УДК: 514.1

Об одном способе построения треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского

П.И. Трошин

paul.troshin@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Аннотация

Построено семейство аналогов треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского при помощи системы итерированных функций, связанной с группой изометрий. Найдена зависимость между параметрами полученного семейства, при которой аттрактор гомеоморфен классическому треугольнику Серпинского.

Ключевые слова: треугольник Серпинского, плоскость Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, система итерированных функций.

Напомним, что треугольник Серпинского на евклидовой плоскости можно задать как аттрактор различных систем итерированных функций (СИФ, см. [1]). Приведем пример двух наиболее простых таких СИФ $\{f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}_{i=1}^3$:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5x + \{-0.5\sqrt{3}, -0.5\}, \\ f_2(x) = 0.5x + \{0.5\sqrt{3}, -0.5\}, \\ f_3(x) = 0.5x + \{0, 1\}; \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5x, \\ f_2(x) = 0.5x + \{0.5, 0\}, \\ f_3(x) = 0.5x + \{0.25, 0.25\sqrt{3}\}. \end{cases} \tag{2}$$

В работе [2] для построения аналога треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна была использована СИФ (1), «симметричная» относительно начала координат (Рис. 1). При этом остался открытым вопрос о схожей аналогии для «несимметричного» случая (2). В настоящем докладе мы отвечаем на этот вопрос.

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна, заданную в открытом единичном круге евклидовой плоскости: $\Lambda = (B(0,1), \rho)$, $\rho(x,y) = \operatorname{Arch} \frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Пусть

$$G_a\colon x \ni \Lambda \mapsto \frac{((a,x)(1-\sqrt{1-a^2}) + a^2)a + a^2\sqrt{1-a^2}x}{a^2(1+(a,x))} \in \Lambda$$

— параллельный перенос вектора x на вектор $a \neq 0$, являющийся движением в Λ ([3]). И пусть

$$\lambda\colon 0 \neq x \ni \Lambda \mapsto \frac{x}{|x|} \operatorname{th}(\lambda \operatorname{Arth}|x|) \in \Lambda$$

— действие мультипликативной группы вещественных чисел (умножение на константу по правилу $\rho(O, \lambda x) = \lambda\rho(O,x)$, $\lambda x \uparrow\uparrow x$, см. [4])

Рис. 1: «Симметричный случай», рассмотренный в [2].

Как и в [2], основная идея — построить треугольник Серпинского как аттрактор СИФ на плоскости Лобачевского. Для этого заменим в (2) гомотетии на операцию $\lambda(\cdot)$, а параллельный перенос — на отображение G_a. Получим СИФ $\{f_i \colon \Lambda \to \Lambda\}_{i=1}^{3}$:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5(x), \\ f_2(x) = G_{\{0.5,0\}}(0.5(x)), \\ f_3(x) = G_{\{0.25,0.25\sqrt{3}\}}(0.5(x)). \end{cases} \tag{3}$$

Построенный таким образом аттрактор (Рис. 2) связен, но не гомеоморфен треугольнику Серпинского.

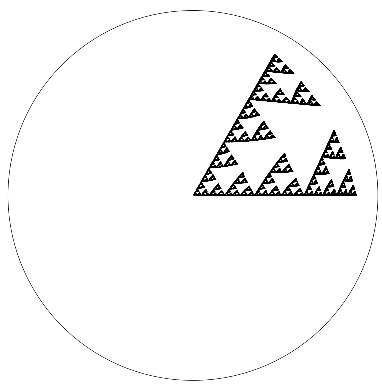

Рис. 2: Аттрактор СИФ (3).

Чтобы добиться желаемого результата, расмотрим более общую СИФ:

$$\begin{cases} f_1(x) = \lambda(x), \\ f_2(x) = G_{c\{1,0\}}(\mu(x)), \\ f_3(x) = G_{c\{\cos\phi, \sin\phi\}}(\mu(x)), \end{cases} \tag{4}$$

в которой $c \in (0,1)$, $\phi \in (0,\pi)$, $\lambda, \mu \in (0,1)$.

Предложение. *Пусть* $\mu = 1 - \lambda$ *и*

$$\lambda = \lambda(\phi, c) = \frac{\operatorname{Arth} c}{\operatorname{Arth}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}+\left(\sqrt{1-c^2}-1\right)\cos\phi}\right) + \operatorname{Arth} c}.$$

Тогда аттрактор СИФ (4) гомеоморфен аттрактору СИФ (2) (треугольнику Серпинского), см. Рис. 3.

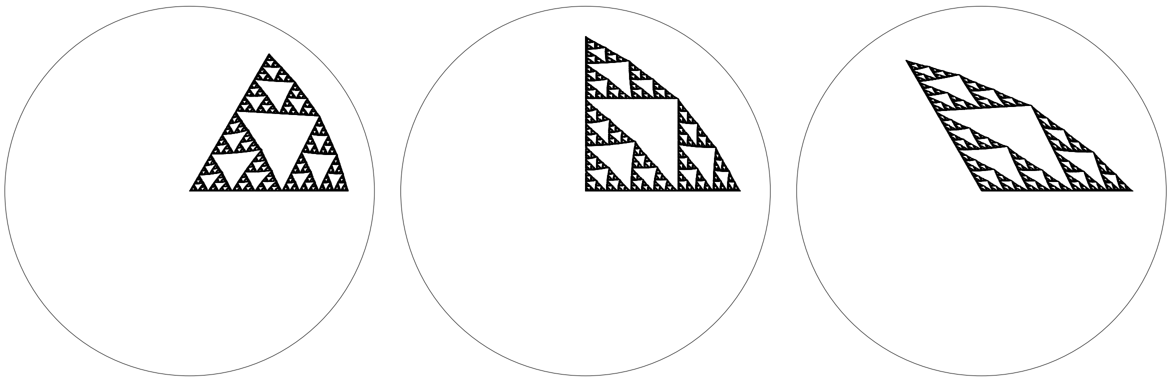

Рис. 3: Примеры аттракторов СИФ (4) при $\phi = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$, $c = 0.5$, $\lambda = \lambda(\phi, c)$, $\mu = 1-\lambda$.

Область определения функции $\lambda(\phi, c)$ задается неравенством

$$\left|\frac{c}{\left(\sqrt{1-c^2}-1\right)\cos\phi + \sqrt{1-c^2}}\right| < 1.$$

График функции $\lambda(\phi, c)$ и ее область определения представлены на Рис. 4. Отметим, что $\lambda \in (0, 0.5)$.

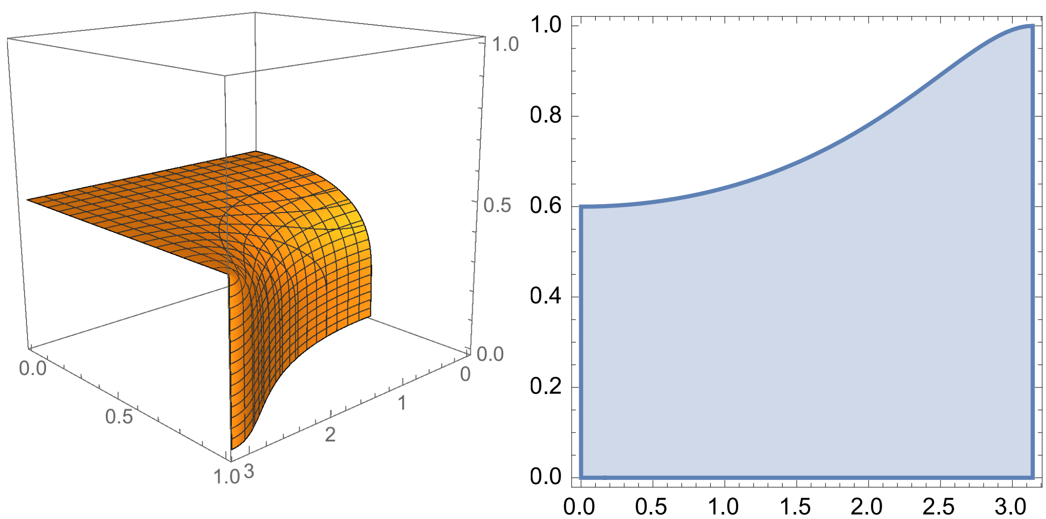

Рис. 4: График функции $\lambda(\phi, c)$ и ее область определения.

Заметим также, что для построения графика удобнее пользоваться его неявным заданием:

$$\operatorname{th}\left(\frac{(\lambda-1)\operatorname{Arth}(c)}{\lambda}\right)\left(\sqrt{1-c^2} + \left(\sqrt{1-c^2}-1\right)\cos\phi\right) + c = 0.$$

Список литературы

[1] Barnsley M. F., Demko S. *Iterated function systems and the global construction of fractals* // Proc. R. Soc. London – 1985. – V. A399. – P. 243–275.

[2] Troshin P. I. *On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane* // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2017. – V. 38. – № 4. – P. 751–762.

[3] Sosov E. N. *Lobachevskii geometry and its application in general relativity: textbook* (Kazan Federal University, Kazan, 2016).

[4] Sosov E. N. *On the action of the multiplicative group of nonzero real numbers on the pointed Lobachevsky space* // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki – 2012. – V. 154. – № 4. – P. 156–160.

On one method to produce an analogue of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane

P.I. Troshin

Abstract

A family of analogues to Sierpiński gasket is constructed in Lobachevskii plane with the help of iterated function system connected to isometry group. We found a relationship between parameters of this family such that attractor is homeomorphic to classical Sierpiński gasket.

Keywords: Sierpiński gasket, Lobachevskii plane, Beltrami–Klein model, iterated function system.