УДК 378.147:515.12

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Ермаков В. Г., доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент,
Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины, Гомель, Беларусь
vgermakov@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены проблемы применения аксиоматического метода в математике и в системе математического образования. На примере общей топологии очерчена схема локального обращения аксиоматической теории. Описаны специальные методы управления образовательными процессами и функции текущего контроля, ориентированные на разрешение проблем, порождаемых глубокой неоднородностью математического знания.

Ключевые слова: математическое образование, аксиоматический метод, сингулярная теория управления и контроля.

PSYCHOLOGICAL AND PEDAGOGICAL ASPECTS OF APPLYING THE METHOD OF AXIOMATIZATION IN MATHEMATICS TRAINING

V.G. Ermakov, doctor of pedagogical sciences, candidate of
physical and mathematical sciences, the associate professor,
The Gomel state university of F.Skorina, Gomel
vgermakov@gmail.com

Abstract. Problems of applying axiomatization to mathematics and mathematical education are considered. Through the example of the general topology the diagram of the local conversion of the axiomatic theory is contoured. Specific methods of controlling educational processes and the functions of the current monitoring aimed at solving the problems generated by fundamental inhomogeneity of mathematical knowledge are described.

Keywords: mathematical education, method of axiomatization, singular control theory.

Аксиоматический метод уже более двух тысяч лет используется и при построении математических теорий, и при обучении математике, однако проблемы, порождаемые этим методом, не только не решены, но и усиливаются. При этом в настоящее время поиск решения этих проблем становится очень важным и в методологическом отношении. Ранее в статье [5] и других работах нами было показано, что стремительно меняющиеся условия современной жизни усиливают кризисные явления в системе образования главным образом потому, что своей многогранностью они нарушают хрупкое равновесие между простотой педагогических теорий и сложностью описываемых ими процессов. Отсюда следует, что для противодействия разрушительным тенденциям в развитии образования необходимо, по меньшей мере, расширить класс рассматриваемых моделей управления образовательными процессами и соответственно расширить функции текущего контроля. Представленный в данной статье анализ психолого-педагогических аспектов применения аксиоматического метода позволяет указать некоторые конкретные способы адресного и дозированного усложнения методов управления и контроля.

Оценки проблемных моментов в использовании аксиоматического метода при обучении математике отличаются друг от друга очень сильно. Так, согласно широко распространившимся представлениям, «аксиомы – это то, что не требует доказательств», и якобы поэтому помогать учащимся в этом месте не нужно. Подпитывает эти представления предложенная Аристотелем трактовка начал «доказывающей» науки, «как состоящих из первых, непосредственно необходимых, самоочевидных, истин и непосредственно (без объяснения) понятных, первичных, понятий» [14, с. 72]. Однако оставлять начала без доказательств вынуждает логика построения теории, а вовсе не их «самоочевидность», которой может и не быть. И когда при строгом следовании аксиоматическому методу изложение математической теории начинают с немотивированного определения, то это зачастую создает читателю такие психологические трудности, которые, по словам В.И. Арнольда, «почти непреодолимы для нормального человека» [1, с. 118].

Наличие столь мощной преграды для тех, кто начинает изучать такую теорию, легко обнаружить и по поведению самих математиков. А.Г. Глухов в своем очерке «О началах геометрии (г. Лобачевского)» отмечает, что, хотя геометрия Евклида и господствовала в математике свыше двух тысяч лет, но пятый постулат о параллельных «не представлялся математикам столь очевидным, как другие, и они упорно пытались доказать его» [3]. Приведенный в очерке длинный список имен тех, кто занимался его исследованием, венчают слова Гаусса о том, что «в области математики найдется мало вещей, о которых было бы написано так много, как о проблеме в начале геометрии при обосновании теории параллельных линий... по существу, за 2000 лет мы не ушли в этом вопросе дальше, чем Эвклид» [3]. Причину особого отношения к данному постулату на протяжении всего времени его использования М. Клайн объясняет так: «Евклид явно боялся предположить, что могут существовать *бесконечные* прямые, которые никогда не пересекаются: *любое* утверждение о бесконечных прямых не подкреплялось опытом, в то время, как аксиомы по определению должны быть самоочевидными истинами о физическом мире» [10, с. 94]. Н.И. Лобачевский, который внес решающий вклад в исследование проблемы пятого постулата, писал, что «никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий» [12, с.185]. И это не единственный выявленный изъян в построении начал геометрии.

Еще одну грань проблем, порождаемых аксиоматикой геометрии, установила С.А. Яновская, отметив, что «вокруг начал (принципов) геометрии велись уже в античной древности ожесточенные споры. В Древней Греции существовали фактически, по меньшей мере, три разных подхода к геометрии, мы сказали бы три разные системы геометрии: (1) Система Демокрита... (2) Система Анаксагора... (3) Система Евклида...» [14, с. 81]. Анализ этих споров привел Яновскую к выводу о том, что их объективной причиной стали трудности, связанные с математическим выражением непрерывности. На решение этой проблемы математикам тоже потребовалось два тысячелетия.

Таким образом, идеал, сформулированный Аристотелем, не был достигнут даже в начале истории аксиоматики. Ближе к истине оказываются слова А. Пуанкаре: «Математики не уничтожают препятствия, мешающие им, но просто отодвигают их за границы своей науки» [2, с. 6]. Цель этих усилий понятна – сделать саму теорию более строгой и упорядоченной, но достигается она с издержками – трудные и нерешенные проблемы теории концентрируются в ее пограничном слое. «Кажется, трудность понятий, – пишет Н.И. Лобачевский, – увеличивается по мере их приближения к начальным истинам в природе; также, как она возрастает в другом направлении, к той границе, куда стремится ум за новыми познаниями» [12, с.185].

В последнее время контраст между внутренней упорядоченностью теории и остротой нерешенных пограничных проблем, в том числе педагогических, усилился многократно. Справедливость этого тезиса наглядно демонстрирует пример симплектической геометрии, которая сформировалась в итоге длительного развития механики, вариационного исчисления и т.д. Для краткости данную геометрию излагают теперь аксиоматическим методом, который позволяет опустить долгий исторический путь ее развития. По словам В.И. Арнольда, «сущность этого метода состоит в том, чтобы превращать теоремы в определения. Содержательная часть теоремы становится тогда мотивировкой определения» [2, с. 70]. Без помощи педагога восстановить столь масштабную предысторию исходных понятий теории учащийся не может, поэтому о какой-либо самоочевидности этих начал речи уже не может быть в принципе.

Данный пример не является исключительным. Это видно по тому, что для облегчения первой встречи с такими теориями авторы часто в своих монографиях по математике помещают главу «Предварительные сведения», а сверх этого приводят высказывание П. Халмоша: «Начинающий не должен смущаться, если у него не хватает предварительных знаний даже для чтения предварительных сведений».

Психолого-педагогические аспекты оказания помощи индивиду в неформальном усвоении начал теории, построенной аксиоматически, обсудим на примере общей топологии, которая до объединения с курсом дифференциальной геометрии была в системе высшего математического образования самостоятельным учебным предметом и вызывала у студентов большие трудности. В связи со сложившейся традицией применения аксиоматического метода в преподавании математики время на обстоятельную пропедевтику исходных понятий теории не было предусмотрено. Поэтому для проведения в интересах индивида локального обращения теории соответствующая пропедевтическая программа должна быть максимально короткой. Как известно, в благоприятной учебной ситуации эту программу можно свести к одной-единственной теореме для метрических пространств, а именно, к доказательству того, что отображение одного метрического пространства в другое непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого множества, открытого во втором пространстве, открыт в первом пространстве. Этот факт помогает увидеть, что систему открытых множеств рассматривают в качестве исходного понятия общей топологии не потому, что она «непосредственно понятна», а для того, чтобы сгруппировать накопленные сведения вокруг наиболее ценных достижений предшествующей теории непрерывных отображений.

Для педагогической поддержки перехода от метрических пространств к топологическим опора на такие частные факты важна еще и в силу общих тенденций трансформации математического знания. Дело в том, что для объединения расширяющегося поля сведений приходится использовать понятия с более широким объемом (т.е. классом обобщенных в понятии предметов) и одновременно с более узким содержанием (т.е. совокупностью признаков, по которым произведено выделение предметов в данном понятии). Если ориентироваться на совокупность признаков, то понятия «топология» и «метрика» никак не связаны друг с другом, поскольку в первом случае соответствующая совокупность касается системы подмножеств исходного множества, а во втором случае она касается свойств некоторой числовой функции. Следовательно, при формальном изучении этих понятий представления студентов могут остаться фрагментарными и осмысления перехода от одного понятия к другому именно как обобщения не будет. Но если привлечь внимание студентов к открытым множествам в метрическом пространстве, порождаемым метрикой, то с точки зрения объема понятий факт и способ обобщения станут очевидными.

В силу ряда причин благоприятная учебная ситуация при обучении математике давно стала редкостью, поэтому многим студентам приходится оказывать помощь и в осмыслении понятия метрики, которое тоже является понятием высокого уровня абстракции. Развернутая программа такой помощи описана в статьях [6] и [7]. Принципы построения этой программы в значительной мере определяются дефицитом времени на ее реализацию. Благодаря этому описание названных принципов упрощается.

Во-первых, из-за того, что пропедевтическую лестницу опорных фактов нужно строить с прицелом на ее минимизацию, каждый из этих фактов приобретает особую ценность и потому должен быть усвоен студентами на максимальном уровне качества. В противном случае осмысление организуемого педагогом перехода на новый уровень обобщения застопорится на промежуточном рубеже. В свою очередь, это условие влечет за собой необходимость внесения изменений в систему текущего контроля.

Во-вторых, любой набор опорных фактов для кого-то из студентов окажется избыточным, а для кого-то – недостаточным. Педагогу придется самому принимать решение о том, в каком случае программу помощи нужно расширить, а в каком, напротив, завершить ее реализацию досрочно. Отсюда, в частности, следует, что оптимизация учебного процесса не может достигаться без активного участия педагога при любом уровне технологизации этого процесса.

В-третьих, малый объем вспомогательного материала может сделать всю программу бесполезной из-за недостаточной связности текстов и пропусков в обосновании утверждений. Поэтому при оценке хода и итогов реализации пропедевтической программы нужно опираться не на знания, умения и навыки, а на такие трудно формализуемые критерии, как степень осмысления отдельных понятий и фактов, готовность и способность конкретного студента к восполнению пропущенных деталей и к дальнейшему самостоятельному изучению данного курса. Осуществить диагностику таких аспектов обучения может только педагог, поэтому в системе текущего контроля нужно заранее предусматривать мероприятия, основанные на диалогах между педагогом и студентами.

В-четвертых, воспрепятствовать достижению поставленных целей могут также пробелы в предшествующей подготовке студентов по сопутствующим вопросам, касающимся, например, теории множеств, общих свойств отображений, понятия непрерывного отображения и т.п. Если педагог отважится не отступать перед этим «девятым» валом вскрывающихся проблем, то рассматриваемую программу пропедевтики придется дополнять набором подпрограмм корректирующего обучения по смежным направлениям, определяя их необходимый объем по ходу учебного процесса.

Эти, во многом вынужденные, шаги задают следующую схему педагогической поддержки студентов при изучении ими начал топологии и в целом понятий высокого уровня абстракции. Центральное место в ней занимает последовательность опорных фактов, реализующая искомое локальное обращение аксиоматической теории. Важную роль играют также вспомогательные задания с иной направленностью, которые призваны готовить фундамент для обобщений, восполнять пробелы в подготовке, корректировать различные технические навыки вплоть до перестройки учебной деятельности студентов. Фактически эти задания должны образовать защитную (трубчатую) окрестность основной пропедевтической линии и блокировать влияние побочных проблем на формирование требуемых представлений.

В том, что в программу пропедевтики начал топологии приходится привлекать такой большой объем материала, нет ничего удивительного, поскольку они сами и возникли в результате многоступенчатого сжатия обширного поля сведений. В связи с этим напрашивается аналогия со сверхмассивными черными дырами, открытыми в центре большинства галактик, и аналогия с теорией о том, что эти дыры формировались и развивались во взаимосвязи с окружающими их галактиками. Отмеченная выше многовековая активность математиков в осмыслении начал евклидовой геометрии и острые проблемы «распредмечивания» начал современных математических теорий подтверждают, что понятия высокого уровня абстракции, как и названные объекты во вселенной, индуцируют в своей окрестности бурные процессы и взаимодействия.

Такой взгляд на ситуацию позволяет прийти к общему выводу о том, что имеющиеся модели управления образовательными процессами должны быть дополнены специальными моделями управления в окрестности названных сингулярностей информационного пространства. Несмотря на локальный характер этих дополнений их влияние на образовательные процессы может быть очень большим. Некоторые каналы такого влияния уже достаточно ясны.

Так, строгий контроль за качеством обоснования основных утверждений из коррекционно-пропедевтической программы дает студентам возможность на собственном опыте увидеть, что опора на связи между фактами способствует сжатию материала во внутреннем плане и формированию профессиональной памяти. Как показано в статье [8], названная направленность контроля содействует также формированию профессионального внимания.

Построение укороченной пропедевтики сложных понятий дает педагогу и повод, и цель, и опыт использования сильно связанных последовательностей задач, а затем и опыт компоновки «трубчатых» окрестностей для этих последовательностей. Значение этого опыта очень велико. По словам Г.В. Дорофеева, «проблема систематизации приемов варьирования задач, создания циклов задач различного назначения является весьма актуальной для совершенствования процесса обучения будущих учителей, но исключительно сложна как в теоретическом, так и в практическом плане» [4, с. 39]. В рассматриваемом случае все упрощается вследствие того, что фактор времени делает коридор для выбора вариантов очень узким. Попутно отметим, что варьирование задач позволяет осуществить операционализацию известного принципа системы Л.В. Занкова – принципа обучения на высоком уровне трудности [9].

Так как силовое поле понятия высокого уровня абстракции во многом само предопределяет последовательность педагогических действий, то можно рассчитывать, что педагогу, отважившемуся на проведение глубоких коррекционно-пропедевтических мероприятий, благодаря их адресному характеру, будет сопутствовать успех, который, в свою очередь, укрепит творческую активность педагога и облегчит ему выбор эффективных методов дальнейшей работы. Как было показано выше, начала аксиоматической теории сродни Двуликому Янусу: одной своей стороной они в буквальном смысле обращены в прошлое, а другой – в будущее. И если педагог ради пропедевтики этих начал на время вернется вместе с участниками учебного процесса в далекое прошлое теории, то и ради учащегося, отставшего от программы, он сможет вернуться с ним по цепям связей между фактами на несколько ступеней назад – с уверенностью в успехе и в последующем ускорении учебного процесса.

Этот режим управления с переключением приоритетных направлений в действиях педагога принципиально актуален по нескольким причинам. Во-первых, он хорошо согласуется со структурой математического знания. Г. Вейль в своем докладе от 3 декабря 1929 г. привел такие слова Ф. Клейна: «Знание начинается, так сказать, в середине и теряется в неизвестности не только вверху, но и внизу. Наша задача – рассеивать тьму в обоих этих направлениях» [11, с. 424]. Очевидно, эти слова нужно адресовать не только математикам, но и тем, кто ее преподает. Во-вторых, включение в учебный процесс большого числа корректирующих мероприятий позволяет в управлении образовательными процессами перейти от идеала абсолютной устойчивости, который в современных условиях уже не достижим, на динамический тип устойчивости, который для своей поддержки требует активных усилий со стороны педагога.

Вопреки ожиданиям, трудные проблемы, порождаемые началами математических теорий, создают хорошую основу для педагогики сотрудничества. В этом месте педагог не может не прийти на помощь учащемуся, а учащийся не может от нее отказаться. Из-за узкого коридора возможностей им приходится тесно согласовывать свои действия, а успех, который может быть только общим, позитивно скажется в дальнейшем на обеих сторонах взаимодействия. Именно наличие хорошо различимого и сложного препятствия удерживает учащегося на достаточно высоком уровне активности и позволяет ему накапливать позитивные эффекты от каждого шага коррекции – в духе энергетической накачки лазера. Для педагога этот локальный эпизод учебного процесса ценен проявляющимся каскадом зависимостей, которые соединяют чисто методические аспекты обучения конкретному разделу математики и методологические аспекты управления образовательными процессами на основе нелинейных и стохастических моделей.

Эффективность предложенного способа решения проблем, порождаемых использованием аксиоматического метода, подтверждается многочисленными результатами его практического применения и хорошим согласованием полученных выводов с разработанной А.Г. Мордковичем концепцией профессионально-педагогической направленности специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте [13].

Литература

1. Арнольд В.И. Математика с человеческим лицом / В.И. Арнольд // Природа. – 1988. – № 3. – С. 117-119.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1990. – С. 128.
3. Глухов А.Г. Книги, пронизывающие века / А.Г. Глухов. – К.: Рад. школа, 1979. – 152 с.
4. Дорофеев Г.В. О составлении циклов взаимосвязанных задач / Г.В. Дорофеев // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34-39.
5. Ермаков В.Г. Социально-культурные и методологические аспекты развивающегося образования / В.Г. Ермаков, Н.Н. Нечаев // Вестник МГЛУ. Сер. «Педагогические науки». – Вып. 562. – Сб. «Психолого-педагогические проблемы развития образования». – М.: ИПК МГЛУ «Рема», 2009. – С. 46-65.
6. Ермаков В.Г. Функции и структура задач при локальном обращении аксиоматических теорий / В.Г. Ермаков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2012. – № 2(72). – С.45-52.
7. Ермаков В.Г. Современные проблемы оптимизации процесса обучения и информационные технологии // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: сборник статей участников Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.). – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 13-18.
8. Ермаков В.Г. Методологические проблемы построения эффективных образовательных технологий и психология внимания / В.Г. Ермаков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 5(92). – С. 15-18.

9. Ермаков В.Г. О проблемах и способах операционализации дидактической системы Л.В. Занкова / В.Г. Ермаков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 2(101). – С. 14-18.

10. Клайн М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн. – М.: Мир, 1984. – 434 с.

11. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2 т. Т.1 / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1989. – 456 с.

12. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Т. 1. Сочинения по геометрии. Геометрические исследования по теории параллельных линий. О началах геометрии / Н.И. Лобачевский. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. – 415 с.

13. Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте / А.Г. Мордкович. – Дисс. ... докт. пед. наук. – М., 1986. – 355 с.

14. Яновская С.А. Из истории аксиоматики / С.А. Яновская // Историко-математические исследования. – Вып. XI. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 63-96.