{C},$$

есть подпространство. Говорят, что это подпространство *натянуто на векторы* a^1, a^2, $\ldots$, a^m.

4. Пусть a^1, a^2 — векторы комплексного линейного пространства $\boldsymbol{X}$, причем, $a_2 \neq 0$. Множество L векторов вида $a^1 + \alpha a^2$, где α пробегает множество всех комплексных чисел, называется *прямой, проходящей через точку* a^1 *в направлении вектора* a^2. Показать, что множество L является подпространством тогда и только тогда, когда векторы a^1, a^2 линейно зависимы.

5. Пусть L — произвольное подпространство конечномерного линейного пространства $\boldsymbol{X}_n$. Докажите, что существует подпространство $M \subset \boldsymbol{X}_n$ такое, что $\boldsymbol{X}_n = L \dot{+} M$.

6. Пусть L — подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{X}$. Множество всех векторов из $\boldsymbol{X}$, ортогональных L, называется *ортогональным дополнением* подпространства L и обозначается через $L^{\perp}$. Докажите, что $L^{\perp}$ — подпространство пространства $\boldsymbol{X}$.

7. Пусть $\boldsymbol{X}$ — евклидово пространство, $e \in \boldsymbol{X}$, $e \neq 0$. Обозначим через π_e множество всех векторов пространства $\boldsymbol{X}$, ортогональных e. Докажите, что π_e — подпространство пространства $\boldsymbol{X}$. Это подпространство называют *гиперплоскостью*, ортогональной вектору e.

8. Сумма k подпространств L_1, L_2, $\ldots$, L_k называется *прямой* если для любого вектора

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \ldots + L_k)$$

его составляющие

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2, \ \ldots, \quad x^k \in L_k$$

определяются однозначно. Докажите, что для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2, $\ldots$, L_k была прямой необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0, \quad x^i \in L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

вытекало, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, …, $x^k = 0$.

9. Сумма k подпространств $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_k$ называется *ортогональной*, если она есть множество всех элементов вида

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k, \quad x^i \in L_i, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k,$$

и $L_i \perp L_j$ для $i \neq j$, где $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Докажите, что ортогональная сумма любого числа подпространств является прямой.

10. Верно ли утверждение: сумма подпространств

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \quad k > 2,$$

является прямой, если их пересечение — нулевое подпространство?

11. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы

$$e^1 = (1, 0, 1, 1), \quad e^2 = (0, 1, 1, 1).$$

Найти ортогональную проекцию y вектора

$$x = (0, 0, 0, 5)$$

на подпространство L и перпендикуляр z, опущенный из точки x на L.

12. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы

$$a^1 = (1, 3, 3, 5), \quad a^2 = (1, 3, -5, -3), \quad a^3 = (1, -5, 3, -3).$$

Найти ортогональную проекцию y вектора

$$x = (2, -5, 3, 4)$$

на подпространство L и перпендикуляр z, опущенный из точки x на подпространство L.

13. Пусть L — множество всех матриц размера $m \times n$ с комплексными элементами и нулевой первой строкой. Доказать, что L является подпространством пространства прямоугольных матриц $\mathbb{C}^{m \times n}$.

14. Образуют ли подпространство пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$:

a) все матрицы A порядка n, у которых $\operatorname{tr} A = 0$;

b) все симметричные матрицы порядка n;

c) все кососимметричные матрицы порядка n;

d) все невырожденные матрицы порядка n;

e) все верхние (нижние) треугольные матрицы порядка n;

f) все матрицы порядка n с нулевой главной диагональю?

15. Доказать, что пространство квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ является прямой суммой подпространства симметричных матриц и подпространства кососимметричных матриц порядка n.

16. Образуют ли подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ все векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых:

a) являются целыми числами;

b) являются четными числами;

c) являются нечетными числами;

d) удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

e) удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$;

f) удовлетворяют условию $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$?

17. Пусть L_1 — подпространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов, все компоненты которых равны между собой. Пусть $L_2 \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство векторов, сумма компонент которых равна нулю. Доказать, что сумма подпространств L_1 и L_2 является прямой.

18. Образуют ли подпространство пространства $\boldsymbol{P}_n$ многочленов с вещественными коэффициентами все полиномы $p(t) \in \boldsymbol{P}_n$, для которых:

a) $p(1) = 0$;

b) $p(-t) = p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;

c) $p(-t) = -p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;

d) $p(1) = 1$;

e) $2p(0) = 3p(1)$;

f) $p(\alpha t) = \alpha p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — некоторое фиксированное число?

19. Доказать, что пространство $\boldsymbol{P}_n$ является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

20. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы $\{a^k\}_{k=1}^3$. Найти ортогональную проекцию y вектора x на подпространство L и перпендикуляр z, опущенный из точки x на подпространство L, если:
$a)$ $x = (5, 2, -2, 2)$, $a^1 = (2, 1, 1, -1)$, $a^2 = (1, 1, 3, 0)$, $a^3 = (1, 2, 8, 1)$;
$b)$ $x = (4, -1, -3, 4)$, $a^1 = (1, 1, 1, 1)$, $a^2 = (1, 2, 2, -1)$, $a^3 = (1, 0, 0, 3)$.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Заметим, прежде всего, что подпространствами пространства $\boldsymbol{V}_3$ являются само пространство $\boldsymbol{V}_3$ и множество $\{0\}$, состоящее из одного нулевого вектора. Опишем третий тип подпространств пространства $\boldsymbol{V}_3$. Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $a \in \boldsymbol{V}_3$ и построим прямую l, проходящую через начало координат в направлении вектора a. Множество векторов, концы которых лежат на прямой l, является подпространством пространства $\boldsymbol{V}_3$. Все векторы этого подпространства имеют вид αa, где α пробегает множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$. Опишем последний, четвертый, тип подпространств пространства $\boldsymbol{V}_3$. Пусть a^1 и a^2 — произвольные неколлинеарные векторы пространства $\boldsymbol{V}_3$. Множество π векторов вида $\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2$, где α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, является подпространством пространства $\boldsymbol{V}_3$. Множество π — плоскость, проходящая через начало координат и натянутая на векторы a^1 и a^2.

2. Указание. Опишем сумму и пересечение двух подпространств пространства $\boldsymbol{V}_3$ на примере прямой и плоскости. Пусть l — прямая, проходящая через начало координат в направлении вектора a^1, а π — плоскость, проходящая через начало координат, натянутая на векторы a^2 и a^3. Сумма $l + \pi$ есть множество всех векторов вида

$$\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3, \quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Пересечение $l \cap \pi$ — множество векторов, принадлежащих одновременно и l, и π. Если прямая l не лежит в плоскости π, то векторы a^1, a^2 и a^3 не компланарны, и $l+\pi = \boldsymbol{V}_3$, $l \cap \pi = \{0\}$. Если $l \subset \pi$, то $l+\pi = \pi$, а $l \cap \pi = l$. Аналогичным образом рассмотрите суммы и пересечения подпространств пространства $\boldsymbol{V}_3$ всех остальных типов.

3. Решение. Пусть $x = \sum_{k=1}^{m} x_k a^k$, $y = \sum_{k=1}^{m} y_k a^k \in L$. Тогда для любых чисел α, $\beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{k=1}^{m} x_k a^k + \beta \sum_{k=1}^{m} y_k a^k = \sum_{k=1}^{m} z_k a^k = z,$$

где $z_k = \alpha x_k + \beta y_k \in \mathbb{C}$, следовательно, $z \in L$.

4. Решение. Пусть L — подпространство линейного пространства $\boldsymbol{X}$. Тогда $0 \in L$. Следовательно, существует такое число $\alpha \in \mathbb{C}$, что

$$a^1 + \alpha a^2 = 0.$$

Значит, векторы a^1 и a^2 линейно зависимы, т. к. в эту линейную комбинацию вектор a^1 входит с ненулевым множителем (он равен единице). Докажем теперь, что из коллинеарности векторов a^1 и a^2 следует, что множество L является подпространством. Если $a^1 = 0$, то все элементы множества L имеют вид αa^2, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Построим линейную комбинацию элементов αa^2 и βa^2 этого множества с произвольными коэффициентами p и $q \in \mathbb{C}$:

$$p\,\alpha\, a^2 + q\beta a^2 = (p\,\alpha + q\beta) a^2.$$

Ясно, что этот вектор принадлежит L. Если векторы a^1 и a^2 не равны нулю и коллинеарны, т. е. $a^1 = \gamma a^2$, $\gamma \in \mathbb{C}$, то L тоже состоит из векторов вида αa^2, где α пробегает множество всех комплексных чисел, т. к. для любого $\beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$a^1 + \beta a^2 = \gamma a^2 + \beta a^2 = (\gamma + \beta) a^2 = \alpha a^2, \quad \alpha = (\gamma + \beta) \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, и в этом случае L является подпространством.

5. Решение. Пусть подпространство L имеет размерность $k < n$, и векторы e^1, e^2, ..., e^k образуют базис подпространства L. Дополним его векторами e^{k+1}, e^{k+2}, ..., e^n до базиса всего пространства $\boldsymbol{X}_n$. Обозначим через M подпространство пространства $\boldsymbol{X}_n$, натянутое на векторы e^{k+1},

$e^{k+2}, \ldots, e^n$. Ясно, что любой вектор $x \in \boldsymbol{X}_n$ представим в виде $x = x^1 + x^2$, где $x^1 \in L$, $x_2 \in M$. Кроме того, пересечение этих подпространств есть $\{0\}$. Следовательно, $\boldsymbol{X}_n = L \dotplus M$.

6. Решение. По определению

$$L^{\perp} = \{x \in \boldsymbol{X} : (x, z) = 0 \; \forall \, z \in L\}.$$

Пусть $x, \, y \in L^{\perp}$; $\alpha, \, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0 \; \forall \, z \in L,$$

следовательно, $\alpha x + \beta y \in L^{\perp}$.

7. Указание. Используйте предыдущее упражнение.

8. Решение. Пусть из равенства

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0, \quad x^i \in \; L_i, \; i = 1, \, 2 \, \ldots, \, k,$$

следует, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $\ldots$, $x^k = 0$. Покажем, что тогда для любого

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \cdots + L_k)$$

составляющие $x^i \in L_i$, $i = 1, \, 2, \, \ldots, \, k$, определяются однозначно. Предположим, что существует еще одно разложение вектора x, т. е.

$$x = \widetilde{x}^1 + \widetilde{x}^2 + \cdots + \widetilde{x}^k, \quad \widetilde{x}^i \in \; L_i, \; i = 1, \, 2 \, \ldots, \, k.$$

Тогда, очевидно,

$$(x^1 - \widetilde{x}^1) + (x^2 - \widetilde{x}^2) + \cdots + (x^k - \widetilde{x}^k) = 0.$$

Поскольку $x^i - \widetilde{x}^i \in L_i$, $i = 1, \, 2, \, \ldots, \, k$, то

$$x^1 - \widetilde{x}^1 = 0, \quad x^2 - \widetilde{x}^2 = 0, \; \ldots, \; x^k - \widetilde{x}^k = 0,$$

следовательно, $x^i = \widetilde{x}^i$, $i = 1, \, 2, \, \ldots, \, k$. Обратно, пусть составляющие любого вектора

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \cdots + L_k)$$

определяются однозначно, и пусть

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0$$

для каких-то $x^i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, то отсюда вытекает, что $x^1 = x^2 = \ldots = x^k = 0$.

9. Решение. Пусть $x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0$. Поскольку $(x^j, x^i) = 0$ при $i \neq j$, имеем

$$0 = (x^1 + x^2 + \cdots + x^k, x^1 + x^2 + \cdots + x^k) =$$

$$= |x^1|^2 + |x^2|^2 + \cdots + |x^k|^2,$$

следовательно, $x^1 = x^2 = \ldots = x^k = 0$.

10. Утверждение неверно. Решение. Достаточно привести контрпример. Рассмотрим три подпространства пространства $\boldsymbol{V}_3$: две не совпадающие плоскости π_1, π_2 и не принадлежащую ни одной из этих плоскостей прямую l. Ясно, что $\pi_1 \cap \pi_2 \cap l = \{0\}$. Однако, сумма этих подпространств не является прямой. Докажем это с помощью критерия, сформулированного в упражнении 8, с. 28. Для любого ненулевого вектора $x^3 \in l$ справедливо разложение на составляющие:

$$-x^3 = x^1 + x^2, \quad x^1 \in \pi_1, \quad x^2 \in \pi_2.$$

Тогда

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0, \quad x^1 \in \pi_1, \quad x^2 \in \pi_2, \quad x^3 \in l,$$

но $x^3 \neq 0$.

11. Решение. Векторы $e^1 = (1, 0, 1, 1)$, $e^2 = (0, 1, 1, 1)$ линейно независимы, следовательно, образуют базис подпространства L. Компоненты η_1, η_2 вектора y — проекции вектора $x = (0, 0, 0, 5)$ в базисе e^1, e^2 — могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \eta_1(e^1, e^1) + \eta_2(e^2, e^1) &= (x, e^1), \\ \eta_1(e^1, e^2) + \eta_2(e^2, e^2) &= (x, e^2). \end{aligned}$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(e^1, e^1) = 3, \quad (e^2, e^1) = 2, \quad (e^2, e^2) = 3,$$

$$(x, e^1) = 5, \quad (x, e^2) = 5.$$

Решением системы

$$3\eta_1 + 2\eta_2 = 5,$$
$$2\eta_1 + 3\eta_2 = 5$$

являются числа $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1$. Итак,

$$y = 1 \cdot e^1 + 1 \cdot e^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

есть ортогональная проекция вектора x на подпространство L,

$$z = x - y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

есть перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

12. $y = (0, -3, 5, 2)$, $z = (2, -2, -2, 2)$. Указание. Начните выполнение упражнения с вычисления матрицы Грама системы векторов $\{a^k\}_{k=1}^3$ и убедитесь, что она невырождена, т. е. эта система является базисом подпространства L.

13. Решение. Действительно, пусть матрицы A, $B \in L$, т. е. их первая строка нулевая. Тогда при любых α, $\beta \in \mathbb{C}$ первая строка матрицы $C = \alpha A + \beta B$ также состоит из нулей, т. е. $C \in L$.

14. a) Да, b) да, c) да, d) нет, e) да, f) да. Указание. Использовать определение подпространства линейного пространства.

15. Указание. Проверьте, что пересечение подпространств есть $\{0\}$.

16. a) Нет, b) нет, c) нет, d) да, e) нет, f) да. Указание. Использовать определение подпространства линейного пространства.

17. Решение. Ясно, что в рассматриваемом случае $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, а это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы сумма двух подпространств L_1 и L_2 была прямой.

18. a) Да, b) да, c) да, d) нет, e) да, f) да. Указание. Использовать определение подпространства линейного пространства.

19. Указание. Проверьте, что пересечение подпространств есть $\{0\}$.

20. a) $y = 2a^1 - a^2 = (3, 1, -1, -2)$, $z = (2, 1, -1, 4)$;

b) $y = 3a^1 - 2a^2 = (1, -1, -1, 5)$, $z = (3, 0, -2, -1)$.

Глава 2

Линейные операторы и матрицы

§ 1. Линейные операторы и действия над ними. Обратный оператор

Пусть $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ — линейные пространства. Говорят, что задано *отображение* φ пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{Y}$ (пишут $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$), если каждому вектору x из $\mathbf{X}$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x)$ из $\mathbf{Y}$. Говорят также в этом случае, что на пространстве $\mathbf{X}$ задана *функция* φ со значениями в пространстве $\mathbf{Y}$. Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из $\mathbf{Y}$ должен быть результатом отображения некоторого вектора x из $\mathbf{X}$.

Отображение φ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbf{X}$ и любых чисел α, β выполняется равенство

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y). \tag{1}$$

Линейные отображения обычно называют *линейными операторами* (или просто операторами) и обозначают большими латинским буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводит к недоразумениям, не пишут. Так, равенство (1) применительно к оператору $\mathcal{A}$ запишется в виде

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y. \tag{2}$$

Если оператор действует из пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{X}$, то говорят, что он действует в пространстве $\mathbf{X}$ или является *преобразованием* пространства $\mathbf{X}$.

Отображение $0 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, которое каждый вектор $x \in \boldsymbol{X}$ переводит в нулевой вектор $0 \in \boldsymbol{Y}$, является линейным и называется *нулевым оператором.*

Отображение $I : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, которое оставляет без изменений все векторы пространства $\boldsymbol{X}$, является линейным и называется *единичным (тождественным) оператором.*

Из определения линейного отображения вытекает, что $\mathcal{A}0 = 0$ для любого оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ — линейные операторы; α, β — числа. Оператор $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, называемый *линейной комбинацией* операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, определяется соотношением

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \boldsymbol{Z}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы. Оператор $\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \boldsymbol{Z}$, определяемый соотношением

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \tag{3}$$

называется *произведением операторов* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Говорят, что линейный оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X} \to \ \boldsymbol{Y}$ имеет *обратный* (или *обратим*), если существует такой оператор $\mathcal{A}^{-1} \colon \boldsymbol{Y} \to \ \boldsymbol{X}$, что

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = x \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}y = y \quad \forall\, y \in \boldsymbol{Y}.$$

Упражнения

1. Показать, что отображение $\mathcal{B}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ — линейные операторы, есть линейный оператор.

2. Показать, что отображение $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ — линейные операторы, α, β — числа, есть линейный оператор.

3. Аналогично (3) можно определить произведение любого числа операторов. Показать, что если произведение операторов $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ определено, то

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

4. Доказать, что линейный оператор не может иметь двух различных обратных операторов.

5. Пусть $\mathcal{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{B}: \mathbf{Y} \to \boldsymbol{Z}$ — обратимые операторы. Показать, что тогда и оператор $\mathcal{BA}$ обратим, причем $(\mathcal{BA})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$.

6. Пусть линейное пространство $\boldsymbol{X}$ есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2, т. е. каждый вектор $x \in \boldsymbol{X}$ представим в виде

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1,\ x^2 \in L_2,$$

причем векторы x^1, x^2 однозначно определяются по вектору x. Определим оператор $\mathcal{P}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, полагая

$$\mathcal{P}x = x^1.$$

Говорят, что оператор $\mathcal{P}$ есть оператор *проектирования* пространства $\boldsymbol{X}$ на подпространство L_1 (параллельно подпространству L_2). Доказать, что оператор $\mathcal{P}$ при условии, что подпространство L_1 не совпадает со всем пространством $\boldsymbol{X}$, не имеет обратного.

7. Пусть линейное пространство $\boldsymbol{X}$ есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2. Тогда каждый вектор $x \in \boldsymbol{X}$ представим в виде

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1,\ x^2 \in L_2,$$

причем векторы x^1, x^2 однозначно определяются по вектору x. Определим оператор $\mathcal{R}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, полагая

$$\mathcal{R}x = x^1 - x^2.$$

Говорят, что оператор $\mathcal{R}$ есть *оператор отражения* пространства $\boldsymbol{X}$ относительно L_1 параллельно L_2. Доказать, что оператор $\mathcal{R}$ линеен.

8. Выяснить геометрический смысл ортогонального отражения пространства $\boldsymbol{V}_3$ относительно двумерного подпространства π.

9. Доказать, что любой линейный оператор $\mathcal{A}$:

а) сохраняет линейные комбинации, т. е. переводит всякую линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$\mathcal{A}\left(x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_ma^m\right) = x_1\mathcal{A}a^1 + x_2\mathcal{A}a^2 + \cdots + x_m\mathcal{A}a^m,$$

где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m \in \mathbb{C}$; $\{a^i\}_{i=1}^m$ — система векторов пространства $\boldsymbol{X}$.

$b)$ сохраняет линейную зависимость, т. е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

10. Верно ли утверждение: любая линейно независимая система векторов переводится произвольным линейным оператором в некоторую линейно независимую систему?

11. Верно ли утверждение: если две системы векторов $\{c^k\}_{k=1}^m$ и $\{b^k\}_{k=1}^p$ эквивалентны, то для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ эквивалентны системы векторов $\{\mathcal{A}c^k\}_{k=1}^m$ и $\{\mathcal{A}b^k\}_{k=1}^p$?

12. В комплексном линейном пространстве $\boldsymbol{X}_n$ фиксирован базис e^1, $e^2, \ldots, e^n$. Доказать, что соответствие, относящее каждому вектору x пространства его l-ю координату в этом базисе, будет линейным оператором, действующим из $\boldsymbol{X}_n$ в $\mathbb{C}$ (линейный оператор, действующий из $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{C}$ называется *линейным функционалом.*)

13. Доказать, что всякий линейный оператор, действующий в одномерном пространстве, сводится к умножению всех векторов пространства на фиксированное (для данного оператора) число.

14. Выяснить, является ли линейным оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{V}_3 \to \boldsymbol{V}_3$, определяемый равенством

$$\mathcal{A}x = a \quad \forall\, x \in \boldsymbol{V}_3,$$

где a — некоторый фиксированный вектор из $\boldsymbol{V}_3$. Поясним, что каждому вектору $x \in \boldsymbol{V}_3$ оператор $\mathcal{A}$ ставит в соответствие один и тот же вектор $a \in \boldsymbol{V}_3$.

15. Выяснить, является ли линейным преобразование пространства $\mathbb{R}^2$, которое задается следующим образом:

$$\mathcal{A}x = (x_1 + x_2, x_2 + 1), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

16. Найти, какие из приведенных ниже преобразований пространства $\boldsymbol{P}_n$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами являются линейными операторами, действующими в $\boldsymbol{P}_n$. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный многочлен $f(t)$.

$a)$ $\mathcal{A}f(t) = f(-t)$,

$b)$ $\mathcal{A}f(t) = f(t+1)$,

$c)$ $\mathcal{A}f(t) = f'(t)$,

$d)$ $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - f(t)$,

$e)$ $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - g(t)$, где $g(t)$ — фиксированный ненулевой многочлен,

$f)$ $\mathcal{A}f(t) = tf(t)$.

17. Для каждого из следующих операторов в пространстве $\boldsymbol{V}_3$ определить, является ли этот оператор линейным. Все операторы описываются своим действием на произвольный вектор x. При этом a и b обозначают фиксированные векторы пространства $\boldsymbol{V}_3$.

$a)$ $\mathcal{A}x = x + a$.

$b)$ $\mathcal{A}x = \gamma x$, где γ — фиксированное вещественное число.

$c)$ $\mathcal{A}x = (x, a)a$.

$d)$ $\mathcal{A}x = (a, x)b$.

$e)$ $\mathcal{A}x = (a, x)x$.

$f)$ $\mathcal{A}x = [x, a]$.

18. Проверить, какие из указанных ниже отображений φ пространства $\boldsymbol{V}_3$ в пространство $\mathbb{R}$ являются линейными. Все отображения описываются своим действием на произвольный вектор x. При этом a и b обозначают фиксированные векторы пространства $\boldsymbol{V}_3$.

$a)$ $\varphi(x) = \gamma$, где γ — фиксированное вещественное число.

$b)$ $\varphi(x) = (x, a)$.

$c)$ $\varphi(x) = \cos(x, a)$.

$d)$ $\varphi(x) = (x, x)$.

$e)$ $\varphi(x) = ([a, x], b)$.

$f)$ $\varphi(x) = (x, [a, x])$.

19. Выяснить, являются ли линейными следующие отображения $\mathcal{A}$ пространства вещественных квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ в пространство $\mathbb{R}$:

$a)$ $\mathcal{A}X = \operatorname{tr} X$,

$b)$ $\mathcal{A}X = \det X$.

20. Выяснить, какие из следующих преобразований трехмерного арифметического пространства являются линейными. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор x при этом компоненты вектора-образа заданы как функции компонент вектора x.

a) $\mathcal{A}x = \big(x_1, x_2, (x_3)^2\big)$,

b) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2)$,

c) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2 - 1)$,

d) $\mathcal{A}x = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Последовательно применяя определение произведения операторов, линейность операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, получаем равенства, справедливые для любых чисел α и β и любых векторов x, $y \in \boldsymbol{X}$:

$$\mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x + \beta y)) = \mathcal{B}(\alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y) = \alpha\mathcal{B}\mathcal{A}x + \beta\mathcal{B}\mathcal{A}y.$$

Это и означает линейность отображения $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

2. Решение. В силу определения линейной комбинации операторов и линейности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ для любых чисел γ и δ и любых векторов x, $y \in \boldsymbol{X}$ справедливы равенства:

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})(\gamma x + \delta y) = \alpha\mathcal{A}(\gamma x + \delta y) + \beta\mathcal{B}(\gamma x + \delta y) =$$

$$= \alpha\gamma\mathcal{A}x + \alpha\delta\mathcal{A}y + \beta\gamma\mathcal{B}x + \beta\delta\mathcal{B}y = \gamma(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x + \delta(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})y.$$

3. Решение. Согласно определению (3) имеем

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{C}((\mathcal{B}\mathcal{A})x) = C(\mathcal{B}(\mathcal{A}x)) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}x \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X}.$$

С другой стороны, определяя аналогично (3) произведение трех операторов, имеем

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{A}x)) \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X}.$$

Операторы, определенные на пространстве $\boldsymbol{X}$, равны, если равны их значения для любого $x \in \boldsymbol{X}$. Следовательно, объединяя эти равенства, получаем

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

4. Решение. Обозначим через $I_{\boldsymbol{X}}$ и $I_{\boldsymbol{Y}}$ единичные операторы, действующие в пространствах $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно. Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет два обратных оператора $\mathcal{A}^{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$, т. е.

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A} = I_{\boldsymbol{X}},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = I_{\boldsymbol{Y}}.$$

В силу ассоциативности операции произведения операторов имеем

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}I_{\boldsymbol{Y}} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}) = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = I_{\boldsymbol{X}}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}.$$

5. Решение. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$. Он существует, так как операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обратимы. Используем свойство ассоциативности операции произведения операторов:

$$(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1})(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = I_{\boldsymbol{X}},$$

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} = I_{\boldsymbol{Z}},$$

т. е. оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ обратим, и $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$.

6. Решение. Если $L_1 = \boldsymbol{X}$, то $\mathcal{P}x = x$, т. е. оператор $\mathcal{P}$ равен тождественному оператору, и $\mathcal{P}^{-1} = I$. Пусть $L_1 \neq \boldsymbol{X}$. Положим

$$x = x^1 + x^2, \quad y = x^1 + y^2, \quad x^1 \in L_1,\ x^2,\, y^2 \in L_2,$$

где $x^2 \neq y^2$. Тогда $x \neq y$, но $\mathcal{P}x = x^1$ и $\mathcal{P}y = x^1$, т. е. совпадают образы двух разных векторов. Это означает, что оператор $\mathcal{P}$ необратим.

7. Решение. Пусть x, $y \in \boldsymbol{X}$ и

$$x = x^1 + x^2, \quad y = y^1 + y^2, \quad x^1,\, y^1 \in L_1, \quad x^2,\, y^2 \in L_2.$$

Тогда для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$ в силу линейности пространства $\boldsymbol{X}$ имеем

$$\alpha\mathcal{R}x = \alpha(x^1 - x^2) = \alpha x^1 - \alpha x^2,$$

$$\beta\mathcal{R}y = \beta(y^1 - y^2) = \beta y^1 - \beta y^2.$$

Следовательно,

$$\alpha\mathcal{R}x + \beta\mathcal{R}y = (\alpha x^1 + \beta y^1) - (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

С другой стороны,

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x^1 + x^2) + \beta(y^1 + y^2) = (\alpha x^1 + \beta y^1) + (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Вследствие того, что L_1 и L_2 есть подпространства, получаем, что

$$\alpha x^1 + \beta y^1 \in L_1, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 \in L_2,$$

поэтому

$$\mathcal{R}(\alpha x + \beta y) = (\alpha x^1 + \beta y^1) - (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Таким образом, $\mathcal{R}$ — линейный оператор:

$$\mathcal{R}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{R} x + \beta \mathcal{R} y.$$

8. Решение. Пусть π — плоскость, проходящая через начало координат, натянутая на два неколлинеарных вектора e^1 и e^2:

$$\pi = \{x \in \boldsymbol{V}_3 : x = x_1 e^1 + x_2 e^2,\ x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим через e^3 некоторый вектор, ортогональный плоскости π, и проведем через начало координат прямую l в направлении вектора e^3:

$$l = \{x \in \boldsymbol{V}_3 : x = x_3 e^3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда $\boldsymbol{V}_3 = \pi \oplus l$, и каждому вектору

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$$

оператор отражения $\mathcal{R}$ ставит в соответствие вектор

$$\mathcal{R} x = x_1 e^1 + x_2 e^2 - x_3 e^3.$$

Сделайте рисунок.

9. a) Указание. Применить равенство (2) определения линейного оператора $m-1$ раз.

b) Решение. Пусть $\{a^i\}_{i=1}^m$ — линейно зависимая система, т. е. существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0.$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{A}$, получим

$$x_1\mathcal{A}a^1 + x_2\mathcal{A}a^2 + \cdots + x_m\mathcal{A}a^m = 0,$$

т. е. система образов $\{\mathcal{A}a^i\}_{i=1}^m$ линейно зависима в пространстве $\boldsymbol{Y}$.

10. Утверждение неверно. Решение. Достаточно привести контрпример. Нулевой оператор линеен, но он любую линейно независимую систему переводит в систему, состоящую из одного нулевого вектора, следовательно, линейно зависимую.

11. Решение. Пусть системы векторов $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{B}_p$ эквивалентны, т. е. существуют такие матрицы X и Y, что

$$\mathcal{C}_m = \mathcal{B}_pX, \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_mY. \tag{4}$$

Обозначим $\mathcal{A}\mathcal{C}_m = \{\mathcal{A}c^k\}_{k=1}^m$, $\mathcal{A}\mathcal{B}_p = \{\mathcal{A}b^k\}_{k=1}^p$. Из (4) заключаем, что

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_m = \mathcal{A}\mathcal{B}_pX, \quad \mathcal{A}\mathcal{B}_p = \mathcal{A}\mathcal{C}_mY,$$

а это и означает, что системы $\mathcal{A}\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}_p$ эквивалентны

12. Указание. Пусть $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e^j$. Тогда $\mathcal{A}x = \xi_l$. Убедитесь в справедливости равенства (2).

13. Решение. Для любого $x \in \boldsymbol{X}_1$ имеем $x = \xi e$, где e — фиксированный ненулевой элемент (базис) пространства $\boldsymbol{X}_1$, а ξ — некоторое число. В силу линейности оператора $\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\xi e) = \xi\mathcal{A}e$. Обозначим $f = \mathcal{A}e \in \boldsymbol{X}_1$. Ясно, что существует некоторое ненулевое число α такое, что $f = \alpha e$. Тогда $\mathcal{A}x = \xi\alpha e = \alpha\xi e = \alpha x$.

14. Решение. Для любых x, $y \in \boldsymbol{V}_3$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathcal{A}(x + y) = a, \quad \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha a.$$

Следовательно, если $a = 0$, то условие (2) выполняется, и $\mathcal{A}$ является линейным оператором. При любом $a \neq 0$ условие (2) не выполняется.

15. Решение. Это преобразование не является линейным, так как оно нулевой вектор $(0, 0)$ переводит вектор $(0, 1)$, отличный от нуля, а любой линейный оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ переводит нулевой элемент пространства $\boldsymbol{X}$ в $0 \in \boldsymbol{Y}$.

16. a), b) Линейный оператор.

c) Линейный оператор в пространстве $\boldsymbol{P}_n$. Решение. Пусть

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n.$$

Тогда

$$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1},$$

и для любых многочленов f, $g \in \boldsymbol{P}_n$ имеем (коэффициенты полинома g обозначены через b_k):

$$\mathcal{A}(f+g) = (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)t + \dots + n(a_n+b_n)t^{n-1} =$$

$$= \left(a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1}\right) + \left(b_1 + 2b_2 t + \dots + n b_n t^{n-1}\right) = \mathcal{A}f + \mathcal{A}g.$$

Далее, для любых $f \in \boldsymbol{P}_n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(\alpha f) = (\alpha a_1) + 2(\alpha a_2)t + \dots + n(\alpha a_n)t^{n-1} =$$

$$= \alpha\left(a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1}\right) = \alpha \mathcal{A} f.$$

Таким образом преобразование $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ является линейным оператором в пространстве $\boldsymbol{P}_n$. Его называют *оператором дифференцирования* и обычно обозначают буквой $\mathcal{D}$. Заметим, что каждому элементу пространства $\boldsymbol{P}_n$ оператор $\mathcal{D}$ ставит в соответствие полином из $\boldsymbol{P}_{n-1}$. Поэтому можно считать, что $\mathcal{D} : \boldsymbol{P}_n \to \boldsymbol{P}_{n-1}$.

d) Линейный оператор. e) Не является линейным оператором.

f) Решение. Оператор $\mathcal{A}f(t) = tf(t)$ действует из пространства $\boldsymbol{P}_n$ в пространство $\boldsymbol{P}_{n+1}$, поэтому не является линейным преобразованием пространства $\boldsymbol{P}_n$. Оператор $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{P}_n \to \boldsymbol{P}_{n+1}$ является линейным.

17. a) Линейный оператор при $a = 0$, нелинейный — при $a \neq 0$.
b)–d) Линейный оператор.
e) Линейный оператор при $a = 0$, нелинейный — при $a \neq 0$.
f) Линейный оператор.

18. a) Решение. Любому вектору $x \in \boldsymbol{V}_3$ отображение $\varphi : \boldsymbol{V}_3 \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие фиксированное число $\gamma \in \mathbb{R}$. Следовательно, для любых x, $y \in \mathbb{R}$ и любых x, $y \in \boldsymbol{V}_3$ имеем

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \gamma.$$

С другой стороны,

$$\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = (\alpha + \beta)\gamma.$$

Из двух последних равенств заключаем, что, если $\gamma = 0$, то условие (1) выполняется, и φ — линейное отображение. При любом $\gamma \neq 0$ отображение φ не является линейным.

b) Линейное отображение.

c), *d*) Не является линейным отображением.

e) Линейное отображение.

f) Не является линейным отображением при $a \neq 0$, линейное — при $a = 0$.

19. *a*) Решение. Отображение $\mathcal{A}$ является линейным, так как в силу определения следа матрицы:

$$\mathcal{A}(X + Y) = \operatorname{tr}(X + Y) = \operatorname{tr} X + \operatorname{tr} Y = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y,$$

$$\mathcal{A}(\alpha X) = \operatorname{tr}(\alpha X) = \alpha \operatorname{tr} X = \alpha\mathcal{A}X.$$

b) Отображение $\mathcal{A}$ является линейным лишь в случае $n = 1$, так как для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathcal{A}(\alpha X) = \det(\alpha X) = \alpha^n \det X = \alpha^n \mathcal{A}X,$$

что при $n \geqslant 2$ противоречит равенству $\mathcal{A}(\alpha X) = \alpha\mathcal{A}X$, которому должен удовлетворять любой линейный оператор.

20. *a*) Не является линейным оператором. *b*) Линейный оператор. *c*) Не является линейным оператором. *d*) Линейный оператор.

§ 2. Матрица оператора

Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ базис $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, а в $\mathbf{Y}_m$ — базис $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$. Представим каждый вектор $\mathcal{A}e^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A}e^1 = a_{11}^{(eq)} q^1 + a_{21}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{m1}^{(eq)} q^m,$$

$$\mathcal{A}e^2 = a_{12}^{(eq)} q^1 + a_{22}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{m2}^{(eq)} q^m,$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{A}e^n = a_{1n}^{(eq)} q^1 + a_{2n}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{mn}^{(eq)} q^m.$$

Построим матрицу, i-й столбец которой образуют коэффициенты разложения вектора $\mathcal{A}e^i$ по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_{eq} называют *матрицей оператора* $\mathcal{A}$. Она однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$ и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

Рассмотрим частный случай линейного преобразования пространства $\boldsymbol{X}_n$. Матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ определяется заданием базиса пространства $\mathbf{X}_n$. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$ — базисы этого пространства, A_e, $A_{\widetilde{e}}$ — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах, T — матрица перехода от одного базиса к другому:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Тогда

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T. \tag{1}$$

Квадратные матрицы B, C, связанные соотношением

$$B = D^{-1} C D,$$

где D — невырожденная матрица, называют *подобными*. Матрицы одного и того же оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ в разных базисах подобны. Определители подобных матриц совпадают.

Определителем оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называют определитель матрицы этого оператора и обозначают через $\det(\mathcal{A})$. Эта характеристика оператора не зависит от выбора базиса пространства $\mathbf{X}_n$.

Линейный оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ называют *невырожденным*, если $\det(\mathcal{A}) \neq 0$. Для любого невырожденного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный. В любом базисе пространства $\boldsymbol{X}_n$ матрица обратного оператора обратна к матрице исходного оператора.

Упражнения

1. Пусть $\mathbf{P}_n$ — линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор $\mathcal{A}$, полагая

$$\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + bp_n$$

для любого $p_n \in \mathbf{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

2. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$, описанного в предыдущем примере, полагая при этом $b = 0$, трактуя возникающий оператор как оператор из $\mathbf{P}_n$ в $\mathbf{P}_{n-1}$ и принимая за базис пространства $\mathbf{P}_k$ базис Тейлора $\{1, (x-c), \ldots, (x-c)^k\}$, c — произвольное вещественное число.

3. Определим в пространстве $\mathbb{C}^n$ так называемый *оператор $\mathcal{T}$ циклического сдвига*, полагая $\mathcal{T}x = (x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_0)$ для каждого вектора $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Построить матрицу этого оператора в *базисе Фурье* $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$, где

$$\varphi_j^k = q_k^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

есть корни степени k из единицы, i — мнимая единица.

4. Пусть $\mathbf{T}_n$ — линейное пространство функций вида

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число, a_0, a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n$ — произвольные вещественные числа, x может принимать любые вещественные значения. Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом. Показать, что функции

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

образуют базис этого пространства. Построить матрицу *оператора дифференцирования*

$$\mathcal{D} f_n(x) = f_n'(x)$$

в этом базисе.

5. Определим оператор $\mathcal{K} : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n+1}$ по формуле

$$\mathcal{K} p_n(x) = \int_0^x p_n(t) dt.$$

Построить матрицу оператора $\mathcal{K}$, принимая $\{1, x, \ldots, x^k\}$ за базис в пространстве $\mathbf{P}_k$.

6. Определим так называемый *разностный оператор* Δ_h, действующий из $\mathbf{Q}_n$ в $\mathbf{Q}_{n-1}$ по формуле

$$\Delta_h q_n(z) = q_n(z + h) - q_n(z),$$

где $\mathbf{Q}_k$ — пространство полиномов степени не выше k с комплексными коэффициентами, h — произвольным образом фиксированное комплексное число. Построить матрицу оператора Δ_h, принимая $\{1, z, \ldots, z^k\}$ за базис в пространстве $\mathbf{Q}_k$.

7. Доказать, что если оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ имеет обратный, то он невырожден.

8. Доказать, что для того, чтобы оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имело только тривиальное решение $x = 0$.

9. Как изменится матрица линейного оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ в базисе $e^1, \ldots, e^n$, если в этом базисе:

$a)$ поменять местами два вектора e^i и e^j;

$b)$ умножить вектор e^i на число $\alpha \neq 0$.

10. Доказать, что матрицы одного и того же линейного оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ в двух базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей линейного оператора в одном из этих базисов.

11. Пусть пространство $\boldsymbol{X}_n$ является прямой суммой подпространств L_1 и L_2. Базис $e^1, e^2, \ldots, e^n$ выбран таким образом, что векторы $e^1, e^2, \ldots, e^k$ образуют базис подпространства L_1, а векторы $e^{k+1}, e^{k+2}, \ldots, e^n$ — базис подпространства L_2. Составить матрицы следующих операторов в базисе $e^1, e^2, \ldots, e^n$.

$a)$ Оператора $\mathcal{P}$ проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 (см. упр. 6, с. 39).

$b)$ Оператора $\mathcal{R}$ отражения относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2 (см. упр. 7, с. 39).

12. Пусть в пространстве $\boldsymbol{V}_3$ задана прямоугольная декартова система координат. В декартовом базисе i^1, i^2, i^3 найти матрицы следующих операторов.

$a)$ Оператора $\mathcal{P}$ ортогонального проектирования на ось x_2.

$b)$ Оператора $\mathcal{R}$ ортогонального отражения относительно координатной плоскости $x_1 = 0$.

13. В геометрическом пространстве $\boldsymbol{V}_3$ задан ортонормированный базис e^1, e^2, e^3. Построить в этом базисе матрицу оператора $\mathcal{Q}(\varphi)$, осуществляющего поворот каждого вектора $x \in \boldsymbol{V}_3$ вокруг вектора e^3. Направление поворота (при $\varphi > 0$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от e^1 к e^2.

14. Пусть в пространстве $\boldsymbol{V}_3$ задана прямоугольная декартова система координат. Для линейного оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{V}_3 \to \boldsymbol{V}_3$, действующего по правилу

$$\mathcal{A}x = [x, a],$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)$ — фиксированный ненулевой вектор, найти матрицу в декартовом базисе i^1, i^2, i^3.

15. Пусть $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в пространстве $\boldsymbol{P}_2$ (см. упр. 16, c), с. 40). Вычислить матрицу оператора $\mathcal{D}$ в следующем базисе этого пространства: $1 + t$, $t + 2t^2$, $3t^2 - 1$.

16. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e^1, e^2, e^3, e^4 имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе:

$a)$ e^1, e^3, e^2, e^4;

$b)$ e^1, $e^1 + e^2$, $e^1 + e^2 + e^3$, $e^1 + e^2 + e^3 + e^4$.

17. Построить матрицу оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ умножения квадратных матриц второго порядка слева на заданную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{E}_4$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

18. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ в пространство $\mathbb{R}$ по правилу $\mathcal{A}X = \operatorname{tr} X$. В пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ использовать базис (2), а в пространстве $\mathbb{R}$ — базис, состоящий из одного вектора $q^1 = 1$.

19. Оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$. Построить матрицу этого оператора: в естественном базисе i^1, i^2, i^3 и в базисе $e^1 = i^1 + i^2$, $e^2 = i^2 + i^3$, $e^3 = i^1 + i^3$.

$a)$ $\mathcal{A}x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$,

$b)$ $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$,

$c)$ $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Фиксируем в $\mathbf{P}_n$ базис $e^k = x^k$, $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$. Тогда

$$\mathcal{A}e^0 = a \cdot 1' + b \cdot 1 = b = be^0,$$

$$\mathcal{A}e^1 = ax' + bx = a + bx = ae^0 + be^1,$$

$$\mathcal{A}e^2 = a(x^2)' + bx^2 = a2x + bx^2 = 2ae^1 + be^2,$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{A}e^n = a(x^n)' + bx^n = anx^{n-1} + bx^n = nae^{n-1} + be^n.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{pmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 2a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

2. $A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2a & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na \end{pmatrix}.$

3. Решение. Имеем

$$\varphi^0 = (1, 1, \ldots, 1), \quad \mathcal{T}\varphi^0 = (1, 1, \ldots, 1) = \varphi^0 = q_0\varphi^0,$$

$$\varphi^1 = (1, q_1^1, \ldots, q_1^{n-1}), \quad \mathcal{T}\varphi^1 = (q_1, \ldots, q_1^{n-1}, 1) = q_1\varphi^1,\ \cdots,$$

$$\varphi^{n-1} = (1, q_{n-1}^1, \ldots, q_{n-1}^{n-1}), \quad \mathcal{T}\varphi^{n-1} = (q_{n-1}, \ldots, q_{n-1}^{n-1}, 1) = q_{n-1}\varphi^{n-1}.$$

Следовательно,

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

4. Решение. Функции

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ \dots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

образуют базис пространства $\mathbf{T}_n$. Действительно, любая функция из этого пространства является их линейной комбинацией, а сами эти функции линейно независимы, более того, они ортогональны в смысле скалярного произведения

$$(f,g)=\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx, \quad f,\ g\in \mathbf{T}_n.$$

Убедимся в этом. Пусть $k\neq l$. Положим $t=k+l$, $p=k-l$. Вычислим скалярное произведение

$$(\cos kx,\sin lx)=\int\limits_0^{2\pi}\cos kx\sin lx dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin tx dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin px dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\cos tx\,\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{p}\cos px\,\Bigg|_0^{2\pi}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}(1-1)+\frac{1}{p}(1-1)\right)=0.$$

Аналогично получим $(\cos kx,\cos lx)=(\sin kx,\sin lx)=0$. Теперь построим матрицу оператора дифференцирования в этом базисе. Обозначим

$$e^0=1,\ e^1=\cos x,\ e^{-1}=\sin x,\ \dots,\ e^n=\cos nx,\ e^{-n}=\sin nx.$$

Имеем

$$\mathcal{D}e^0=0,$$

$$\mathcal{D}e^1=-\sin x=-e^{-1},\quad \mathcal{D}e^{-1}=\cos x=e^1,\ \dots,$$

$$\mathcal{D}e^n=-n\sin nx=-ne^{-n},\quad De^{-n}=n\cos nx=ne^n.$$

Итак,

$$D_e=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь нумерация базисных функций, строк и столбцов матрицы начинается с $-n$ и заканчивается n.

5. Решение. Обозначим через $\mathcal{E}_{n+1} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ — базис в пространстве $\boldsymbol{P}_n$, через $\mathcal{Q}_{n+2} = \{1, x, \ldots, x^{n+1}\}$ — базис в пространстве $\boldsymbol{P}_{n+1}$. Построим матрицу оператора $\mathcal{K}$ в этой паре базисов. Имеем

$$\mathcal{K}1 = \int\limits_0^x 1dt = t \Big|_0^x = x,$$

$$\mathcal{K}x = \int\limits_0^x tdt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}, \ \ldots,$$

$$\mathcal{K}x^n = \int\limits_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Следовательно,

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(n+1) \end{pmatrix}.$$

6. Решение. Обозначим через $\mathcal{E}_{n+1} = \{1, z, \ldots, z^n\}$ — базис в пространстве $\boldsymbol{Q}_n$, через $\mathcal{Q}_n = \{1, z, \ldots, z^{n-1}\}$ — базис в пространстве $\boldsymbol{Q}_{n-1}$. Имеем

$$\Delta_h 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\Delta_h z = z + h - z = h \cdot 1,$$

$$\Delta_h z^2 = (z+h)^2 - z^2 = h^2 \cdot 1 + 2h \cdot z,$$

$$\ldots,$$

$$\Delta_h z^n = (h+z)^n - z^n = h^n \left(1 + \frac{z}{h}\right)^n - z^n =$$

$$= h^n \left[1 + n\frac{z}{h} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{z}{h}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} + 1\left(\frac{z}{h}\right)^n\right] - z^n =$$

$$= h^n \cdot 1 + nh^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{2!}h^{n-2}z^2 + \cdots + nhz^{n-1}.$$

Следовательно,

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & h & h^2 & \cdots & h^n \\ 0 & 0 & 2h & \cdots & nh^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n(n-1)h^{n-2}/2! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & nh \end{pmatrix}.$$

7. Решение. В любом базисе пространства $\boldsymbol{X}_n$ матрица обратного оператора обратна к матрице исходного оператора. Обратная матрица существует только у невырожденной. Следовательно, и сам оператор невырожден.

8. Решение. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ имел обратный необходимо и достаточно, чтобы он был невырожден, т. е., чтобы была невырождена матрица этого оператора в любом базисе. Условие, что уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$ эквивалентно тому, что лишь тривиальное решение $\xi = 0$ имеет система линейных алгебраических уравнений $A_e\xi = 0$, где A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathcal{E}_n$, а $\xi = \mathcal{E}^{-1}x$. Последнее утверждение равносильно невырожденности матрицы A_e.

9. a) В матрице поменяются местами i-я и j-я строки, а также i-й и j-й столбцы;

b) в матрице i-й столбец умножится на число α, а i-я строка разделится на число α.

Указание. Построить матрицы, осуществляющие указанные преобразования базиса и воспользоваться формулой (1).

10. Решение. Пусть $A_{\widetilde{e}} = A_e$. Тогда из (1) следует, что $TA_e = A_eT$. С другой стороны, если $TA_e = A_eT$, то $A_e = T^{-1}A_eT$, и в силу (1) заключаем, что $A_{\widetilde{e}} = A_e$.

11. a) Первые k элементов главной диагонали матрицы равны 1, все остальные элементы равны 0.

b) Матрица диагональная, первые k элементов ее главной диагонали равны 1, остальные элементы главной диагонали равны -1.

12. $a)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Указание. Представить $\boldsymbol{V}_3$ в виде

$$\boldsymbol{V}_3 = L_1 \oplus L_2,$$

где L_1 — ось x_2 с базисом i^2, а подпространство L_2 есть координатная плоскость x_1x_3 с базисом i^1, i^3.

$b)$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Указание. Сделайте рисунок.

14. $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Указание. Использовать формулу $[b, a] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

15. Решение. Обозначим $\mathcal{E}_n = \{1, t, t^2\}$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \{1 + t, t + 2t^2, 3t^2 - 1\}$. Тогда $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу D_e. Имеем

$$\mathcal{D}1 = 0, \quad \mathcal{D}t = 1, \quad \mathcal{D}t^2 = 2t,$$

следовательно, $D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим матрицу T^{-1}. Обозначим $X = T^{-1}$ и найдем X из матричного уравнения $TX = I$. Столбцы матрицы X являются решениями систем уравнений с матрицей T и векторами правой части, являющимися соответствующими столбцами матрицы I. Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью обратного хода метода Гаусса получаем

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, воспользуемся формулой (1):

$$D_e T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{\widetilde{e}} = T^{-1} D_e T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

16. $a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Указание. $a)$ Использовать упр. 9, $a)$. $b)$ Построить матрицу перехода от исходного базиса к новому. Вычислить к ней обратную и воспользоваться формулой (1).

17. Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{A}E_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + cE_3,$$

$$\mathcal{A}E_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_2 + cE_4,$$

$$\mathcal{A}E_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_1 + dE_3,$$

$$\mathcal{A}E_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_2 + dE_4.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}_4$ имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

18. Решение. Имеем

$$\mathcal{A}E_1 = 1 = 1q^1, \quad \mathcal{A}E_2 = 0 = 0q^1, \quad \mathcal{A}E_3 = 0 = 0q^1, \quad \mathcal{A}E_4 = 1 = 1q^1,$$

следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. *a*) $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

c) $A_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Указание. Для того, чтобы построить матрицу A_i, надо представить векторы $\mathcal{A}i^1$, $\mathcal{A}i^2$, $\mathcal{A}i^3$ в виде разложения по базису i^1, i^2, i^3. Для того, чтобы найти первый столбец матрицы A_e оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e^1 = i^1 + i^2$, $e^2 = i^2 + i^3$, $e^3 = i^1 + i^3$, необходимо решить относительно элементов a_{11}, a_{21}, a_{31} этого столбца следующую систему трех линейных алгебраических уравнений: $\mathcal{A}e^1 = \mathcal{A}(1,1,0) = a_{11}(1,1,0) + a_{21}(0,1,1) + a_{31}(1,0,1)$. Элементы второго и третьего столбцов матрицы оператора $\mathcal{A}$ находятся аналогично.

§ 3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы

Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ — линейный оператор. Множество всех векторов y из пространства $\mathbf{Y}$ таких, что $y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in \boldsymbol{X}$, называется *областью значений или образом* оператора и обозначается через $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$. Множество $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ — линейное подпространство пространства $\mathbf{Y}$. Размерность подпространства $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ называется *рангом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

Множество всех векторов $x \in \boldsymbol{X}$ таких, что $\mathcal{A}x = 0$, называется *ядром* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$. Это множество — линейное подпространство пространства $\mathbf{X}$. Размерность подпространства $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$ называется *дефектом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{def}(\mathcal{A})$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) + \operatorname{def}(\mathcal{A}) = n. \tag{1}$$

Пусть в пространстве $\boldsymbol{X}$ дана некоторая система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема векторов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из линейно независимых векторов, называется *максимальной*, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к линейно зависимой системе.

Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат одно и то же количество векторов. *Рангом системы векторов* называется количество векторов ее максимальной линейно независимой подсистемы.

Пусть $A(m, n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем *рангом матрицы* $A(m, n)$. Ранг матрицы A будем обозначать через $\operatorname{rank}(A)$.

Матрицу $A(m, n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства $\mathbb{C}^n$. Для любой матрицы $A(m, n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы ее столбцов.

Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$, A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно произвольным образом фиксированных базисов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{X}_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^m \subset \boldsymbol{Y}_m$. Тогда $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(A_{eq})$.

Ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

Упражнения

1. Доказать, что $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ — линейное подпространство пространства $\mathbf{X}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

2. Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство

$$\mathrm{rank}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}.$$

3. Найти максимальную линейно независимую подсистему следующей системы векторов пространства $\mathbb{R}^3$:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Что можно сказать о базисе подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4?

4. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$ — линейный оператор, e^1, …, e^n — базис пространства $\boldsymbol{X}_n$. Доказать, что

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}e^1, \ldots, \mathcal{A}e^n),$$

где $L(\mathcal{A}e^1, \ldots, \mathcal{A}e^n)$ — подпространство пространства $\boldsymbol{Y}_m$, натянутое на векторы $\mathcal{A}e^1$, …, $\mathcal{A}e^n$.

5. Для следующих линейных преобразований арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ построить базис образа, найти ранг и дефект:

a) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$,

b) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$,

c) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

6. Описать образ и ядро оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ в пространстве $\boldsymbol{P}_n$ полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами (см. упр. 16 c), с. 40).

7. Описать образ и ядро оператора проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\boldsymbol{X}$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 (см. упр. 6, с. 39).

8. Описать образ и ядро оператора отражения $\mathcal{R}$ пространства $\boldsymbol{X}$ относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2 (см. упр. 7, с. 39).

9. Найти образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в геометрическом пространстве $\boldsymbol{V}_3$ по правилу: $\mathcal{A}x = [x, a]$, где a — фиксированный ненулевой вектор.

10. Что можно сказать о матрице оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$ ранга r, если в базисе $e^1, \ldots, e^n$ пространства $\boldsymbol{X}_n$ векторы $e^{r+1}, \ldots, e^n$ принадлежат ядру этого оператора?

11. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

13. Найти ранги матриц методом окаймляющих миноров:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

14. Найти значения λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

15. Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

$$a)\ \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

16. Найти ранг матриц методом окаймляющих миноров:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных λ?

18. Вычислить ранг матрицы при помощи элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ответы, указания и решения

1. Решение. Согласно определению $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in \boldsymbol{X} : \mathcal{A}x = 0\}$. Пусть x, y — произвольные векторы из $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$, α, β — любые числа. Тогда $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y = 0$, т. е. линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит множеству $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$.

2. Решение. Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, которые в свою очередь линейно выражаются через максимальную подсистему линейно независимых столбцов матрицы A. Число столбцов в этой подсистеме равно $\operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы *базисными*. Можно сказать, что столбцы матрицы C принадлежат подпространству, натянутому на базисные столбцы матрицы A. Следовательно, число линейно независимых столбцов матрицы C не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С другой стороны, строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B. Проводя аналогичные рассуждения, заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \leqslant \operatorname{rank}(B)$.

3. Решение. Рассмотрим систему векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$. Векторы a^1, a^2 линейно независимы. Они образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как определители, составленные из компонент векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соответственно, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Следовательно, векторы a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не единственная максимальная линейно независимая подсистема. Таким же свойством обладают, например, пары векторов a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар линейно независимых векторов образует базис подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Ранг этой системы векторов равен двум.

4. Решение. Пусть $y \in \operatorname{Im}(\mathcal{A})$. Тогда $y = \mathcal{A}x$ для некоторого вектора $x \in \boldsymbol{X}_n$ т. е.

$$y = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\mathcal{A}e^i\right) \in L(\mathcal{A}e^1, \dots, \mathcal{A}e^n).$$

С другой стороны, если $y \in L(\mathcal{A}e^1, \dots, \mathcal{A}e^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\mathcal{A}e^i\right) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \mathcal{A}x,$$

где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т. е. $y \in \operatorname{Im}(\mathcal{A})$. Значит, $\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}e^1, \dots, \mathcal{A}e^n)$.

5. *a*) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 1$, базис образа — $(1, 1, 1)$; $\operatorname{def}(\mathcal{A}) = 2$.

b) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 2$, базис образа — $(2, 1, 1)$, $(-1, -2, 1)$; $\operatorname{def}(\mathcal{A}) = 1$.

c) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 3$, базис образа — $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$; дефект оператора равен нулю.

Указание. Построить векторы $\mathcal{A}i^1$, $\mathcal{A}i^2$, $\mathcal{A}i^3$. Найти среди них максимальную линейно независимую подсистему и воспользоваться результатом упр. 4. Дефект вычислить по формуле (1).

6. Решение. Каждому элементу пространства $\boldsymbol{P}_n$ оператор $\mathcal{D}$ ставит в соответствие полином из $\boldsymbol{P}_{n-1}$. Поэтому $\operatorname{Im}(\mathcal{D}) = \boldsymbol{P}_{n-1}$, и можно считать, что $\mathcal{D} : \boldsymbol{P}_n \to \boldsymbol{P}_{n-1}$. Любой полином нулевой степени (вещественное число) оператор $\mathcal{D}$ обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в результате дифференцирования не могут обратиться в функцию, тождествено равную нулю. Поэтому $\operatorname{Ker}(\mathcal{D}) = \boldsymbol{P}_0$.

7. $\operatorname{Im}(\mathcal{P}) = L_1$, $\operatorname{Ker}(\mathcal{P}) = L_2$.

8. $\operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \boldsymbol{X}$, $\operatorname{Ker}(\mathcal{R}) = \{0\}$.

9. Образ — плоскость $(x, a) = 0$, ядро — прямая $[x, a] = 0$. Указание. Для определения образа воспользуйтесь упр. 4. Постройте базис пространства $\boldsymbol{V}_3$: в качестве первого вектора выберите a, второго — любой вектор e^1, ортогональный a, третьего — вектор $e^2 = [e^1, a]$. Найдите векторы $[e^1, a]$ и $[e^2, a]$, убедитесь, что они ортогональны, и проведите через начало координат натянутую на них плоскость.

10. Последние $n - r$ столбцов матрицы A_e нулевые, в то время как первые r — линейно независимы.

11. Опишем метод *окаймляющих миноров*, который можно применять для вычисления ранга матрицы.

1. Просматриваем элементы матрицы. Если все они — нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2. Если найден элемент матрицы, отличный от нуля, то, окаймляем его, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов. Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец (и одна линейно независимая строка). Значит ранг матрицы равен единице.

3. Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем окаймления строим определители третьего порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от нуля, и т. д. Если на k-ом шаге описанного алгоритма получен определитель, не равный нулю, а все определители порядка $k + 1$, построенные его окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен k.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

составлена из столбцов a^1, a^2, a^3, a^4 (см. упр. 3, с. 61). Следовательно, ее ранг равен двум. Покажем на примере этой матрицы, как работает метод окаймляющих миноров. Заметим, что в матрице A содержится минор $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, не равный нулю. Оба минора третьего порядка (2) и (3), окаймляющие минор d, равны нулю. Следовательно, и этим методом мы получили $\operatorname{rank}(A) = 2$.

12. Решение. Иногда при вычислении ранга матрицы бывает удобно предварительно выполнить элементарные преобразования над ее строками, или столбцами (см. [4], с. 128, 134). Такие преобразования не нарушают линейной зависимости и линейной независимости систем векторов. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

Сразу искать ранг этой матрицы методом окаймляющих миноров достаточно трудоемко, поэтому сначала упростим матрицу. Выполним следующие преобразования:

1) из второй строки матрицы вычтем первую, умноженную на два;

2) из третей строки матрицы вычтем первую, умноженную на три;

3) из последней строки матрицы вычтем первую, умноженную на два. Получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее вычтем вторую строку из третей строки, и прибавим вторую строку к четвертой строке, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в получившейся матрице минор третьего порядка

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Оба окаймляющих его минора четвертого порядка равны нулю, так как четвертая строка преобразованной матрицы состоит из нулей. Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

13. $a)$ 2, $b)$ 2.

14. При $\lambda = 0$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 0$ ранг равен 3.

15. $a)\,3, \quad b)\,2.$

16. $a)\,3, \quad b)\,3.$

17. При $\lambda = 3$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

18. 3.

Глава 3

Системы линейных алгебраических уравнений

§ 1. Фундаментальная система решений однородной системы уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = 0 \tag{1}$$

с матрицей A размера $m \times n$. Будем трактовать матрицу A как линейный оператор $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Пусть x^1, x^2, $\ldots, x^p$ — некий базис в $\mathrm{Ker}(A)$. Тогда любое решение системы (1) имеет вид

$$\widetilde{x} = c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots + c_p x^p,$$

где c_1, c_2, $\ldots$, $c_p \in \mathbb{C}$. Векторы x^1, x^2, $\ldots, x^p$ принято называть *фундаментальной системой решений* системы (1), а вектор $\widetilde{x}$ — ее *общим решением.*

Опишем метод, который можно применять для построения фундаментальной системы решений. Пусть $\mathrm{rank}(A) = r$. Тогда необходимо найти любые $n - r$ линейно независимых решений системы (1).

1. Используя описанные в упражнениях 11, 12, с. 62, приемы вычисления ранга матрицы, приведем матрицу A к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы, начиная с $(r+1)$-й, есть линейные комбинации первых r строк. Система уравнений с преобразованной матрицей эквивалентна исходной. Отбросим последние $(m-r)$ уравнений преобразованной системы. Они являются следствиями первых r уравнений.

2. Перенесем слагаемые преобразованной системы, содержащие *свободные переменные* x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n, в правую часть и зададим свободным переменным следующие значения:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \ \ldots, \ x_n = 0.$$

Иными словами, положим вектор $y = (x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$, составленный из свободных переменных, равным вектору $i^1 \in \mathbb{C}^{n-r}$. Получим неоднородную крамеровскую систему уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, ..., x_r. Решим ее и образуем первый вектор

$$x^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 1, 0, \ldots, 0)$$

искомой фундаментальной системы решений.

3. Для поиска каждого из оставшихся векторов x^2, ..., x^{n-r} фундаментальной системы решений системы (1) необходимо выполнить второй шаг алгоритма, фиксируя другие значения свободных переменных: $y = i^2$, ..., $y = i^{n-r}$.

В описанном алгоритме вместо векторов i^1, i^2, ..., i^{n-r} можно использовать любой базис пространства $\mathbb{C}^{n-r}$.

Упражнения

Найти фундаментальную систему решений для следующих систем уравнений.

1.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0. \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0. \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 0, \\ 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0, \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 9x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 0. \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_3 & & & = & 0, \\ x_2 & - & x_4 & & & = & 0, \\ -x_1 & + & x_3 & - & x_5 & = & 0, \\ -x_2 & + & x_4 & - & x_6 & = & 0, \\ -x_3 & + & x_5 & & & = & 0, \\ -x_4 & + & x_6 & & & = & 0. \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 17x_3 & + & 11x_4 & = & 0, \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 6x_3 & = & 0. \end{array}$$

7. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 6x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0, \\ 9x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0, \\ 6x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 0. \end{array}$$

Ответы, указания и решения

1. Решение. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0. \end{array} \qquad (2)$$

Главный минор второго порядка матрицы системы (2) не равен нулю:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3)$$

Все окаймляющие его миноры равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому ранг матрицы системы (2) равен двум, причем последнее уравнение — следствие первых двух уравнений.

Нужно построить три ($n - r = 5 - 2 = 3$) линейно независимых решения данной системы. Используем стандартный базис пространства $\mathbb{C}^3$: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Положим в первых двух уравнениях $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, получим

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2, \\ 3x_1 & - & x_2 & = & -1. \end{array}$$

Решим эту систему и найдем $x_1 = 1/4$, $x_2 = 7/4$.

Теперь зададим $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Первые два уравнения системы (2) примут вид

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1, \\ 3x_1 & - & x_2 & = & -4, \end{array}$$

откуда $x_1 = -3/4$, $x_2 = 7/4$.

Наконец, положим $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, и из первых двух уравнений системы (2), преобразованных к виду

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & -1, \\ 3x_1 & - & x_2 & = & -3, \end{array}$$

найдем $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Таким образом, векторы

$$x^1 = (1/4, 7/4, 1, 0, 0),$$

$$x^2 = (-3/4, 7/4, 0, 1, 0),$$

$$x^3 = (-1, 0, 0, 0, 1)$$

образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (2). Вектор

$$x = c_1(1/4, 7/4, 1, 0, 0) + c_2(-3/4, 7/4, 0, 1, 0) + c_3(-1, 0, 0, 0, 1), \qquad (4)$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные числа, есть общее решением системы (2).

2. Фундаментальная система решений

$$x^1 = (8, -6, 1, 0),$$

$$x^2 = (-7, 5, 0, 1).$$

3. Фундаментальная система решений

$$x^1 = (1, 0, 0, -9/4, 3/4),$$

$$x^2 = (0, 1, 0, -3/2, 1/2),$$

$$x^3 = (0, 0, 1, -2, 1).$$

4. Система имеет только нулевое решение.

5. Фундаментальная система решений

$$x^1 = (1, 0, -5/2, 7/2),$$

$$x^2 = (0, 1, 5, -7).$$

6. Система имеет только нулевое решение.

7. Фундаментальная система решений

$$x^1 = (1, 0, 0, -9/11, -3/11),$$

$$x^2 = (0, 1, 0, 3/11, 1/11),$$

$$x^3 = (0, 0, 1, -10/11, 4/11).$$

§ 2. Общее решение системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

где A — матрица порядка $m \times n$, b — заданный вектор, x — искомый вектор.

По теореме Кронекера — Капелли система (1) имеет решение (говорят: *совместна*) тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы (A, b). Будем считать, что решение существует, ранги совпадают, и положим $r = \operatorname{rank}(A, b)$. Зафиксируем некоторое решение x^0 системы (1). Его называют *частным решением* неоднородной системы (1). *Общее решение* системы (1) имеет вид

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k\, x^k,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_p$ — произвольные числа, $x^1, x^2, \ldots, x^p$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений (см. § 1, с. 69).

Если $r = n$, то $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, и x^0 — единственное решение системы (1). Таким образом, система (1) может вовсе не иметь решений, иметь одно, или бесконечно много решений.

Опишем метод, который можно применять для построения частного решения системы линейных уравнений (1).

1. Приведем матрицу (A, b) к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A, b) начиная с $(r + 1)$-й есть линейные комбинации первых r строк. Система уравнений с преобразованной матрицей эквивалентна исходной. Отбросим последние $(m - r)$ уравнений преобразованной системы. Они являются следствиями первых r уравнений.

2. В оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n в правую часть. Придадим свободным переменным любые значения (чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из r уравнений

с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля. Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Таким образом, будет построен вектор $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$, являющийся частным решением системы (1).

Упражнения

Исследовать совместность, найти частное и общее решение следующих систем уравнений.

1. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 4, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0. \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 7, \\ 9x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 13. \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 8, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 9, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 7, \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 7x_3 & = & 12. \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 2, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & - & 3x_4 & + & 9x_5 & = & 2. \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & + & 23x_2 & + & 17x_3 & + & 44x_4 & = & 25, \\ 15x_1 & + & 35x_2 & + & 26x_3 & + & 69x_4 & = & 40, \\ 25x_1 & + & 57x_2 & + & 42x_3 & + & 108x_4 & = & 65, \\ 30x_1 & + & 69x_2 & + & 51x_3 & + & 133x_4 & = & 95. \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 5, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 11, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 6. \end{array}$$

7. $$\begin{aligned} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 &= 28,\\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 &= 43,\\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 &= 58,\\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1,\\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2,\\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2,\\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5,\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2,\\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3,\\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5,\\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8,\\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9,\\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4. \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 5,\\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4,\\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0,\\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Ответы, указания и решения

1. Исследуем совместность, найдем частное и общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4,\\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В ходе решения задачи 1, с. 70, мы выяснили, что $\operatorname{rank}(A) = 2$. Вычислим $\operatorname{rank}(A, b)$. Заметим, что минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор Δ_2 (см. (3), с. 71) в расширенной матрице, равен нулю. Поэтому $\operatorname{rank}(A, b) = 2$. Следовательно, система имеет бесконечно много решений, причем последнее уравнение — следствие первых двух уравнений системы.

Таким образом, чтобы найти частное решение исходной системы уравнений, надо решить систему из двух ее первых уравнений. Перенесем в них слагаемые, содержащие переменные x_3, x_4, x_5, в правую часть. Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ и получим $x_1 = 5/4$, $x_2 = -1/4$.

Итак, вектор $x^0 = (5/4, -1/4, 0, 0, 0)$ — частное решение системы уравнений (2), общее решение имеет вид

$$x = (5/4, -1/4, 0, 0, 0) +$$

$$+ c_1(1/4, 7/4, 1, 0, 0) + c_2(-3/4, 7/4, 0, 1, 0) + c_3(-1, 0, 0, 0, 1).$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные числа (см. задачу на с. 70).

2. Частное решение $x^0 = (0, 0, 1, 1)$. Общее решение

$$x = c_1(1, 0, -3, 0) + c_2(0, 1, -4, 0) + (0, 0, 1, 1).$$

3. Система имеет единственное решение $x = (3, 2, 1)$.

4. Система не имеет решений (говорят: *несовместна*).

5. Система несовместна.

6. Частное решение $x^0 = (0, -15/8, -3/4, -5, 0)$, общее —

$$x = c_1(1, -1/2, 0, 0, 0) + c_2(0, 1/4, 3/2, 3, 1) +$$

$$+ (0, -15/8, -3/4, -5, 0).$$

7. Частное решение $x^0 = (-1/2, 0, 0, 1, 0)$. Общее решение

$$x = c_1(-7/12, 1, 0, 0, 0) + c_2(-5/4, 0, 1, 0, 0) + c_3(-7/8, 0, 0, -1/2, 1) +$$

$$+(-1/2, 0, 0, 1, 0).$$

8. Частное решение $x^0 = (0, 0, -11, 8)$. Общее решение

$$x = c_1(1, 0, 22, -16) + c_2(0, 1, -33, 24) + (0, 0, -11, 8).$$

9. Система несовместна.

10. Частное решение $x^0 = (0, 0, 6, -7)$. Общее решение

$$x = c_1(1, 0, -15, 18) + c_2(0, 1, 10, -12) + (0, 0, 6, -7).$$

11. Частное решение $x^0 = (20/9, -5/3, -1/9, 0, 0)$. Общее решение

$$x = c_1(1, -5/2, 0, 1, 0) + c_2(-53/18, 5/6, 2/9, 0, 1)+$$

$$+(20/9, -5/3, -1/9, 0, 0).$$

12. Частное решение $x^0 = (0, 0, 0, -1, 2)$, общее решение

$$x = c_1(1, 0, 4/3, -14/3, 4/3) + c_2(0, 1, 2/3, -7/3, 2/3) + (0, 0, 0, -1, 2);$$

Глава 4

Собственные числа и собственные векторы

§ 1. Операторы в комплексном пространстве

Пусть $\boldsymbol{X}$ — линейное пространство, $\mathcal{A} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ — линейный оператор. Подпространство $L \subset \boldsymbol{X}$ называется *инвариантным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, если оператор $\mathcal{A}$ отображает всякий вектор x из L в вектор, также принадлежащий подпространству L.

Тривиальные подпространства, т. е. $L = \{0\}$ и $L = \boldsymbol{X}$, являются инвариантными подпространствами любого оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$.

Говорят, что вектор $x \in \boldsymbol{X}$ — *собственный вектор оператора* $\mathcal{A}$, если $x \neq 0$ и существует число λ такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Число λ при этом называется *собственным числом оператора* $\mathcal{A}$. Говорят, что собственный вектор x соответствует (отвечает) собственному числу λ. Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют также *собственной парой оператора* $\mathcal{A}$.

Пусть x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, т. е. одномерное подпространство пространства $\boldsymbol{X}$, натянутое на собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Пусть λ — собственное число оператора $\mathcal{A}$. Ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ будем обозначать через L_λ и называть *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$. Всякий ненулевой вектор из L_λ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ.

Всякий оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пространстве $\boldsymbol{X}_n$, имеет собственные векторы. Фиксируем в пространстве $\boldsymbol{X}_n$ некоторый базис $\mathcal{E}_n$. Пусть A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\det(A_e - \lambda I)$ — полином порядка n относительно λ. Поэтому уравнение (1) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Всякий корень λ_k уравнения (1) — собственное число оператора $\mathcal{A}$, которому отвечает собственный вектор $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$, где ξ^k — нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0. \tag{2}$$

Полином $\det(A - \lambda I)$ называется *характеристическим полиномом матрицы* A. Корни характеристического полинома называются *характеристическими (собственными) числами матрицы* A. Для любого характеристического числа λ существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, не равный нулю, и такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x называется *собственным вектором матрицы* A, соответствующим характеристическому числу λ этой матрицы.

Характеристические полиномы, а следовательно, и *спектры* (множества всех характеристических чисел) подобных матриц совпадают. Матрицы оператора в различных базисах подобны, поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\boldsymbol{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора.*

Характеристические числа матрицы оператора называются *характеристическими числами этого оператора.* Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

Для оператора, действующего в комплексном пространстве $\boldsymbol{X}_n$, понятия характеристического и собственного числа, фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

Кратность числа λ как корня характеристического полинома оператора $\mathcal{A}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ.

Упражнения

1. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в комплексном пространстве $\boldsymbol{X}_n$; $L \neq \{0\}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Показать, что у оператора $\mathcal{A}$ есть собственный вектор, принадлежащий L.

2. Какой вид имеет матрица линейного оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$, если первые k векторов выбранного базиса пространства $\boldsymbol{X}_n$ являются собственными векторами $\mathcal{A}$?

3. Доказать, что ядро линейного оператора совпадает с собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному числу.

4. Пусть $\boldsymbol{X}_n$ — конечномерное линейное пространство, A_e — матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathcal{E}_n$, а λ — собственное число этого оператора. Чему равна размерность собственного подпространства L_λ, если ранг матрицы $A_e - \lambda I$ равен r?

5. Найти все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найти все собственные числа и собственные векторы следующих матриц:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $e)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Найти все собственные числа и собственные векторы следующих матриц:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $e)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{R} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ отражения относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в комплексном пространстве $\boldsymbol{X}_n$; $L \neq \{0\}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Обозначим $\mathcal{A}_L : L \to L$ — сужение оператора $\mathcal{A}$ на L, т. е. оператор, действующий по правилу $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x$ для $x \in L$. Всякий оператор, действующий в конечномерном комплексном пространстве, имеет собственные векторы. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_L$ имеет собственный вектор x, принадлежащий L: $\mathcal{A}_L x = \lambda x$, но тогда $\mathcal{A}x = \lambda x$, где $x \in L$. Что и требовалось доказать.

2. $A = \begin{pmatrix} \Lambda & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, где Λ — диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

3. Решение. Собственное подпространство L_λ определено как $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda I)$, следовательно, $L_0 = \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$.

4. Решение. По определению $L_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$, т. е. это множество векторов $x \in \boldsymbol{X}_n$, удовлетворяющих уравнению

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathcal{E}^{-1}$ оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$. Это линейный обратимый оператор, причем $\mathcal{A} = \mathcal{E}A_e\mathcal{E}^{-1}$. Умножим обе части уравнения (3) на $\mathcal{E}^{-1}$, придем к эквивалентному уравнению

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0, \tag{4}$$

где

$$\xi = \mathcal{E}^{-1}x. \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) эквивалентны в том смысле, что их решения взаимно однозначно связаны равенством (5). Иными словами, пространства $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$ и $\mathrm{Ker}(A_e - \lambda I)$ изоморфны, и их размерности совпадают. Фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (4) состоит из $n - r$ векторов. Следовательно, $\dim(L_\lambda) = n - r$.

5. Решение. Характеристический полином имеет вид

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель методом *выделения линейных множителей*:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{прибавим к 1-му столбцу} \\ \text{2-й столбец, умноженный} \\ \text{на } (3-\lambda) \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2-3 & -3-\lambda & 2 \\ 6\lambda-10 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2-3 & 2 \\ 6\lambda-10 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{прибавим к 1-му столбцу} \\ \text{2-й столбец} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} \lambda^2-1 & 2 \\ 5\lambda-5 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{вынесем из 1-го столбца} \\ \text{общий множитель} \end{array} \right\} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\left(-\lambda^2+4\lambda+5-10\right) = (\lambda-1)\left(-\lambda^2+4\lambda-5\right).$$

Получили характеристическое уравнение

$$(\lambda-1)\left(-\lambda^2+4\lambda-5\right)=0.$$

Корни этого уравнения есть собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2+i, \quad \lambda_3=2-i.$$

Компоненты собственного вектора, отвечающего $\lambda_1=1$, есть решение однородной системы уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 0, \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 8x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0. \end{array} \tag{6}$$

Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг матрицы системы (6) равен двум и, следовательно, эта система может иметь лишь одно линейно независимое решение. Положим $x_3=1$ и найдем x_1, x_2, решая систему уравнений (6). Получим $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Таким образом, вектор $(1, 2, 1)$ — решение системы уравнений (6). Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 1$, есть множество векторов вида $c(1, 2, 1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Компоненты собственного вектора, отвечающего $\lambda_2 = 2 + i$, есть решение однородной системы уравнений

$$\begin{array}{ccccccc} (1+i)x_1 & - & x_2 & = & 0, & & \\ 6x_1 & + & (-5-i)x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 8x_1 & - & 6x_2 & + & (3-i)x_3 & = & 0. \end{array} \tag{7}$$

Определитель $\begin{vmatrix} (1-i) & -1 \\ 6 & -5-i \end{vmatrix} = 4i \neq 0$. Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений (7) при $x_3 = 1$. Получим $x_1 = i/2$, $x_2 = (1+i)/2$. Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_2 = 2 + i$, есть множество векторов вида $c(i, i + 1, 2)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_3 = 2 - i$, есть множество векторов вида $c(-i, 1 - i, 2)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

6. *a*) Единственное собственное число $\lambda = 1$ (его алгебраическая кратность равна 2). Этому собственному числу отвечают собственные векторы вида $c(1, -1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

b) Собственные числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 0$, имеют вид $c(1, -1)$, отвечающие $\lambda_2 = 2$, имеют вид $c(1, 1)$, где c — произвольное комплексное число, отличное от нуля.

c) Единственное собственное число $\lambda = 0$ (его алгебраическая кратность равна 2), ему отвечают собственные векторы вида $c(1, -1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

d) Собственные числа: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. Собственные векторы, отвечающие числу $\lambda_1 = -2 + i$ имеют вид $c(1, i)$, отвечающие числу $\lambda_2 =$

$-2-i$, имеют вид $c(1,-i)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

e) Собственные числа: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = i$, имеют вид $c(1, 1+i)$, отвечающие $\lambda_2 = -i$, имеют вид $c(1, 1-i)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

f) Собственные числа: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 2i$, имеют вид $c(1, i)$, отвечающие $\lambda_2 = -2i$, имеют вид $c(i, 1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

7. a) Единственное собственное число $\lambda = -1$ имеет алгебраическую кратность, равную трем. Ему отвечают собственные векторы вида $c(1, 1, -1)$, где c — любое комплексное число, не равное нулю.

b) Единственное собственное число $\lambda = 2$ имеет алгебраическую кратность, равную трем. Ему отвечают собственные векторы вида $c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 0, 1)$, где c_1 и c_2 произвольные комплексные числа не обращающиеся в нуль одновременно.

c) Два собственных числа: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ (его алгебраическая кратность равна двум). Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 1$, имеют вид $c(1, 1, 1)$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_2 = 0$, имеют вид $c(1, 2, 3)$. Здесь c — любое комплексное число, не равное нулю.

d) Одно собственное число: $\lambda = 1$. Его алгебраическая кратность равна трем. Ему отвечают собственные векторы вида $c(3, 1, 1)$, где c — любое комплексное число, не равное нулю.

e) Два собственных числа: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$ (его алгебраическая кратность равна двум). Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 3$, имеют вид $c(1, 2, 2)$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_2 = -1$, имеют вид $c(1, 2, 1)$. Здесь c — любое комплексное число, не равное нулю.

f) Собственные числа: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 5$ имеют вид $c(1, -1, 1)$, отвечающие $\lambda_1 = 3$, — вид $c(1, 1, -1)$, отвечающие $\lambda_1 = 1$, — вид $c(1, 1, 1)$. Здесь c — любое комплексное число, не равное нулю.

8. Характеристический полином $f(\lambda) = (-1)^{n-k}(1+\lambda)^{n-k}(1-\lambda)^k$, где $k = \dim(L_1)$. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda = 1$, является любой ненулевой вектор из L_1. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda = -1$, является любой ненулевой вектор из L_2. Указание. Использовать матрицу оператора $\mathcal{R}$, построенную в упр. 11, с. 51.

§ 2. Операторы в вещественном пространстве

Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в вещественном пространстве $\boldsymbol{X}_n$. Матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе $\mathcal{E}_n$ вещественна. Уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0, \tag{1}$$

т. е. *характеристическое уравнение* матрицы A_e, — алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами. Оно, вообще говоря, имеет как вещественные, так и комплексные корни.

Если λ_k — вещественный корень уравнения (1), то система уравнений

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0 \tag{2}$$

имеет нетривиальное вещественное решение ξ^k, и вектор $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. Таким образом, все вещественные характеристические числа матрицы A_e — собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Если характеристическое число λ_k комплексное, то система уравнений (2) не имеет нетривиальных вещественных решений, только — комплексные. Поэтому, ни одно комплексное характеристическое число матрицы A_e не может быть собственным числом оператора $\mathcal{A}$.

Если все корни уравнения (1) — комплексные числа, то оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных векторов. Таким образом, линейный оператор, действующий в вещественном пространстве, может не иметь одномерных инвариантных подпространств. Однако, каждому комплексному характеристическому числу матрицы A_e соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$.

Упражнения

1. Пусть $\boldsymbol{X}_n$ — вещественное линейное пространство. Показать, что в любом подпространстве $L_m \subset \boldsymbol{X}_n$, размерности $m \geqslant 2$, инвариантном относительно оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$, оператор $\mathcal{A}$ имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.

2. Пусть $\boldsymbol{X}_2$ — двумерное вещественное пространство, в этом пространстве фиксирован базис e^1, e^2, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

3. Пусть $\boldsymbol{X}_3$ — трехмерное вещественное пространство, в этом пространстве фиксирован базис e^1, e^2, e^3, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

4. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве $\mathbf{V_3}$ геометрических векторов по правилу $\mathcal{A}x = [x, a]$, где a — заданный ненулевой вектор.

5. Пусть $\mathbf{P}_n$ — вещественное линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор $\mathcal{A}$, полагая

$$\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + bp_n$$

для любого $p_n \in \mathbf{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

6. Пусть $\mathbf{T}$ — линейное пространство функций вида

$$t(x) = c + a\cos x + b\sin x,$$

где a, b, c — произвольные вещественные числа, x может принимать любые вещественные значения. Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора дифференцирования: $\mathcal{D}f_n(x) = f_n'(x)$.

7. Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ переводит векторы

$$(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1)$$

соответственно в векторы

$$(-1,0,1,-1), \quad (3,1,-2,3), \quad (-3,-1,2,-3), \quad (-2,-1,1,-2).$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ переводит векторы

$$(1,0,0,0), \quad (1,1,0,0), \quad (1,1,1,0), \quad (1,1,1,1)$$

соответственно в векторы

$$(0,2,1,0), \quad (1,2,1,-1), \quad (-1,2,1,1), \quad (-1,4,2,1).$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

9. Действие оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\cdot 2} \to \mathbb{R}^{2\cdot 2}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

10. В пространстве $\mathbf{P_3}$ многочленов степени не выше трех с вещественными коэффициентами линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит многочлены 1, t, t^2, t^3 соответственно в многочлены

$$1 - t + 6t^2 - 6t^3, \quad 1 - t + t^2 - t^3, \quad 1 - t - 4t^2 + 4t^3, \quad 1 - t - t^2 + t^3.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

11. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве $\mathbf{P_3}$ многочленов степени не выше трех с вещественными коэффициентами, по правилу $(\mathcal{A}f)(t) = 2f'''(t) - 2f''(t) - f'(t) + f(t)$.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Обозначим $\mathcal{A}_L : L_m \to L_m$ — сужение оператора $\mathcal{A}$ на L_m, т. е. оператор, действующий по правилу $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x$ для $x \in L_m$. Соответствующее характеристическое уравнение — алгебраическое уравнение порядка $m \geqslant 2$ с вещественными коэффициентами. Оно имеет m корней. Пусть λ — вещественный корень, тогда существует собственный вектор x, отвечающий λ. Подпространство, натянутое на x будет одномерным инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}_L$. Если λ — комплексный корень, то ему соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}_L$. Ясно, что указанные подпространства будут инвариантными подпространствами и для оператора $\mathcal{A}$.

2. Решение. Характеристический полином имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1.$$

Рассмотрим три случая: $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$; $\varphi \neq 0,\ \pi$.

Пусть $\varphi = 0$. Тогда $\det(A_e - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, и из характеристического уравнения $(\lambda - 1)^2 = 0$ находим характеристические числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет собственное число $\lambda = 1$. Его алгебраическая кратность равна двум. Матрица A_e при $\varphi = 0$ становится единичной, следовательно, $\mathcal{A} = I$, где I — тождественный оператор в пространстве $\boldsymbol{X}_n$. Любой ненулевой вектор x этого пространства есть собственный вектор оператора I, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$:

$$Ix = 1\,x.$$

При $\varphi = \pi$ характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda + 1)^2 = 0$, его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Оператор $\mathcal{A}$ в этом случае равен $-I$, и любой ненулевой вектор x пространства $\boldsymbol{X}_n$ — собственный вектор этого оператора, отвечающий собственному $\lambda = -1$:

$$-Ix = (-1)x.$$

Алгебраическая кратность этого собственного числа равна двум.

Пусть угол φ не равен ни 0, ни π. Тогда дискриминант характеристического уравнения — отрицательное число:

$$D = 4\cos^2\varphi - 4 = -4\sin^2\varphi < 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \varphi \neq 0,\ \pi.$$

Характеристическое уравнение не имеет вещественных корней. У оператора $\mathcal{A}$ нет собственных чисел и собственных векторов.

3. Решение. Характеристический полином имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1\right).$$

При любом $\varphi \in [0, 2\pi)$ у оператора $\mathcal{A}$ есть собственное число $\lambda = 1$.

Если $\varphi = 0$, то $A_e = I$, $\mathcal{A} = I$, и любой ненулевой вектор пространства $\boldsymbol{X}_n$ является собственным вектором этого оператора, отвечающим собственному числу $\lambda = 1$.

Пусть $\varphi \in (0, 2\pi)$. Координаты собственного вектора x, отвечающего собственному числу $\lambda = 1$, удовлетворяют системе

$$\begin{array}{rcccccl} 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & (\cos\varphi - 1)\,x_2 & - & \sin\varphi\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & \sin\varphi\,x_2 & + & (\cos\varphi - 1)\,x_3 & = & 0. \end{array} \tag{3}$$

Вычислим минор второго порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы A этой системы:

$$\Delta = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi).$$

Ясно, что $\Delta \neq 0$ при $\varphi \in (0, 2\pi)$. Следовательно, ранг матрицы A равен двум, фундаментальная система решений системы (3) состоит из одного вектора $(1, 0, 0)$. В этом случае любой собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$, имеет вид $x = \alpha e^1$, где α — произвольное ненулевое вещественное число.

В предыдущем упражнении было установлено, что уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$$

при $\varphi = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (этот случай мы уже рассмотрели), а при $\varphi = \pi$ — корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Других корней у этого уравнения нет.

Найдем собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda = -1$. Их координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0. \end{array}$$

Фундаментальная система решений этой системы уравнений состоит из двух векторов $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$. Следовательно, любой собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу $\lambda = -1$ при $\varphi = \pi$ имеет вид $x = \alpha e^2 + \beta e^3$, где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

4. Характеристический полином $f(\lambda) = -\lambda^3 - |a|^2\lambda$. Собственное число $\lambda = 0$, соответствующие собственные векторы $x = \alpha a$, где α — произвольное вещественное число, не равное нулю. Указание. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в декартовом базисе известна (см. упр. 14, с. 51).

5. Характеристический полином $f(\lambda) = (b-\lambda)^{n+1}$. Собственное число $\lambda = b$, отвечающим ему собственным вектором является любой ненулевой многочлен нулевой степени. Указание. Использовать матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ (см. упр. 1, с. 49).

6. Характеристический полином $f(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+1)$. Собственное число $\lambda = 0$, отвечающим ему собственным вектором является произвольное вещественное число, отличное от нуля. Указание. Использовать матрицу оператора $\mathcal{D}$ в базисе $\{\sin x, 1, \cos x\}$ (см. упр. 4, с. 50).

7. Собственное число $\lambda = 0$, отвечающие ему собственные векторы имеют вид $\alpha(1,1,0,1)+\beta(0,1,1,0)$, где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

8. Собственное число $\lambda = 0$, отвечающие ему собственные векторы имеют вид $\alpha(1,0,0,-1)+\beta(0,-1,2,0)$, где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

9. Собственное число $\lambda = 2$. Ему отвечают собственные векторы вида

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

10. Собственных чисел два: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$. Собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda_1 = 0$, имеют вид

$$\alpha(1 - 2t + t^2) + \beta(2 - 7t + 5t^3),$$

где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль. Собственному числу $\lambda_2 = -3$ отвечают собственные векторы вида $\alpha(t^2 - t^3)$, где α — любое не равное нулю вещественное число.

11. Собственное число $\lambda = 1$, отвечающий ему собственный вектор — произвольный ненулевой полином нулевой степени.

Глава 5

Некоторые классы операторов

§ 1. Операторы простой структуры. Самосопряженные операторы

Говорят, что оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ есть *оператор простой структуры*, если можно указать базис пространства $\boldsymbol{X}_n$, все векторы которого — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Аналогично определяется *матрица простой структуры*.

Размерность собственного подпространства оператора $\mathcal{A}$, отвечающего собственному числу λ этого оператора, называется *геометрической кратностью* собственного числа λ. Напомним, что кратность числа λ как корня характеристического полинома оператора $\mathcal{A}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ.

Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном пространстве $\boldsymbol{X}_n$, геометрическая кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.

Пусть $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства, $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Оператор $\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n$ называется *сопряженным* к оператору $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) \text{ для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m. \tag{1}$$

Конечно, в левой части здесь имеется в виду скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Y}_m$, а в правой части — в пространстве $\mathbf{X}_n$.

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *самосопряженным* (*эрмитовым*), если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, иными словами, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \text{ для любых } x, y \in \mathbf{X}_n.$$

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *косоэрмитовым*, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A}x, y) = -(x, \mathcal{A}y) \text{ для любых } x, y \in \mathbf{X}_n.$$

Упражнения

1. Докажите следующее утверждение. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного числа оператора $\mathcal{A}$ совпадала с его алгебраической кратностью.

2. Докажите следующее утверждение. Для того, чтобы матрицы простой структуры были подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические полиномы совпадали.

3. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы простой структуры, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует обратимый оператор $\mathcal{D}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}$.

4. Докажите, что каждому оператору соответствует один и только один сопряженный оператор.

5. Докажите, что если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$ — линейные операторы, то $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*$ для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

6. Покажите, что для любых операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, для которых определен оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$, справедливо равенство

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* \tag{2}$$

7. Докажите, что если линейный оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*$ также обратим, причем $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$.

8. Покажите, что если оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ вещественно для любого $x \in \boldsymbol{X}_n$; если оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ — мнимое число для любого $x \in \boldsymbol{X}_n$.

9. Докажите, что если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе эрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе косоэрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.

10. Пусть $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства $\boldsymbol{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$. Пусть на пространстве $\mathbb{C}^n$ введено стандартное скалярное произведение. Показать, что $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{-1}$, т. е.

$$(\mathcal{E}\xi, y) = (\xi, \mathcal{E}^{-1}y) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n,\ y \in \boldsymbol{X}_n.$$

11. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Показать, что если трактовать ее как оператор в $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, то A^* (эрмитово сопряженная матрица) порождает сопряженный оператор в $\mathbb{C}^n$. Аналогичное утверждение справедливо и для прямоугольной матрицы.

12. Пусть $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства $\boldsymbol{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — линейный оператор, A_e — матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Известно, что $\mathcal{A} = \mathcal{E}A_e\mathcal{E}^{-1}$. Показать, что $\mathcal{A}^* = \mathcal{E}A_e^*\mathcal{E}^{-1}$.

Ответы, указания и решения

1. Доказательство. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — оператор простой структуры, т. е. можно указать базис пространства $\boldsymbol{X}_n$, все векторы которого — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Lambda_m \end{pmatrix},$$

где Λ_i — диагональная матрица с числами λ_i на диагонали, порядок которой равен геометрической кратности числа λ_i. Следовательно, характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdots (\lambda_m - \lambda)^{k_m},$$

где k_i — геометрическая кратность числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ясно, что k_i совпадает с кратностью λ_i как корня уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

Пусть каждому собственному числу отвечает столько линейно независимых собственных векторов, какова его алгебраическая кратность. Собственные векторы, отвечающие попарно различным собственным числам линейно независимы. Следовательно, система всех n собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ линейно независима и является базисом пространства $\boldsymbol{X}_n$. Утверждение доказано.

2. Доказательство. Напомним, что две квадратные матрицы A и B называются *подобными*, если они связаны соотношением

$$A = D^{-1}BD,$$

где D — невырожденная матрица. Как известно, характеристические полиномы подобных матриц совпадают. Пусть теперь A и B — две матрицы простой структуры, характеристические полиномы, а следовательно, и спектры которых совпадают. Обозначим через Λ диагональную матрицу, составленную из характеристических чисел этих матриц. По определению матрицы простой структуры можно указать два базиса пространства $\mathbb{C}^n$, состоящие из собственных векторов матриц A и B. Обозначим через E и Q, соответственно, — матрицы, столбцами которых являются векторы этих базисов. Тогда (при соответствующей нумерации собственных векторов)

$$AE = \Lambda E, \quad BQ = \Lambda Q.$$

Столбцы матриц E и Q линейно независимы, следовательно эти матрицы невырождены, и очевидные преобразования двух последних равенств приводят к равенству

$$A = EQ^{-1}BQE^{-1}.$$

Таким образом, матрица A получается из матрицы B при помощи преобразования подобия с матрицей $D = QE^{-1}$. Утверждение доказано.

3. Доказательство. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ и $\mathcal{B} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — операторы простой структуры, характеристические полиномы, а следовательно, и спектры которых совпадают. Обозначим через Λ диагональную матрицу, составленную из характеристических чисел этих операторов, а через $\mathcal{E}^{-1} : \boldsymbol{X}_n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathcal{Q}^{-1} : \boldsymbol{X}_n \to \mathbb{C}^n$, соответственно, операторы разложения по базисам, составленным из собственных векторов операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Оба эти оператора в указанных базисах (при соответствующей нумерации собственных векторов) имеют одну и ту же матрицу Λ, и справедливы равенства:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E} = \Lambda, \quad \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Q} = \Lambda.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{Q}\mathcal{E}^{-1}$. Утверждение доказано.

4. Доказательство. Для любого оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_m$ существует сопряженный оператор $\mathcal{A}^* : \boldsymbol{Y}_m \to \boldsymbol{X}_n$. Предположим, что существует еще один оператор $\widetilde{\mathcal{A}}^* : \boldsymbol{Y}_m \to \boldsymbol{X}_n$ такой, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \widetilde{\mathcal{A}}^* y) \text{ для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m. \tag{3}$$

Вычитая равенства (1), (3) почленно получим, что

$$(x, \widetilde{\mathcal{A}}^* y - \mathcal{A}^* y) = 0 \text{ для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m.$$

В частности, в последнем равенстве можно положить $x = \widetilde{\mathcal{A}}^* y - \mathcal{A}^* y$, и тогда $\left(\widetilde{\mathcal{A}}^* y - \mathcal{A}^* y, \widetilde{\mathcal{A}}^* y - \mathcal{A}^* y\right) = 0$, т. е. $\widetilde{\mathcal{A}}^* y - \mathcal{A}^* y = 0$ для любого вектора $y \in \mathbf{Y}_m$, а это и означает, что $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

5. Доказательство. По определению сопряженного оператора

$$((\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x, y) = (x, (\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* y) \text{ для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m.$$

С другой стороны,

$$((\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x, y) = \alpha(\mathcal{A}x, y) + \beta(\mathcal{B}x, y) =$$

$$= \alpha(x, \mathcal{A}^* y) + \beta(x, \mathcal{B}^* y) = (x, (\overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*)y).$$

Сравнивая два последних равенства, и используя произвольность вектора $x \in \mathbf{X}_n$, получаем $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* y = (\overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*)y$ для любого вектора $y \in \mathbf{Y}_m$, а это и означает, что $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*$.

6. Решение. По определению сопряженного оператора

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y) \text{ для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{AB}x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y).$$

Сравнивая два последних равенства, и используя произвольность векторов $x \in \mathbf{X}_n$ и $y \in \mathbf{Y}_m$, получаем $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

7. Решение. Используем предыдущее упражнение. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, имеем $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = I^* = I$. Следовательно, $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$.

8. Решение. Пусть x — произвольный вектор из $\boldsymbol{X}_n$, оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. Тогда

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}.$$

Следовательно, $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$. Если оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов, то

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x) = -\overline{(\mathcal{A}x, x)},$$

т. е. $\mathrm{Re}(\mathcal{A}x, x) = 0$.

9. Доказательство. Обозначим, как обычно, через A_e матрицу оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ в базисе $\mathcal{E}_n$. Если базис ортонормирован, то матрица A_e имеет вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1, e^1) & (\mathcal{A}e^2, e^1) & \dots & (\mathcal{A}e^n, e^1) \\ (\mathcal{A}e^1, e^2) & (\mathcal{A}e^2, e^2) & \dots & (\mathcal{A}e^n, e^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}e^1, e^n) & (\mathcal{A}e^2, e^n) & \dots & (\mathcal{A}e^n, e^n) \end{pmatrix}.$$

Пусть x и y — произвольные векторы пространства $\boldsymbol{X}_n$. Разложим их по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l.$$

Пусть матрица A_e эрмитова. Тогда

$$(\mathcal{A}x, y) = \left(\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\eta}_l (\mathcal{A}e^k, e^l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\eta}_l \overline{(\mathcal{A}e^l, e^k)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\eta}_l (e^k, \mathcal{A}e^l) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \mathcal{A} \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l \right) = (x, \mathcal{A}y),$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. Второе утверждение доказывается аналогично.

10. Решение. Пусть y — произвольный вектор пространства $\boldsymbol{X}_n$. Разложим его по ортонормированному базису $\mathcal{E}_n$:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (y, e^k) e^k = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e^k, \quad \eta = \mathcal{E}^{-1} y.$$

Для любого $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\mathcal{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k,$$

следовательно,

$$(\mathcal{E}\xi, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, y \right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k (e^k, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k = (\xi, \eta) = (\xi, \mathcal{E}^{-1} y).$$

11. Решение. Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Обозначим через a^*_{ki} элементы матрицы $A^* = \bar{A}^T$. Тогда для произвольных векторов x, $y \in \mathbb{C}^n$ справедлива цепочка равенств:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) \overline{y}_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \overline{y}_i \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ik}} y_i \right)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} a^*_{ki} y_i \right)} = (x, A^* y).$$

Для прямоугольной матрицы рассуждения аналогичны.

12. Решение. Используем два предыдущих упражнения. Из равенств

$$I = (\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1})^* = (\mathcal{E}^{-1})^* \mathcal{E}^* = (\mathcal{E}^{-1})^* \mathcal{E}^{-1}$$

заключаем, что

$$(\mathcal{E}^{-1})^* = \mathcal{E}. \tag{4}$$

Далее, имеем

$$\mathcal{A}^* = \left(\mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} \right)^* = (\mathcal{E}^{-1})^* A_e^* \mathcal{E}^* = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1}.$$

Из полученного равенства также непосредственно следует утверждение упражнения 9.

§ 2. Положительно определенные операторы. Унитарные операторы

Самосопряженный оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ называется *неотрицательным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X}_n.$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ называется *положительно определенным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \boldsymbol{X}_n.$$

Эрмитова матрица A порядка n называется *неотрицательной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \overline{x}_i \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Эрмитова матрица A порядка n называется *положительно определенной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \overline{x}_i > 0 \quad \forall\, x \ \neq 0 \text{ из } \mathbb{C}^n.$$

В двух последних определениях скобками обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *унитарным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

Упражнения

1. Покажите, что если $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — положительно определенный оператор, то равенство $(x, y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, y)$ определяет скалярное произведение на пространстве $\boldsymbol{X}_n$.

2. Покажите, что для любого оператора $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен и неотрицателен. Если оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ положительно определен.

3. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом пространстве $\boldsymbol{X}_n$. Докажите, что если оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ положительно определен, то оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

4. Покажите, что матрица положительно определенного оператора в любом ортонормированном базисе положительно определена.

5. Покажите, что все элементы главной диагонали положительно определенной матрицы положительны.

6. Покажите, что матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна.

7. Покажите, что линейная независимость системы векторов эквивалентна положительной определенности матрицы Грама этой системы векторов.

8. Покажите, что для того чтобы оператор был унитарным необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была унитарна.

9. Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

10. Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

11. Покажите, что если для любого вектора $x \in \boldsymbol{X}_n$ выполнено равенство $|\mathcal{A}x| = |x|$, то $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — унитарный оператор.

12. Пусть оператор $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ переводит ортонормированный базис $\mathcal{E}_n \subset \boldsymbol{X}_n$ в ортонормированный базис $\mathcal{Q}_n \subset \boldsymbol{X}_n$, т. е.

$$\mathcal{A}e^k = q^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажите, что $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

Ответы, указания и решения

1. Решение. Проверим, что аксиомы скалярного произведения выполнены. По определению положительно определенного оператора для любого не равного нулю вектора $x \in \boldsymbol{X}_n$ имеем

$$(x, x)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, x) > 0.$$

Из этого строгого неравенства также вытекает, что из $(\mathcal{A}x, x) = 0$ следует, что $x = 0$. Так как в противном случае $(\mathcal{A}x, x) > 0$. Ясно, что из $x = 0$ следует $(\mathcal{A}x, x) = 0$. Таким образом первая аксиома скалярного произведения имеет место:

$$(x, x)_{\mathcal{A}} \geqslant 0 \ \forall\, x \in \boldsymbol{X}_n, \text{ равенства } (x, x)_{\mathcal{A}} = 0 \text{ и } x = 0 \text{ эквивалентны.}$$

При проверке второй аксиомы, используем то, что оператор $\mathcal{A}$ — самосопряженный:

$$(x, y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{A}y) = \overline{(\mathcal{A}y, x)} = \overline{(y, x)}_{\mathcal{A}} \ \forall\, x, y \in \boldsymbol{X}_n.$$

Третья аксиома вытекает из линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$(\alpha x + \beta y, z)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}(\alpha x + \beta y), z) = \alpha(\mathcal{A}x, z) + \beta(\mathcal{A}y, z) =$$

$$= \alpha(x, z)_{\mathcal{A}} + \beta(y, z)_{\mathcal{A}} \ \forall\, x, y \in \boldsymbol{X}_n, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. Решение. Из $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ и равенства (2), с. 96, заключаем, что оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен:

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Кроме того,

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x). \tag{1}$$

По первой аксиоме скалярного произведения

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X}_n \tag{2}$$

и $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}x = 0$. Из (1) и (2) следует, что оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ неотрицателен. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то $\mathcal{A}x = 0$ только при $x = 0$, и

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \boldsymbol{X}_n. \tag{3}$$

Из (1) и (3) вытекает, что в этом случае оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ положительно определен.

3. Доказательство. Любой линейный оператор представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2,$$

где i — мнимая единица,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$$

суть самосопряженные операторы. Пусть λ — некоторое собственное число оператора $\mathcal{A}$, отвечающее нормированному собственному вектору x. Тогда

$$\lambda = \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = (\mathcal{H}_1 x, x) + i(\mathcal{H}_2 x, x),$$

причем оба скалярных произведения в правой части последнего равенства — вещественные числа. По условию упражнения вещественная часть произвольного собственного числа λ оператора $\mathcal{A}$ положительна. Таким образом, все собственные числа оператора $\mathcal{A}$ отличны от нуля. Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что определитель оператора равен их произведению.

4. Решение. Пусть $\boldsymbol{X}_n$ — евклидово пространство, $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по этому базису, $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — линейный оператор, A_e — эрмитова матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда $A_e = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}$. Для произвольного ненулевого элемента ξ пространства $\mathbb{C}^n$ имеем (см. (4), с. 101):

$$(A_e \xi, \xi) = (\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi, \xi) = (\mathcal{A}(\mathcal{E}\xi), \mathcal{E}\xi) = (\mathcal{A}x, x) > 0,$$

т. к. оператор $\mathcal{A}$ положительно определен, а $x = \mathcal{E}\xi \neq 0$.

5. Решение. По определению положительно определенной матрицы A для любого ненулевого элемента x пространства $\mathbb{C}^n$ справедливо неравенство $(Ax, x) > 0$. Положим $x = i^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где, как обычно, через i^k обозначен k-тый элемент естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$. Получим $(Ai^k, i^k) = a_{kk} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

6. Решение. Обозначим $g_{ik} = (a^k, a^i)$ элементы матрицы Грама G системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$. Тогда для произвольного вектора $x \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$(Gx, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ik} x_k \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a^k, a^i) x_k \overline{x}_i =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a^k, \sum_{i=1}^{n} x_i a^i \right) = (y, y) \geqslant 0,$$

где $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a^i$, т. е. матрица G неотрицательна.

7. Решение. Как фактически установлено в предыдущем упражнении, скалярное произведение (Gx, x) обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a^i = 0$. С другой стороны, для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной. Следовательно, положительная определенность матрицы Грама системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ эквивалентна линейной независимости этой системы векторов.

8. Решение. Пусть $\boldsymbol{X}_n$ — евклидово пространство, $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — линейный оператор, A_e — матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$, и

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}.$$

С другой стороны, по упр. 12, с. 97, имеем

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1}.$$

Из двух последних равенств заключаем, что если оператор $\mathcal{A}$ унитарен, т. е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, то матрица A_e унитарна: $A_e^* = A_e^{-1}$, и наоборот.

9. Решение. Определитель оператора есть определитель матрицы этого оператора в любом базисе. По предыдущему упражнению матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе унитарна, а определитель такой матрицы, как известно, по модулю равен единице.

10. Решение. Пусть $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{-1}$. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1} = (\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1},$$

т. е. оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$ является унитарным.

11. Решение. Пусть для любого вектора $x \in \boldsymbol{X}_n$ выполнено равенство $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x)$. Тогда $(x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = (x, x)$. В силу произвольности x заключаем, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I$, т. е. $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

12. Решение. Разложим произвольный вектор $x \in \boldsymbol{X}_n$ по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k.$$

Базис $\mathcal{E}_n$ ортонормированный, поэтому

$$|x|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l e^l \right) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2.$$

С другой стороны, в силу ортонормированности базиса $\mathcal{Q}_n$ имеем

$$|\mathcal{A}x|^2 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = \left(\mathcal{A} \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \mathcal{A} \sum_{l=1}^{n} \xi_l e^l \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k q^k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l q^l \right) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ не меняет длин векторов и, следовательно (см. предыдущее упражнение), является унитарным.

§ 3. Нормальные операторы

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *нормальным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Упражнения

1. Проверьте, что самосопряженный, косоэрмитов и унитарный операторы — нормальные операторы.

2. Покажите, что для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\boldsymbol{X}_n$ была нормальной.

3. Покажите, что определитель самосопряженного оператора — вещественное число

4. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n такая, что $A^T A = AA^T$. Опираясь на теорему 9, [3], с. 226, показать, что существует система векторов $\{\xi^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$, ортонормированная в смысле стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{C}^n$, и такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, что $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Причем, если число λ_k вещественно, то и вектор ξ_k можно выбрать вещественным.

5. Докажите, что если у нормального оператора все собственные числа вещественны, то он — самосопряженный оператор; если у нормального оператора все собственные числа чисто мнимые, то он — косоэрмитов оператор; если у нормального оператора все собственные числа по модулю равны единице, то он — унитарный оператор.

6. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует унитарный оператор $\mathcal{D}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{D}^*\mathcal{B}\mathcal{D}$.

7. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, $\mathcal{Q}$ — унитарный оператор. Докажите, что оператор $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$ нормальный и справедливо представление

$$\tilde{\mathcal{A}} = \lambda_1 \widetilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2 \widetilde{\mathcal{P}}_2 + \cdots + \lambda_k \widetilde{\mathcal{P}}_k, \tag{1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}^*$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\boldsymbol{X}_n$ на подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

8. Докажите, что если оператор положительно определен, то его определитель положителен.

9. Докажите неравенство Коши — Буняковского (см. теорему 2, [3], с. 131), используя матрицу Грама (см. (4.1), [3], с. 133) системы, состоящей из двух векторов x, y евклидова пространства.

10. Покажите, что всякая вещественная симметричная матрица A ортогонально подобна диагональной, т. е. $Q^T AQ = \Lambda$, где Λ — диагональная, Q — ортогональная матрицы. Столбцы матрицы Q — собственные векторы матрицы A, по диагонали матрицы Λ расположены все собственные числа матрицы A.

11. Доказать следующее утверждение. Для того, чтобы нормальные матрицы A и B были унитарно подобны (т. е. существовала такая унитарная матрица D, что $A = D^*BD$), необходимо и достаточно, чтобы их характеристические полиномы совпадали.

12. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ самосопряженный и положительно определенный оператор. Доказать, что тогда оператор $\mathcal{A}^{-1}$ также самосопряженный и положительно определенный.

13. Пусть A, B — эрмитовы матрицы порядка n, причем A положительно определена, B неотрицательна. Доказать, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \geqslant 0.$$

14. Показать, что последнее утверждение справедливо в случае, когда A — неотрицательная матрица.

Ответы, указания и решения

1. Указание. Воспользуйтесь соответствующими определениями.

2. Решение. Пусть $\boldsymbol{X}_n$ — евклидово пространство, $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по этому базису, $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — линейный оператор, A_e — матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$. Далее, по упр. 12, с. 97, имеем $\mathcal{A}^* = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1}$. Следовательно,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} A_e A_e^* \mathcal{E}^{-1},$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} A_e^* A_e \mathcal{E}^{-1}.$$

Из двух последних равенств заключаем, что если оператор $\mathcal{A}$ нормальный, т. е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, то матрица A_e нормальная: $A_e A_e^* = A_e^* A_e$, и наоборот.

3. Решение. Определитель оператора есть определитель матрицы этого оператора в любом базисе. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе эрмитова, а определитель такой матрицы, как известно, — вещественное число.

4. Доказательство. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n такая, что $A^T A = A A^T$. Будем трактовать эту матрицу как оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда этот оператор является нормальным. По теореме 9, [3], с. 226, существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ такой, что $Ae^k = \lambda_k e^k$. Если $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то вектор e^k удовлетворяет однородной системе линейных алгебраических уравнений с вещественной матрицей $A - \lambda_k I$, следовательно, может быть выбран вещественным.

5. Доказательство. Для каждого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица принимает диагональный вид, причем на диагонали матрицы расположены все собственные числа этого оператора. Если в некотором ортонормированном базисе матрица оператора эрмитова, то он самосопряжен, если матрица косоэрмитова, то оператор косоэрмитов, если матрица унитарна, то и оператор унитарен. Остается заметить, что если матрица диагональна, а на ее диагонали стоят вещественные числа, то матрица, очевидно, эрмитова, если эти числа чисто мнимые, то матрица косоэрмитова, если все диагональные числа по модулю равны единице, то матрица унитарна.

6. Доказательство. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$, $\mathcal{B} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. По теореме 9, [3], с. 226, существуют ортонормированные базисы $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{X}_n$ и $\{q^k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{X}_n$ такие, что

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k, \quad \mathcal{B}q^k = \lambda_k q^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $\mathcal{E}^{-1} : \boldsymbol{X}_n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathcal{Q}^{-1} : \boldsymbol{X}_n \to \mathbb{C}^n$ — операторы разложения по базисам $\{e^k\}_{k=1}^n$ и $\{q^k\}_{k=1}^n$ соответственно. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в указанных базисах имеют одну и ту же матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, и справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E} = \Lambda, \quad \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Q} = \Lambda.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D},$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{Q}\mathcal{E}^{-1}$. Оператор $\mathcal{D}$ переводит базис $\mathcal{E}_n$ в базис $\mathcal{Q}_n$:

$$\mathcal{D}e^k = \mathcal{Q}\left(\mathcal{E}^{-1}e^k\right) = \mathcal{Q}\, i^k = q^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь, как обычно, через i^k обозначен k-тый элемент естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$. Базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ ортонормированные, следовательно (см. упр. 12, с. 103), оператор $\mathcal{D} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ унитарный. Утверждение доказано.

7. Пусть оператор $\mathcal{A}$ нормальный, а $\mathcal{Q}$ — унитарный. Тогда оператор $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$ нормальный. Действительно,

$$\widetilde{\mathcal{A}}^*\widetilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*)^*(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*) = \mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{Q}^*,$$

но с другой стороны,

$$\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{A}}^* = (\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*)(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*)^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{Q}^*.$$

Далее, так как оператор $\mathcal{A}$ — оператор простой структуры, то для него справедливо спектральное представление

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k\mathcal{P}_k,$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$ — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$, а для каждого $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ оператор $\mathcal{P}_i$ есть оператор ортогонального проектирования пространства $\boldsymbol{X}_n$ на соответствующее собственное подпространство L_{λ_i}. Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^* = \lambda_1\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathcal{P}}_2 + \cdots + \lambda_k\widetilde{\mathcal{P}}_k,$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}^*,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Остается пояснить, что $\widetilde{\mathcal{P}}_i$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\boldsymbol{X}_n$ на подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$. Действительно этот оператор — результат последовательного действия трех операторов: оператор $\mathcal{Q}^*$ переводит пространство $\boldsymbol{X}_n$ в себя, затем оператор $\mathcal{P}_i$ осуществляет ортогональное проектирование пространства $\boldsymbol{X}_n$ на подпространство L_{λ_i}, а оператор $\mathcal{Q}$ окончательно преобразует подпространство L_{λ_i} в подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$. Утверждение доказано.

8. Доказательство. Для того чтобы самосопряженный оператор был положительно определен необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительны. Определитель оператора равен произведению его собственных чисел, следовательно, положителен.

9. Решение. Рассуждая точно также как в предыдущем упражнении, получаем, что определитель неотрицательной матрицы неотрицателен. Матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна. Следовательно, для определителя матрицы Грама G системы из двух векторов x, y справедлива оценка

$$\det(G) = |x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 \geqslant 0,$$

что эквивалентно неравенству Коши — Буняковского:

$$|(x,y)| \leqslant |x||y|.$$

Причем, равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны (см. упр. 7, с. 103).

10. Доказательство. Пусть A — вещественная симметричная матрица порядка n. Будем трактовать эту матрицу как оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда этот оператор является нормальным. По теореме

9, [3], с. 226, существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ такой, что $Ae^k = \lambda_k e^k$. Пусть Q — матрица, столбцами которой являются векторы e^k, матрица $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Тогда $AQ = \Lambda Q$. Умножим обе части этого равенства слева на Q^T, получим $Q^T AQ = \Lambda$.

11. Доказательство. Характеристические полиномы подобных матриц совпадают. Поэтому необходимость совпадения характеристических полиномов матриц A и B в условиях доказываемого утверждения очевидна. Докажем достаточность. Пусть A и B — нормальные матрицы, причем их характеристические полиномы совпадают. Убедимся, что эти матрицы унитарно подобны. Будем трактовать их как операторы, действующие в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда эти операторы являются нормальными. По теореме 9, [3], с. 226, существуют ортонормированные базисы $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ и $\{q^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ такие, что

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad Bq^k = \lambda_k q^k, \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, n.$$

Подчеркнем, что здесь характеристические числа λ_k с совпадающими номерами выбраны равными друг другу. Это можно сделать в силу того, что характеристические числа матриц A и B совпадают. Пусть E и Q — матрицы, столбцами которых являются векторы e^k и q^k, $k = 1,\, 2,\, \dots,\, n$, соответственно; $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Тогда

$$AE = \Lambda E, \quad BQ = \Lambda Q.$$

Причем матрицы E и Q унитарны, т. к. их столбцы ортонормированы. Очевидные преобразования двух последних равенств приводят к равенству

$$A = EQ^* BQE^*.$$

Таким образом, матрицы A и B унитарно подобны:

$$A = D^* BD,$$

где $D = QE^*$. Утверждение доказано.

12. Доказательство. Если $\mathcal{A} : \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}_n$ — самосопряженный оператор тогда оператор $\mathcal{A}^{-1}$ также самосопряженный. Действительно, в силу упражнения 7, с. 96, для произвольных векторов x, $y \in \boldsymbol{X}_n$ справедлива цепочка равенств:

$$(\mathcal{A}^{-1}x, y) = (x, (\mathcal{A}^{-1})^* y) = (x, (\mathcal{A}^*)^{-1} y) = (x, \mathcal{A}^{-1} y).$$

Пусть λ — собственное число положительно определенного оператора $\mathcal{A}$. Тогда $1/\lambda$ — собственное число оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Действительно, для обратимого оператора из $\mathcal{A}x = \lambda x$ следует $(1/\lambda)x = \mathcal{A}^{-1}x$. Для того, чтобы самосопряженный оператор был положительно определен необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительны. Следовательно, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ — положительно определен. Утверждение доказано.

13. Доказательство. Заметим, что если матрица $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ эрмитова то матрица $\overline{B} = \{\bar{b}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ тоже эрмитова. Действительно, $\overline{B}^* = B^T$, а если $B = B^*$, то $B^T = \overline{B}$. Далее, если матрица B неотрицательна, то и $\overline{B}$ обладает тем же свойством. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить комплексное сопряжение от обеих частей неравенства

$$(Bx, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Получим

$$(\overline{B}\overline{x}, \overline{x}) \geqslant 0 \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{C}^n,$$

что означает неотрицательность матрицы $\overline{B}$.

Вычислим теперь диагональные элементы матрицы $A\overline{B}$:

$$(A\overline{B})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr}(A\overline{B}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

где λ_i, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, — собственные числа матрицы $A\overline{B}$. Матрица A обратима. Поэтому задача на собственные значения $A\overline{B}x = \lambda x$ эквивалентна задаче на собственные значения $\overline{B}x = \lambda A^{-1}x$. Пусть λ, x — собственная пара этой задачи. Умножим левую и правую части последнего равенства скалярно на x, получим $(\overline{B}x, x) = \lambda(A^{-1}x, x)$. Матрица $\overline{B}$ неотрицательна, следовательно, $(\overline{B}x, x) \geqslant 0$. Матрица A самосопряженная и положительно определенная, следовательно, по предыдущему упражнению A^{-1} также самосопряженная и положительно определенная матрица, и $(A^{-1}x, x) > 0$. Отсюда $\lambda \geqslant 0$, а значит $\operatorname{tr}(A\overline{B}) \geqslant 0$. Утверждение доказано.

14. Действительно, если A неотрицательна, то при любом $\varepsilon > 0$ матрица $A + \varepsilon I$, где I — единичная матрица, положительно определена, следовательно, $\operatorname{tr}((A + \varepsilon I)\overline{B}) \geqslant 0$, т. е. $\operatorname{tr}(A\overline{B}) + \varepsilon \operatorname{tr} \overline{B} \geqslant 0$ для любого сколь угодно малого положительного ε. Устремляя ε к нулю, получим $\operatorname{tr}(A\overline{B}) \geqslant 0$. Утверждение доказано.

Литература

1. Беклимишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 496 с.

2. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975. 320 с.

3. Карчевский Е.М., Карчевский М.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. 352 с.

4. Карчевский Е.М., Рунг Е.В., Фролов А.Г. Семинары по линейной алгебре и аналитической геометрии. Часть 1: учебное пособие. Казань, 2013. 152 с.

5. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том I. М.: Планета знаний, 2007. 469 с.

6. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том II, часть 1. М.: ИКДМ «Зерцало–М», 2003. 170 с.

7. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том II, часть 2. М.: ИКДМ «Зерцало–М», 2003. 251 с.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Изд-во Лань, 2010. 480 с.

9. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Изд-во Лань, 2008. 288 с.

10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Изд-во Лань, 2005. 336 с.

Учебное издание

Карчевский Евгений Михайлович
Лаврентьева Елена Евгеньевна
Александрова Ирина Леонидовна

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

для практических занятий по алгебре и геометрии

Подписано в печать 16.01.2018 г.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 6,74.
Тираж 100 экз. Заказ 69/1.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28