УДК 530.1

ГАМИЛЬТОНОВ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР СОЛИТОННОГО ТИПА

БЕЛАШОВ В.Ю.[1], *БЕЛАШОВА Е.С.*[2]

(КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ[1], *КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.Н. ТУПОЛЕВА – КАИ*[2]*)*

В настоящей работе будем рассматривать аналитические подходы к изучению проблемы устойчивости неодномерных солитонов и нелинейных волновых пакетов, которые описываются классом уравнений Белашова-Карпмана (БК):

$$\partial_t u + \mathrm{A}(t,u)u = f, \qquad f = \kappa\int_{-\infty}^{x}\Delta_\perp u dx, \qquad \Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2, \tag{1}$$

где в случае, когда $\mathrm{A}(t,u) = \alpha u\partial_x - \partial_x^2(\nu - \beta\partial_x - \gamma\partial_x^3)$, имеем обобщенное уравнение Кадомцева-Петвиашвили (ОКП), которое при $\beta \equiv 4\pi nT/B^2 << 1$ и $\omega < \omega_B = eB/Mc,\ k\lambda_D << 1$ описывает распространение быстрых магнитозвуковых (БМЗ) волн в замагниченной плазме с $k_x^2 >> k_\perp^2,\ v_x << c_A$ вблизи конуса углов $\theta = \arctan(M/m)^{1/2}$. При этом функция u имеет смысл безразмерной амплитуды магнитного поля волны, $h = B_\sim / B$, коэффициенты определяются значениями параметров плазмы и углом $\theta = (\mathbf{B},\mathbf{k})$. Если же $\mathrm{A}(t,u) = 3s|p|^2 u^2\partial_x - \partial_x^2(i\lambda + \nu)$, (1) переходит в 3-мерное (3D) уравнение Шредингера с производной нелинейного члена (3-DNLS), которое при $\beta > 1$ описывает динамику альфвеновских волн, распространяющихся в направлении, близком к **B**, $u = h = (B_y + iB_z)/2B|1-\beta|$, $\mathbf{h} = \mathbf{B}_\perp / B_0$, где $p = (1+ie)$, а e – эксцентриситет эллипса поляризации волны. Верхний и нижний знаки $\lambda = \pm 1$ отвечают волне с круговой правой и левой поляризацией соответственно, знак нелинейности учитывается коэффициентом $s = \mathrm{sgn}(1-p) = \pm 1$ при нелинейном члене; $\kappa = -r_A/2$, $r_A = v_A/\omega_{0i}$.

Уравнения (1) не являются в общем случае полностью интегрируемыми, и вопрос существования неодномерных солитонных (устойчивых) их решений требует специального исследования. Рассмотрим этот вопрос отдельно для уравнений ОКП и 3-DNLS.

Уравнение ОКП. Полагая, что диссипация в среде отсутствует (ν=0), запишем уравнение ОКП в гамильтоновском виде

$$\partial_t u = \partial_x(\delta \mathrm{H}/\delta u) \tag{2}$$

с гамильтонианом $\mathrm{H} = \int[-(\varepsilon/2)(\partial_x u)^2 + (\lambda/2)(\partial_x^2 u)^2 + (\nabla_\perp\partial_x v)^2/2 - u^3]d\mathbf{r}$, где $\partial_x^2 v = u$, $\varepsilon = \beta|\gamma|^{-1/2}$, $\lambda = \mathrm{sgn}\,\gamma$. Стационарные решения уравнения (2) определяются из вариационной задачи δ (H + vP_x) = 0 ($P_x = (1/2)\int u^2 d\mathbf{r}$ – проекция импульса на ось x; v имеет смысл множителя Лагранжа), которая иллюстрирует тот факт, что все финитные решения уравнения (2) являются стационарными точками гамильтониана при фиксированном P_x. Согласно теореме Ляпунова, в динамической системе абсолютно устойчивыми будут те стационарные точки, которые реализуют минимум или максимум H. Если данный экстремум является локальным, то возможны локально устойчивые решения. Неустойчивые состояния соответствуют монотонной зависимости H от своих переменных, т.е. случаям, когда стационарная точка является седловой. Таким образом, требуется доказать ограниченность H (снизу) при фиксированном P_x.

Рассмотрим в действительном векторном пространстве R масштабные преобразования вида $u(x,\mathbf{r}_\perp) \to \zeta^{-1/2}\eta^{(1-d)/2}u(x/\zeta, \mathbf{r}_\perp/\eta)$ (d – размерность задачи; $\zeta,\ \eta \in$ R), сохраняющие проекцию импульса P_x. Гамильтониан как функция параметров $\zeta,\ \eta$ примет вид

$$\mathrm{H}(\zeta,\eta) = a\zeta^{-2} + b\zeta^2\eta^{-2} - c\zeta^{-1/2}\eta^{(1-d)/2} + e\zeta^{-4}, \tag{3}$$

где $a = -(\varepsilon/2)\int(\partial_x u)^2 d\mathbf{r}$, $b = (1/2)\int(\nabla_\perp\partial_x v)^2 d\mathbf{r}$, $c = \int u^3 d\mathbf{r}$, $e = (\lambda/2)\int(\partial_x^2 u)^2 d\mathbf{r}$. Решая совместно системы уравнений, представляющих собой необходимые условия существования экстремума гамильтониана, и системы неравенств, имеющих смысл достаточных условий существования локального минимума H для d =2, 3, получим следующие результаты. В 2D случае при $\lambda = 1, \varepsilon \le 0$ гамильтониан при фиксированном P_x ограничен снизу и, следовательно, 2D решения абсолютно устойчивы, т.е. представляют собой 2D солитоны уравнения ОКП. В случаях $\lambda = 1, \varepsilon > 0$ и $\lambda = -1, \varepsilon < 0$ гамильтониан имеет локальные минимумы, и уравнение (2) может иметь локально устойчивые (солитонные) решения для некоторых значений параметров. Все остальные случаи отвечают неустойчивым 2D решениям.

В 3D случае решение соответствующей системы уравнений и неравенств позволяет установить, что абсолютно устойчивые 3D решения (3D солитоны уравнения ОКП) будут существовать при $\lambda = 1, \varepsilon > 0$, а локально устойчивые – при $\lambda = 1, \varepsilon \le 0$, если удовлетворяется условие $ab^2e/c^4 < 9/512$ на интегральные коэффициенты гамильтониана (3). Это весьма примечательный факт, что уравнение ОКП, в отличие от обычного уравнения КП, может иметь устойчивые 3D солитонные решения. Приложение этого анализа к задаче распространения 3D пучка БМЗ волн в замагниченной плазме позволяет нам, например, доказать, что такой пучок, распространяющийся под углом θ к магнитному полю, не фокусируется и становится стационарным и устойчивым в конусе углов $\theta < \arctan(M/m)^{1/2}$, если выполняется условие $(m/M - \cot^2\theta)^2[\cot^4\theta(1+\cot^2\theta)]^{-1} > 4/3$. Отметим также, что полученные нами результаты дают возможность корректной интерпретации наших результатов по динамике солитонов ВГВ, возбуждаемых на высотах F-слоя ионосферы источниками импульсного типа.

Уравнение 3-DNLS. Аналогичный подход для уравнения 3-DNLS, записанного, при формальной замене $u \to h$ в форме (2) с гамильтонианом

$$\mathrm{H} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}|h|^4 + \lambda s h h^* \partial_x \varphi + \frac{1}{2}\kappa\left(\nabla_\perp \partial_x w\right)^2\right] d\mathbf{r}, \quad \partial_x^2 w = h,\ \varphi = \arg(h), \tag{4}$$

приводит при анализе деформаций $\mathrm{H}(\zeta,\eta) = a\zeta^{-1}\eta^{-2} + b\zeta^{-1} + c\zeta^2\eta^{-2}$, сохраняющих проекцию импульса $P_x = \frac{1}{2}\int |h|^2\, d\mathbf{r}$, к аналогу выражения (3): $\mathrm{H}(\zeta,\eta) = a\zeta^{-1}\eta^{-2} + b\zeta^{-1} + c\zeta^2\eta^{-2}$, где $a = (1/2)\int |h|^4\, d\mathbf{r}$, $b = \lambda s \int h h^* \partial_x \varphi\, d\mathbf{r}$, $c = (\sigma/2)\int (\nabla_\perp \partial_x w)^2 d\mathbf{r}$. Решение задачи устойчивости приводит, при этом, к следующему результату. Гамильтониан (4) ограничен снизу:

$$\mathrm{H} > -3bd/(1+2d^2), \quad b < 0, \tag{5}$$

если выполняется условие $ac^{-1} < d = \left(2\sqrt{2}\right)^{-1}\sqrt{13+\sqrt{185}}$, и в этом случае 3D решения уравнения 3-DNLS устойчивы, в противоположном же случае, $ac^{-1} \ge d,\ b < 0$, – неустойчивы. Условие $b < 0$ отвечает волне в правой круговой поляризацией, распространяющейся в плазме с $p = 4\pi nT/B^2 > 1$, т.е. когда $\lambda = 1,\ s = -1$ в уравнениях (2), (4), и с левой поляризацией, когда $\lambda = -1,\ s = 1$. Однако, необходимо отметить, что смена знака $\lambda = 1 \to -1,\ s = -1 \to 1$ эквивалентна замене $t \to -t, \kappa \to -\kappa$ и для отрицательных к гамильтониан становится отрицательным в области, занимаемой 3D волной, слабо ограниченной в направлении $\mathbf{k}_\perp$, в этом случае условие (5) уже не выполняется. Смена знака b на положительный [когда $\lambda = 1,\ s = 1$ или $\lambda = -1,\ s = -1$ в (2), (4)] эквивалентно аналитическому продолжению решения с действительных y, z на чисто мнимые: $y \to -iy,\ z \to -iz$ и, следовательно, смене знака κ в основных уравнениях. В этом случае условие устойчивости будет определяться неравенством типа (5), но с противоположным знаком. С физической точки зрения это означает, что если такое условие будет выполняться, правополяризованные волны с положительной нелинейностью и левополяризованные волны с отрицательной нелинейностью будут устойчивыми.

Итак, анализ трансформационных свойств гамильтониана уравнения 3-DNLS позволил нам установить области значений коэффициентов уравнения и значения гамильтониана (который имеет смысл энергии системы), отвечающие устойчивым и неустойчивым 3D решениям.

HAMILTONIAN ANALYSIS OF STABILITY OF MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR WAVE STRUCTURES OF SOLITON TYPE

BELASHOV V.YU.[1], BELASHOVA E.S.[2]

(KAZAN FEDERAL UNIVERSITY[1], KAZAN NATIONAL RESEARCH TECHNICAL UNIVERSITY NAMED AFTER A N. TUPOLEV – KAI[2])

The stability of two-dimensional and three-dimensional solitons and nonlinear wave packets which are described by the Kadomtsev-Petviashvili and DNLS equations classes is analytically studied on the basis of Hamiltonian approach. The sufficient conditions of stability of the solutions are formulated on the basis of the analysis of the transformational properties of the Hamiltonians.