УДК 37

ДИСКРЕТНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТИНЕ МИРА

Тестов Владимир Афанасьевич, доктор педагогических наук, профессор,
Вологодский государственный университет
vladafan@inbox.ru

Аннотация. В статье показаны пути формирования целостной математической картины мира. В истории математики имелись неоднократные попытки нарушения баланса между дискретностью и непрерывностью, свести математику к одной их этих компонент. Однако в этом случае становилось очевидным разрушение целостности математической картины мира. С использованием тринитарной методологии в статье показывается, что единство дискретности и непрерывности можно обеспечить с помощью третьего компонента – фрактальности.

Ключевые слова: научная картина мира, тринитарная методология, дискретность, непрерывность, фрактальность.

DISCRETENESS AND CONTINUITY IN THE MATHEMATICAL PICTURE OF THE WORLD

V.A. Testov, doctor of education, professor,
Vologda State University
vladafan@inbox.ru

Abstract. The article shows the ways of forming an integral mathematical picture of the world. In the history of mathematics, there have been repeated attempts to disrupt the balance between discreteness and continuity and to reduce mathematics to one of these components. However, in this case it became obvious the destruction of the integrity of the mathematical picture of the world. Using the trinitarian methodology, the article shows that the unity of discreteness and continuity can be achieved with the help of the third component – fractality.

Keywords: scientific picture of the world, trinitarian methodology, discreteness, continuity, fractality.

Одним из основополагающих принципов отбора содержания обучения математике, как в школе, так и в вузе, является принцип целостности содержания. В настоящее время при изучении математики этот принцип не всегда соблюдается, конкретный материал во многих случаях не складывается в систему знаний; учащийся чаще всего не в состоянии самостоятельно ее структурировать и осмыслить. Как известно, целостной системой представлений об общих свойствах и закономерностях объективного мира, особой формой систематизации знаний является научная картина мира, представляющая собой качественное обобщение и мировоззренческий синтез различных научных теорий. Поэтому ее формирование является важнейшей задачей обучения, которой посвящен ряд исследований. В частности, имеются исследования, посвященные формированию у школьников математической картины мира ([4], [5], [12]).

Для формирования целостного представления о математике необходимо стремиться к единению различных взглядов на природу математики. Однако существует ли у математиков единое целостное представление о том, что такое математика? Как образно выразился М. Клайн, каждое крыло здания математики претендует на роль единственно истинного храма, где хранятся жемчужины математической мысли. Он приводит в своей книге известную притчу о семи слепцах и слоне. Наткнувшись на слона, слепцы принялись ощупывать его и спорить, на что он похож. Один ощупывал хвост, другой ногу слона, третий – хобот и т.д. Слепцы не могли прийти к согласию, т.к. все они представляли слона по-разному [6]. Так и математики рассматривают свою науку с различных точек зрения, им так же трудно согласовать свои позиции, как и несчастным слепцам.

Позиции ученых сильно отличаются, поэтому нет единой точки зрения на предмет математики. Долгие годы считалось, что предметом математики являются числа и фигуры. Ф.Энгельс вместо этих терминов предложил использовать термины «количественные отношения» и «пространственные формы», чтобы подчеркнуть, что предмет математики не плод чистого разума, а часть реального мира, Советские математики опирались на это определение Ф.Энгельса, но признавались, что с появлением новых разделов математики необходимо расширить это определение. Группа французских математиков под псевдонимом Н. Бурбаки считала, что математика – это наука о специальных структурах, называемых математическими, которые подразделяются на алгебраические, порядковые и топологические [3]. В.И. Арнольд в противовес этому мнению отмечал, что математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук.

В структуре математической картины мира существенное место занимают общие представления о дискретности и непрерывности математических объектов и их взаимосвязи с реальным миром. Вся история математики наполнена дискуссиями разных точек зрения на природу математики, ее характер, на соотношение в ней дискретного и непрерывного, конечного и бесконечного. Следует отметить, что как среди философов, так и математиков нет полного единства по этим вопросам.

Первобытная математика была дискретной. В Древней Греции соотношение дискретного и непрерывного было одной из основных проблем в философии и математике. Глубокие размышления античных философов приводили их к выводу о несовместимости принципов дискретности и непрерывности. Демокрит придерживался дискретных, атомистических взглядов, считая, что мир дискретен. Точки он представлял, как атомы пространства, имеющие малый, но конечный объем. Причем он обосновывал необходимость атомистического миропонимания ссылкой не на физические явления, а на чисто математические затруднения, возникающие в том случае, если считать пространство непрерывным.

На основе атомистических идей Антифонтом, Евдоксом и Архимедом был разработан метод исчерпывания для вычисления площадей криволинейных фигур. Тем не менее, большинство древнегреческих ученых – современников Демокрита – отвергли атомистическое истолкование геометрии. Так Платон (427-347 гг. до н.э.) был яростным противником атомизма, он всю жизнь собирал рукописи с работами Демокрита и их сжигал. По мнению этих ученых, такое истолкование не соответствовало духу математики и смешивало математику и физику. Атомистические идеи возродились снова лишь в XVII в. в работах Кеплера, Кавельери и Виета.

Сложность вопроса о соотношении непрерывности и (или) дискретности мира наглядно показали знаменитые апории Зенона. Со времен их появления многие ученые, начиная с Аристотеля, Плутарха и Сенеки и вплоть до наших дней, порождали все новые и новые попытки опровержения апориев, объявляли о найденном разрешении этих проблем. Но все так называемые «разрешения» апорий представляют собой логическую ошибку, состоящую в том, что доказывается не тот тезис, который требуется доказать. Апории Зенона не нашли удовлетворительного разрешения и поныне. Среди математиков очень распространенной была точка зрения, что с созданием математического анализа, теории бесконечно малых и предельного перехода апории Зенона были разрешены. Однако и это «разрешение» было таким же заблуждением. Математический анализ в данном случае просто-напросто обходит неудобный момент, напрямую связанный с апориями, путем его игнорирования. Вместо вызывающего сопротивление разума утверждения «стрела никогда не долетит до цели» появился всех устраивающий тезис «переменная никогда не достигнет своего предела».

Выдающиеся математики Р. Курант и Г. Роббинс пишут в своей книге: «Еще со времен Зенона и его парадоксов все попытки дать точную, математическую формулировку интуитивному физическому или метафизическому понятию непрерывного движения были безуспешными... Точки прямой представляют везде плотное множество, и не существует точки, «следующей» за данной. Остается неизбежное расхождение между интуитивной идеей и точным математическим языком, предназначенным для того, чтобы описывать ее основные линии в научных, логических терминах. Парадоксы Зенона ярко обнаруживают это несоответствие» [8, с.337-338]. Отмахиваясь от апорий Зенона на протяжении двух с половиной тысячелетий и объявляя их пустыми софизмами, человеческий разум только показывал свою беспомощность пред гениальным прозрением античности.

Идеи дискретности и непрерывности соперничали и в первый период создания дифференциального и интегрального исчисления. Так Буридан считал границей тела сколь угодно тонкий слой, а не геометрическую поверхность. Подобных представлений придерживался и Н.И. Лобачевский. Он писал, что если два тела «касаются линейно», то следует доводить сечения до «тонкости волоса или черты на бумаге», а если касаются в точке – до «малости песчинки» [9, с. 174-175]. Атомистическим представлениям следовал Кавальери, его методы позволяли ему вычислять площади и объемы геометрических фигур.

Лейбниц считал, что «существуют неделимые или непротяженные элементы; иначе невозможно быть ни началу, ни концу движения». Он ввел величины, названные им инфинитезиальными, или бесконечно малыми, которые отличны от нуля, но меньше любого другого положительного числа. Это не переменная величина, т.е. не функция, стремящаяся к нулю, а постоянная величина, но очень малая. Самым уязвимым местом его теории было противоречие с аксиомой Архимеда. Это противоречие было разрешено Робинсоном значительно позднее, во второй половине XX столетия.

В XIX в большинство математиков, исходя из потребностей строгого логического обоснования исчисления бесконечных малых, пошли по другому пути, фактически изгнали идеи дискретности из математического анализа, что отдалило математику от реальности. Создатели математического анализа Коши, Дедекинд, Кантор, Вейерштрасс и другие придали фундаментальным математическим понятиям значительно большую строгость, которой им до этого не хватало. Но, как отметил английский физик-космолог Джеральд Уитроу, все эти математики придерживались формалистической точки зрения на природу своего предмета.

Вместе с тем даже в период господства парадигмы непрерывной математики отдельные математики высказывали идеи дискретности. Так во 2-й половине XIX в. русский математик Н. В. Бугаев, опираясь на аналогии между некоторыми операциями теории чисел и математического анализа, пытался построить аритмологию: науку о «прерывных» функциях. Он писал: «Изменяться величины могут непрерывно или прерывно... Сообразно с этими двумя способами, функции разделяются на непрерывные и прерывные, а сама математика распадается на два громадных раздела: теорию непрерывных и теорию прерывных функций... Прерывность гораздо разнообразнее непрерывности. Разнообразие форм, под которыми является прерывность, ведет к тому, что научные вопросы аритмологии часто бывают сложнее и труднее соответствующих вопросов анализа». Он подчеркивал взаимосвязь и взаимодополняемость аналитического и аритмологического подходов. «Мы видели, что в области чистой математики непрерывность и прерывность суть два понятия, несводимых одно к другому. При правильной оценке и классификации фактов чистой математики между ними должны устанавливаться не противоречия, а гармония» [2].

Вопросами взаимосвязи непрерывности и дискретности в математике занимался и ученик Бугаева – П. А. Флоренский. В 1903 г. во введении к своей диссертации он утверждает, что есть чисто фактические данные, помимо отвлеченных, указывающие на прерывность многих сторон действительности». Распространение непрерывных методов он объясняет плодотворностью дифференцирования и интегрирования, отмечая, что задачи, в которых имелась очевидная прерывность, рассматривались как курьез [13].

В начале XX в. происходят революционные перемены в теоретической физике, что привело к усилению интереса к математическим вопросам, относящимся к взаимосвязи непрерывных и дискретных процессов и функций. В это время. М. Планк выдвинул гипотезу о дискретности физического действия. Затем А. Эйнштейн ввел дискретность туда, где, казалось, вряд ли она может присутствовать – в световые явления. В последующие годы квантовая механика рассматривала вопрос о синтезе дискретности и непрерывности в форме корпускулярно-волновой двойственности.

Дискретность возникла и при разработке теории информации. Академик А. Н. Колмогоров считал, что «дискретные механизмы являются ведущими в процессах переработки информации и управления в живых организмах». Подводя итог историческому обзору, сошлемся на его слова «По существу, − писал он, − все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного... Мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще» [7]. Именно поэтому математические модели были в основном непрерывными. Эту же мысль хорошо сформулировал известный американский специалист по дискретной математике Д. Зайлбергер: «Непрерывный анализ и геометрия являются только вырожденными аппроксимациями дискретного мира…. Хотя дискретный анализ концептуально проще непрерывного, технически он, как правило, значительно сложнее. Поэтому в отсутствие компьютеров непрерывная геометрия и анализ были необходимыми упрощениями, позволявшими исследователям добиваться успехов в естественных науках и математике».

Все эти перемены в математике не могли не сказаться и на содержании математического образования. Соотношение дискретного и непрерывного в обучении математике также всегда было предметом обсуждения и споров. В настоящее время дискретные вопросы, несмотря на изменение их роли в математической картине мира, в школьном курсе математики затрагиваются примерно в той же мере, как и несколько десятилетий назад, что мешает обеспечить гармоничное сочетание дискретного и непрерывного в изучении математики и в понимании ее характера.

Как показано выше, в истории развития науки имелись неоднократные попытки нарушения баланса между дискретностью и непрерывностью, свести математику к одной их этих компонент. Однако все они заканчивались неудачей, ибо становилось очевидным разрушение в этом случае целостности математической картины мира. Таким образом, происходящие процессы в естествознании, информатике, самой математике приводят к необходимости новой, сбалансированной точки зрения на природу математики, отражающей ее целостность, синергию в ней непрерывного и дискретного.

Объяснение попыткам свести математику либо к дискретности, либо к непрерывности можно найти в том, что в основе взглядов большинства ученых лежит традиционная методология, бинарное мышление. При этой методологии расчленение объекта или явления на две части – дихотомия – являлось доминирующим для всей классической науки. Элементарные структуры имели вид бинарных оппозиций: вещество-поле, бытие-сознание, дифференциация-интеграция, необходимость–случайность, материализм–идеализм и т.п. По этой же схеме произошло и деление наук на естественные и гуманитарные, на фундаментальные и прикладные. В истории науки можно проследить, как доминанты в каждой оппозиции периодически менялись, а позднее противоборствующие стороны стали претендовать на равноправие. Но если противоречия сосуществуют, то должно быть нечто третье, обеспечивающее их примирение. Для объяснения синтеза, целостности оказалось необходимым наличие третьего фактора.

Основой нового мышления может стать тринитарная методология, которая в последнее время все шире используется в постнеклассическом мировоззрении, хотя ростки этого мышления зародились значительно раньше, еще в Древней Греции. Триединое начало лежит в основе многих религий. Триады, характеризующиеся известной формулой «тезис-антитезис-синтез», широко использовались в гегелевской диалектике. П.А. Флоренский писал о триединстве ума, чувства и воли человека, он рассматривает трихотомию, как начало системы и приходит к мысли об онтологичности «триадической структуры».

В последние десятилетия целый ряд ученых стали широко применять тринитарную методологию. В России появилась и общественная организация, объединяющая приверженцев этой идеи, – Академия Тринитаризма. Значительный вклад в развитие тринитарного мышления внес Р.Г. Баранцев. Им были рассмотрены системные (целостные) триады, единство которых создается тремя потенциально равноправными элементами одного уровня (рацио, эмоцио, интуицио), каждый из которых может служить мерой совмещения двух других [1].

Тринитарная методология может быть применена к анализу самых различных явлений и объектов. Так отсутствие единого понимания предмета математики может быть объяснено тем, что математика представляет собой единство трех разных составляющих: логики (рацио), интуиции (интуицио) и эксперимента (эмоцио).

В качестве третьего элемента, необходимого для решения проблемы противоречия между дискретностью и непрерывностью в математике, как меру их компромисса, можно рассматривать фрактальность. Такого взгляда придерживается и Р.Г. Баранцев. По последним физическим представлениям Вселенная состоит из бесконечного числа вложенных фрактальных уровней материи с подобными друг другу характеристиками. Философы высказывают точку зрения, что фрактальность есть одно из всеобщих фундаментальных свойств бытия. С появлением фракталов со всей очевидностью стала ясна ограниченность описания природы с помощью гладких кривых, поверхностей и гиперповерхностей. Окружающий нас мир гораздо разнообразнее, и в нем оказалось немало объектов, допускающих фрактальное описание и не укладывающихся в жесткие рамки евклидовых линий и поверхностей.

Фрактальность часто определяется через *самоподобие*. Под такое определение подходят не только красивые конструкции, созданные при помощи компьютера, но и давно известные матрёшки, детские пирамидки, художественные тексты (например, в сказках типа «Репка», «Теремок», «Колобок» и т.п.). Фрактал – это удивительное понятие математики, оказавшееся средством адекватного отражения многих природных и социальных явлений.

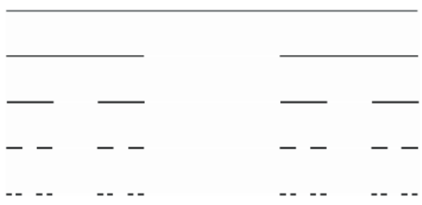

Рис.1 Множество Кантора (Канторова пыль)

Как известно, первые фрактальные множества появились в конце XIX – начале XX века, но они вызывали скорее неприязнь и недоумение многих ученых-математиков того времени. Один из создателей теории множеств Георг Кантор первым построил фрактальное множество из непрерывного объекта – отрезка путем выбрасывания из этого отрезка бесконечное число раз интервалов разной длины. В результате получается дискретный объект – канторова пыль (рис.1).

Но большинство из фрактальных множеств в то время оставались невидимыми для глаз, поскольку подходящей техники для реализации свойства самоподобия, которым обладают все фракталы, еще не находилось. И только в конце XX века с появлением компьютера удалость построить эти множества.

Фрактальная геометрия – это не просто новый раздел математики, это одна из важнейших составных частей математической картины мира, что определяет ее значение для обучения. Кроме того, это средство интеграции в обучении математики и информационных технологий. Изучение фрактальной геометрии способствует решению основных задач, поставленных в Концепции развития математического образования. Это, прежде всего, повышение мотивации учащихся к изучению математики, развитие у них познавательной активности, сближения процессов обучения и исследования, решение проблемы эстетической направленности обучения. Фракталы обладают эстетической привлекательностью, практически не требуется дополнительных знаний и умений, чтобы ощутить природную эстетическую красоту фракталов, получить от этой красоты эстетическое удовольствие. Фрактальная геометрия пока не включена даже в вузовские программы, хотя имеется опыт ее преподавания в ряде вузов ([10] и др.). Имеется опыт знакомства с основами фрактальной геометрии и учащихся средних учебных заведений.

Таким образом, фрактальность является таким же фундаментальным структурным свойством материи, как дискретность и непрерывность. Фрактальность можно рассматривать в качестве третьего элемента, необходимого для решения проблемы противоречия между дискретностью и непрерывностью в математике, как меру их компромисса. Тем самым с помощью этого нового научного направления предоставляется возможность обеспечить единение дискретности и непрерывности, сформировать у обучающихся целостную математическую картину мира.

Литература

1. Баранцев Р.Г. Синергетика в современном естествознании. – М.: Книжный дом «Либроком», 2014. – 160 с.
2. Бугаев Н. В. Математика и научно-философское мировоззрение //Филос. и социол. мысль. – 1989. – №5. – С. 85-93.
3. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1965. – С. 245-259.
4. Горбачев В.И. Углубленное изучение математики и математическая картина мира /Актуальные проблемы углубленного математического образования. Материалы XXVII Пленума Учебно-метод. совета по математике и механике и Всеросс. научно-метод. конференции /Под ред. В.Н.Чубарикова. – Майкоп: Изд-во АГУ, 2010. – С. 69-71.
5. Ермак Е.А. Геометрическая составляющая естественнонаучной картины мира старшеклассников: Монография. – СПб.: Изд-во РПГУ им.А.И. Герцена, 2004.
6. Клайн М. Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1984.
7. Колмогоров А. Н. Научные основы школьного курса математики. Первая лекция // Математика в школе. – 1969. – № 3. – С. 12-18.
8. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967.
9. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений: В 5т. – М.; Л.: Гос изд.техн.-теорет. лит., 1949. Т. 2: Сочинения по геометрии. – 604 с.
10. Секованов В.С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии. – Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2005.

11. Тестов В.А. Дискретность и непрерывность в математике. // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 12. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. – С. 36-45.

12. Тестов В.А. Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты: монография. – Вологда, ВГПУ, 2012. – 176 с.

13. Флоренский П. А. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» // Историко-мат. исслед. – 1986. – Вып. 30. – С. 159-177.