УДК 539.3

Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Краевая задача несимметричной деформации цилиндрического резервуара с жидкостью в температурном поле

Строится точное решение несимметричной краевой задачи теории упругости для цилиндрического резервуара с жидкостью, находящегося в температурном поле. Термоупругая задача несвязанная, то есть вначале решается уравнение теплопроводности, затем линейная задача теории упругости для кругового цилиндра в перемещениях.

Следует отметить, что до настоящего времени точных решений несимметричной задачи теории упругости в цилиндрической системе координат с учетом температурного поля не существовало. Это объясняется сложностью системы разрешающих уравнений - высокий порядок, переменные коэффициенты. Авторам статьи удалось построить интегрируемые комбинации решаемых уравнений, вначале без учета, в настоящей работе с учетом температурных членов. Для этого в систему разрешающих уравнений вместо соотношения, связывающего объемную деформацию с перемещениями точек цилиндра, было введено дополнительное уравнение относительно объемной деформации. С учетом уравнения теплопроводности удалось свести его к уравнению, полученному ранее без учета температурных членов. В результате задача свелась к последовательному решению каждого уравнения в отдельности. Поскольку дополнительное уравнение было получено дифференцированием остальных уравнений, порядок системы разрешающих уравнений увеличился, что привело к появлению в решении «лишних» постоянных интегрирования. Авторами доказано, что использование в качестве дополнительного условия замененного соотношения между объемной деформацией и перемещениями устраняет этот недостаток.

Построено точное решение краевой задачи для цилиндрического резервуара с жидкостью при условии линейной зависимости температуры и перемещений цилиндра вдоль его оси. Рассмотрен числовой пример, в котором температура внешней боковой поверхности цилиндра меняется только в окружном направлении.

Ключевые слова: температура, теория упругости, несвязанная задача, перемещения.

N.G. Gur'jyanov, O.N.Tyuleneva

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia

Boundary value problem of nonsymmetrical deformation of cyliundrical vessel with liquid in thermal field

We framed a precise solution of nonsymmetrical boundary value problem of elasticity theory for a cylindrical vessel with liquid, placed in the thermal field. Thermoelastic problem is unlinked, i.e. at first we solve the thermal conductivity equation, and then linear problem of elasticity theory for a circular cylinder in movements.

It should be noted that until the present time there were no precise solutions of nonsymmetrical problem of elasticity theory in cylindrical coordinate system with consideration of the thermal field. It is explained by complexity of the system of resolvent equations - high order, variable coefficients. The authors of the article managed to form integrable combinations of resolvent equations in this work, at first without consideration and then with consideration of the thermal fields.For this purpose an additional equation related to volumetric deformation was introduced into the system of resolvent equations instead of the relator connecting volumetric deformation with movement of cylinder points. With consideration of heat conduction equation we managed to lead it to the equation obtained earlier without consideration of thermal elements. As a result the problem was led to successive solution of each equation separately. Since the additional equation was obtained by derivation of the rest equations, the order of resolvent equations system became higher, which led to appearance of "excess" constants of integration. The authors proved that use of the replaced correlation between volumetric deformation and movements as additional condition eliminated this disadvantage.

We formed a precise solution of the boundary value problem for a cylindrical vessel with a liquid upon condition of linear dependence of temperature and movements of the cylinder along its axis. Numerical example was considered, where temperature of external side area of the cylinder is changed in circumferential direction.

Key words: temperature, elasticity theory, unlinked problem, movements.

Решением задач деформации цилиндрических конструкций в температурных и силовых полях ученые всего мира занимаются более 100 лет. Рассматривались в основном одномерные и двумерные задачи (стержни, балки, пластины, тонкие оболочки, осесимметричные задачи теории упругости, бесконечно длинные цилиндры).

К середине прошлого века были построены разрешающие уравнения, описывающие деформацию оболочек вращения, а также получены точные решения простейших задач упругости и термоупругости, являющиеся в настоящее время классическими [1]- [13]. Абсолютное большинство точных решений реализовано в декартовой системе координат, так как уравнения в этой системе наиболее просты. Построено несколько решений осесимметричных краевых задач теории упругости в цилиндрических и сферических координатах [21]-[32]. Точных решений трехмерных краевых задач теории упругости практически не было. Решены были только уравнения относительно объемной деформации цилиндра и шара [9]. Это было связано с непреодолимыми на тот момент трудностями построения интегрируемых комбинаций разрешающих уравнений как относительно перемещений, так и напряжений.

С последней четверти XX века появилось большое количество приближенных решений, в том числе и трехмерных задач, основанных на численных методах. Численные решения позволили существенно увеличить число рассматриваемых областей, в том числе сложных конфигураций. Поскольку при численном решении не важно, какой системе координат решать краевую задачу, использовалась декартова система координат.

Интерес к аналитическим решениям задач появился, когда встал вопрос о достоверности численных решений. Проверка могла быть осуществлена либо экспериментом, что затруднительно по финансовым и иным соображениям, либо сравнением с точными решениями.

Для увеличения числа аналитических решений краевых задач, стало необходимым получать решения в иных системах координат. Однако, преодолеть трудности решения уравнений и выполнения краевых условий, близких к реальным, удалось не сразу.

Привести систему разрешающих уравнений трехмерной теории упругости в цилиндрической и сферической системах координат к отдельным уравнениям относительно каждой искомой функции и проинтегрировать их удалось авторам данной статьи [14]- [20]. Опубликованных работ этого направления иных авторов нет. Настоящая работа обобщает эти результаты на задачу теомоупругости.

В цилиндрической системе координат α, β, γ рассматривается несвязанная задача термоупругости для цилиндрического резервуара с жидкостью, причем первая координата отнесена к внешнему радиусу резервуара *R*, третья – к его высоте *H*, вторая координата - есть угол поворота вдоль направляющей. Таким образом, исследуемая область $t \le \alpha \le 1, -\pi \le \beta \le \pi, 0 \le \gamma \le 1$, причем $t = \dfrac{r}{R}$, r – радиус внутренней боковой поверхности.

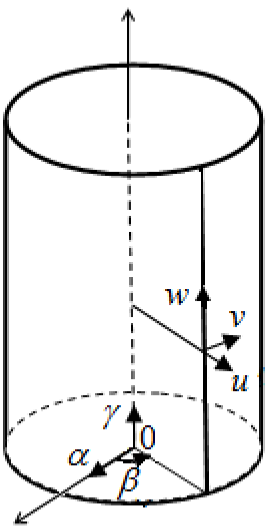

Рис.1

Система разрешающих уравнений задачи термоупругости может быть представлена следующим образом [8]

$$\Delta T = 0\,, \qquad \Delta\theta = 0\,,$$

$$\Delta w + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} - \frac{\eta}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right] = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \eta\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right] - \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0\,,$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)v + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - \frac{\eta}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right] + \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0\,.$$

Здесь u, v, w – перемещения вдоль координаты α, окружном β и вдоль γ соответственно (Рис.1); θ – объемная деформация; T – температура тела; α_T – температурный коэффициент линейного расширения; E, υ – модуль упругости и коэффициент Пуассона; ρ – плотность жидкости;

$$\varepsilon = \frac{H}{R}; \quad \eta = 2(1+\upsilon)\alpha_T\,, \quad f = \frac{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\rho\, H}{E}\,,$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\,. \tag{2}$$

Первое уравнение системы – есть уравнение теплопроводности для несвязанной задачи термоупругости, второе - уравнение относительно объемной деформации, включенное в систему разрешающих уравнений вместо соотношения

$$\theta = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(\alpha\, u)}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right], \tag{3}$$

используемого в дальнейшем в качестве дополнительного условия для определения значений «лишних» произвольных постоянных, появившихся в решении в результате повышения порядка системы после включения в нее уравнения $\Delta\theta = 0$ [14].

Точное решение системы (1) строится в предположении, что температура и перемещения линейны относительно координаты γ. Этот вариант встречается при исследовании деформации резервуаров, заполненных жидкостью.

Периодическое по β решение системы (1) ищется в виде

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = T_0(\alpha, \gamma) + T_1(\alpha, \gamma)\cos\beta, \quad \theta(\alpha, \beta, \gamma) = \theta_0(\alpha, \gamma) + \theta_1(\alpha, \gamma)\cos\beta,$$

$$w(\alpha, \beta, \gamma) = w_0(\alpha, \gamma) + w_1(\alpha, \gamma)\cos\beta, \tag{4}$$

$$u(\alpha, \beta, \gamma) = u_0(\alpha, \gamma) + u_1(\alpha, \gamma)\cos\beta, \quad v(\alpha, \beta, \gamma) = v_1(\alpha, \gamma)\sin\beta.$$

Замечание. Возможны другие варианты решения, когда меняются местами синусы и косинусы, а также комбинация этих решений.

После подстановки соотношений (4) в систему уравнений (1) приходим к двум системам уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)T_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\theta_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)w_0 = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\theta_0 - \eta\, T_0), \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right]u_0 = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\theta_0 - \eta\, T_0).$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)T_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\theta_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)w_1 = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\theta_1 - \eta\, T_1), \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{4}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right](u_1 + v_1) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)(\theta_1 - \eta\, T_1),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right](u_1 - v_1) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)(\theta_1 - \eta\, T_1).$$

Следует отметить, что последние два уравнения системы (6) получены как сумма и разность четвертого и пятого уравнений из (1).

С учетом предположения о линейности перемещений в направлении γ, считаем

$$T_m(\alpha, \gamma) = T_{m0}(\alpha) + T_{m1}(\alpha)\gamma, \quad \theta_m(\alpha, \gamma) = \theta_{m0}(\alpha) + \theta_{m1}(\alpha)\gamma,$$

$$w_m(\alpha, \gamma) = w_{m0}(\alpha) + w_{m1}(\alpha)\gamma, \tag{7}$$

$$u_m(\alpha\,,\gamma)=u_{m0}(\alpha)+u_{m1}(\alpha)\,\gamma,\qquad v_m(\alpha\,,\gamma)=v_{m0}(\alpha)+v_{m1}(\alpha)\,\gamma,\quad (m=0;1),$$

После подстановки соотношений (7) в уравнения (5) и (6) получаем серию обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате их интегрирования имеем

$$T_{00}(\alpha)=B_{00}^1+B_{00}^2\,\ln\alpha\,,\qquad T_{01}(\alpha)=B_{01}^1+B_{01}^2\,\ln\alpha\,,$$

$$\theta_{00}(\alpha)=A_{00}^1+A_{00}^2\,\ln\alpha\,,\quad \theta_{01}(\alpha)=A_{01}^1+A_{01}^2\,\ln\alpha\,,$$

$$w_{00}(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left[C_{00}^1+C_{00}^2\,\ln\alpha+\frac{1}{4}L_{01}^1\,\alpha^2+L_{01}^2\,\frac{\alpha^2}{4}(\ln\alpha-1)\right],$$

$$w_{01}(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{01}^1+C_{01}^2\,\ln\alpha\right),\tag{8}$$

$$u_{00}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{00}^1\,\alpha+D_{00}^2\,\frac{1}{\alpha}+L_{00}^2\,\alpha\ln\alpha\right],$$

$$u_{01}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{01}^1\,\alpha+D_{01}^2\,\frac{1}{\alpha}+L_{01}^2\,\alpha\ln\alpha\right].$$

Если после интегрирования определить значения u_{10} , v_{10} и u_{11} , v_{11}, то

$$T_{10}(\alpha)=B_{10}^1\,\alpha+B_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}\,,\qquad T_{11}(\alpha)=B_{11}^1\,\alpha+B_{11}^2\,\frac{1}{\alpha}\,,$$

$$\theta_{10}(\alpha)=A_{10}^1\,\alpha+A_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}\,,\quad \theta_{11}(\alpha)=A_{11}^1\,\alpha+A_{11}^2\,\frac{1}{\alpha}\,,$$

$$w_{10}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left\{C_{10}^1\,\alpha+C_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{8}L_{11}^1\alpha^3+\frac{1}{2}L_{11}^2\,\alpha\ln\alpha\right\},$$

$$w_{11}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{11}^1\,\alpha+C_{11}^2\,\frac{1}{\alpha}\right),\tag{9}$$

$$u_{10}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{10}^1+L_{10}^1\right)\alpha^2+D_{10}^2\,\frac{1}{\alpha^2}+L_{10}^2+D_{10}^3+D_{10}^4\,\ln\alpha\right],$$

$$v_{10}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{10}^1-L_{10}^1\right)\alpha^2+D_{10}^2\,\frac{1}{\alpha^2}+L_{10}^2-D_{10}^3-D_{10}^4\,\ln\alpha\right],$$

$$u_{11}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{11}^1+L_{11}^1\right)\alpha^2+D_{11}^2\,\frac{1}{\alpha^2}+L_{11}^2+D_{11}^3+D_{11}^4\,\ln\alpha\right],$$

$$v_{11}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{11}^1-L_{11}^1\right)\alpha^2+D_{11}^2\,\frac{1}{\alpha^2}+L_{11}^2-D_{11}^3-D_{11}^4\,\ln\alpha\right].$$

Здесь A_{mn}^k , B_{mn}^k , C_{mn}^k , D_{mn}^k – постоянные интегрирования,

$$L_{mn}^k=A_{mn}^k-\eta\,B_{mn}^k\,.\tag{10}$$

С учетом соотношений (4), (7) дополнительное условие (3) приводит к тождествам

$$\theta_{00} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d(\alpha\, u_{00})}{d\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\, w_{01}\right),\;\; \theta_{01} \equiv \frac{1}{R\,\alpha}\frac{d(\alpha\, u_{01})}{d\alpha}, \tag{11}$$

$$\theta_{10} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d(\alpha\, u_{10})}{d\alpha} + \frac{1}{\alpha}v_{10} + \frac{1}{\varepsilon}\, w_{11}\right),\;\; \theta_{11} \equiv \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{d(\alpha\, u_{11})}{d\alpha} + \frac{1}{\alpha}v_{11}\right].$$

Подставляя в первые два из них соотношения (8), получаем

$$2(1-2\upsilon)\left(A_{00}^1 + A_{00}^2 \ln\alpha\right) + 2D_{00}^1 + L_{00}^2\,(2\ln\alpha + 1) + \frac{2}{\varepsilon^2}\left(C_{01}^1 + C_{01}^2 \ln\alpha\right) \equiv 0\,,$$
$$2(1-2\upsilon)\left(A_{01}^1 + A_{01}^2 \ln\alpha\right) + 2D_{01}^1 + L_{01}^2\,(2\ln\alpha + 1) \equiv 0\,,$$

откуда следует

$$2(1-2\upsilon)A_{00}^1 + 2D_{00}^1 + L_{00}^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = 0\,,\quad (1-2\upsilon)A_{00}^2 + L_{00}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = 0\,,$$
$$2(1-2\upsilon)A_{01}^1 + 2D_{01}^1 + L_{01}^2 = 0\,,\quad (1-2\upsilon)A_{01}^2 + L_{01}^2 = 0\,,$$

А с учетом (10)

$$2(1-2\upsilon)A_{00}^1 + A_{00}^2 + 2D_{00}^1 - \eta\, B_{00}^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = 0\,,\quad 2(1-\upsilon)A_{00}^2 - \eta\, B_{00}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = 0\,,$$
$$\left[2(1-2\upsilon)A_{01}^1 + A_{01}^2\right] + 2D_{01}^1 - \eta\, B_{01}^2 = 0\,,\quad 2(1-\upsilon)A_{01}^2 - \eta\, B_{01}^2 = 0\,.$$

В результате

$$\frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = -\left[(1-2\upsilon)A_{00}^1 + \frac{1}{2}A_{00}^2\right] - D_{00}^1 + \frac{\eta}{2}\,B_{00}^2\,,\qquad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = -2(1-\upsilon)A_{00}^2 + \eta\, B_{00}^2\,.$$

$$D_{01}^1 = -(1-2\upsilon)A_{01}^1 + \frac{(1-2\upsilon)\,\eta}{4(1-\upsilon)}\,B_{01}^2\,,\quad A_{01}^2 = \frac{\eta}{2(1-\upsilon)}\,B_{01}^2.$$

Из третьего условия (11) имеем

$$4(1-2\upsilon)\left(A_{10}^1\,\alpha + A_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}\right) + 3\left(D_{10}^1 + L_{10}^1\right)\alpha - \overline{D_{10}^2\,\frac{1}{\alpha^3}} + \left(L_{10}^2 + \underline{D_{10}^3}\right)\frac{1}{\alpha} + D_{10}^4\,\frac{\left(\overline{\overline{\ln\alpha}} + 1\right)}{\alpha} +$$
$$+\left(D_{10}^1 - L_{10}^1\right)\alpha + \overline{D_{10}^2\,\frac{1}{\alpha^3}} + \left(L_{10}^2 - \underline{D_{10}^3}\right)\frac{1}{\alpha} - D_{10}^4\,\frac{\overline{\overline{\ln\alpha}}}{\alpha} + \frac{4}{\varepsilon^2}\left(C_{11}^1\,\alpha + C_{11}^2\,\frac{1}{\alpha}\right) \equiv 0\,.$$

Очевидно,

$$4(1-2\upsilon)A_{10}^1 + 4D_{10}^1 + 2L_{10}^1 + \frac{4}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = 0\,,\quad 4(1-2\upsilon)A_{10}^2 + 2L_{10}^2 + D_{10}^4 + \frac{4}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = 0\,,$$

$$(3-4\upsilon)A_{10}^1 + 2D_{10}^1 - \eta\, B_{10}^1 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = 0\,,\quad (3-4\upsilon)A_{10}^2 - \eta\, B_{10}^2 + \frac{1}{2}D_{10}^4 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = 0\,,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = \frac{\eta}{2}\,B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1 - D_{10}^1\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = \frac{\eta}{2}\,B_{10}^2 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^2 - \frac{1}{4}D_{10}^4\,.$$

Последнее условие из (11) приводит к

$$4(1-2\upsilon)\left(A_{11}^{1}\,\alpha+A_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right)+3\left(D_{11}^{1}+L_{11}^{1}\right)\alpha-\overline{D_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{3}}}+\left(L_{11}^{2}+\underline{D_{11}^{3}}\right)\frac{1}{\alpha}+D_{11}^{4}\,\frac{\left(\overline{\overline{\ln\alpha}}+1\right)}{\alpha}+$$

$$+\left(D_{11}^{1}-L_{11}^{1}\right)\alpha+\overline{D_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{3}}}+\left(L_{11}^{2}-\underline{D_{11}^{3}}\right)\frac{1}{\alpha}-D_{11}^{4}\,\frac{\overline{\overline{\ln\alpha}}}{\alpha}\equiv 0\,,$$

$$2(1-2\upsilon)A_{11}^{1}+2D_{11}^{1}+L_{11}^{1}=0\,,\quad (3-4\upsilon)A_{11}^{1}+2D_{11}^{1}-\eta\,B_{11}^{1}=0\,,$$

$$2(1-2\upsilon)A_{11}^{2}+L_{11}^{2}+\frac{1}{2}D_{11}^{4}=0\,,\quad (3-4\upsilon)A_{11}^{2}+\frac{1}{2}D_{11}^{4}-\eta\,B_{11}^{2}=0\,,$$

$$D_{11}^{1}=\frac{\eta}{2}B_{11}^{1}-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^{1}\,,\;\; D_{11}^{4}=2\eta\,B_{11}^{2}-2(3-4\upsilon)A_{11}^{2}\,.$$

Таким образом, получены соотношения, определяющие значения «лишних» постоянных интегрирования

$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{01}^{1}=-\left[(1-2\upsilon)A_{00}^{1}+\frac{1}{2}A_{00}^{2}\right]-D_{00}^{1}+\frac{\eta}{2}B_{00}^{2}\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{01}^{2}=-2(1-\upsilon)A_{00}^{2}+\eta\,B_{00}^{2}\,,$$

$$D_{01}^{1}=-(1-2\upsilon)A_{01}^{1}+\frac{(1-2\upsilon)\,\eta}{4(1-\upsilon)}B_{01}^{2}\,,\quad A_{01}^{2}=\frac{\eta}{2(1-\upsilon)}\,B_{01}^{2}\,, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{11}^{1}=\frac{\eta}{2}\,B_{10}^{1}-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^{1}-D_{10}^{1}\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{11}^{2}=\frac{\eta}{2}\,B_{10}^{2}-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^{2}-\frac{1}{4}D_{10}^{4}\,,$$

$$D_{11}^{1}=\frac{\eta}{2}B_{11}^{1}-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^{1}\,,\;\; D_{11}^{4}=2\eta\,B_{11}^{2}-2(3-4\upsilon)A_{11}^{2}.$$

При исследовании деформации резервуара с жидкостью одним из обязательных граничных условий является условие, накладываемое на напряжение $\sigma_{\alpha\alpha}$. Это напряжение определяется из соотношений Дюгамеля-Неймана и в принятых обозначениях имеет вид

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{\frac{2(1-2\upsilon)}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+2\upsilon\theta-\eta\,T\right\}.$$

Соотношения (4), (7), позволяют считать

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=\sigma_{\alpha\alpha00}(\alpha)+\sigma_{\alpha\alpha01}(\alpha)\,\gamma+\left[\sigma_{\alpha\alpha10}(\alpha)+\sigma_{\alpha\alpha11}(\alpha)\,\gamma\right]\cos\beta\,,$$

Тогда

$$\sigma_{\alpha\alpha mn}=-\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-\frac{2(1-2\upsilon)}{R}\frac{du_{mn}}{d\alpha}-2\upsilon\theta_{mn}+\eta\,T_{mn}\right\},\quad (m;\,n=0\,;1).$$

После подстановки входящих в эти уравнения соотношений с учетом (12) получаем

$$\sigma_{\alpha\alpha00}=-\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{D_{00}^{1}-D_{00}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}}-2\upsilon A_{00}^{1}+\right.$$

$$\left.+\left[1+(1-2\upsilon)\ln\alpha\right]A_{00}^{2}+\eta\left(B_{00}^{1}-B_{00}^{2}\right)\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha 01} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{D_{01}^{1} - D_{01}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}} - 2\upsilon\, A_{01}^{1} + \right.$$

$$\left. + \left[1 + (1-2\upsilon)\ln\alpha\right] A_{01}^{2} + \eta\left(B_{01}^{1} - B_{01}^{2}\right)\right\}, \tag{13}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha 10} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{D_{10}^{1}\alpha - D_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{3}} + D_{10}^{4}\,\frac{1}{2\alpha} + \right.$$

$$\left. + (1-2\upsilon)A_{10}^{1}\alpha - 2\upsilon\, A_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha} + \eta\, B_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha 11} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{D_{11}^{1}\alpha - D_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{3}} + D_{11}^{4}\,\frac{1}{2\alpha} + \right.$$

$$\left. + (1-2\upsilon)A_{11}^{1}\alpha - 2\upsilon A_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha} + \eta\, B_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Решаем краевую задачу: цилиндрический резервуар с жидкостью находится в несимметричном температурном поле.

Для температурной задачи принимаем следующие краевые условия. Оба торца резервуара и его внутренняя боковая поверхность термоизолированы от внешней среды, то есть

$$\left.\frac{\partial T(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=t} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial T(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial T(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1} = 0\,.$$

Внешняя боковая поверхность имеет температуру

$$T(1\,,\,\beta\,,\,\gamma) = \Theta_{00} + \Theta_{10}\cos\beta\,,$$

параметры Θ_{00}, Θ_{10} постоянны. С учетом соотношений (4), (7), (8), (9) имеем

$$T(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) = T_{00}(\alpha) + T_{01}(\alpha)\,\gamma + \left[T_{10}(\alpha) + T_{11}(\alpha)\,\gamma\right]\cos\beta =$$

$$= B_{00}^{1} + B_{00}^{2}\,\ln\alpha + \left(B_{01}^{1} + B_{01}^{2}\,\ln\alpha\right)\gamma + \left[B_{10}^{1}\,\alpha + B_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha} + \left(B_{11}^{1}\,\alpha + B_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right)\gamma\right]\cos\beta\,,$$

$$\frac{\partial T(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)}{\partial\alpha} = B_{00}^{2}\,\frac{1}{\alpha} + B_{01}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\,\gamma + \left[B_{10}^{1} - B_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}} + \left(B_{11}^{1} - B_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}}\right)\gamma\right]\cos\beta\,,$$

$$\frac{\partial T(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)}{\partial\gamma} = B_{01}^{1} + B_{01}^{2}\,\ln\alpha + \left[B_{11}^{1}\,\alpha + B_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right]\cos\beta\,,$$

Из первого граничного условия

$$B_{00}^{1} + B_{01}^{1}\,\gamma + \left[B_{10}^{1} + B_{10}^{2} + \left(B_{11}^{1} + B_{11}^{2}\right)\gamma\right]\cos\beta \equiv \Theta_{00} + \Theta_{10}\cos\beta\,,$$

$$B_{00}^{1} = \Theta_{00}\,, \quad B_{01}^{1} = 0\,, \quad B_{10}^{1} + B_{10}^{2} = \Theta_{10}\,, \quad B_{11}^{1} + B_{11}^{2} = 0\,.$$

Из второго

$$B_{00}^{2}\,\frac{1}{t} + B_{01}^{2}\,\frac{1}{t}\,\gamma + \left[B_{10}^{1} - B_{10}^{2}\,\frac{1}{t^{2}} + \left(B_{11}^{1} - B_{11}^{2}\,\frac{1}{t^{2}}\right)\gamma\right]\cos\beta \equiv 0\,,$$

откуда следует

$$B_{00}^{2} = 0\,, \quad B_{01}^{2} = 0\,, \quad B_{10}^{1} - B_{10}^{2}\,\frac{1}{t^{2}} = 0\,, \quad B_{11}^{1} - B_{11}^{2}\,\frac{1}{t^{2}} = 0\,.$$

Тогда

$$B_{10}^1 - B_{10}^2\,\frac{1}{t^2} = 0\,,\quad B_{10}^1 + B_{10}^2 = \Theta_{10}\,,\quad \Rightarrow B_{10}^2 = \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,\quad B_{10}^1 = \frac{1}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,$$

$$B_{11}^1 + B_{11}^2 = 0\,,\quad B_{11}^1 - B_{11}^2\,\frac{1}{t^2} = 0\,,\quad \Rightarrow B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0\,.$$

В итоге

$$B_{00}^1 = \Theta_{00}\,,\quad B_{01}^1 = 0\,,\quad B_{00}^2 = 0\,,\quad B_{01}^2 = 0\,,\quad B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0\,,$$

$$B_{10}^2 = \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,\quad B_{10}^1 = \frac{1}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,, \tag{14}$$

то есть в рассматриваемой краевой задаче B_{00}^1, B_{10}^1, B_{10}^2 не равны нулю, остальные – нули.

При полученных значениях постоянных интегрирования $\dfrac{\partial T(\alpha\,,\beta\,,\gamma)}{\partial\gamma} \equiv 0$, следовательно, все краевые условия температурной задачи выполняются.

Граничные условия упругой задачи принимаем в следующем виде

$$\sigma_{\alpha\alpha}(t\,,\beta\,,\gamma) = \rho H(1-\gamma),\quad w(1\,,\beta\,,0) = 0\,,\quad w(1\,,\beta\,,1) = 0\,,$$

$$w(t\,,\beta\,,0) = 0\,,\quad w(t\,,\beta\,,1) = 0\,,\quad u(1\,,\beta\,,0) = 0\,,\quad u(1\,,\beta\,,1) = 0\,, \tag{15}$$

$$v(1\,,\beta\,,0) = 0\,,\quad v(1\,,\beta\,,1) = 0\,,\quad v(t\,,\beta\,,1) = 0\quad v(t\,,\beta\,,0) = 0\,.$$

Кроме этих условий имеем соотношения

$$\frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = -\left[(1-2\upsilon)A_{00}^1 + \frac{1}{2}A_{00}^2\right] - D_{00}^1\,,\qquad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = -2(1-\upsilon)A_{00}^2\,,$$

$$D_{01}^1 = -(1-2\upsilon)A_{01}^1\,,\qquad A_{01}^2 = 0\,, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = \frac{\eta}{2}\,B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1 - D_{10}^1\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = \frac{\eta}{2}\,B_{10}^2 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^2 - \frac{1}{4}D_{10}^4\,,$$

$$D_{11}^1 = -\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1\,,\qquad D_{11}^4 = -2(3-4\upsilon)A_{11}^2\,,$$

которые с учетом (14) следуют из (12).

Из (4), (7) и (13) имеем

$$w(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = w_{00}(\alpha) + w_{01}(\alpha)\,\gamma + \left[w_{10}(\alpha) + w_{11}(\alpha)\,\gamma\right]\cos\beta\,,$$

$$u_{00}(\alpha) + u_{01}(\alpha)\,\gamma + \left[u_{10}(\alpha) + u_{11}(\alpha)\,\gamma\right]\cos\beta\,,$$

$$v(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = \left[v_{10}(\alpha) + v_{11}(\alpha)\,\gamma\right]\sin\beta\,,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = \sigma_{\alpha\alpha 00}(\alpha) + \sigma_{\alpha\alpha 01}(\alpha)\,\gamma + \left[\sigma_{\alpha\alpha 10}(\alpha) + \sigma_{\alpha\alpha 11}(\alpha)\,\gamma\right]\cos\beta\,.$$

В результате из условий (15) получаем

$$w_{00}(1) + w_{10}(1)\cos\beta = 0\,,\quad w_{00}(1) + w_{01}(1) + \left[w_{10}(1) + w_{11}(1)\right]\cos\beta = 0\,,$$

$$w_{00}(t)+w_{10}(t)\cos\beta=0\,,\quad w_{00}(t)+w_{01}(t)+[w_{10}(t)+w_{11}(t)]\cos\beta=0\,,$$

$$u_{00}(1)+u_{10}(1)\cos\beta\,,\quad u_{00}(1)+u_{01}(1)+[u_{10}(1)+u_{11}(1)]\cos\beta=0\,,$$
$$v_{10}(1)=0\,,\quad v_{10}(1)+v_{11}(1)=0\,,\quad v_{10}(t)=0\,,\quad v_{10}(t)+v_{11}(t)=0\,,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(t\,,\beta\,,\gamma)=\sigma_{\alpha\alpha00}(t)+\sigma_{\alpha\alpha01}(t)\,\gamma+[\sigma_{\alpha\alpha10}(t)+\sigma_{\alpha\alpha11}(t)\,\gamma]\cos\beta=\rho H(1-\gamma)\,.$$

откуда следует

$$\begin{gathered}w_{00}(1)=0\,,\quad w_{10}(1)=0\,,\quad w_{01}(1)=0\,,\quad w_{11}(1)=0\,,\\ w_{00}(t)=0\,,\quad w_{10}(t)=0\,,\quad w_{01}(t)=0\,,\quad w_{11}(t)=0\,,\end{gathered},$$

$$u_{00}(1)=0\,,\ u_{10}(1)=0\,,\quad u_{01}(1)=0\,,\quad u_{11}(1)=0\,,\tag{17}$$

$$v_{10}(1)=0\,,\quad v_{11}(1)=0\,,\quad v_{10}(t)=0\,,\quad v_{11}(t)=0\,,$$
$$\sigma_{\alpha\alpha00}(t)=\rho H\,,\quad \sigma_{\alpha\alpha01}(t)=-\rho H\,,\quad \sigma_{\alpha\alpha10}(t)=0\,,\quad \sigma_{\alpha\alpha11}(t)=0\,.$$

Из $w_{01}(1)=0$ и $w_{01}(t)=0$ с учетом соотношений (8) имеем систему $C_{01}^1=0,\quad C_{01}^1+C_{01}^2\ln t=0$, откуда $C_{01}^1=C_{01}^2=0$. Теперь из второго соотношения (16) получаем $A_{00}^2=0$, из первого $D_{00}^1=-(1-2\upsilon)A_{00}^1$. Из третьего и четвертого имеем $D_{01}^1=-(1-2\upsilon)A_{01}^1$, $\quad A_{01}^2=0$.

Из $w_{00}(1)=0$ и $w_{00}(t)=0$ с учетом (8) получаем $C_{00}^1+\dfrac{1}{4}A_{01}^1=0$, $C_{00}^1+C_{00}^2\ln t+\dfrac{1}{4}A_{01}^1\,t^2=0$, откуда следует

$$C_{00}^1=-\frac{1}{4}A_{01}^1,\quad C_{00}^2=-\frac{(t^2-1)}{4\ln t}A_{01}^1\,.$$

Из $w_{11}(1)=0$ и $w_{11}(t)=0$ с учетом (9) имеем систему

$C_{11}^1+C_{11}^2=0\,,\quad C_{11}^1\,t+C_{11}^2\,\dfrac{1}{t}=0$, откуда следует $C_{11}^1=C_{11}^2=0$.

После чего из оставшихся соотношений (16) имеем

$$D_{10}^1=\frac{\eta}{2}B_{10}^1-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1\,,\quad D_{10}^4=2\eta\,B_{10}^2-2(3-4\upsilon)A_{10}^2,$$

$$D_{11}^1=-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1\,,\qquad D_{11}^4=-2(3-4\upsilon)A_{11}^2.$$

Из $w_{10}(1)=0$ и $w_{10}(t)=0$ с учетом (9) приходим к системе уравнений

$$C_{10}^1+C_{10}^2+\frac{1}{8}A_{11}^1=0\,,\quad C_{10}^1\,t^2+C_{10}^2+\frac{1}{8}A_{11}^1t^4+\frac{1}{2}A_{11}^2\,t^2\ln t=0\,,$$

откуда следует

$$C_{10}^1=-\frac{t^2\ln t}{2(t^2-1)}A_{11}^2-\frac{1}{8}A_{11}^1(t^2+1),\quad C_{10}^2=\frac{t^2\ln t}{2(t^2-1)}A_{11}^2+\frac{t^2}{8}A_{11}^1.$$

Из $u_{00}(1)=0$ и $u_{01}(1)=0$ с учетом (16) приходим к системе

$$D_{00}^1+D_{00}^2=0\,,\quad D_{01}^1+D_{01}^2=0\,,$$

откуда следует $D_{00}^2=-D_{00}^1$, $D_{01}^2=-D_{01}^1$, или

$$D_{00}^2=-D_{00}^1=(1-2\upsilon)A_{00}^1, \quad D_{01}^2=-D_{01}^1=(1-2\upsilon)A_{01}^1.$$

Из $\sigma_{\alpha\alpha 00}(t)=\rho H$ и $\sigma_{\alpha\alpha 01}(t)=-\rho H$ имеем

$$D_{00}^1-D_{00}^2\frac{1}{t^2}-2\upsilon A_{00}^1+\eta B_{00}^1=-f, \quad D_{01}^1-D_{01}^2\frac{1}{t^2}-2\upsilon\, A_{01}^1=f,$$

$$D_{00}^1\frac{(t^2+1)}{t^2}-2\upsilon A_{00}^1+\eta B_{00}^1=-f, \quad D_{01}^1\frac{(t^2+1)}{t^2}-2\upsilon\, A_{01}^1=f,$$

$$-(1-2\upsilon)A_{00}^1\frac{(t^2+1)}{t^2}-2\upsilon A_{00}^1+\eta B_{00}^1=-f, \quad -(1-2\upsilon)A_{01}^1\frac{(t^2+1)}{t^2}-2\upsilon\, A_{01}^1=f,$$

$$A_{00}^1=\frac{t^2\left(f+\eta B_{00}^1\right)}{(t^2+1-2\upsilon)}, \quad A_{01}^1=-\frac{t^2 f}{(t^2+1-2\upsilon)}.$$

Из $u_{10}(1)=0$, $v_{10}(1)=0$, $v_{10}(t)=0$ с учетом (9) следует

$$\begin{aligned} &D_{10}^1+A_{10}^1-\eta\, B_{10}^1+D_{10}^2+A_{10}^2-\eta\, B_{10}^2+D_{10}^3=0,\\ &D_{10}^1-A_{10}^1+\eta\, B_{10}^1+D_{10}^2+A_{10}^2-\eta\, B_{10}^2-D_{10}^3=0,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\left(D_{10}^1-A_{10}^1+\eta\, B_{10}^1\right)t^4+D_{10}^2+\left(A_{10}^2-\eta\, B_{10}^2-D_{10}^3\right)t^2-D_{10}^4\, t^2\ln t=0.$$

Суммируем первые два уравнения и вычитаем из первого уравнения второе

$$D_{10}^1+D_{10}^2+A_{10}^2-\eta\, B_{10}^2=0, \quad A_{10}^1-\eta\, B_{10}^1+D_{10}^3=0$$

$$D_{10}^1+D_{10}^2=-A_{10}^2+\eta\, B_{10}^2, \quad D_{10}^3=\eta\, B_{10}^1-A_{10}^1.$$

Ранее было установлено, что

$$D_{10}^1=\frac{\eta}{2}B_{10}^1-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1, \quad D_{10}^4=2\eta\, B_{10}^2+2(3-4\upsilon)A_{10}^2,$$

следовательно,

$$D_{10}^1+D_{10}^2=-A_{10}^2+\eta\, B_{10}^2, \quad D_{10}^2=-\frac{\eta}{2}B_{10}^1+\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1-A_{10}^2+\eta\, B_{10}^2,$$

$$D_{10}^2=\frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^2-B_{10}^1\right)+\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1-A_{10}^2, \quad D_{10}^3=\eta\, B_{10}^1-A_{10}^1.$$

Таким образом, $C_{00}^1=-\dfrac{1}{4}A_{01}^1$, $C_{00}^2=-\dfrac{(t^2-1)}{4\ln t}A_{01}^1$,

$$C_{10}^1=-\frac{t^2\ln t}{2(t^2-1)}A_{11}^2-\frac{1}{8}A_{11}^1(t^2+1), \quad C_{10}^2=\frac{t^2\ln t}{2(t^2-1)}A_{11}^2+\frac{t^2}{8}A_{11}^1, \quad C_{11}^1=C_{11}^2=0,$$

$$\begin{aligned} &D_{10}^1=\frac{\eta}{2}B_{10}^1-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1, \quad D_{10}^2=\frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^2-B_{10}^1\right)+\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1-A_{10}^2,\\ &D_{10}^3=\eta\, B_{10}^1-A_{10}^1, \quad D_{10}^4=2\eta\, B_{10}^2-2(3-4\upsilon)A_{10}^2,\\ &D_{11}^1=-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1, \quad D_{11}^4=-2(3-4\upsilon)A_{11}^2.\end{aligned} \tag{19}$$

Из третьего уравнения системы (18) с учетом (19) получаем

$$\left[\frac{\eta}{2}\,B_{10}^{1}-\frac{(3-4\upsilon)}{2}\,A_{10}^{1}-A_{10}^{1}+\eta\,B_{10}^{1}\right]t^{4}+\frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^{2}-B_{10}^{1}\right)+\frac{(3-4\upsilon)}{2}\,A_{10}^{1}-A_{10}^{2}+$$
$$+\left(A_{10}^{2}-\eta\,B_{10}^{2}-\eta\,B_{10}^{1}+A_{10}^{1}\right)t^{2}-\left[2\eta\,B_{10}^{2}-2(3-4\upsilon)A_{10}^{2}\right]t^{2}\ln t=0\,,$$

или

$$\left[(3-4\upsilon)\left(t^{2}+1\right)+2t^{2}\right]\left(t^{2}-1\right)A_{10}^{1}-2\left[t^{2}-1+2(3-4\upsilon)t^{2}\ln t\right]A_{10}^{2}-$$
$$-\eta\left[3\,t^{4}-2t^{2}-1\right]B_{10}^{1}+2\eta\left[2t^{2}\ln t+t^{2}-1\right]B_{10}^{2}=0\,,$$

то есть одно из уравнений для определения оставшихся постоянных интегрирования A_{10}^{1}, A_{10}^{2}.

Выполним условие $\sigma_{\alpha\alpha 10}(t)=0$. Подставляя в

$$\sigma_{\alpha\alpha 10}=-\frac{E}{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-\frac{4(1-2\upsilon)}{R}\frac{du_{10}}{d\alpha}-4\upsilon\theta_{10}+2\eta\,T_{10}\right\},$$

используя соотношения (9), получаем

$$\sigma_{\alpha\alpha 10}(t)=-\frac{E}{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{2\left(D_{10}^{1}+A_{10}^{1}-\eta\,B_{10}^{1}\right)t-D_{10}^{2}\,\frac{2}{t^{3}}+\right.$$
$$\left.+D_{10}^{4}\,\frac{1}{t}-4\upsilon\left(A_{10}^{1}\,t+A_{10}^{2}\,\frac{1}{t}\right)+2\eta\left(B_{10}^{1}\,t+B_{10}^{2}\,\frac{1}{t}\right)\right\}=0\,,$$

$$2D_{10}^{1}t^{4}-2D_{10}^{2}+D_{10}^{4}t^{2}+2(1-2\upsilon)A_{10}^{1}t^{4}-4\upsilon\,A_{10}^{2}t^{2}+2\eta\,B_{10}^{2}t^{2}=0\,,$$

$$2D_{10}^{1}t^{4}-2D_{10}^{2}+D_{10}^{4}\,t^{2}+2(1-2\upsilon)A_{10}^{1}t^{4}-4\upsilon\,A_{10}^{2}\,t^{2}+2\eta\,B_{10}^{2}\,t^{2}=0\,.$$

С учетом (19) приходим к уравнениям

$$2D_{10}^{1}t^{4}-2D_{10}^{2}+D_{10}^{4}\,t^{2}+2(1-2\upsilon)A_{10}^{1}t^{4}-4\upsilon\,A_{10}^{2}\,t^{2}+2\eta\,B_{10}^{2}\,t^{2}=0\,,$$
$$\left[\eta\,B_{10}^{1}-(3-4\upsilon)A_{10}^{1}\right]t^{4}-\eta\left(2B_{10}^{2}-B_{10}^{1}\right)-(3-4\upsilon)A_{10}^{1}+2A_{10}^{2}+$$
$$+\left[2\eta\,B_{10}^{2}-2(3-4\upsilon)A_{10}^{2}\right]t^{2}+2(1-2\upsilon)A_{10}^{1}t^{4}-4\upsilon\,A_{10}^{2}\,t^{2}+2\eta\,B_{10}^{2}\,t^{2}=0\,,$$
$$\left[-(3-4\upsilon-2+4\upsilon)\,t^{4}-(3-4\upsilon)\right]A_{10}^{1}+\left[2+(-6+8\upsilon-4\upsilon)\,t^{2}\right]A_{10}^{2}+$$
$$+\eta\left(t^{4}+1\right)B_{10}^{1}+\eta\left(4t^{2}-2\right)B_{10}^{2}=0\,,$$
$$\left(t^{4}+3-4\upsilon\right)A_{10}^{1}+2\left[(3-2\upsilon)\,t^{2}-1\right]A_{10}^{2}-\eta\left(t^{4}+1\right)B_{10}^{1}-2\eta\left(2t^{2}-1\right)B_{10}^{2}=0\,.$$

Итак, имеем пару уравнений относительно A_{10}^{1}, A_{10}^{2}

$$A_{10}^{1}\left[(3-4\upsilon)\left(t^{2}+1\right)+2t^{2}\right]\left(t^{2}-1\right)+2A_{10}^{2}\left[-t^{2}+1-2(3-4\upsilon)\,t^{2}\ln t\right]-$$
$$-\eta\,B_{10}^{1}\left(3t^{2}+1\right)\left(t^{2}-1\right)+2\eta\,B_{10}^{2}\left(2t^{2}\ln t+t^{2}-1\right)=0\,, \qquad (20)$$

$$\left(t^{4}+3-4\upsilon\right)A_{10}^{1}+2\left[(3-2\upsilon)\,t^{2}-1\right]A_{10}^{2}-\eta\left(t^{4}+1\right)B_{10}^{1}-2\eta\left(2t^{2}-1\right)B_{10}^{2}=0\,.$$

Выполним оставшиеся граничные условия из (15) $u_{11}(1)=0$, $v_{11}(1)=0$, $v_{11}(t)=0$, $\sigma_{\alpha\alpha 11}(t)=0$, добавив к ним соотношения $D_{11}^{1}=-\dfrac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^{1}$, $D_{11}^{4}=-2(3-4\upsilon)A_{11}^{2}$ из (16). Из (14) имеем $B_{11}^{1}=B_{11}^{2}=0$, откуда следует $L_{11}^{1}=A_{11}^{1}$, $L_{11}^{2}=A_{11}^{2}$. Из указанных граничных условий имеем систему шести однородных уравнений

$$D_{11}^1 + A_{11}^1 + D_{11}^2 + A_{11}^2 + D_{11}^3 = 0\,, \qquad D_{11}^1 - A_{11}^1 + D_{11}^2 + A_{11}^2 - D_{11}^3 = 0\,,$$

$$\left(D_{11}^1 - A_{11}^1\right)t^2 + D_{11}^2\frac{1}{t^2} + A_{11}^2 - D_{11}^3 - D_{11}^4 \ln t = 0\,,$$

$$D_{11}^1 t - D_{11}^2\frac{1}{t^3} + D_{11}^4\frac{1}{2t} + (1-2\upsilon)A_{11}^1 t - 2\upsilon A_{11}^2\frac{1}{t} = 0\,,$$

$$D_{11}^1 + \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1 = 0\,, \qquad D_{11}^4 + 2(3-4\upsilon)A_{11}^2 = 0\,,$$

решение которой единственное, следовательно, нулевое:

$$A_{11}^1 = A_{11}^2 = D_{11}^1 = D_{11}^2 = D_{11}^3 = D_{11}^4 = 0\,.$$

Таким образом, постоянные интегрирования A_{10}^1, A_{10}^2 определяются из системы (20), значения остальных постоянных интегрирования имеют вид

$$B_{00}^1 = \Theta_{00}\,,\;\; B_{00}^2 = 0\,,\;\; B_{01}^1 = B_{01}^2 = 0\,,\;\; B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0\,,$$

$$B_{10}^2 = \frac{t^2}{(t^2+1)}\Theta_{10}\,,\quad B_{10}^1 = \frac{1}{(t^2+1)}\Theta_{10}\,,$$

$$A_{00}^1 = \frac{t^2\left(f + \eta B_{00}^1\right)}{\left(t^2+1-2\upsilon\right)},\quad A_{00}^2 = 0,\quad A_{01}^1 = -\frac{t^2 f}{\left(t^2+1-2\upsilon\right)},\quad A_{01}^2 = 0,\quad A_{11}^1 = A_{11}^2 = 0\,,$$

$$C_{00}^1 = -\frac{1}{4}A_{01}^1,\quad C_{00}^2 = -\frac{\left(t^2-1\right)}{4\ln t}A_{01}^1,\qquad C_{01}^1 = C_{01}^2 = 0\,,$$

$$C_{10}^1 = C_{10}^2 = 0\,,\quad C_{11}^1 = C_{11}^2 = 0\,, \tag{21}$$

$$D_{00}^1 = -(1-2\upsilon)A_{00}^1,\dots\; D_{00}^2 = (1-2\upsilon)A_{00}^1,\dots\; D_{01}^1 = -(1-2\upsilon)A_{01}^1,\dots\; D_{01}^2 = (1-2\upsilon)A_{01}^1,$$

$$D_{10}^1 = \frac{\eta}{2}B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1,\quad D_{10}^2 = \frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^2 - B_{10}^1\right) + \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1 - A_{10}^2,$$

$$D_{10}^3 = \eta\, B_{10}^1 - A_{10}^1,\qquad D_{10}^4 = 2\eta\, B_{10}^2 - 2(3-4\upsilon)A_{10}^2,\quad D_{11}^1 = D_{11}^4 = 0\,.$$

Теперь

$$T(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = B_{00}^1 + \left(B_{10}^1\,\alpha + B_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}\right)\cos\beta\,,$$

$$\theta(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = A_{00}^1 + A_{01}^1\,\gamma + \left(A_{10}^1\,\alpha + A_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}\right)\cos\beta\,,$$

$$w(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left[C_{00}^1 + C_{00}^2\ln\alpha + \frac{1}{4}A_{01}^1\,\alpha^2\right],$$

$$u(\alpha\,,\,\beta\,,\gamma)=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left\{D_{00}^{1}\,\alpha+D_{00}^{2}\,\frac{1}{\alpha}+\left(D_{01}^{1}\,\alpha+D_{01}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right)\gamma+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\left(D_{10}^{1}+L_{10}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}}+L_{10}^{2}+D_{10}^{3}+D_{10}^{4}\,\ln\alpha\right]\cos\beta\right\},$$

$$v(\alpha\,,\,\beta\,,\gamma)=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{10}^{1}-L_{10}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}}+L_{10}^{2}-D_{10}^{3}-D_{10}^{4}\,\ln\alpha\right]\sin\beta\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}=\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[\upsilon\theta-(1+\upsilon)\alpha_{T}T\right].$$

Вычисления проводились для следующих параметров задачи

$$R=10\text{м}\,,\quad r=9.95\,\text{м}\,,\quad H=30\,\text{м}\,,\,E=7.0\cdot10^{4}\,\text{МПа}\,,\quad \upsilon=0.34\,,$$

$$\rho=0.75\cdot10^{3}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^{3}}\,,\quad \alpha_{T}=23\cdot10^{-6}\,\frac{1}{\text{град}}\,,\quad \Theta_{00}=60^{0}\,C\,,\quad \Theta_{10}=25^{0}\,C.$$

Оказалось, что перемещения v, w пренебрежимо малы, как и смещение u точек наружной боковой поверхности. Перемещения u точек внутренней боковой поверхности практически не меняются по высоте и не превышают 0.004 толщины стенки резервуара.

Максимальным при указанных параметрах задачи является напряжение $\sigma_{\gamma\gamma}$ и меняется оно только по окружной координате, практически не завися от α и γ. На Рис.2 представлено распределение напряжения $\dfrac{\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha\,,0\,,0.5)}{E}$ по α от внутренней до внешней боковых поверхностей резервуара.

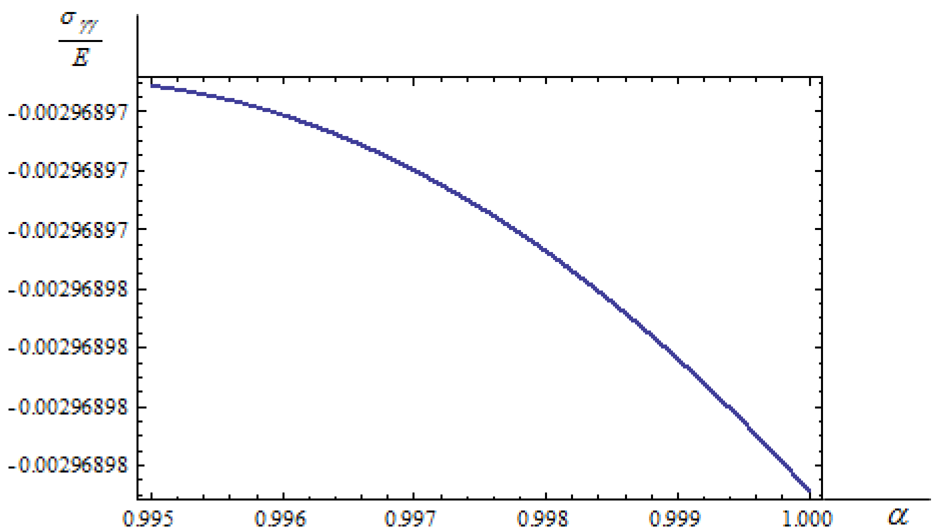

Рис. 2

На Рис.3 показано распределение того же напряжения по окружной координате от $\beta=0$ до $\beta=\pi$.

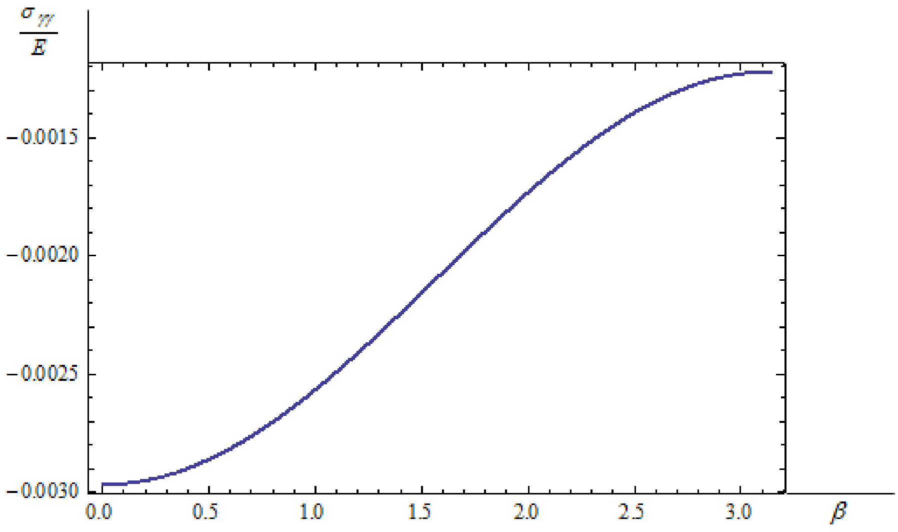

Рис.3

Остальные напряжения значительно меньше.

Без учета влияния температуры качественная картина та же, но максимальные напряжения на 1- 2 порядка меньше.

Итак, точное решение поставленной краевой задачи построено.

Библиографический список

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
2. Ляв А.Э.Х. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 676 с.
3. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости – М.: Физматлит, 1978 – 462 с.
4. Коваленко А.Д. Избранные труды. – Киев: Наукова думка, 1976. – 762 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. Новацкий В. Вопросы термоупругости – М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 364 с.
7. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1969. – 695 с.
8. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
9. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высшая школа, 2010. – 227 с.
10. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. – М.: Физматлит, 1961. – 219 с.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
12. Хан Х. Теория упругости. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
13. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.,Громовык В.И., Лизбень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. – Киев: Наукова думка, 1977. – 158 с.
14. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра. – Казань: Издательство Казанского университета, 2008. – 207 с.

15. Тюленева О.Н., Гурьянов Н.Г. Краевые задачи термоупругости для шара. – Saarbucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. - 160 с.
16. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Пространственная задача термоупругости для сферического купола // Теория и практика современной науки: сборник статей XV Международной научно-практической конференции. – М., 2014. – С. 10 -17.
17. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Задача термоупругости для шара // Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики: сборник тезисов докладов X Всероссийского съезда. – Н.Н., 2011. № 4 (4), – С. 1466 -1467.
18. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Двоякопериодическое решение задачи термоупругости для полого шара // Современные проблемы механики: сборник статей Международной научно-технической конференции. – Ташкент,2009. – Т. 1. – С. 283-288.
19. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Точное решение несимметричной задачи теории упругости для цилиндра в температурном поле // Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики: сборник тезисов докладов XI Всероссийского съезда. – Казань, 2015.– С.1106-1108.
20. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Сферический купол в температурном поле //Известия Вузов «Авиационная техника». – 2013. – т.1. – С. 8-12.
21. Попов Г.Я., Белкасем К. Точное решение смешанной неосесимметричной краевой задачи теории упругости для кругового цилиндра конечной длины // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, № 1. – С. 48-54.
22. Попов Г.Я. Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 439, № 2. - С. 192-197.
23. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. - ЛИБРОКОМ, 2012. – 656 с.
24. Фастовская Т.Б. Существование глобальных решений нелинейной задачи термоупругости // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – Харьков, 2014. – Т. 2, № 4. – С. 125-127.
25. Chanyu Shang Global attractor for the Ginzburg-Landay thermoviscoelastic system with hinger boundary conditions // Math.Anal.Appl., 343 (2008). – pp. 1-21.
26. Саталкина Л.В. Несвязанная задача нелинейной термоупругости для теля с сингулярной границей // Вестник ТулГУ «Актуальные вопросы механики». – Тула, 2009. – Вып 5. – С. 157-160.
27. Родионов А.Ю. Точные решения уравнений термоупругости // Институт прикладной механики Владикавказского научного центра РАН. – 2009. – Т. 11, №1. – С. 54-62.
28. Шевченко А.В. Применение вариационного метода при расчете замкнутых цилиндрических оболочек с учетом температурных деформаций // Вестник БГТУ им. В.Г.Шухова. – 2005. – №10. – С.492-494.
29. Байден О.В., Шаповалов С.М., Шевченко А.В. Учет температурных деформаций при расчете замкнутых цилиндрических оболочек вариационным методом // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – №5. – С.6-9.
30. Волков А.Е., Кухарева А.С. Расчет напряженно-деформированного состояния в цилиндре из TiNi при охлаждении под нагрузкой и разгрузке // Известия РАН, серия физическая. - М.: Наука, 2008. – Т. 72, № 9. – С. 1337-1340.
31. Иванов А.С., Ковалев В.И., Цаповская О.А. Температурные напряжения в сплошном длинном цилиндрес переменным объемным тепловыделением // Проблемы Машиностроения и автоматизации. – Москва, 2008. – № 1. – С. 111-114.
32. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек

вращения в трехмерной постановке. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 3. - С. 301-310.

References

1. Lur'e A.I. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow , Nauka, 1970, 939 p.
2. Liav A.E.Kh. Matematicheskaia teoriia uprugosti [Mathematical theory of elasticity]. Leningrad - Moscow, ONTI, 1935, 676 p.
3. Aleksandrov A.Ia., Solov'ev Iu.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti [Spatial problems of the theory of Uruguay]. Moscow , Fizmatlit, 1978, 462 p.
4. Kovalenko A.D. Izbrannye trudy [Selected works]. Kiev, Naukova dumka, 1976, 762 p.
5. Novatskii V. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Mir, 1975, 872 p.
6. Novatskii V. Voprosy termouprugosti [Questions of thermoelasticity]. Moscow, Izd-vo AS USSR, 1962, 364 p.
7. Ogibalov P.M., Koltunov M.A. Obolochki i plastiny [Shells and plates]. Moscow, Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1969, 695 p.
8. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoi teorii uprugosti [Methods of the mathematical theory of elasticity]. Moscow , Nauka, 1981, 688 p.
9. Rekach V.G. Rukovodstvo k resheniiu zadach po teorii uprugosti [Guide for solving problems in the theory of elasticity]. Moscow , Vysshaia shkola, 2010, 227 p.
10. Sneddon I.N., Berri D.S. Klassicheskaia teoriia uprugosti. [The classical theory of elasticity]. Moscow , Fizmatlit, 1961, 219 p.
11. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti. Moscow , Nauka, 1975, 575 p.
12. Khan Kh. Teoriia uprugosti. Moscow , Mir, 1988, 343 p.
13. Podstrigach Ia.S., Koliano Iu.M.,Gromovyk V.I., Lizben' V.L. Termouprugost' tel pri peremennykh koeffitsientakh teplootdachi [Thermoelasticity of bodies with variable heat transfer coefficients]. Kiev, Naukova dumka, 1977, 158 p.
14. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Kraevye zadachi teorii uprugosti dlia shara i tsilindra [Boundary-value problems of the theory of elasticity for a sphere and a cylinder]. Kazan, 2008, 207 p.
15. Tyuleneva O.N., Gur'ianov N.G. Kraevye zadachi termouprugosti dlia shara [Boundary thermoelasticity problems for a sphere]. Saarbucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 160 p.
16. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Prostranstvennaia zadacha termouprugosti dlia sfericheskogo kupola [Prostranstvennaia zadacha termouprugosti dlia sfericheskogo kupola] // Teoriia i praktika sovremennoi nauki: sbornik statei XV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, Moscow, 2014, pp. 10 -17.
17. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Zadacha termouprugosti dlia shara [The problem of thermoelasticity for a sphere] // Fundamental'nye problemy teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki: sbornik tezisov dokladov XVserossiiskogo s"ezda, Nizhny Novgorod, 2011. № 4 (4), pp. 1466 -1467.
18. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Dvoiakoperiodicheskoe reshenie zadachi termouprugosti dlia pologo shara [A two-periodic solution of the thermoelasticity problem for a hollow sphere]// Sovremennye problemy mekhaniki: sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii (Modern problems of mechanics: a collection of articles of the International Scientific and Technical Conference). Tashkent, 2009, T. 1, pp. 283-288.
19. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Tochnoe reshenie nesimmetrichnoi zadachi teorii uprugosti dlia tsilindra v temperaturnom pole [Exact solution of the asymmetric elasticity problem for a cylinder in a temperature field]// Fundamental'nye problemy teoreticheskoi i

prikladnoi mekhaniki: sbornik tezisov dokladov XI Vserossiiskogo s"ezda, Kazan, 2015, pp.1106-1108.
20. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. A spherical dome in the temperature field // Russian Aeronautics, 2013, T. 56, № 1, pp. 7-14.
21. Popov G.Ia., Belkasem K. Tochnoe reshenie smeshannoi neosesimmetrichnoi kraevoi zadachi teorii uprugosti dlia krugovogo tsilindra konechnoi dliny [The exact solution of a nonsymmetric boundary value problem for the theory of rounding for a circular cylinder of finite length] // Doklady Akademii nauk (Reports of the Academy of Sciences), 2010, T. 433, № 1, pp. 48-54.
22. Popov G.Ia. Osesimmetrichnye kraevye zadachi teorii uprugosti dlia tsilindrov i konusov konechnoi dliny [Axisymmetric boundary value problems of the theory of rounding for cyclinders and cones of finite length]// Doklady Akademii nauk (Reports of the Academy of Sciences), 2011, T. 439, № 2. pp. 192-197.
23. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analiticheskaia teoriia teploprovodnosti i prikladnoi termouprugosti [Analytical theory of heat conductivity and applied thermoelasticity]. - LIBROKOM, 2012, 656 p.
24. Fastovskaia T.B. Sushchestvovanie global'nykh reshenii nelineinoi zadachi termouprugosti [The existence of global solutions of the nonlinear problem of thermoelasticity] // Aktual'nye napravleniia nauchnykh issledovanii XXI veka: teoriia i praktika, Khar'kov (Actual directions of scientific research of the XXI century: theoretical and practical aspects), 2014, T. 2, № 4, pp. 125-127.
25. Chanyu Shang Global attractor for the Ginzburg-Landay thermoviscoelastic system with hinger boundary conditions // Math.Anal.Appl., 343 (2008), pp. 1-21.
26. Satalkina L.V. Nesviazannaia zadacha nelineinoi termouprugosti dlia telia s singuliarnoi granitsei [The unrelated problem of nonlinear thermoelasticity for bodies with a singular boundary]// Vestnik TulGU «Aktual'nye voprosy mekhaniki», Tula, 2009, Release 5. pp. 157-160.
27. Rodionov A.Iu. Tochnye resheniia uravnenii termouprugosti [Exact solutions of the thermoelasticity equation]// Institut prikladnoi mekhaniki Vladikavkazskogo nauchnogo tsentra RAN, 2009, T. 11, №1, pp. 54-62.
28. Shevchenko A.V. Primenenie variatsionnogo metoda pri raschete zamknutykh tsilindricheskikh obolochek s uchetom temperaturnykh deformatsii [Application of the variational method for the calculation of closed cylindrical shells with allowance for temperature deformations] // Vestnik BGTU im. V.G.Shukhova, 2005, №10, pp.492-494.
29. Baiden O.V., Shapovalov S.M., Shevchenko A.V. Uchet temperaturnykh deformatsii pri raschete zamknutykh tsilindricheskikh obolochek variatsionnym metodom [The account of temperature deformations at calculation of the closed cylindrical shells by a variational method] // Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii, 2009, №5, pp.6-9.
30. Volkov A.E., Kukhareva A.S. Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia v tsilindre iz TiNi pri okhlazhdenii pod nagruzkoi i razgruzke [Calculation of the stress-strain state in a cylinder from TiNi under cooling under load and unloading]// Izvestiia RAN, seriia fizicheskaia, Moscow, Nauka, 2008,T. 72, № 9. pp. 1337-1340.
31. Ivanov A.S., Kovalev V.I., Tsapovskaia O.A. Temperaturnye napriazheniia v sploshnom dlinnom tsilindres peremennym ob"emnym teplovydeleniem [Temperature stresses in a continuous long cylinder with variable volumetric heat release] // Problemy Mashinostroeniia i avtomatizatsii. Moscow, 2008, № 1, pp. 111-114.
32. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leont'ev K.A. O reshenii nekotorykh zadach o napriazhenno-deformirovannom sostoianii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashcheniia v trekhmernoi postanovke [On the solution of some problems on the stress-strain

state of anisotropic thick-walled shells of revolution in a three-dimensional formulation] // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii , 2004, T. 10, № 3, pp. 301-310.

Об авторах

Гурьянов Николай Георгиевич (Казань, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей математики Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: gng.ggb@mail.ru)
Тюленева Ольга Николаевна (Казань, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: tdv.ton@mail.ru)

About the authors

Olga N. Tyuleneva (Kazan, Russian Federation) – PhD of Physical and Mathematical Sciences, Ass.Professor, Department of General Mathematics, Kazan (Volga region) Federal University (420008, 18, Kremlin street, Kazan, Russian Federation, e-mail: gng.ggb@mail.ru)
Nikolay G. Gur'jyanov (Kazan, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of General Mathematics, Kazan (Volga region) Federal University (420008, 18, Kremlin street, Kazan, Russian Federation, e-mail: tdv.ton@mail.ru)