УДК 514

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ИДЕАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Ромакина Л.Н., доцент,
Саратовский государственный университет, г. Саратов
romakinaln@mail.ru

Харченко А. А., аспирант 3 курса,
Саратовский государственный университет, г. Саратов
ainadil@mail.ru.ru

Харченко Н. А., учитель МБОУ «СОШ№ 9», г. Саратов
ainagor@mail.ru

Аннотация. Представлены построения с помощью линейки на идеальной области плоскости Лобачевского, рассматриваемой в проективной модели Кэли-Клейна.

Ключевые слова: плоскость Лобачевского, модель Клейна плоскости Лобачевского, гиперболическая плоскость положительной кривизны.

GEOMETRIC CONSTRUCTIONS ON THE IDEAL DOMAIN OF THE LOBACHEVSKII PLANE

L.N. Romakina, associate professor,
Saratov State University, Saratov
romakinaln@mail.ru

A.A. Kharchenko, graduate student 3 courses,
Saratov State University, Saratov
ainadil@mail.ru

N.A. Kharchenko, teacher school № 9, Saratov
ainagor@mail.ru

Abstract. Constructions on ideal domain of the Lobachevskii plane by means of a line are presented. The Lobachevskii plane considered in the projective Cayley-Klein model.

Keywords: Lobachevskii plane, Cayley-Klein model of the Lobachevskii plane, hyperbolic plane of positive curvature.

1. Постановка задачи. При изучении и развитии геометрии плоскости Лобачевского важную роль играет *овальная линия* [1], или в другой терминологии *коника* [2], проективной плоскости, под которой понимают невырожденную линию второго порядка, содержащую вещественные точки. В проективной модели Кэли-Клейна плоскость Лобачевского реализуется на проективной плоскости внутри овальной линии [3]. Поскольку на евклидовой плоскости овальные линии образуют три типа (эллипсы, гиперболы и параболы), интерпретировать планиметрию Лобачевского на евклидовой плоскости можно внутри любой линии этих типов, в частности, внутри окружности (такую модель плоскости Лобачевского называют моделью Клейна в круге). Отметим, что точку плоскости называют *внутренней* относительно овальной линии, если любая проходящая через нее прямая пересекает данную линию в двух вещественных точках. Точку плоскости, не принадлежащую овальной линии и не являющуюся внутренней относительно нее, называют *внешней* по отношению к данной линии. Под *внутренностью* овальной линии понимают множество всех внутренних относительно этой линии точек плоскости.

На идеальной области плоскости Лобачевского, т.е. на внешней области проективной плоскости относительно овальной линии, реализуется геометрия *гиперболической плоскости положительной* *кривизны* [3-5] (плоскость Лобачевского называют также *гиперболической плоскостью отрицательной кривизны*).

Пусть на проективной плоскости P_2 задана овальная линия γ. Обозначим через Λ^2 плоскость Лобачевского, реализованную внутри линии γ, а через $\hat{H}$ – граничащую с ней гиперболическую плоскость положительной кривизны. Линию γ в этом случае называют *абсолютом* плоскостей Λ^2 и $\hat{H}$, а группу G проективных автоморфизмов линии γ – *фундаментальной группой преобразований* данных плоскостей. Совокупность всех свойств фигур плоскости Λ^2 ($\hat{H}$), инвариантных в преобразованиях группы G, согласно Клейну называют *геометрией* данной плоскости [6].

Общая постановка задач данной статьи может быть сформулирована следующим образом. Предположим, что эллипс (в частности, окружность) γ евклидовой плоскости служит изображением абсолюта плоскостей Λ^2 и $\hat{H}$. Требуется, пользуясь одной линейкой, построить фигуры Φ_1, Φ_2, ... Φ_n, указанным образом связанные с заданной в плоскости α линии γ фигурой Φ. Считаем выполнимыми следующие простейшие построения.

I. Построение прямой, проходящей через две заданные на чертеже точки.

II. Построение общей точки двух прямых, заданных на чертеже некоторыми отрезками.

III. Построение общих вещественных точек, в случае их существования, эллипса γ и прямой, заданной на чертеже некоторым отрезком.

Все построения сопроводим изображениями, выполненными с помощью динамической математической системы GeoGebra.

2. Основные построения. При решении задач предложенного в статье цикла потребуются следующие блоки основных построений, выполняемых в евклидовой плоскости с помощью линейки.

Блок **A**. Построение касательных к эллипсу (в частности, окружности) γ, проходящих через данную точку плоскости α, внешнюю относительно γ.

Приведем цепочку простейших построений, реализующую блок **A** (рис. 1).

1. Построение прямой AB (AD), где B (D) – точка линии γ, $B \neq D$.
2. Построение точки C (E) пересечения прямой AB (AD) и линии γ.
3. Построение точки M (N) пересечения прямых BD и CE (CD и BE).
4. Построение прямой MN.
5. Построение точек X, Y пересечения прямой MN и линии γ.
6. Построение касательных AX, AY к линии γ.

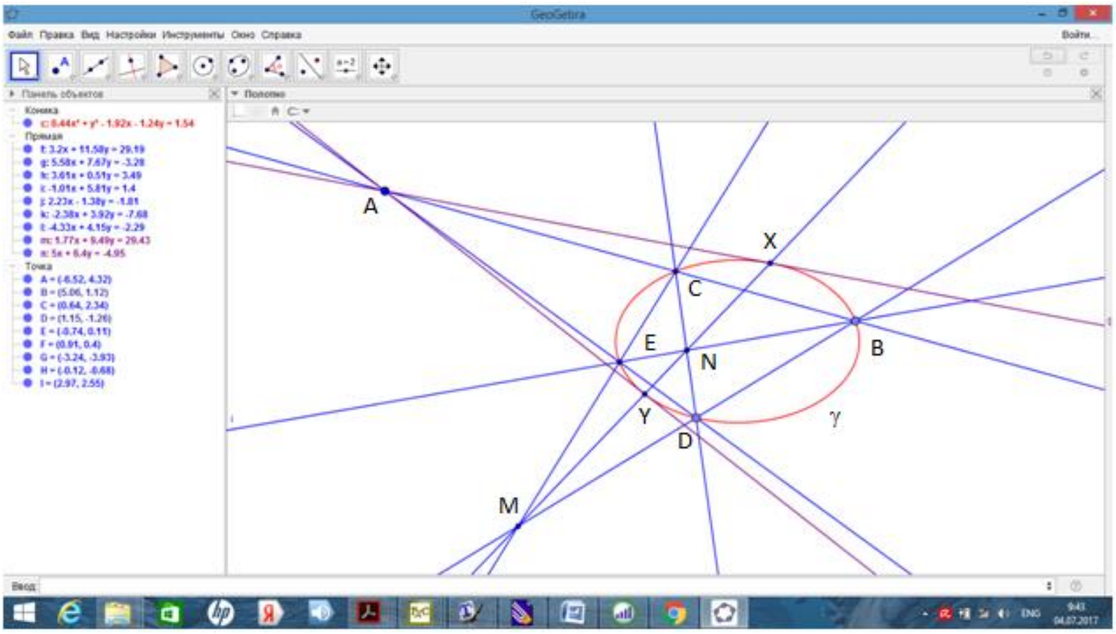

Рис. 1. Построение касательных к эллипсу γ, проведенных из точки *A*

Блок **B**. Построение поляры данной точки плоскости α относительно эллипса (окружности) γ при любом расположении точки по отношению к линии γ.

Построение поляры MN точки A, расположенной во внешней области плоскости α относительно линии γ, описано в блоке **A** (см. построения 1-4). Для внутренней относительно линии γ точки N плоскости α построение поляры проводим следующим образом (см. рис. 1).

1. Построение прямой NB (ND), где B (D) – точка линии γ, $B \neq D$.
2. Построение точки E (C) пересечения прямой NB (ND) и линии γ.
3. Построение точки M (A) пересечения прямых BD и CE (BC и DE).
4. Построение поляры AM точки N относительно линии γ.

Построение поляры точки линии γ относительно этой линии проведем после блока построений **C**.

Блок **C**. Построение полюса данной прямой плоскости α относительно эллипса (окружности) γ при любом расположении прямой по отношению к линии γ.

Чтобы построить полюс прямой l плоскости α относительно линии γ, выберем на прямой l точки A и B, не принадлежащие γ. Построим поляры a и b относительно линии γ точек A и B соответственно (см. блок **B**). Точка L пересечения прямых a, b – полюс прямой l относительно линии γ.

Возвращаясь к блоку построений **B**, построим поляру точки K линии γ относительно этой линии. Для этого проведем через точку K секущие KA и KB линии γ. Построим полюсы M, N этих прямых относительно γ. Прямая MN – искомая поляра точки K относительно γ.

3. Построение объектов плоскости $\hat{H}$. В зависимости от расположения прямой по отношению к абсолюту γ плоскости $\hat{H}$ различают три типа прямых данной плоскости. *Эллиптическими* называют прямые, не имеющие общих вещественных точек с абсолютом. Прямые, пересекающие γ в двух вещественных точках, называют *гиперболическими*. Касательные к абсолюту прямые, изотропные на $\hat{H}$, называют *параболическими*. Две собственные точки плоскости $\hat{H}$ разбивают содержащую их эллиптическую прямую на два смежных эллиптических отрезка. Две собственные для $\hat{H}$ точки гиперболической или параболической прямой, разбивают эту прямую на три части, гиперболический или соответственно параболический отрезок и два луча [4]. Прямую b называют перпендикулярной к непараболической прямой a, если b проходит через полюс прямой a относительно абсолюта γ. Если прямые a и b перпендикулярны, то они принадлежат различным типам. Для каждого эллиптического или гиперболического отрезка плоскости $\hat{H}$ существует единственный серединный перпендикуляр. Если прямая a параболическая, то формально каждую гиперболическую прямую, проходящую через точку касания прямой a с абсолютом, можно считать перпендикуляром к прямой a. Понятие серединного перпендикуляра к параболическому отрезку не имеет смысла. В работе [7] (см. также [5]) исследованы простые 4-контуры плоскости $\hat{H}$ – простые замкнутые ломаные, образованные четырьмя параболическими отрезками. Доказано, что диагонали простого 4-контура взаимно ортогональны и разделены точкой их пересечения пополам [7, Теорема 2, утверждение 2]. Основываясь на этих свойствах простого 4-контура, предложим способ построения серединных перпендикуляров эллиптических и гиперболических отрезков плоскости $\hat{H}$.

Задача 1. В плоскости α задан эллипс (окружность) γ, изображающий абсолют плоскости $\hat{H}$. Точки A и B плоскости α изображают концы непараболического отрезка AB плоскости $\hat{H}$. Пользуясь одной линейкой, построить прямую, изображающую серединный перпендикуляр к отрезку AB.

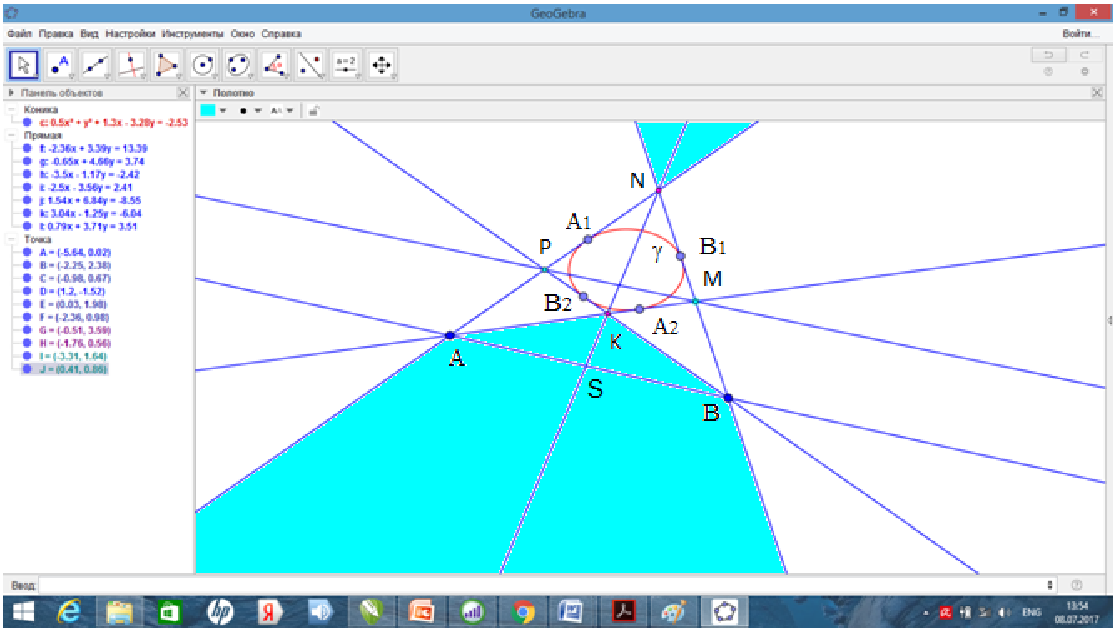

Рис. 2. Построение серединного перпендикуляра к эллиптическому отрезку *AB*

Решение. Предположим, что отрезок *AB* изображает эллиптический отрезок плоскости $\hat{H}$ (рис. 2). Проведем касательные AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 к линии γ (см. блок построений **A**). Отметим точки *K*, *M*, *N*, *P* попарного пересечения построенных прямых. Четырехугольник *AKBN*, внутренность которого на рис. 2 выделена заливкой, изображает простой 4-контур. Диагонали *AB* и *KN* этого четырехугольника изображают согласно теореме 2 из работы [7] ортогональные отрезки, разделяющие друг друга в точке *S* пополам. Следовательно, прямая *KN* – искомое изображение серединного перпендикуляра к отрезку *AB*. Прямая *PM* изображает серединный перпендикуляр к смежному отрезку *AB*, не содержащему точку *S*.

Если отрезок *AB* гиперболический, построение серединного перпендикуляра аналогичное. В качестве данного гиперболического отрезка можно выбрать отрезок *KN* с серединой в точке *S*, в плоскости *α* он изображен двумя лучами, исходящими из точек *K* и *N* (см. рис. 2).

Задача 2. В плоскости *α* задан эллипс (окружность) γ, изображающий абсолют плоскости $\hat{H}$. Точки *A* и *B* плоскости *α* изображают концы параболического отрезка *AB* плоскости $\hat{H}$ с точкой *C* на абсолюте. Пользуясь одной линейкой, построить точку *S*, изображающую середину отрезка *AB*.

Решение. Определение середины параболического отрезка дано в книге [4], аналитическое обоснование способа построения середины параболического отрезка предложено в статье [8]. Приведем формулировку леммы 1 работы [8].

На плоскости $\hat{H}$ середина отрезка произвольной параболической прямой p принадлежит гиперболической прямой, параллельной отличным от p параболическим прямым, проходящим через концы данного отрезка.

Способ построения середины параболического отрезка следует непосредственно из данного утверждения, согласно которому середина параболического отрезка лежит на прямой, соединяющей несобственные точки параболических прямых, проходящих через концы этого отрезка (рис. 3). Отметим, что данный способ использован в работе [9] при подготовке рисунка 5.

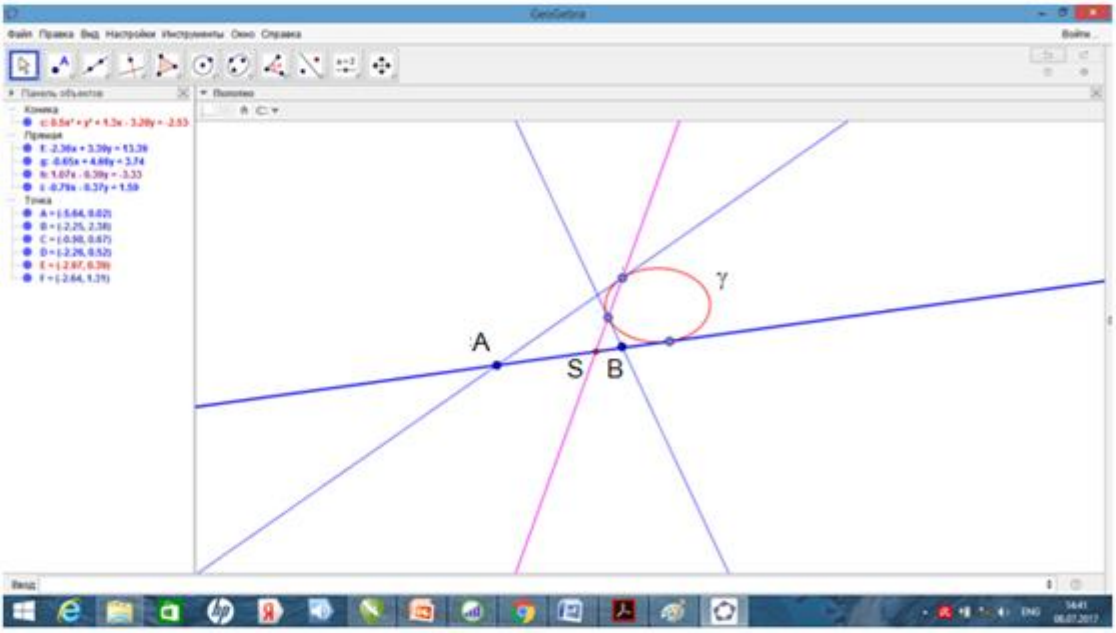

Рис. 3. Построение середины параболического отрезка *AB*

Литература

1. Ефимов Н.В. Высшая геометрия / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
2. Busemann H. Projective Geometry and Projective Metrics / H. Busemann, P. J. Kellley. – New York: Academic Press Inc., 1953. – 231 p.
3. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства / Б.А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 548 с.
4. Ромакина Л.Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Ч. 1: Тригонометрия / Л.Н. Ромакина. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. – 274 с.
5. Ромакина Л.Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения / Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. – 244 с.
6. Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 356 с.
7. Ромакина Л.Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости / Л.Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 14-26.
8. Ромакина Л.Н. О площади простого 4-контура гиперболической плоскости положительной кривизны / Л.Н. Ромакина // Ломоносовские чтения на Алтае: Сб. научн. статей междун. конф. – 2014. – С. 346-353.
9. Ромакина Л.Н. О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны / Л.Н. Ромакина // Матем. тр. – 2014. – Т. 17. – № 2. – С. 184-206.